Міністерство освіти і науки України

ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ АВТОМОБІЛЬНО-ДОРОЖНІЙ УНІВЕРСИТЕТ

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до лабораторних занять
та самостійної роботи студентів
з дисципліни
«Економіко-математичні методи і моделі (Економетрика)»
для студентів напряму підготовки
6.030503 – «Міжнародна економіка»

Затверджено методичною
радою університету
протокол № від

Харків ХНАДУ 2015

Укладачі: Болдовська К.П.
Кудрявцев В.М.

Кафедра міжнародної економіки

Навчальна дисципліна «Економіко-математичні методи і моделі (Економетрика)» належить до нормативних дисциплін циклу природничо-наукової та загальноекономічної підготовки фахівців галузі знань 0305 – «Економіка та підприємництво» за напрямом 6.030503 – «Міжнародна економіка».

Навчальна дисципліна «Економіко-математичні методи і моделі (Економетрика)» комплексно вивчає засади економетричного моделювання, зокрема, основні методи оцінювання параметрів моделей з урахуванням специфіки економічної інформації.

Метою викладання дисципліни є формування у майбутніх фахівців-економістів системи теоретичних знань, умінь та практичних навичок з методів оцінювання параметрів залежностей, які характеризують кількісні взаємозв'язки між економічними величинами, з методології, методики та інструментарію побудови економіко-математичних моделей, їх аналізу та використання для прогнозування розвитку економічних систем.

Предметом навчальної дисципліни є методологія економіко-математичного моделювання та методи й інструментарій аналізу процесів, що відбуваються в економіці.

У результаті вивчення дисципліни у студентів сформуються знання, вміння і навички щодо:

– сутності і принципів математичного моделювання як метода наукового вивчення економічних процесів;

– сучасної методології економетричного аналізу та моделювання економіки;

– основних видів статистичних і динамічних економетричних моделей процесів, що характеризуються кількісними показниками, галузей використання цих моделей, методик їх побудови й аналізу результатів;

– особливостей і методів моделювання якісних економічних показників;

– основних типів, можливостей та областей використання моделей ринкової економіки, методик їх розробки;

– методів та інструментарію аналізу і прогнозування макроекономічних процесів;

– застосовування методів кількісного вимірювання взаємозв'язків між соціально-економічними процесами і явищами;

– конструювання статистичних і динамічних економетричних моделей для опису цих процесів і явищ і проведення всебічного аналіз останніх;

– використання економетричних моделей у практиці управління економічними процесами на різних ієрархічних рівнях національної економіки, прогнозування і прийняття рішень на підставі конкретних економетричних моделей;

– використання інструментарію економіко-математичного моделювання для побудови моделей фінансово-економічних процесів різних рівнів господарської ієрархії та застосування цих моделей для вивчення реальних процесів і явищ економіки;

– моделювання поведінки учасників ринкових відносин і прогнозування розвитку соціально-економічних процесів.

Отже, під час вивчення цієї дисципліни студенти мають :

1) опанувати методи побудови і реалізації економетричних моделей за допомогою персонального комп'ютера;

2) набути практичних навичок кількісного вимірювання взаємозв'язків між економічними показниками;

3) поглибити теоретичні знання в галузі математичного моделювання економічних процесів і явищ;

4) здобути знання про застосування економетричних моделей в економічних дослідженнях.

Економетрика надає додаткові можливості оволодіти обчислювальною технікою, розвиває аналітичні навички та є основою економічних досліджень.

Викладання курсу передбачає проведення лекцій, лабораторних занять та індивідуально-консультативних занять. Певна частина програмного матеріалу має бути засвоєна студентами в процесі самостійної роботи, виконання тестових, розрахунково-аналітичних завдань і розгляду проблемних ситуацій.

ПЛАНИ ЛАБОРАТОРНИХ ЗАНЯТЬ ТА ЗАВДАННЯ ДО САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Проведення лабораторних занять є важливою складовою процесу підготовки майбутніх фахівців, оскільки ставить за мету:

– сприяння глибокому засвоєнню матеріалу, запропонованого в рамках лекційних занять;

– надання студентам можливості обговорити питання дискусійного характеру;

– мотивування студентів до самостійного дослідження проблемних питань курсу з наступним формулюванням висновків і формуванням власної точки зору.

Лабораторне заняття № 1. Тема заняття «ОСНОВИ ЕКОНОМЕТРИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ»

1.1 Мета заняття: засвоєння студентами основних понять і категорій економетрії, з'ясування мети, предмету, методів, задач і ролі економетрії в соціально-економічних дослідженнях, усвідомлення завдань і структури економетричного дослідження, з'ясування особливостей, принципів побудови та класифікації економетричних моделей, ознайомлення з основними економетричними методами оцінки їх параметрів.

1.2 План лабораторного заняття

1. Мета, предмет, методи і задачі дисципліни «Економетрія».
2. Виникнення, становлення та розвиток економетрії.
3. Основні поняття економетрії.
4. Завдання та структура економетричного дослідження.
5. Математичне і статистичне підґрунтя економетрії. Інформаційна база економетричних моделей.
6. Зв'язок економетрії з макроекономікою. Роль економетрії в економічних дослідженнях і приклади економетричних моделей.
7. Основи економетричного моделювання.

8. Особливості економетричних моделей, їх класифікація та загальні принципи побудови.

9. Структурна та приведена форма економетричних моделей.

10. Економетричні методи оцінки параметрів моделей, які характеризують кількісні взаємозв'язки між економічними величинами.

1.3 Завдання до лабораторного заняття

Завдання 1. У результаті статистичного спостереження було отримано дані про річний валовий дохід 40 підприємств-суб'єктів ЗЕД, що являє собою вибіркову сукупність, поділ якої на дві групи (малі та середні підприємства) дає дві підвибірки (табл. 1.1).

Таблиця 1.1 – **Річний валовий дохід підприємств-суб'єктів ЗЕД, тис. дол. США**

Малі підприємства ($x_i < 40$)				Середні підприємства ($x_i > 40$)			
№	x_i	№	x_i	№	x_i	№	x_i
1	34,7	11	36,9	21	58,4	31	43,5
2	23,8	12	33,5	22	43,2	32	56,1
3	28,4	13	25,4	23	48,3	33	42,7
4	33,9	14	20,3	24	66,2	34	40,2
5	29,1	15	24,6	25	48,8	35	40,4
6	29,8	16	26,1	26	53,6	36	69,7
7	29,6	17	22,7	27	62,1	37	42,9
8	27,4	18	33,8	28	44,5	38	40,6
9	34,4	19	27,2	29	46,9	39	57,3
10	31,4	20	33,8	30	46,7	40	43,5

Розрахувати за вибірковою сукупністю і за кожною з підвибірок основні статистичні характеристики:

1) середнє значення;
2) дисперсію;
3) стандартне відхилення;
4) варіаційний розмах;
5) коефіцієнт варіації.

Результати розрахунків оформити у вигляді табл. 1.2 і 1.3.

Порівняйте отримані результати і зробіть висновки. Як впливає ступінь однорідності статистичного матеріалу на якість і статистичну значущість узагальнюючих вибіркових характеристик?

Таблиця 1.2 – **Розрахунок основних статистичних характеристик для вибіркової сукупності (разом для всіх 40 підприємств-суб'єктів ЗЕД)**

№	Річний валовий дохід, x_i	Допоміжні розрахунки $(x_i - \bar{x})^2$
	малі та середні підприємства	малі та середні підприємства
1	34,7	
2	23,8	
…	…	
40	43,5	
Сума		
Основні статистичні характеристики		
Середнє		
Дисперсія		
Стандартне відхилення		
Варіаційний розмах		
Коефіцієнт варіації		

Таблиця 1.3 – **Розрахунок основних статистичних характеристик для двох підвибірок (окремо для малих і для середніх підприємств-суб'єктів ЗЕД)**

№	Річний валовий дохід, x_i		Допоміжні розрахунки $(x_i - \bar{x})^2$	
	малі підприємства	середні підприємства	малі підприємства	середні підприємства
1	34,7	58,4		
2	23,8	43,2		
…	…	…		
20	33,8	43,5		
Сума				
Основні статистичні характеристики				
Середнє				
Дисперсія				
Стандартне відхилення				
Варіаційний розмах				
Коефіцієнт варіації				

1.4 Завдання до самостійної роботи

Завдання 1. Дискретна випадкова величина x_i – відсоткова зміна вартості акцій відносно їх поточного курсу протягом чотирьох місяців. Її закон розподілу заданий у табличній формі (табл. 1.4). Обчислити математичне сподівання, дисперсію, середнє квадратичне відхилення випадкової величини *X*.

Таблиця 1.4 – **Вихідні дані**

x_i	1	2	5	9
p_i	0,25	0,34	0,38	0,03

1.5 Методичні вказівки до виконання завдань

Інформаційну базу економетрії становлять статистичні дані, які залежно від способу отримання представляються у вигляді варіаційних (перехресних) або динамічних (часових) рядів.

Варіаційні ряди – послідовність спостережень за тим чи іншим економічним показником для різних однотипних процесів, явищ або об'єктів в один і той самий момент часу.

Динамічні ряди – послідовність спостережень за одним й тим самим процесом, явищем або об'єктом у різні (як правило, рівновіддалені) проміжки часу.

Варіанта – окреме числове значення кількісної ознаки у варіаційному ряду, яке відноситься до певного об'єкта спостереження.

Рівень – окреме числове значення кількісної ознаки у динамічному ряду, яке відноситься до певного моменту часу.

Під час проведення економетричного дослідження доцільним є характеризування всієї сукупності вибіркових даних x_i $(i = 1...n)$ деякими усередненими параметрами, що враховують особливості вибірки – основними статистичними характеристиками. Всі узагальнюючі показники об'єднані в дві групи – міри рівнів (середні) та міри розсіяння (показники варіації), – а найбільш поширеними серед них є такі:

1. Середнє значення, $\bar{x}$ – узагальнююча міра варіаційної ознаки, що характеризує її типовий рівень у розрахунку на одиницю однорідної сукупності:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \,, \tag{1.1}$$

де x_i – окреме i-е значення ознаки x (окрема варіанта, рівень);

n – кількість одиниць сукупності (варіант, рівнів) – обсяг вибірки.

2. Дисперсія (варіація), $\mathrm{var}(x)$, або $D(x)$, або σ_x^2 – показник середнього квадрата відхилення варіант ознаки від середнього значення:

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 . \qquad (1.2)$$

3. Середньоквадратичне (стандартне) відхилення – обчислюється як корінь квадратний з дисперсії й характеризує відхилення вибіркових значень у середньому від $\bar{x}$:

$$\sigma_x = \sqrt{\sigma_x^2} . \qquad (1.3)$$

4. Варіаційний розмах – різниця між найбільшим і найменшим значеннями варіант:

$$R_x = x_{\max} - x_{\min} . \qquad (1.4)$$

5. Коефіцієнт варіації – обчислюється як відношення стандартного відхилення до центру розподілу й виражається у відсотках:

$$V_x = \frac{\sigma_x}{\bar{x}} \cdot 100\% . \qquad (1.5)$$

Коефіцієнт варіації дає можливість:

– порівняти варіацію тієї самої ознаки в різних групах об’єктів;

– виявити ступінь відмінності однієї ознаки в одній групі за різні проміжки часу;

– порівняти варіацію різних ознак в однакових групах об’єктів.

1.6 Контрольні запитання

1. Що таке економетрика?
2. У чому полягає мета викладення дисципліни «Економетрика»?
3. Охарактеризуйте предмет і методи дисципліни.
4. Перелічите основні задачі дисципліни «Економетика».
5. Розкрийте причини виникнення, а також основні етапи й особливості становлення і розвитку економетрики як економічної науки.
6. Охарактеризуйте математичне і статистичне підґрунтя економетрики.
7. Назвіть та охарактеризуйте зміст основних етапів проведення економетричного аналізу.

8. Що становить інформаційну базу економетричних моделей?

9. Дайте визначення динамічних (часових) рядів та поясніть особливості їх побудови.

10. Дайте визначення варіаційних (перехресних) рядів та розкрийте особливості їх побудови.

11. Чим забезпечується порівнянність даних у просторі та часі?

12. Як треба розуміти сукупність спостережень та її однорідність?

13. Розкрийте сутність генеральної та вибіркової сукупностей. У чому полягають відмінності між ними?

14. Як визначається набір змінних для побудови економетричної моделі?

15. Наведіть формули для розрахунку та поясніть зміст основних статистичних характеристик: середнього значення, дисперсії, середньоквадратичного відхилення, коефіцієнту варіації.

16. Дайте визначення поняття «модель».

17. З яких елементів складається математична модель?

18. Назвіть типи математичних моделей. Чим вони різняться?

19. До якого типу математичних моделей належить економетрична модель?

20. Розкрийте основні особливості економетричних моделей.

21. Дайте класифікацію економетричних моделей.

22. Охарактеризуйте загальні принципи побудови економетричних моделей.

23. Поясніть зв'язок економетрії з макроекономікою.

24. У чому полягає роль економетрії в економічних дослідженнях?

25. Наведіть кілька прикладів економетричних моделей.

26. Дайте тлумачення випадкової складової економетричної моделі.

27. У чому полягають відмінності між структурною та приведеною формами економетричних моделей?

28. Назвіть методи оцінки параметрів моделей, які характеризують кількісні взаємозв'язки між економічними величинами, та покажіть основні особливості цих методів.

Література: [1-5,7-18,20-21,25,27-30,33-34].

Лабораторне заняття № 2. Тема заняття «МЕТОДИ ПОБУДОВИ ЗАГАЛЬНОЇ ЛІНІЙНОЇ МОДЕЛІ. МЕТОД НАЙМЕНШИХ КВАДРАТІВ (1МНК)»

2.1 Мета заняття: засвоєння і поглиблення теоретичних знань щодо методів та етапів побудови загальної лінійної моделі, зокрема методу найменших квадратів, ознайомлення із властивостями простої вибіркової лінійної регресії, формування умінь проводити економетричний аналіз лінійної залежності показника від одного фактору.

2.2 План лабораторного заняття

1. Опис кореляційно-регресійного зв'язку між економічними показниками. Кореляційне поле. Коефіцієнти коваріації і кореляції.
2. Проста (парна, однофакторна) вибіркова лінійна регресія.
3. Методи та етапи побудови загальної лінійної моделі.
4. Оцінка параметрів моделі лінійної регресії за допомогою методу найменших квадратів (1МНК).
5. Оцінка значущості економетричних моделей. Декомпозиція дисперсій. Поняття про коефіцієнт детермінації. Зв'язок між коефіцієнтом кореляції і коефіцієнтом детермінації.
6. Перевірка простої регресійної моделі на адекватність (значущість) за допомогою F-критерію Фішера.
7. Перевірка на значущість параметрів парної лінійної регресії за допомогою t-тесту Ст'юдента і побудова інтервалів довіри для них.
8. Прогнозування за моделями простої лінійної регресії.

2.3 Завдання до лабораторного заняття

Завдання 1. У ході проведення економетричного дослідження була проаналізована фінансово-господарська діяльність 20 підприємств-суб'єктів ЗЕД. При цьому передбачалося, що на річний валовий прибуток підприємства (Y, тис. дол. США.) могли суттєво впливати такі чинники, як вартість основних виробничих фондів (X_1, млн. дол. США) та середньорічна чисельність працівників (X_2, чол.).

Вихідні дані наведені у табл. 2.1.

Таблиця 2.1 – **Вихідні дані**

№ спостер.	Y, тис. дол. США	X_1, млн. дол. США	X_2, чол.
1	117,5	10,9	49
2	178,2	15,4	66
3	189,1	15,1	62
4	244,3	19,5	78
5	268,5	20,5	84
6	301,8	21,7	84
7	342,7	22,4	67
8	384,5	23,0	94
9	358,5	25,3	99
10	408,4	29,0	107
11	432,1	27,5	106
12	450,0	29,6	109
13	456,2	31,8	117
14	488,4	34,1	124
15	491,1	31,4	118
16	506,2	32,4	118
17	521,2	34,2	124
18	533,9	36,9	133
19	546,5	35,9	120
20	564,8	37,2	134

Для кожної пари зв'язків $Y = f(X_p)$ необхідно:

1) сформулювати гіпотезу про форму, напрямок і тісноту зв'язку;

2) оцінити тісноту лінійного зв'язку;

3) побудувати економетричну модель залежності $Y = f(X_p)$ – розрахувати параметри рівняння лінійної регресії $\hat{y} = b_0 + b_1 x$ за методом найменших квадратів;

4) визначити загальну якість (адекватність) моделі;

5) оцінити статистичну надійність (значущість) результатів регресійного моделювання;

6) перевірити статистичну значущість оцінок параметрів моделі;

7) побудувати довірчі інтервали для параметрів моделі для рівня значимості $\alpha = 0{,}05$;

8) розрахувати прогнозне значення результативної змінної за умови, що прогнозне значення факторної змінної збільшиться на 65 % від його середнього рівня (точковий прогноз);

9) визначити довірчий інтервал прогнозу для рівня значимості $\alpha = 0{,}05$;

10) розрахувати довірчий інтервал для всіх точок вибірки й у точці прогнозу і побудувати довірчу область.

Використовуючи отримані дані і теоретичні відомості, зробіть економетричний аналіз – опишіть процес побудови моделей і всі супутні розрахунки.

2.4 Завдання до самостійної роботи

Завдання 1. На основі даних по десяти підприємствах, що здійснюють міжнародні перевезення автомобільним транспортом, (табл. 2.2) побудувати економетричну модель, яка характеризує залежність між витратами обігу і вантажообігом. Проаналізувати достовірність моделі та її параметрів. Зробити економічні висновки.

Таблиця 2.2 – **Вихідні дані**

Витрати обігу, x_i	2,0+i	2,3+i	2,7+i	2,2+i	2,4+i	2,3+i	2,3+i	2,6+i	2,7+i	2,5+i
Вантажообіг, y_i	35,0+j	43,7+j	41,9+j	37,3+j	40,9+j	38,8+j	35,7+j	43,2+j	40,5+j	38,1+j

2.5 Методичні вказівки до виконання завдань

1. Гіпотеза про форму (лінійний чи нелінійний), напрямок (прямий чи зворотній) і тісноту (сильний чи слабкий) зв’язку між факторною та результативною ознаками формулюють на підставі візуального аналізу діаграми розсіювання (кореляційного поля) та побудованої на ній емпіричної лінії регресії.

2. У разі правдоподібності припущення про лінійність зв’язку між факторною та результативною ознаками в якості показника його щільності (тісноти) використовують коефіцієнт кореляції r_{xy}:

$$r_{xy} = \frac{\overline{XY} - \overline{X} \cdot \overline{Y}}{\sqrt{\overline{X^2} - \left(\overline{X}\right)^2} \cdot \sqrt{\overline{Y^2} - \left(\overline{Y}\right)^2}}, \qquad (2.1)$$

де $\overline{XY} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$, $\overline{X^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2$, $\overline{Y^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i^2$ – середні значення відповідних показників;

n – кількість спостережень.

Для розрахунку коефіцієнтів кореляції для кожної пари зв'язків $Y = f(X_p)$ доцільно скористатись допоміжною таблицею (табл. 2.3).

Таблиця 2.3 – **Розрахунок коефіцієнтів кореляції для кожної пари зв'язків**

№ спостер.	x_{1i}	y_i	$x_{1i}y_i$	x_{1i}^2	y_i^2	x_{2i}	$x_{2i}y_i$	x_{2i}^2
1								
2								
...								
n								
Сума	$\sum_{i=1}^{n} x_{1i}$	$\sum_{i=1}^{n} y_i$	$\sum_{i=1}^{n} x_{1i}y_i$	$\sum_{i=1}^{n} x_{1i}^2$	$\sum_{i=1}^{n} y_i^2$	$\sum_{i=1}^{n} x_{2i}$	$\sum_{i=1}^{n} x_{2i}y_i$	$\sum_{i=1}^{n} x_{2i}^2$
Середнє	$\overline{X_1}$	$\overline{Y}$	$\overline{X_1Y}$	$\overline{X_1^2}$	$\overline{Y^2}$	$\overline{X_2}$	$\overline{X_2Y}$	$\overline{X_2^2}$

3. У разі оцінки за методом найменших квадратів (1МНК) невідомі значення параметрів b_0 і b_1 моделі лінійної регресії $\hat{y} = b_0 + b_1 x$ визначають за формулами:

$$b_1 = \frac{n\sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{n\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}, \tag{2.2}$$

$$b_0 = \bar{y} - b_1\bar{x} = \frac{\sum x_i^2 \sum y_i - \sum x_i \sum x_i y_i}{n\sum x_i^2 - \sum x_i \sum x_i}. \tag{2.3}$$

Для оцінки значень параметрів кожного з рівнянь лінійної регресії $Y = f(X_p)$ доцільно скористатись результатами виконаних на попередньому етапі допоміжних розрахунків, що занесені у табл. 2.2.

4. Загальну якість (адекватність) моделі визначають за допомогою коефіцієнту детермінації R^2:

$$R^2 = \frac{\sigma^2_{\text{регр}}}{\sigma^2_{\text{заг}}} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(\hat{y}_i - \bar{y})^2}{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2} = 1 - \frac{\sigma^2_{\text{пом}}}{\sigma^2_{\text{заг}}} = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{y}_i)^2}{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2}, \tag{2.4}$$

де $\sigma^2_{\text{заг}}$ – загальна дисперсія економетричної моделі;

$\sigma^2_{\text{пом}}$ – дисперсія залишків (помилок) економетричної моделі;

$\sigma^2_{\text{регр}}$ – факторна дисперсія економетричної моделі;

$\hat{y}_i$ – теоретичні значення результативної змінної, розраховані за рівнянням регресії $\hat{y} = b_0 + b_1 x$.

5. Статистичну надійність (значущість) результатів регресійного моделювання оцінюють за допомогою F-критерію Фішера:

$$\hat{F}_{\text{факт}} = \frac{\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n}(\hat{y}_i - \bar{y})^2}{\frac{1}{n-m-1}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{y}_i)^2} = \frac{R^2(n-m-1)}{(1-R^2)\cdot m};$$

$$\hat{F}_{\text{факт}} > F_{\text{кр}(\alpha;df_1;df_2)}, \tag{2.5}$$

де $F_{\text{кр}(\alpha;df_1;df_2)}$ – табличне (критичне) значення F-розподілу (див. додаток А);

α – рівень значимості;

$df_1 = m$, $df_2 = (n-m-1)$ – кількість ступенів свободи;

m – кількість факторів, що входять у модель (для парної лінійної регресії $m = 1$).

Для кожної з побудованих моделей усі подальші розрахунки виконуються тільки за умови їх адекватності та значущості.

Для розрахунку коефіцієнтів детермінації і F-критеріїв Фішера для кожної пари зв'язків $Y = f(X_p)$ доцільно скористатись допоміжною таблицею (табл. 2.4).

6. Статистичну значущість оцінок параметрів b_0 і b_1 моделі регресії перевіряють за допомогою t-критерію Стьюдента:

$$t_{факт} = \frac{b_k}{\sigma_{b_k}}; \quad |t_{\text{факт}}| > t_{\text{кр}(\alpha;df)}, \tag{2.6}$$

Таблиця 2.4 – **Розрахунок коефіцієнтів детермінації та *F*-критеріїв Фішера для кожної моделі однофакторної регресії**

Модель $Y = f(X_1)$						
№ спостер.	x_{1i}	y_i	$\hat{y}_i^I = f(X_1)$	$(\hat{y}_i^I - \bar{y})^2$	$(y_i - \bar{y})^2$	$(y_i - \hat{y}_i^I)^2$
1						
2						
...						
n						
Сума	-	$\sum_{i=1}^{n} y_i$	$\sum_{i=1}^{n} \hat{y}_i^I$	$\sum_{i=1}^{n} (\hat{y}_i^I - \bar{y})^2$	$\sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2$	$\sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{y}_i^I)^2$
Коефіцієнт детермінації , R^2						
F-критерій Фішера, $\hat{F}_{\text{факт}}$						
Модель $Y = f(X_2)$						
№ спостер.	x_{2i}	y_i	$\hat{y}_i^{II} = f(X_2)$	$(\hat{y}_i^{II} - \bar{y})^2$	$(y_i - \bar{y})^2$	$(y_i - \hat{y}_i^{II})^2$
1						
2						
...						
n						
Сума	-	$\sum_{i=1}^{n} y_i$	$\sum_{i=1}^{n} \hat{y}_i^{II}$	$\sum_{i=1}^{n} (\hat{y}_i^{II} - \bar{y})^2$	$\sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2$	$\sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{y}_i^{II})^2$
Коефіцієнт детермінації , R^2						
F-критерій Фішера, $\hat{F}_{\text{факт}}$						

$$\sigma_{b0} = \sigma_{\varepsilon} \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}}, \tag{2.7}$$

$$\sigma_{b_1} = \sigma_{\varepsilon} \sqrt{\frac{1}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}}, \tag{2.8}$$

$$\sigma_{\varepsilon} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i^2}{n-m-1}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{y}_i)^2}{n-m-1}}, \tag{2.9}$$

де σ_{b_k} – стандартна помилка оцінки k-го параметру;

$t_{кр(\alpha;df)}$ – табличне (критичне) значення t-розподілу (додаток Б);

$df = (n - m - 1)$ – кількість ступенів свободи;

ε_i – випадкова величина (помилка, залишок);

σ_ε – стандартна помилка регресії.

7. Довірчі інтервали для кожного параметра моделі будують за наступною формулою:

$$b_k \pm t_\alpha \cdot \sigma_{b_k}, \tag{2.10}$$

де t_α – випадкова величина, що має t-розподіл Стьюдента з $df = n - m - 1$ ступенями свободи для надійності $\gamma = 1 - \alpha$.

8. Прогнозне значення (точковий прогноз) результативної змінної розраховують наступним чином:

$$\hat{y}_{n+k} = b_0 + b_1 x_{n+k}, \tag{2.11}$$

де x_{n+k} – прогнозне значення факторної змінної.

Умова, що прогнозне значення факторної змінної збільшиться на 65 % від його середнього рівня, полягає у такому: $x_{n+k} = 1{,}65 \cdot \bar{x}$.

9. Довірчий інтервал прогнозу будують наступним чином:

$$\hat{y}_{n+k} \pm \delta; \;\; \delta = t_\alpha \cdot \sigma_\varepsilon \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{(x_{n+k} - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}}, \tag{2.12}$$

де δ – на півширина довірчого інтервалу прогнозу.

10. Довірчий інтервал для всіх точок вибірки й у точці прогнозу розраховують за формулою:

$$(\hat{y}_i - \delta, \; \hat{y}_i + \delta). \tag{2.13}$$

Довірчу область прогнозу будують аналогічно до схематично представленої на рис. 2.1.

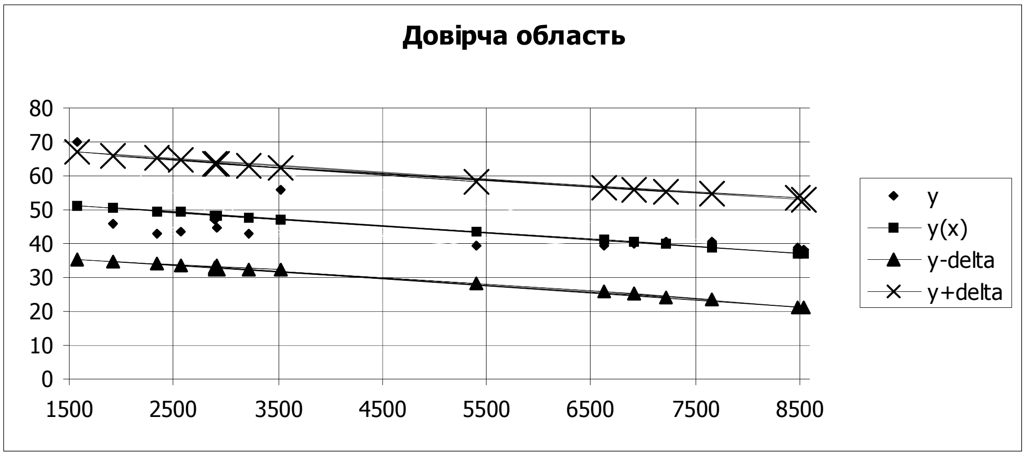

Рисунок 2.1 – **Довірча область прогнозу**

2.6 Контрольні запитання

1. Поясніть сутність кореляційно-регресійного зв'язку між економічними показниками.
2. Що являє собою кореляційне поле?
3. Яка точка на координатній площині є центром розсіювання?
4. Поясніть сутність коефіцієнта коваріації та наведіть формулу для його обчислення.
5. Наведіть формулу для обчислення коефіцієнту кореляції та розкрийте його властивості.
6. Дайте визначення простої вибіркової лінійної регресії.
7. Охарактеризуйте властивості простої вибіркової лінійної регресії.
8. В чому полягає імовірнісний зміст простої регресії?
9. Дайте характеристику узагальненої регресійної моделі та класичної моделі лінійної регресії.
10. Які методи застосовуються для оцінювання параметрів класичної регресійної моделі?
11. Що означає специфікація моделі?
12. Розкрийте алгоритм специфікації моделі.
13. Перелічите та розкрийте зміст основних етапів побудови загальної лінійної моделі.
14. У чому полягає сутність методу найменших квадратів?
15. Коли для оцінювання параметрів моделі можна застосувати 1МНК?
16. Запишіть оператор оцінювання 1МНК. Як його можна дістати?

17. Запишіть альтернативні варіанти оцінювання параметрів моделі методом 1МНК.

18. Як можна інтерпретувати параметри простої економетричної моделі?

19. Які властивості повинні мати оцінки параметрів економетричної моделі?

20. Як визначити зміщення оцінки 1МНК?

21. Як обчислити матрицю коваріацій параметрів моделей?

22. Чим відрізняється метод максимальної правдоподібності від методу найменших квадратів?

23. Запишіть функцію правдоподібності за умови, що залишки розподілені за нормальним законом.

24. Запишіть співвідношення між оцінкою дисперсії за методом максимальної правдоподібності та істинним значенням дисперсії.

25. Сформулюйте алгоритм покрокової регресії.

26. Для чого необхідна декомпозиція дисперсій?

27. Запишіть формулу визначення дисперсії залишків.

28. Дайте визначення загальної дисперсії, дисперсії залишків (помилок) та факторної дисперсії економетричної моделі, наведіть відповідні формули. Який між ними зв'язок?

29. Розкрийте сутність і поясніть, для чого використовується коефіцієнт детермінації.

30. Запишіть співвідношення між коефіцієнтами кореляції і детермінації.

31. Охарактеризуйте зв'язок між коефіцієнтом кореляції та нахилом регресії.

32. Що таке ступінь вільності?

33. В чому полягає простий ANOVA-аналіз (аналіз дисперсій) у лінійній регресії?

34. За яким критерієм відбувається перевірка простої регресійної моделі на адекватність? Наведіть формулу для його обчислення.

35. Як визначається F-критерій Фішера? Для чого він застосовується?

36. Покажіть залежність між F-критерієм Фішера і коефіцієнтом детермінації. Наведіть альтернативну формулу для обчислення F-критерію Фішера на основі коефіцієнту детермінації.

37. Що таке довірчий інтервал?

38. За допомогою якого критерію відбувається перевірка на значимість параметрів парної лінійної регресії та знаходження інтервалів довіри для них? Наведіть відповідні формули.

39. Як обчислюється t-критерій Стьюдента?

40. Що таке стандартна похибка оцінок параметрів моделі? Наведіть альтернативні формули для її обчислення.

41. Як оцінити достовірність коефіцієнта кореляції?

42. В чому полягає різниця між точковим та інтервальний прогнозом?

43. Напишіть формулу для визначення півширини довірчого інтервалу.

44. За якими показниками відбувається оцінка прогнозних можливостей моделі? Наведіть відповідні формули.

45. Що таке максимальна помилка прогнозу?

Література: [1-9,11-18,20-21,23-25,27-33,35].

Лабораторне заняття № 3. Тема заняття «УЗАГАЛЬНЕНИЙ МЕТОД НАЙМЕНШИХ КВАДРАТІВ»

3.1 Мета заняття: засвоєння і поглиблення теоретичних знань щодо особливого випадку у багатофакторному регресійному аналізі – гетероскедастичності, формування умінь тестувати її наявність, використовувати узагальнений метод найменших квадратів для оцінювання параметрів економетричної моделі, якій властива гетероскедастичність, й прогнозувати за такою регресійною моделлю, а також проводити економетричний аналіз нелінійної залежності показника від одного фактору.

3.2 План лабораторного заняття

1. Визначення гетероскедастичності та її природа.
2. Наслідки гетероскедастичності.
3. Тестування наявності гетероскедастичності.
4. Узагальнений метод найменших квадратів (метод Ейткена).

5. Використання узагальненого методу найменших квадратів (методу Ейткена) для оцінювання параметрів економетричної моделі, якій властива гетероскедастичність.

6. Вилучення гетероскедастичності.

7. Ефективність оцінок трансформованої моделі.

8. Прогнозування за регресійною моделлю, параметри якої оцінюються узагальненим методом найменших квадратів (УМНК).

9. Алгоритм побудови нелінійної однофакторної моделі.

10. Криві зростання.

3.3 Завдання до лабораторного заняття

Завдання 1. У ході проведення економетричного дослідження була проаналізована фінансово-господарська діяльність 15 підприємств-суб'єктів ЗЕД. В результаті було зроблено припущення про існування нелінійних залежностей між трьома парами показників (вид нелінійної функції є попередньо заданим), а саме: між фондовіддачею (X, дол./дол.) та рівнем рентабельності (Y, %) – ступенева $y = ax^b$; між продуктивністю праці (X, дол./чол.) та прибутком підприємства (Y, тис. дол.) – логарифмічна $y = a + b\ln x$; між собівартістю (X, тис. дол.) та рівнем збитковості (Y, %) – експоненціальна $y = ae^{bx}$.

Вихідні дані наведені у табл. 3.1.

Необхідно для кожної пари зв'язків $Y = f(X)$:

1) сформулювати гіпотезу про форму, напрямок і тісноту зв'язку;

2) лінеарізувати вихідну модель $y = ax^b$, $y = a + b\ln x$ або $y = ae^{bx}$ за допомогою формул переходу для отримання лінійної моделі відносно нових змінних $v = b_0 + b_1 u$;

3) оцінити тісноту лінійного зв'язку;

4) побудувати економетричну модель залежності $V = f(U)$ – розрахувати параметри рівняння лінійної регресії $\hat{v} = b_0 + b_1 u$ за 1МНК;

5) визначити загальну якість (адекватність) моделі;

6) оцінити статистичну надійність (значущість) результатів регресійного моделювання;

7) перевірити статистичну значущість оцінок параметрів моделі;

Таблиця 3.1 – **Вихідні дані**

№	Вид функції, що описує залежність					
	$y = ax^b$		$y = a + b\ln x$		$y = ae^{bx}$	
	X, дол./дол.	Y, %	X, дол./чол.	Y, тис. дол.	X, тис. дол.	Y, %
1	3,62	27	15,4	0,6	38,9	15,7
2	3,8	29	20,3	2,3	33,3	11,3
3	2,77	21	14,6	0,4	37,7	12,2
4	2,01	21	16	1,4	31,1	12,4
5	4,33	33	37,3	5,4	29,4	10,9
6	4,01	28	22,1	2	37,2	11,9
7	2,12	23	17	1,7	35,6	11,1
8	3,73	28	26,2	3,1	34,1	14
9	3,92	30	16,7	1,7	16,1	5,8
10	2,87	22	33,8	4,6	22,8	7,1
11	2,11	22	43,5	6,8	21,7	8,9
12	4,39	34	17,2	1,8	26,8	8,2
16	4,11	31	30,6	4,7	23,3	7,4
14	2,13	22	30,1	4,5	24,5	10,4
15	3,87	29	28,8	3,6	19,9	6,8

8) побудувати довірчі інтервали для параметрів моделі для рівня значимості $\alpha = 0{,}05$;

9) за формулами зворотного переходу перетворити лінеаризовану модель на нелінійну;

10) розрахувати прогнозне значення результативної змінної за умови, що прогнозне значення факторної змінної збільшиться на 65 % від його середнього рівня (точковий прогноз);

11) визначити довірчий інтервал прогнозу для рівня значимості $\alpha = 0{,}05$;

12) розрахувати довірчий інтервал для всіх точок вибірки й у точці прогнозу і побудувати довірчу область.

Використовуючи отримані дані і теоретичні відомості, зробіть економетричний аналіз – опишіть процес побудови моделі та всі супутні розрахунки.

3.4 Завдання до самостійної роботи

Завдання 1. У ході проведення економетричного дослідження за результатами 20 спостережень була побудована модель залежності щоденних витрат на харчування (Y, дол.) від щоденних доходів (X, дол.):

$$\hat{y} = 20{,}84 + 0{,}44x; \quad R^2 = 0{,}916.$$

Величини залишків ε_i при кожному значенні x_i представлені в табл. 3.2.

Таблиця 3.2 – **Вихідні дані**

№	Дохід, x_i	Залишок, ε_i	№	Дохід, x_i	Залишок, ε_i
1	30	-12,0	11	92	13,7
2	36	-11,7	12	100	12,2
3	40	-5,4	13	120	4,4
4	45	-5,6	14	130	4,0
5	50	-2,8	15	145	3,4
6	60	0,8	16	150	23,2
7	70	-1,6	17	200	16,2
8	80	-4,0	18	250	-16,8
9	85	-6,2	19	300	-27,8
10	90	6,6	20	360	-9,8

Необхідно:

1) побудувати графік залишків ε в залежності від значень змінної X та зробити висновки;

2) перевірити гіпотезу про наявність гетероскедастичності у лінійній регресії за допомогою тесту рангової кореляції Спірмена при $P = 0{,}95$;

3) дослідити гетероскедастичність залишків за допомогою тесту Голтфельда-Квандта;

4) охарактеризувати та кількісно оцінити залежність дисперсії залишків від значень пояснювальної змінної X за допомогою тестів Уайта та Парка;

5) використати тест Глейзера для характеристики регресії абсолютної величини залишків від значень пояснювальної змінної X.

Завдання 2. Для економетричного дослідження залежності прибутку (Y, тис. дол.) від масштабу виробництва (X, тис. од.) було побудовано модель:

$$\hat{y} = -3{,}281 + 1{,}792x; \; R^2 = 0{,}876; \; \hat{F}_{\text{факт}} = 70{,}7; \; \hat{F}_{\text{кр}(0,05;1;10)} = 4{,}96.$$

й визначено залишки регресії (табл. 3.3).

Таблиця 3.3 – **Вихідні дані**

№	Масштаб виробництва, x_i	Прибуток, y_i	Залишок, ε_i
1	5	5	-0,68
2	6	7	-0,47
3	6	6	-1,47
4	10	9	-5,64
5	11	15	-1,43
6	12	18	-0,22
7	12	27	8,78
8	12	23	4,78
9	23	30	-7,93
10	24	37	-2,72
11	25	39	-2,51
12	25	51	9,49

Необхідно перевірити залишки на гетероскедастичність та покращити модель в разі її наявності, використовуючи узагальнений метод найменших квадратів.

3.5 Методичні вказівки до виконання завдань

1. Гіпотеза про форму (лінійний чи нелінійний), напрямок (прямий чи зворотній) і тісноту (сильний чи слабкий) зв’язку між факторною та результативною ознаками формулюють на підставі візуального аналізу діаграми розсіювання (кореляційного поля) та побудованої на ній емпіричної лінії регресії.

2. У разі істотної нелінійності зв’язку для подальшого економетричного аналізу необхідно лінеарізувати вихідну модель, тобто отримати лінійну модель відносно нових змінних $v = b_0 + b_1 u$ за допомогою формул переходу (табл. 3.4).

3. Для оцінки щільності (тісноти) лінійного зв’язку між факторною та результативною ознаками лінеарізованої моделі використовують коефіцієнт кореляції r_{uv}:

$$r_{uv} = \frac{\overline{UV} - \overline{U} \cdot \overline{V}}{\sqrt{\overline{U^2} - \left(\overline{U}\right)^2} \cdot \sqrt{\overline{V^2} - \left(\overline{V}\right)^2}}. \qquad (3.1)$$

Таблиця 3.4 – **Формули переходу**

№	Вид залежності	Підстановка, що лінеарізує $v = b_0 + b_1 u$				Зворотне перетворення $y = a + bx$		
		$v =$	$u =$	$b_0 =$	$b_1 =$	$a =$	$b =$	$y =$
1	$y = ax^b$	$\ln y$	$\ln x$	$\ln a$	b	e^{b_0}	b_1	e^v
2	$y = ae^{bx}$	$\ln y$	x	$\ln a$	b	e^{b_0}	b_1	e^v
3	$y = a + b\frac{1}{x}$	y	$\frac{1}{x}$	a	b	b_0	b_1	v
4	$y = a + b\ln x$	y	$\ln x$	a	b	b_0	b_1	v

Для розрахунку коефіцієнту кореляції для зв'язку $V = f(U)$ доцільно скористатись допоміжною таблицею (табл. 3.5).

Таблиця 3.5 – **Розрахунок коефіцієнту кореляції для лінеарізованої моделі**

№ спостер.	u_i	v_i	$u_i v_i$	u_i^2	v_i^2
1					
2					
...					
n					
Сума	$\sum_{i=1}^{n} u_i$	$\sum_{i=1}^{n} v_i$	$\sum_{i=1}^{n} u_i v_i$	$\sum_{i=1}^{n} u_i^2$	$\sum_{i=1}^{n} v_i^2$
Середнє	$\overline{U}$	$\overline{V}$	$\overline{UV}$	$\overline{U^2}$	$\overline{V^2}$

4. У разі оцінки за методом найменших квадратів (1МНК) невідомі значення параметрів b_0 і b_1 лінеарізованої моделі $\hat{v} = b_0 + b_1 u$ визначають за формулами:

$$b_1 = \frac{n\sum u_i v_i - \sum u_i \sum v_i}{n\sum u_i^2 - (\sum u_i)^2}, \tag{3.2}$$

$$b_0 = \bar{v} - b_1 \bar{u} = \frac{\sum u_i^2 \sum v_i - \sum u_i \sum u_i v_i}{n\sum u_i^2 - \sum u_i \sum u_i}. \tag{3.3}$$

Для оцінки значень параметрів рівняння лінійної регресії $V = f(U)$ доцільно скористатись результатами виконаних на попередньому етапі допоміжних розрахунків, що занесені у табл. 3.5.

5. Загальну якість (адекватність) лінеарізованої моделі визначають за допомогою коефіцієнту детермінації R^2:

$$R^2 = \frac{\sigma^2_{\text{регр}}}{\sigma^2_{\text{заг}}} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(\hat{v}_i - \bar{v})^2}{\sum_{i=1}^{n}(v_i - \bar{v})^2} = 1 - \frac{\sigma^2_{\text{пом}}}{\sigma^2_{\text{заг}}} = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{n}(v_i - \hat{v}_i)^2}{\sum_{i=1}^{n}(v_i - \bar{v})^2}, \qquad (3.4)$$

де $\hat{v}_i$ – теоретичні значення результативної змінної, розраховані за рівнянням регресії $\hat{v} = b_0 + b_1 u$.

6. Статистичну надійність (значущість) результатів регресійного моделювання оцінюють за допомогою F-критерію Фішера:

$$\hat{F}_{\text{факт}} = \frac{\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n}(\hat{v}_i - \bar{v})^2}{\frac{1}{n-m-1}\sum_{i=1}^{n}(v_i - \hat{v}_i)^2} = \frac{R^2(n-m-1)}{(1-R^2)\cdot m};$$

$$\hat{F}_{\text{факт}} > F_{\text{кр}(\alpha;df_1;df_2)}. \qquad (3.5)$$

Усі подальші розрахунки виконуються тільки за умови адекватності та значущості лінеарізованої моделі: якщо ця умова виконується, то й вихідна нелінійна модель буде також адекватною та статистично значущою.

Для розрахунку коефіцієнту детермінації і F-критерію Фішера для лінеарізованої моделі $V = f(U)$ доцільно скористатись допоміжною таблицею (табл. 3.6).

7. Статистичну значущість оцінок параметрів b_0 і b_1 лінеарізованої моделі регресії перевіряють за допомогою *t*-критерію Стьюдента:

Таблиця 3.6 – **Розрахунок коефіцієнту детермінації та *F*-критерію Фішера для лінеаризованої моделі**

№ спостер.	u_i	v_i	$\hat{v}_i = f(U)$	$(\hat{v}_i - \bar{v})^2$	$(v_i - \bar{v})^2$	$(v_i - \hat{v}_i)^2$
1						
2						
...						
n						
Сума	$\sum_{i=1}^{n} u_i$	$\sum_{i=1}^{n} v_i$	$\sum_{i=1}^{n} \hat{v}_i$	$\sum_{i=1}^{n} (\hat{v}_i - \bar{v})^2$	$\sum_{i=1}^{n} (v_i - \bar{v})^2$	$\sum_{i=1}^{n} (v_i - \hat{v}_i)^2$
Коефіцієнт детермінації , R^2						
F-критерій Фішера, $\hat{F}_{\text{факт}}$						

$$t_{\text{факт}} = \frac{b_k}{\sigma_{b_k}}; \quad \left|t_{\text{факт}}\right| > t_{\text{кр}(\alpha;df)}, \tag{3.6}$$

$$\sigma_{b0} = \sigma_{\varepsilon} \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{\bar{u}^2}{\sum_{i=1}^{n}(u_i - \bar{u})^2}}, \tag{3.7}$$

$$\sigma_{b_1} = \sigma_{\varepsilon} \sqrt{\frac{1}{\sum_{i=1}^{n}(u_i - \bar{u})^2}}, \tag{3.8}$$

$$\sigma_{\varepsilon} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i^2}{n-m-1}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(v_i - \hat{v}_i)^2}{n-m-1}}. \tag{3.9}$$

8. Довірчі інтервали для кожного параметра лінеарізованої моделі будують за наступною формулою:

$$b_k \pm t_{\alpha} \cdot \sigma_{b_k}. \tag{3.10}$$

Для подальших розрахунків необхідно перетворити лінеаризовану модель на нелінійну за формулами зворотного переходу (табл. 3.4) й продовжувати економетричний аналіз аналогічно ситуації, що розглядалась на попередньому лабораторному занятті.

3.6 Контрольні запитання

1. Дайте означення гомоскедастичності і гетероскедастичності.
2. Як впливає явище гетероскедастичності на оцінку параметрів моделі?
3. Назвіть методи визначення гетероскедастичності.
4. Як перевіряється гетероскедастичність згідно з критерієм μ?
5. Як застосовується параметричний тест Голтфельда-Квандта для визначення гетероскедастичності?
6. У чому полягає сутність непараметричного тесту Голтфельда-Квандта?
7. Як визначається гетероскедастичність за допомогою тесту Глейзера?
8. Опишіть методи формування матриці S за умови $M(\varepsilon\varepsilon') = \sigma_{\varepsilon}^{2} S$.
9. Як використовується матриця S у методі Ейткена?
10. Які властивості повинна мати матриця S?
11. Запишіть формулу обчислення матриці коваріацій параметрів моделі. Чим вона відрізняється від формули при застосуванні 1МНК?
12. Як дістати незміщену оцінку дисперсії залишків за наявності гетероскедастичності?
13. Запишіть оператор оцінювання параметрів моделі за методом Ейткена.
14. Як виконується прогноз за методом Ейткена?
15. Що таке криві зростання? Які функції до них відносяться? Наведіть їх аналітичні вирази.
16. Яким чином нелінійні моделі перетворюють у лінійні?
17. Які існують прості методи обчислення невідомих параметрів нелінійних моделей? Викладіть алгоритм трьох точок.
18. Наведіть приклади застосування експоненціальних і степеневих функцій, зворотних перетворень у бізнесі та фінансах.

Література: [1-9,11-18,20-21,23-25,27-30,32-33,35].

Лабораторне заняття № 4. Тема заняття «МУЛЬТИКОЛІНЕАРНІСТЬ ТА ЇЇ ВПЛИВ НА ОЦІНКИ ПАРАМЕТРІВ МОДЕЛЕЙ»

4.1 Мета заняття: засвоєння і поглиблення теоретичних знань щодо особливого випадку у багатофакторному регресійному аналізі – мультиколінеарності, формування умінь тестувати наявність та вилучати її, а також проводити економетричний аналіз лінійної залежності показника від кількох факторів.

4.2 План лабораторного заняття

1. Визначення мультиколінеарності та її природа.
2. Теоретичні і практичні наслідки мультиколінеарності.
3. Тестування наявності мультиколінеарності та засоби її вилучення: алгоритм Фаррара-Глобера, метод головних компонент.

4.3 Завдання до лабораторного заняття

Завдання 1. За 15 підприємствами-експортерами регіону (табл. 4.1) вивчається залежність обсягів виробництва Y (тис. шт.) від введення в дію основних фондів (X_1, % від вартості фондів на кінець року), фондоозброєності (X_2 тис. грн./чол.) та питомої ваги робочих високої кваліфікації в загальній кількості робочих (X_3, %).

Необхідно:

1) перевірити фактори $X_1, X_2, ..., X_p$ на мультиколінеарність і на підставі отриманих результатів відібрати з них ті, що підлягають включенню до моделі (підказка – виключенню підлягатиме один фактор, отже, два інші входитимуть до моделі);

Таблиця 4.1 – **Вихідні дані**

№	X_1, %	X_2, тис. грн./чол.	X_3, %	Y, тис. шт.
1	0,1	60,3	33,4	182,2
2	2,2	47	29,1	202,3
3	0,4	75,5	25,3	204,2
4	1,5	48,9	27,1	199,6
5	6,4	15,6	43,3	224,4
6	2,1	69,5	47,2	220,8
7	1,7	66,1	49,3	220,1
8	3,1	35,4	35,7	218,3
9	4,7	20,6	45,8	247,3
10	4,6	25,8	43,4	222,7
11	5,7	36,2	42,1	239,4
12	1,8	61,3	40,1	217,2
16	6,7	9,1	33,3	233,4
14	4,6	31,3	41,2	237,9
15	3,7	39,6	39,7	230,5

2) побудувати економетричну модель залежності $Y = f(X_1, X_2,..., X_p)$ – розрахувати параметри рівняння багатофакторної лінійної регресії $\hat{y} = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2$ за МНК;

3) визначити загальну якість (адекватність) моделі;

4) оцінити статистичну надійність (значущість) результатів регресійного моделювання;

5) перевірити статистичну значущість оцінок параметрів моделі;

6) побудувати довірчі інтервали для параметрів моделі для рівня значимості $\alpha = 0{,}05$;

7) розрахувати прогнозне значення результативної змінної за умови, що прогнозне значення першої факторної змінної збільшиться на 75 % від його середнього рівня, а другої – на 85 % (точковий прогноз);

8) визначити довірчий інтервал прогнозу для рівня значимості $\alpha = 0{,}05$;

9) розрахувати довірчий інтервал для всіх точок вибірки й у точці прогнозу і побудувати довірчу область.

Використовуючи отримані дані і теоретичні відомості, зробіть економетричний аналіз – опишіть процес побудови моделей і всі супутні розрахунки.

2.4 Завдання до самостійної роботи

Завдання 1. Чому серед таких макроекономічних показників як ВНП (внутрішній національний продукт), пропозиція грошей, доход, безробіття та інші, очікується мультиколінеарність?

Завдання 2. Побудувати множинну економетричну модель за даними табл. 4.2 методом покрокової регресії і перевірити наявність мультиколінеарності за алгоритмом Фаррара-Глобера.

Таблиця 4.2 – **Вихідні дані**

№ з/п	X_1	X_2	X_3	Y
1	7,5	11,8	9,7	55,3
2	9,4	10,8	9,4	47,4
3	11,4	11,9	9,1	52,3
4	15,4	12,8	7,9	72,5
5	12,3	12,4	8,4	67,3
6	6,8	13,1	10,1	46,4
7	7,9	15,4	9,7	61,4
8	10,4	13,9	10,6	86,1
9	11,6	14,5	11,4	91,3
10	9,8	14,7	10,1	97,4
11	11,4	15,1	11,7	101,5
12	10,6	11,4	9,9	137,9
13	11,8	15,9	10,8	124,7
14	12,7	16,2	11,5	119,3
15	13,7	16,8	11,4	134,2

4.5 Методичні вказівки до виконання завдань

1. Модель множинної регресії повинна включати фактори, які мають сильний зв’язок із результативною змінною і не мають сильного зв’язку між собою. Для відбору факторів, що підлягають включенню до моделі, використовують кореляційну таблицю – симетричну матрицю парних коефіцієнтів кореляції між факторними змінними за припущення, що всі вони перебувають у лінійній формі зв’язку (табл. 4.3).

Для розрахунку парних коефіцієнтів кореляції між *k*-ю та *l*-ю факторними змінними $r_{X_k X_l}$ використовують таку формулу:

Таблиця 4.3 – **Загальний вид матриці парних коефіцієнтів кореляції**

Змінні	X_1	X_2	…	X_p	Y
X_1	1	$r_{X_1X_2}$	…	$r_{X_1X_p}$	r_{X_1Y}
X_2	$r_{X_2X_1}$	1	…	$r_{X_2X_p}$	r_{X_2Y}
…	…	…	1	…	…
X_p	$r_{X_pX_1}$	$r_{X_pX_2}$	…	1	r_{X_pY}
Y	r_{YX_1}	r_{YX_2}		r_{YX_p}	1

$$r_{X_kX_l}=\frac{\overline{X_kX_l}-\overline{X_k}\cdot\overline{X_l}}{\sqrt{\overline{X_k^2}-\left(\overline{X_k}\right)^2}\cdot\sqrt{\overline{X_l^2}-\left(\overline{X_l}\right)^2}},\ (i\neq k). \qquad (4.1)$$

За результатами аналізу матриці парних коефіцієнтів кореляції виділяють пари факторних змінних, які мають між собою високий кореляційний зв’язок ($r_{X_kX_l}>0{,}8$). У кожній з таких пар виключають із подальшого розгляду ту факторну змінну, яка має менший коефіцієнт кореляції із результативною змінною.

2. У разі оцінки за методом найменших квадратів (1МНК) невідомі значення параметрів b_0, b_1 і b_2 моделі лінійної множинної регресії тільки з двома факторами $\hat{y}=b_0+b_1x_1+b_2x_2$ визначають за формулами:

$$b_1=\frac{\begin{array}{l}(n\sum x_{1i}y_i-\sum x_{1i}\sum y_i)(n\sum x_{2i}^2-(\sum x_{2i})^2)-\\-(n\sum x_{2i}y_i-\sum x_{2i}\sum y_i)(n\sum x_{1i}x_{2i}-\sum x_{1i}\sum x_{2i})\end{array}}{\begin{array}{l}(n\sum x_{1i}^2-(\sum x_{1i})^2)(n\sum x_{2i}^2-(\sum x_{2i})^2)-\\-(n\sum x_{1i}x_{2i}-\sum x_{1i}\sum x_{2i})^2\end{array}}, \qquad (4.2)$$

або

$$b_1=\frac{\begin{array}{l}(\sum x_{1i}y_i-n\bar{x}_1\bar{y})(\sum x_{2i}^2-n(\bar{x}_2)^2)-\\-(\sum x_{2i}y_i-n\bar{x}_2\bar{y})(\sum x_{1i}x_{2i}-n\bar{x}_1\bar{x}_2)\end{array}}{\begin{array}{l}(\sum x_{1i}^2-n(\bar{x}_1)^2)(\sum x_{2i}^2-n(\bar{x}_2)^2)-\\-(\sum x_{1i}x_{2i}-n\bar{x}_1\bar{x}_2)^2\end{array}}; \qquad (4.3)$$

$$b_2 = \frac{\begin{array}{l}(n\sum x_{1i}^2 - (\sum x_{1i})^2)(n\sum x_{2i}y_i - \sum x_{2i}\sum y_i) - \\ - (n\sum x_{1i}x_{2i} - \sum x_{1i}\sum x_{2i})(n\sum x_{1i}y_i - \sum x_{1i}\sum y_i)\end{array}}{\begin{array}{l}(n\sum x_{1i}^2 - (\sum x_{1i})^2)(n\sum x_{2i}^2 - (\sum x_{2i})^2) - \\ - (n\sum x_{1i}x_{2i} - \sum x_{1i}\sum x_{2i})^2\end{array}}, \qquad (4.4)$$

або

$$b_2 = \frac{\begin{array}{l}(\sum x_{1i}^2 - n(\bar{x}_1)^2)(\sum x_{2i}y_i - n\bar{x}_2\bar{y}) - \\ - (\sum x_{1i}x_{2i} - n\bar{x}_1\bar{x}_2)(\sum x_{1i}y_i - n\bar{x}_1\bar{y})\end{array}}{\begin{array}{l}(\sum x_{1i}^2 - n(\bar{x}_1)^2)(\sum x_{2i}^2 - n(\bar{x}_2)^2) - \\ - (\sum x_{1i}x_{2i} - n\bar{x}_1\bar{x}_2)^2\end{array}}; \qquad (4.5)$$

$$b_0 = \bar{y} - b_1\bar{x}_1 - b_2\bar{x}_2. \qquad (4.6)$$

Для оцінки значень параметрів рівняння множинної регресії $Y = f(X_1, X_2, ..., X_p)$ доцільно скористатись допоміжною таблицею (табл. 4.4).

Таблиця 4.4 – **Оцінка параметрів моделі множинної регресії за 1МНК**

№ спостер.	x_{1i}	x_{2i}	y_i	$x_{1i}y_i$	$x_{2i}y_i$	x_{1i}^2	x_{2i}^2	$x_{1i}x_{2i}$
1								
2								
...								
n								
Сума	$\sum_{i=1}^{n} x_{1i}$	$\sum_{i=1}^{n} x_{2i}$	$\sum_{i=1}^{n} y_i$	$\sum_{i=1}^{n} x_{1i}y_i$	$\sum_{i=1}^{n} x_{2i}y_i$	$\sum_{i=1}^{n} x_{1i}^2$	$\sum_{i=1}^{n} x_{2i}^2$	$\sum_{i=1}^{n} x_{1i}x_{2i}$
Середнє	$\bar{x}_1$	$\bar{x}_2$	$\bar{y}$	-	-	-	-	-

3. Загальну якість (адекватність) багатофакторної моделі визначають за допомогою оціненого коефіцієнту детермінації $\bar{R}^2$:

$$\bar{R}^2 = 1 - \frac{\frac{1}{n-k}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{y}_i)^2}{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2} = 1 - \frac{\frac{1}{n-m-1}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{y}_i)^2}{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2}, \qquad (4.7)$$

де k – кількість параметрів регресійної моделі;

m – кількість факторів, що увійшли до моделі.

4. Статистичну надійність (значущість) результатів регресійного моделювання оцінюють за допомогою F-критерію Фішера:

$$\hat{F}_{\text{факт}} = \frac{\frac{1}{m} \cdot \sum_{i=1}^{n} (\hat{y}_i - \bar{y})^2}{\frac{1}{n-m-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{y}_i)^2}; \quad \hat{F}_{\text{факт}} > F_{\text{кр}(\alpha; df_1; df_2)}. \tag{4.8}$$

Для побудованої багатофакторної моделі усі подальші розрахунки виконуються тільки за умови її адекватності та значущості.

Для розрахунку оціненого коефіцієнту детермінації та F-критерію Фішера для моделі $Y = f(X_1, X_2, ..., X_p)$ доцільно скористатись допоміжною таблицею (табл. 4.5).

Таблиця 4.5 – **Розрахунок оціненого коефіцієнту детермінації та *F*-критерію Фішера для моделі множинної регресії**

№ спостер.	x_{1i}	x_{2i}	…	x_{pi}	y_i	$\hat{y}_i = f(\{X_p\})$	$(y_i - \hat{y}_i)^2$	$(y_i - \bar{y})^2$	$(\hat{y}_i - \bar{y})^2$
1									
2									
...									
n									
Сума	-	-	-	-	$\sum_{i=1}^{n} y_i$	$\sum_{i=1}^{n} \hat{y}_i$	$\sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{y}_i)^2$	$\sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2$	$\sum_{i=1}^{n} (\hat{y}_i - \bar{y})^2$
Оцінений коефіцієнт детермінації , $\bar{R}^2$									
F-критерій Фішера, $\hat{F}_{факт}$									

5. Статистичну значущість оцінок параметрів $b_0, b_1, ..., b_p$ моделі множинної регресії перевіряють за допомогою t-критерію Стьюдента:

$$t_{\text{факт}} = \frac{b_k}{\sigma_{b_k}}; \quad |t_{факт}| > t_{кр(\alpha; df)}, \tag{4.9}$$

$$\sigma_{b_k} = \sigma_{\varepsilon} \sqrt{b_{jj}}, \tag{4.10}$$

де b_{jj} – діагональні елементи матриці $(X^T X)^{-1}$, $j = 0,1,2,...,k$;

X – матриця значень факторних змінних розмірністю $n \times (p+1)$.

6. Довірчі інтервали для кожного параметра багатофакторної моделі будують за наступною формулою:

$$b_k \pm t_\alpha \cdot \sigma_{b_k}. \qquad (4.11)$$

7. Прогнозне значення (точковий прогноз) результативної змінної розраховують наступним чином:

$$\hat{y}_{n+k} = b_0 + b_1 x_{1(n+k)} + b_2 x_{2(n+k)}, \qquad (4.12)$$

де $x_{p(n+k)}$ – прогнозне значення *p*-ї факторної змінної.

Умова, що прогнозне значення першої факторної змінної збільшиться на 75 % від його середнього рівня, полягає у такому: $x_{1(n+k)} = 1{,}75 \cdot \bar{x}_1$, відповідно, умова, що прогнозне значення другої факторної змінної збільшиться на 85 % від його середнього рівня – $x_{2(n+k)} = 1{,}85 \cdot \bar{x}_2$.

8. Довірчий інтервал прогнозу будують у такий спосіб:

$$\hat{y}_{n+k} \pm \delta; \;\; \delta = t_\alpha \cdot \sigma_\varepsilon \cdot \sqrt{1 + X_{n+k}^T (X^T X)^{-1} X_{n+k}}, \qquad (4.13)$$

де X_{n+k}, X_{n+k}^T – вектор-стовпчик і вектор-рядок значень факторних змінних, для яких дається прогноз.

Єдиного методу для тестування мультиколінеарності не існує, тому розглянемо найпоширеніші серед них:

1) високе значення R^2 і незначущість *t*-статистики – «класична» ознака мультиколінеарності;

2) високе значення парних коефіцієнтів кореляції між змінними (більше 0,8) – проте це достатня, але не необхідна умова наявності мультиколінеарності (вона може мати місце і за незначних значень парних коефіцієнтів кореляції у більш, ніж двофакторній регресії).

3) алгоритм Фаррара-Глобера. Цей алгоритм має три статистичні критерії, згідно з якими перевіряється: мультиколінеарність всього масиву пояснювальних змінних (критерій χ^2); кожної пояснюваль-

ної змінної з рештою змінних (F-критерій); кожної пари пояснювальних змінних (t-критерій).

1 крок: визначення кореляційної матриці r_{xx} та обчислення її визначника $|r_{xx}|$:

$$r_{xx} = \begin{vmatrix} 1 & r_{X_1X_2} & \dots & r_{X_1X_p} \\ r_{X_2X_1} & 1 & \dots & r_{X_2X_p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{X_pX_1} & r_{X_pX_2} & \dots & 1 \end{vmatrix}. \tag{4.14}$$

Визначення значення критерію χ^2:

$$\chi^2 = -\left[n - 1 - \frac{1}{6}(2m+5)\right] \cdot \ln|r_{xx}|. \tag{4.15}$$

Фактично обчислене значення критерію $\chi^2_{\text{факт}}$ порівнюється з критичним (табличним) при $df = m(m-1)/2$ ступенях свободи і рівні значущості α (див. додаток В). Якщо $\chi^2_{\text{факт}} > \chi^2_{\text{кр}(\alpha;df)}$, то в масиві пояснювальних змінних існує мультиколінеарність.

2 крок: обчислення оберненої матриці C:

$$C = r_{xx}^{-1}. \tag{4.16}$$

Визначення значень F-критеріїв:

$$F_k = (c_{kk} - 1) \cdot \frac{n-m}{m-1}. \tag{4.17}$$

Фактично обчислені значення критеріїв $F_{k_{\text{факт}}}$ порівнюються з табличними при $df_1 = m - n$ і $df_2 = m - 1$ ступенях свободи і рівні значущості α (див. додаток А). Якщо $F_{k_{\text{факт}}} > F_{k_{\text{кр}(\alpha;df_1;df_2)}}$, то відповідна k-та пояснювальна змінна мультиколінеарна з іншими.

Коефіцієнт детермінації для кожної змінної:

$$R_k^2 = 1 - \frac{1}{c_{kk}}. \quad (4.18)$$

Якщо коефіцієнт детермінації наближається до одиниці, то відповідна k-та пояснювальна змінна мультиколінеарна з іншими.

3 крок: визначення частинних коефіцієнтів кореляції:

$$r_{kj} = \frac{-c_{kj}}{\sqrt{c_{kk} \cdot c_{jj}}}. \quad (4.19)$$

Визначення значень t-критеріїв:

$$t_{kj} = \frac{r_{kj}\sqrt{n-m}}{\sqrt{1-r_{kj}^2}}. \quad (4.20)$$

Фактично обчислені значення t-критеріїв $t_{kj_{\text{факт}}}$ порівнюються з табличними при $df = m - n$ ступенях свободи і рівні значущості α (див. додаток Б). Якщо $t_{kj_{\text{факт}}} > t_{kj_{\text{кр}(\alpha;df)}}$, то між пояснювальними змінними x_k и x_j існує мультиколінеарність.

4.6 Контрольні запитання

1. Що означає мультиколінеарність змінних?
2. Ознаки мультиколінеарності.
3. Як впливає наявність мультиколінеарності змінних на оцінку параметрів моделі?
4. Які статистичні критерії використовуються для тестування наявності мультиколінеарності?
5. Дайте коротку характеристику алгоритму Фаррара-Глобера.
6. Які існують способи звільнення від мультиколінеарності?

Література: [1-9,11-18,20-21,23-25,27-30,32-33,35].

Лабораторне заняття №5. Тема заняття «ЕМПІРИЧНІ МЕТОДИ КІЛЬКІСНОГО АНАЛІЗУ НА ОСНОВІ СТАТИСТИЧНИХ РІВНЯНЬ. ЕЛАСТИЧНІСТЬ ЕКОНОМЕТРИЧНИХ МОДЕЛЕЙ»

5.1 Мета заняття: засвоєння і поглиблення теоретичних знань щодо емпіричних моделей кількісного аналізу, формування умінь використовувати емпіричні методи кількісного аналізу на основі статистичних рівнянь та виробничі функції, а також визначати еластичність економетричних моделей.

5.2 План лабораторного заняття

1. Кількісний аналіз та його особливості.
2. Поняття емпіричних моделей кількісного аналізу.
3. Емпіричні методи кількісного аналізу на основі статистичних рівнянь.
4. Виробничі функції: властивості, аналіз і використання апарату.
5. Поняття еластичності економетричних моделей.
6. Коефіцієнти еластичності для однофакторної і багатофакторної моделей.

2.3 Завдання до лабораторного заняття

Завдання 1. За групою підприємств-експортерів, що виробляють однорідну продукцію, відома залежність собівартості одиниці продукції (Y) від чотирьох факторів: обсягу виробництва (X_1, тис. грн.), працемісткості одиниці продукції (X_2, чол.-год.), оптової ціни за 1 т енергоносія (X_3, тис. грн.), частки прибутку, що вилучається державою (X_4, %), а також відомі середні значення цих факторів (табл. 5.1).

Необхідно:

1) визначити за допомогою коефіцієнтів еластичності силу впливу кожного фактору на результат;

2) проранжувати фактори за силою впливу.

Таблиця 5.1 – **Вихідні дані**

Ознака-фактор	Рівняння парної регресії, $Y = f(X_p)$	Середнє значення фактора, $\bar{x}_p$
X_1	$\hat{y}_{X_1} = 0{,}62 + 58{,}74 \cdot \frac{1}{x_1}$	$\bar{x}_1 = 2{,}64$
X_2	$\hat{y}_{X_2} = 9{,}30 + 9{,}83 \cdot x_2$	$\bar{x}_2 = 1{,}38$
X_3	$\hat{y}_{X_3} = 11{,}75 \cdot x_3^{1{,}6281}$	$\bar{x}_3 = 1{,}503$
X_4	$\hat{y}_{X_4} = 15{,}62 \cdot 1{,}016^{x_4}$	$\bar{x}_4 = 24{,}0$

Завдання 2. Для трьох видів експортної продукції A, B і C моделі залежності питомих постійних витрат від обсягу продукції, що випускається, мають такий вигляд:

$$Y_A = 600x,$$
$$Y_B = 80 + 0{,}7x,$$
$$Y_C = 40x^{0{,}5}.$$

Необхідно:

1) визначити коефіцієнти еластичності за кожним видом продукції та пояснити їх зміст;

2) порівняти еластичність витрат для продукції B і C при $x = 1000$;

3) визначити, яким має бути обсяг продукції, що випускається, щоб коефіцієнти еластичності для продукції B і C були рівними.

5.4 Завдання до самостійної роботи

Завдання 1. Під час вивчення попиту на телевізори марки N за 19 торговими точками аналітики компанії ABC виявили таку залежність:

$$\ln y = 10{,}5 - 0{,}8 \ln x + \varepsilon,$$

де y – обсяг продаж телевізорів марки N в окремій торговій точці;

x – середня ціна телевізора в даній торговій точці.

До проведення цього дослідження адміністрація компанії вважала, що еластичність попиту за ціною для телевізорів марки N становить -0,9. Чи підтвердилось припущення адміністрації результатами дослідження?

5.5 Методичні вказівки до виконання завдань

Коефіцієнт еластичності показує, на скільки відсотків зміниться (збільшиться, якщо $E_x > 0$, або зменшиться, якщо $E_x < 0$) результативна ознака Y, якщо факторна ознака X зміниться на 1 %.

Коефіцієнт еластичності економетричної моделі визначають наступним чином:

$$E_x = \frac{x}{y} \cdot f'(x), \tag{5.1}$$

де $f'(x)$ – перша частинна похідна Y по X.

На практиці, коли змінні x та y не специфіковані (не визначені), їх дуже часто замінюють на середні значення $\bar{x}$ та $\bar{y}$, тоді формула для розрахунку коефіцієнту еластичності набуває вигляд:

$$E_x = \frac{\bar{x}}{\bar{y}} \cdot f'(x). \tag{5.2}$$

Коефіцієнти еластичності для певних моделей представлені в табл. 5.2.

Таблиця 5.2 – **Коефіцієнти еластичності**

Модель	Рівняння регресії $y = f(x)$	Похідна $f'(x)$	Коефіцієнт еластичності, E_x	
			розрахунок	результат
Лінійна	$y = b_0 + b_1 x$	b_1	$\frac{b_1 x}{b_0 + b_1 x}$	$b_1 \frac{x}{y}$
Ступенева	$y = ax^b$	$b \cdot ax^{b-1}$	$b \cdot ax^{b-1} \cdot \frac{x}{ax^b}$	$b \Rightarrow (const)$
Експоненціальна	$y = ae^{bx}$	$b \cdot ae^{bx}$	$b \cdot ae^{bx} \cdot \frac{x}{ae^{bx}}$	bx
Показникова	$y = ab^x$	$\ln b \cdot ab^x$	$\ln b \cdot ab^x \cdot \frac{x}{ab^x}$	$\ln b \cdot x$
Логарифмічна	$y = a + b\ln x$	$b\frac{1}{x}$	$b\frac{1}{x} \cdot \frac{x}{a + b\ln x}$	$b\frac{1}{y}$
Зворотна	$y = a + b\frac{1}{x}$	$-b\frac{1}{x^2}$	$-b\frac{1}{x^2} \cdot \frac{x}{a + b\frac{1}{x}}$	$-b\frac{1}{xy}$

5.6 Контрольні запитання

1. У чому полягають особливості кількісного аналізу?
2. Охарактеризуйте емпіричні моделі кількісного аналізу.
3. Що таке статистичні рівняння?
4. У чому полягають емпіричні методи кількісного аналізу на основі статистичних рівнянь?
5. Що являє собою виробнича функція? Коли вона використовується?
6. Розкрийте властивості виробничих функцій.
7. Наведіть приклади виробничих функцій, що набули широкого застосування в економічних дослідженнях.
8. Охарактеризуйте апарат виробничих функцій.
9. Що таке еластичність економетричної моделі? Як вона визначається?
10. У чому полягає відмінність між коефіцієнтами еластичності для однофакторної багатомірної моделі?

Література: [1-5,7-18,20-21,23-25,27-30].

Лабораторне заняття №6. Тема заняття «ЕКОНОМЕТРИЧНІ МОДЕЛІ ДИНАМІКИ»

6.1 Мета заняття: засвоєння і поглиблення теоретичних знань щодо рядів динаміки, формування умінь аналізувати часові ряди, а саме: розкладати їх на складові, виявляти та моделювати тенденцію, оцінювати адекватність і точність трендових моделей та прогнозувати за останніми економічну динаміку.

6.2 План лабораторного заняття

1. Часові ряди, основні поняття та означення.
2. Розкладання часових рядів на складові: тренд, сезонна, циклічна, випадкова компоненти.
3. Тренд часового ряду і його виявлення.
4. Трендові моделі за кривими зростання.
5. Моделювання тенденції часового ряду.
6. Розрахунок параметрів кривих зростання за МНК.

7. Оцінка адекватності й точності трендових моделей.

8. Прогнозування економічної динаміки за трендовими моделями.

6.3 Завдання до лабораторного заняття

Завдання 1. Динаміка випуску продукції підприємства характеризується даними (тис. грн.), представленими в табл. 6.1.

Таблиця 6.1 – **Вихідні дані**

Рік, t	Випуск продукції, y_t	Рік, t	Випуск продукції, y_t
1979	1054	1997	11172
1980	1104	1998	14150
1981	1149	1999	14004
1982	1291	2000	13088
1983	1247	2001	12518
1984	1505	2002	13471
1985	1513	2003	13617
1986	1635	2004	16356
1987	1987	2005	20037
1988	2306	2006	21748
1989	2367	2007	23298
1990	2913	2008	26570
1991	3837	2009	23080
1992	5490	2010	23981
1993	5502	2011	23446
1994	6342	2012	29658
1995	7665	2013	39573
1996	8570	2014	38435

Необхідно:

1) виявити основну тенденцію ряду динаміки випуску продукції підприємства за методом аналітичного згладжування – розрахувати параметри лінійного та поліноміального (парабола другого порядку) трендів;

2) побудувати графіки ряду динаміки та трендів;

3) обрати найкращий вид тренду на підставі візуального аналізу графічного зображення та значення коефіцієнту детермінації.

Завдання 2. Часовий ряд випуску продукції підприємства (y_t, тис. грн.) за 17 періодів ($t = 1,2,...,17$) наведений в табл. 6.2.

Таблиця 6.2 – **Вихідні дані**

Рік, t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
y_t, тис. грн.	15	12	13	25	24	33	30	37	43	53	51	62	60	71	78	83	86

Необхідно:

1) знайти згладжені (вирівняні) рівні ряду за методами простої ковзної середньої з інтервалом згладжування $q = 3$ і експоненціального згладжування із фактором затухання $\alpha = 0{,}1$;

2) вибрати і розрахувати параметри декількох кривих зростання, які, на ваш погляд, найбільш якісно апроксимуватимуть наведений ряд динаміки;

3) оцінити адекватність і значущість побудованих моделей, обрати серед них найкращу;

4) розрахувати за обраною моделлю екстраполяційний прогноз на три часових періоди $t = 18{,}19{,}20$ та оцінити точність (якість) прогнозу.

6.4 Завдання до самостійної роботи

Завдання 1. Маються такі дані про капітальні вкладення (y_t, млн. грн.), що фінансувались з бюджету області (табл. 6.3).

Таблиця 6.3 – **Вихідні дані**

Рік, t	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007
y_t, млн. грн.	10,2	10,7	11,7	13,1	14,9	17,2	20,0	23,2

Необхідно:

1) обґрунтувати вибір типу рівняння тренду та розрахувати його параметри;

2) дати прогноз розміру капітальних вкладень на наступний рік.

6.5 Методичні вказівки до виконання завдань

Методи згладжування часових рядів поділяють на дві групи: методи механічного згладжування ряду та аналітичне вирівнювання, базоване на кривих зростання.

Сутність методів механічного згладжування.

У разі виявлення основної тенденції ряду динаміки за методом механічного згладжування береться кілька перших рівнів часового ряду, кількість яких утворює інтервал згладжування (q, $q < n$). Для них добирається поліном, ступінь якого має бути меншим за кількість рівнів, що входять в інтервал згладжування; за допомогою полінома розраховуються нові, вирівняні значення рівнів до середини інтервалу. Далі інтервал згладжування зрушується на один рівень вниз (або праворуч), обчислюється наступне згладжене значення тощо. За інших однакових умов інтервал згладжування рекомендується брати непарним.

Найпростішим методом механічного згладжування є метод простої ковзної середньої, коли для кожних q рівнів інтервалу згладжування обчислюється їхнє середнє арифметичне – це буде згладжене значення рівня ряду, яке відповідає середині інтервалу згладжування. Для обчислення згладжених рівнів ряду $\widetilde{y}_t$ в такий спосіб застосовують формулу:

$$\widetilde{y}_t = \frac{\sum\limits_{t=n-p}^{n_{t+p}} y_t}{q}, \tag{6.1}$$

де $p = (q-1)/2$ (для непарних q; для парних q формула ускладнюється).

У результаті послідовного обчислення дістають $n - q + 1$ згладжених значень рівнів ряду (відповідно, перші й останні p рівнів ряду губляться (не згладжуються), що є одним з головних недоліків цього методу.

Для розрахунку згладжених значень рівнів ряду за методом простої ковзної середньої доцільно скористатись допоміжною таблицею (табл. 6.4).

Таблиця 6.4 – **Механічне згладжування динамічного ряду за методом простої ковзної середньої (для трирівневого інтервалу згладжування)**

Рік, t	y_t	$\widetilde{y}_t$
1	y_1	-
2	y_2	$\widetilde{y}_2 = (y_1 + y_2 + y_3)/3$
3	y_3	$\widetilde{y}_3 = (y_2 + y_3 + y_4)/3$
…	…	…
$n-1$	y_{n-1}	$\widetilde{y}_{n-1} = (y_{n-2} + y_{n-1} + y_n)/3$
n	y_n	-

Особливістю іншого способу механічного згладжування – методу експоненціального згладжування – є те, що у процедурі відшукання загладженого рівня застосовуються значення тільки попередніх рівнів ряду, які беруться з певною вагою. Вага рівнів ряду залежить від зазначеної величини параметру згладжування (фактору затухання) α, значення якого містяться в інтервалі $0 < \alpha < 1$ й обираються дослідником самостійно (у практичних задачах обробки економічних часових рядів рекомендують вибирати параметри згладжування в інтервалі від 0,1 до 0,3):

$$\tilde{y}_t = \alpha\, y_t + (1-\alpha)\tilde{y}_{t-1}. \tag{6.2}$$

Для розрахунку згладжених значень рівнів ряду за методом експоненційного згладжування доцільно скористатись допоміжною таблицею (табл. 6.5).

Таблиця 6.5 – **Механічне згладжування динамічного ряду за методом експоненційного згладжування**

Рік, t	y_t	$\tilde{y}_t$
1	y_1	$\tilde{y}_1 = y_1$ або $\tilde{y}_1 = (y_1 + y_2 + y_3)/3$
2	y_2	$\tilde{y}_2 = \alpha y_2 + (1-\alpha)\tilde{y}_1$
3	y_3	$\tilde{y}_2 = \alpha y_3 + (1-\alpha)\tilde{y}_2$
…	…	…
$n-1$	y_{n-1}	$\tilde{y}_{n-1} = \alpha y_{n-1} + (1-\alpha)\tilde{y}_{n-2}$
n	y_n	$\tilde{y}_n = \alpha y_n + (1-\alpha)\tilde{y}_{n-1}$

Сутність методів аналітичного згладжування.

У разі виявлення основної тенденції ряду динаміки за методом аналітичного згладжування рівні ряду розглядають як функцію часу $\hat{Y}_t = f(t)$, а задача згладжування зводиться до знаходження такого вигляду функції, ординати точок якої були б найближчими до значень фактичного динамічного ряду. Наведена функція, що має назву кривої зростання, є ефективним засобом дослідження часового ряду і його прогнозування.

На практиці найпоширенішими кривими, які описують тенденцію розвитку (тренд) явищ, є:

– поліноміальні криві зростання:

поліном першого ступеня (пряма) $\hat{Y}_t = b_0 + b_1 t$;

поліном другого ступеня $\hat{Y}_t = b_0 + b_1 t + b_2 t^2$;

поліном p-го ступеня: $\hat{Y}_t = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + ... + b_p t^p$;

– гіперболічна функція: $\hat{Y}_t = b_0 + \dfrac{b_1}{t}$;

– експоненціальні функції: $\hat{Y}_t = a(1+r)^t$, $\hat{Y}_t = ab^t$, $\hat{Y}_t = ae^{b^t}$, де $r = const$;

– модифікована експоненціальна функція: $\hat{Y}_t = k + ab^t$;

– показникова функція: $\hat{Y}_t = b_0 \cdot b_1^t$;

– логістична функція: $\hat{Y}_t = \dfrac{k}{1+be^{-at}}$ або $\hat{Y}_t = \dfrac{k}{1+10^{a+bt}}$;

– крива Гомперця: $\hat{Y}_t = ka^{b^t}$, $0 < b < 1$;

– ряд Фур'є: $\hat{Y}_t = b_0 + \sum\limits_{p=1}^{m}(b_p \cos kt + b_{p+1} \sin kt)$ та деякі інші.

Існує кілька підходів до вибору форми кривої, що адекватна заданому динамічному ряду.

Найпростіший з них – візуальний, тобто вибір форми тренду на основі графічного зображення динамічного ряду.

Другий спосіб полягає у використанні методу послідовних різниць, згідно з яким обчислюються перший, другий та вищий порядки різниць рівнів часового ряду ($\Delta_t^{(n)}$):

$$\Delta_t^{(1)} = y_t - y_{t-1},\ \Delta_t^{(2)} = \Delta_t^{(1)} - \Delta_{t-1}^{(1)},\ \Delta_t^{(3)} = \Delta_t^{(2)} - \Delta_{t-1}^{(2)},$$
$$\Delta_t^{(n)} = \Delta_t^{(n-1)} - \Delta_{t-1}^{(n-1)}. \qquad (6.3)$$

Обчислення проводиться доти, доки різниці не будуть майже однаковими. Порядок рівності таких рівниць приймають за ступінь багаточлену для вирівнювання основної тенденції ряду динаміки. Якщо перші різниці майже рівні, тренд описують прямою; якщо однакові значення мають другі різниці, динаміку вирівнюють параболою другого порядку тощо.

Третій спосіб полягає в тому, що за критерій вибору форми тренду приймають суму квадратів відхилень значень рівнів від розрахункових, здобутих на основі вирівнювання часового ряду. Із множини функцій вибирають таку, якій відповідає мінімальне значення цього критерію.

Четвертий спосіб – метод характеристик приростів – полягає в тому, що вибір форми кривої відбувається за попередньою статистичною обробкою динамічного ряду, яка складається з таких етапів:

1) згладжування часового ряду методом ковзної середньої;

2) обчислення середніх приростів для згладженого ряду;

3) обчислення похідних характеристик приростів.

Процедура методу характеристик приростів докладно описана у [18].

Згладжування за прямою використовують у тих випадках, коли абсолютні прирости більш-менш сталі, тобто коли рівні динамічного ряду змінюються в арифметичній прогресії або наближуються до неї.

Рівняння згладженої прямої динамічного ряду має вигляд:

$$\hat{Y}_t = b_0 + b_1 t, \tag{6.4}$$

де b_0, b_1 – параметри лінійної регресії (початковий рівень та приріст щороку);

t – час.

Для знаходження параметрів b_0 і b_1 потрібно розв’язати за 1МНК систему нормальних рівнянь:

$$\begin{cases} \sum\limits_{t=1}^{n} y_t = nb_0 + b_1 \sum\limits_{t=1}^{n} t \\ \sum\limits_{t=1}^{n} y_t t = b_0 \sum\limits_{t=1}^{n} t + b_1 \sum\limits_{t=1}^{n} t^2 \end{cases}, \tag{6.5}$$

де y_t – фактичні рівні динамічного ряду;

n – число членів ряду динаміки.

Система (6.5) має такий розв’язок:

$$b_1 = \frac{n\sum_{t=1}^{n} y_t t - \sum_{t=1}^{n} t \sum_{t=1}^{n} y_t}{n\sum_{t=1}^{n} t^2 - \left(\sum_{t=1}^{n} t\right)^2}, \qquad (6.6)$$

$$b_0 = \bar{y}_t - b_1\bar{t} = \frac{\sum_{t=1}^{n} t^2 \sum_{t=1}^{n} y_t - \sum_{t=1}^{n} t \sum_{t=1}^{n} y_t t}{n\sum_{t=1}^{n} t^2 - \sum_{t=1}^{n} t \sum_{t=1}^{n} t}. \qquad (6.7)$$

Для розрахунку параметрів рівняння лінійної регресії $\hat{Y}_t = f(t)$ доцільно скористатись допоміжною таблицею (табл. 6.6).

Таблиця 6.6 – **Аналітичне згладжування ряду за прямою**

Рік	t	y_t	t^2	$y_t t$	$\hat{Y}_t = b_0 + b_1 t$
…	1				
…	2				
…	…				
…	n				
Сума	$\sum_{t=1}^{n} t$	$\sum_{t=1}^{n} y_t$	$\sum_{t=1}^{n} t^2$	$\sum_{t=1}^{n} t^2$	$\sum_{t=1}^{n} \hat{Y}_t$

Систему нормальних рівнянь (6.5) можна легко спростити, якщо відлік часу брати з середини ряду таким чином, аби сума часу дорівнювала нулю: $\sum_{t=1}^{n} t = 0$ (даний спосіб називається методом центрування). При непарному числі рівнів середню точку приймають за нуль, тоді попередні періоди позначаються відповідно -1, -2, -3 тощо, а наступні за серединним періодом – відповідно 1, 2, 3 тощо. При парному числі рівнів динамічного ряду два серединних моменти часу позначають -1 і +1, решту – двома інтервалами, тобто попередні періоди до середини як -3, -5, -7 тощо, а наступні – відповідно, +3, +5, +7 тощо. У разі відліку часу від середини ряду система рівнянь для знаходження параметрів має такий вигляд:

$$\begin{cases} \sum\limits_{t=1}^{n} y_t = nb_0 \\ \sum\limits_{t=1}^{n} y_t t = b_1 \sum\limits_{t=1}^{n} t^2 \end{cases}, \qquad (6.8)$$

звідки

$$b_1 = \frac{\sum\limits_{t=1}^{n} y_t t}{\sum\limits_{t=1}^{n} t^2}, \qquad (6.9)$$

$$b_0 = \frac{\sum\limits_{t=1}^{n} y_t}{n}. \qquad (6.10)$$

У разі згладжування за параболою другого порядку $\hat{Y}_t = b_0 + b_1 t + b_2 t^2$ параметри b_0, b_1 і b_2 визначають за 1 МНК, для чого складають і розв'язують систему нормальних рівнянь:

$$\begin{cases} \sum\limits_{t=1}^{n} y_t = nb_0 + b_1 \sum\limits_{t=1}^{n} t + b_2 \sum\limits_{t=1}^{n} t^2 \\ \sum\limits_{t=1}^{n} y_t t = b_0 \sum\limits_{t=1}^{n} t + b_1 \sum\limits_{t=1}^{n} t^2 + b_2 \sum\limits_{t=1}^{n} t^3 \\ \sum\limits_{t=1}^{n} y_t t^2 = b_0 \sum\limits_{t=1}^{n} t^2 + b_1 \sum\limits_{t=1}^{n} t^3 + b_2 \sum\limits_{t=1}^{n} t^4 \end{cases}. \qquad (6.11)$$

Якщо добитися, щоб $\sum\limits_{t=1}^{n} t = 0$, тоді й $\sum\limits_{t=1}^{n} t^3 = 0$, а, отже, система рівнянь спрощується:

$$\begin{cases} \sum\limits_{t=1}^{n} y_t = nb_0 + b_2 \sum\limits_{t=1}^{n} t^2 \\ \sum\limits_{t=1}^{n} y_t t = b_1 \sum\limits_{t=1}^{n} t^2 \\ \sum\limits_{t=1}^{n} y_t t^2 = b_0 \sum\limits_{t=1}^{n} t^2 + b_2 \sum\limits_{t=1}^{n} t^4 \end{cases}. \qquad (6.12)$$

Із цієї системи $b_1 = \frac{\sum_{t=1}^{n} y_t t}{\sum_{t=1}^{n} t^2}$, параметри b_0 і b_2 визначають розв'язанням системи двох рівнянь з двома невідомими:

$$\begin{cases} \sum_{t=1}^{n} y_t = nb_0 + b_2 \sum_{t=1}^{n} t^2 \\ \sum_{t=1}^{n} y_t t^2 = b_0 \sum_{t=1}^{n} t^2 + b_2 \sum_{t=1}^{n} t^4 \end{cases}. \tag{6.13}$$

Параметри параболи другого порядку потрібно інтерпретувати таким чином: b_0 – це величина, яка виражає середні умови утворення рівнів ряду, b_1 – швидкість розвитку даних динамічного ряду, b_2 – характеризує прискорення (сповільнення цього розвитку).

Для розрахунку параметрів рівняння параболи другого порядку $\hat{Y}_t = b_0 + b_1 t + b_2 t^2$ доцільно скористатись допоміжною таблицею, принцип побудови якої є аналогічним до табл. 6.6.

Точність (якість) трендової моделі характеризується величиною відхилень значень рівнів ряду за кривою зростання від фактичного рівня. Серед показників, які можна застосовувати як статистичні критерії точності моделі, найчастіше використовують наступні:

1) середня абсолютна помилка прогнозу:

$$\overline{\Delta}_{\text{пр}} = \frac{\sum_{t=1}^{n} |y_t - \hat{y}_t|}{n} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n} |\varepsilon_t|; \tag{6.14}$$

2) середньоквадратична помилка прогнозу:

$$\overline{\sigma}_{\text{пр}} = \sqrt{\frac{\sum_{t=1}^{n} (y_t - \hat{y}_t)^2}{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{t=1}^{n} \varepsilon_t^2}{n}}; \tag{6.15}$$

3) середня відносна помилка прогнозу (середня помилка апроксимації, абсолютна середня процентна помилка):

$$\bar{\varepsilon}_{\text{пр}} = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\frac{|y_t - \hat{y}_t|}{y_t}\cdot 100\% = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\frac{|\varepsilon_t|}{y_t}\cdot 100\%; \qquad (6.16)$$

Таблиця 6.7 – **Типові значення середньої помилки апроксимації для середньострокових прогнозів та їх інтерпретація**

Рівень $\bar{\varepsilon}_{\text{пр}}$, %	Інтерпретація
< 10	висока точність
10-20	хороша точність
21-50	задовільна точність
> 50	незадовільна точність

4) коефіцієнт збіжності:

$$\varphi_{\text{пр}}^2 = \frac{\sum_{t=1}^{n}(y_t - \hat{y}_t)^2}{\sum_{t=1}^{n}(y_t - \bar{y})^2}; \qquad (6.17)$$

4) коефіцієнт детермінації:

$$R^2 = 1 - \varphi_{\text{пр}}^2. \qquad (6.18)$$

6.6 Контрольні запитання

1. Дайте визначення часового ряду.
2. Які часові ряди мають назву моментних та інтервальних?
3. Що характерно для стаціонарних рядів?
4. Під впливом яких факторів формуються рівні часового ряду?
5. Дайте визначення тренду часового ряду.
6. В чому полягає попередній аналіз часових рядів?
7. Які ви знаєте попередні методи виявлення тренду в часовому ряду?
8. У чому полягає згладжування рядів динаміки за методом простої ковзної середньої та експоненціального згладжування?
9. Які ви знаєте криві зростання, що найчастіше застосовуються в економічних дослідженнях? Запишіть їх аналітичний вираз. Коли вживається та чи інша крива зростання?

10. За якими критеріями проводиться оцінка адекватності й точності трендових моделей?

11. У чому полягає відмінність між точковим та інтервальним прогнозами?

12. Що являє собою верифікація прогнозної моделі?

Література: [1-9,11-18,20-21,23-30].

РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

Основна

1. Айвазян С. А. Прикладная статистика и основы эконометрики / С. А. Айвазян, В. С. Мхитарян. – М. : ЮНИТИ, 1998.
2. Винн Р. Введение в прикладной эконометрический анализ / Р. Винн, К. Холден К. – М., 1981.
3. Грубер Й. Економетрія : у 2-х т. / Й. Грубер. – К.: Нічлава, 1998.
4. Джонстон Дж. Эконометрические методы / Дж. Джонстон. – М., 1980.
5. Доугерти К. Введение в эконометрику / К. Доугерти. – М. : Финансы и статистика, 1999.
6. Дрейпер Н. Прикладной регрессионный анализ / Н. Дрейпер, Г. Смит. – М. : Мир, 1988. – Т.1-2.
7. Єлейко В. І. Основи економетрії : у 2 ч. / В. І. Єлейко. – Львів : Марка ЛТД, 1995.
8. Эконометрика / [под ред. чл.-кор. РАН И. И. Елисеевой]. – М. : Финансы и статистика, 2001.
9. Экономико-математические методы и прикладные модели / [под ред. В. В. Федосеева]. – М. : ЮНИТИ, 2001.
10. Кади Дж. Количественные методы в экономике / Дж. Кади. – М. : Прогресс, 2004.
11. Кеш Э. Экономическая статистика и эконометрия / Э. Кеш. – М., 1977. – Вып. 12.
12. Введение в эконометрическое моделирование / [Клас А., Герики К., Колек Ю., Шиян И.]. – М., 1978.

13. Лизер С. Эконометрические методы и задачи / С. Лизер. – М. : Статистика, 1971.
14. Линник Ю. В. Метод наименьших квадратов и основы математико-статистической обработки наблюдений / Ю. В. Линник. – М., 1962.
15. Лук'яненко І. Г. Економетрика : підручник / І. Г. Лук'яненко, Л. І. Краснікова. – К. Знання, 1998.
16. Магнус Я. Р. Эконометрика / Я. Р. Магнус, П. К. Катышев, А. А. Пересецкий. – М. : Дело, 1977.
17. Маленбо Э. Статистические методы в эконометрии / Э. Маленбо. – М., 1976.
18. Наконечний С. І. Економетрія : підручник / С. І. Наконечний, Т. О. Терещенко, Т. П. Романюк. – К. : КНЕУ, 2004.
19. Пирогов Г. Проблемы структурного оценивания в эконометрии / Г. Пирогов, Ю. Федоровский. – М. : Статистика, 1979.
20. Ржевський С. В. Вступ до економетрії / С. В. Ржевський. – К. : Вид-во Європ. ун-ту, 2001.
21. Тинтнер Г. Введение в эконометрию / Г. Тинтнер. – М. : Статистика, 1965.
22. Фишер Ф. Проблема идентификации в эконометрии Ф. Фишер. – М., 1978.
23. Шаттелес Т. Современные эконометрические методы / Т. Шаттелес. – М. : Статистика, 2003.

Додаткова

24. Дюк В. Обработка данных на ПК в примерах / В. Дюк. – СПб. : Питер, 1997.
25. Введение в эконометрическое моделирование / [Клас А., Герики К., Колек Ю., Шиян И.]. – М. : Статистика, 2003.
26. Костила Н. І. Фінанси : система моделей і прогнозів / Н. І. Костила, А. А. Алексєєв, О. Д. Василик. – К. : Четверта хвиля, 1998.
27. Крамер Г. Математические методы статистики / Г. Крамер. – М., 1975.
28. Кулинич О. І. Економетрія : практикум / О. І. Кулинич. – Хмельницький : Поділля, 1998.

29. Ланге О. Введение в эконометрию / О. Ланге. – М. : Прогресс, 1964.
30. Лук'яненко І. Г. Економетрика : практикум з використанням комп'ютера / І. Г. Лук'яненко, Л. І. Краснікова. – К. : Знання, 1998.
31. Мальцев А. Н. Основы линейной алгебры / А. Н. Мальцев. – М., 1975.
32. Справочник по математике для экономистов. – М. : Высшая школа, 2001.
33. Статистический словарь – М. : Финансы и статистика, 1989.
34. Чавкин А. М. Методы рационального управления в экономике / А. М. Чавкин. – М. : Финансы и статистика, 2001.

Додаток А

Таблиця А.1 – **Критичні значення *F*-критерію Фішера для 95-відсоткового рівня довірчої імовірності**

df_2	df_1																			
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	161,4	199,5	215,7	224,6	230,2	234,0	236,8	238,9	240,5	241,9	243,0	243,9	244,7	245,4	245,9	246,5	246,9	247,3	247,7	248,0
2	18,50	19,0	19,2	19,2	19,3	19,3	19,4	19,4	19,4	19,4	19,4	19,4	19,4	19,4	19,4	19,4	19,4	19,4	19,4	19,4
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,89	8,82	8,81	8,79	8,76	8,74	8,73	8,71	8,7	8,69	8,68	8,67	8,67	8,65
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00	6,96	5,94	5,91	5,89	5,87	5,86	5,84	5,83	5,82	5,81	5,80
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,77	4,74	4,70	4,66	4,66	4,64	4,62	4,60	4,59	4,58	4,57	4,56
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10	4,06	4,03	4,00	3,98	3,96	3,94	3,92	3,91	3,90	3,88	3,87
7	5,59	4,74	4,35	4,12	4,97	3,87	3,79	3,73	3,68	3,64	3,60	3,57	3,55	3,53	3,51	3,49	3,48	3,47	3,46	3,44
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39	3,35	3,31	3,28	3,26	3,24	3,22	3,20	3,19	3,17	3,16	3,15
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18	3,14	3,10	3,07	3,05	3,03	3,01	2,99	2,97	2,96	2,95	2,94
10	4,96	4,10	4,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02	2,98	2,94	2,91	2,89	2,86	2,85	2,83	2,81	2,8	2,79	2,77
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,2	3,09	3,01	2,95	2,90	2,85	2,82	2,79	2,76	2,74	2,72	2,70	2,69	2,67	2,66	2,65
12	4,75	3,89	3,49	3,26	3,11	3,00	2,91	2,85	2,80	2,75	2,72	2,69	2,66	2,64	2,62	2,60	2,58	2,57	2,56	2,54
13	4,67	3,81	3,41	3,18	3,03	2,92	2,83	2,77	2,71	2,67	2,63	2,60	2,58	2,55	2,53	2,51	2,50	2,48	2,47	2,46
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,76	2,70	2,65	2,60	2,57	2,53	2,51	2,46	2,46	2,44	2,43	2,41	2,40	2,39
15	4,54	3,68	3,26	3,06	2,90	2,79	2,71	2,64	2,56	2,54	2,51	2,48	2,45	2,42	2,40	2,38	2,37	2,35	2,34	2,33
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,66	2,59	2,54	2,49	2,46	2,42	2,40	2,37	2,35	2,33	2,32	2,30	2,29	2,28
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,61	2,55	2,49	2,45	2,41	2,38	2,35	2,33	2,31	2,29	2,27	2,26	2,24	2,23
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,58	2,51	2,46	2,41	2,37	3,34	2,31	2,29	2,27	2,25	2,23	2,22	2,2	2,19
19	4,38	3,52	3,13	2,90	2,70	2,63	2,53	2,48	2,42	2,38	2,34	2,31	2,28	2,26	2,23	2,21	2,2	2,18	2,17	2,16
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,51	2,45	2,39	2,35	2,31	2,28	2,25	2,22	2,20	2,18	2,17	2,15	2,14	2,12
21	4,32	3,47	3,07	2,84	2,68	2,57	2,49	2,42	0,37	2,32	2,28	2,25	2,22	2,20	2,18	2,16	2,14	2,12	2,11	2,10
22	4,30	4,44	4,05	2,82	2,66	2,55	2,46	2,4	2,34	2,30	2,26	2,23	2,20	2,17	2,15	2,13	2,11	2,10	2,02	2,07
23	4,28	3,42	3,03	2,80	2,64	2,53	2,44	2,37	2,32	2,27	2,24	2,20	2,18	2,15	2,13	2,11	2,09	2,07	2,06	2,05
24	4,26	3,40	3,01	2,78	2,62	2,51	2,42	2,36	2,30	2,25	2,22	2,18	2,15	2,13	2,11	2,09	2,07	2,05	2,04	2,03
25	4,24	3,39	2,99	2,76	2,60	2,49	2,40	2,34	2,28	2,24	2,20	2,16	2,14	2,11	2,09	2,07	2,05	2,04	2,02	2,01
26	4,23	3,37	2,98	2,74	2,59	2,47	2,39	2,32	2,27	2,22	2,18	2,15	2,12	2,09	2,07	2,05	2,03	2,02	2,00	1,99
27	4,21	3,35	2,96	2,73	2,57	2,46	2,37	2,31	2,25	2,20	2,17	2,13	2,10	2,08	2,06	2,04	2,02	2,00	1,99	1,97
28	4,20	3,34	2,95	2,71	2,56	2,45	2,36	2,29	2,24	2,19	2,15	2,12	2,09	2,06	2,04	2,02	2,00	1,99	1,97	1,96
29	4,18	3,33	2,93	2,70	2,55	2,43	2,35	2,28	2,22	2,18	2,14	2,10	2,08	2,05	2,03	2,01	1,99	1,97	1,96	1,94
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,33	2,27	2,21	2,16	2,13	2,09	2,06	2,04	2,01	1,99	1,98	1,96	1,95	1,93

Приклад: $F_{кр(\alpha;df_1;df_2)} = F_{кр(0,05;5;15)} = 2{,}90$.

Додаток Б

Таблиця Б.1 – **Критичні значення *t*-критерію Стьюдента**

Ступінь свободи, *df*	Рівень довірчої імовірності γ (та значущості $\alpha = 1 - \gamma$), %			
	90 (10)	95 (5)	99 (1)	99,8 (0,2)
1	6,314	12,706	63,657	318,31
2	2,920	4,303	9,925	22,327
3	2,353	3,182	5,841	10,214
4	2,132	2,776	4,604	7,173
5	2,015	2,571	4,032	5,893
6	1,943	2,447	3,707	3,208
7	1,895	2,365	3,499	4,785
8	1,860	2,306	3,355	4,501
9	1,833	2,262	3,250	4,297
10	1,812	2,228	3,169	4,144
11	1,796	2,201	3,106	4,025
12	1,782	2,179	3,055	3,930
13	1,771	2,160	3,012	3,852
14	1,761	2,145	2,977	3,787
15	1,753	2,131	2,947	3,733
16	1,746	2,120	2,921	3,686
17	1,740	2,110	2,898	3,646
18	1,734	2,101	2,878	3,610
19	1,729	2,093	2,861	3,579
20	1,725	2,086	2,845	3,552
21	1,721	2,080	2,831	3,527
22	1,717	2,074	2,819	3,505
23	1,714	2,069	2,807	3,485
24	1,711	2,064	2,797	3,467
25	1,708	2,060	2,787	3,450
26	1,706	2,056	2,779	3,435
27	1,703	2,052	2,771	3,421
28	1,701	2,048	2,763	3,408
29	1,699	2,045	2,756	3,396
30	1,697	2,042	2,750	3,385
40	1,684	2,021	2,704	3,307
60	1,671	2,000	2,660	3,232
120	1,658	1,980	2,167	3,160
∞	1,645	1,960	2,576	3,090

Приклад: $t_{\text{кр}(\alpha;df)} = t_{\text{кр}(0{,}01;9)} = 3{,}250$.

Додаток В

Таблиця В.1 – **Розподіл χ^2 (К.Пірсона)**

Ступінь свободи, df	Рівень довірчої імовірності γ (та значущості $\alpha = 1 - \gamma$), %			
	90 (10)	95 (5)	99 (1)	99,9 (0,1)
1	2,71	3,841	6,635	10,827
2	4,61	5,991	9,210	13,815
3	6,25	7,815	11,345	16,268
4	7,78	9,488	13,277	18,465
5	9,24	11,070	15,086	20,517
6	10,6	12,592	16,812	22,457
7	12,0	14,067	18,475	24,322
8	13,4	15,507	20,090	26,125
9	14,7	16,919	21,666	27,877
10	16,0	18,307	23,209	29,588
11	17,3	19,675	24,725	31,264
12	18,5	21,026	26,217	32,909
13	19,8	22,362	27,688	34,528
14	21,1	23,685	29,141	36,123
15	22,3	24,996	30,578	37,697
16	23,5	26,296	32,000	39,252
17	24,8	27,587	33,409	40,790
18	26,0	28,869	34,805	42,312
19	27,2	30,144	36,191	43,820
20	28,4	31,410	37,566	45,315
21	29,6	32,671	38,932	46,797
22	30,8	33,924	40,289	48,268
23	32,0	35,172	41,638	49,728
24	33,2	36,415	42,980	51,179
25	34,4	37,652	44,314	52,620
26	35,6	38,885	45,642	54,052
27	36,7	40,113	46,963	55,476
28	37,9	41,337	48,278	56,893
29	39,1	42,557	49,588	58,302
30	40,3	43,773	50,892	59,703
40	51,8	55,8	63,7	73,4
50	63,2	67,5	76,2	86,7
60	74,4	79,1	88,4	99,6
70	85,5	90,5	100,4	112,3
80	96,6	101,9	112,3	124,8
90	107,6	113,1	124,1	137,2
100	118,5	124,3	135,8	149,4
120	140,23	146,57	158,95	163,64
тощо	тощо	тощо	тощо	тощо

Приклад: $\chi^2_{\text{кр}(\alpha;df)} = \chi^2_{\text{кр}(0,05;16)} = 32,0$.