**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ, МОЛОДІ
ТА СПОРТУ УКРАЇНИ**

**ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ
АВТОМОБІЛЬНО - ДОРОЖНІЙ УНІВЕРСИТЕТ**

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ДО ВИКОНАННЯ КУРСОВОЇ РОБОТИ З ДИСЦИПЛІНИ “ЕКОНОМІКО-МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ”

**для студентів напряму підготовки
6.030504 – Економіка підприємства
(заочна форма навчання)**

Харків 2013

Укладачі: В.М. Бредіхін
                В.І. Вербицька

Кафедра економіки підприємства

ВСТУП

Даний курсовий проект виконується з дисципліни "Економіко-математичне моделювання". Це дисципліна є одним з основних курсів у процесі підготовки сучасних фахівців з економіки підприємства. Курс має одночасно теоретичне, методологічне та прикладне значення.

Для виконання курсової роботи необхідні знання з економіки, матричної алгебри, лінійного програмування. Робота над курсовим проектом передбачає творчий підхід до розв’язання поставлених задач.

1 ЗАДАЧІ КУРСОВОГО ПРОЕКТУВАННЯ

Метою курсового проектування є закріплення теоретичних знань про типові економіко-математичні моделі, набуття навичок практичної роботи з ними, програмна реалізація цих моделей. В умовах ринкової економіки використання типових та розробка нових моделей дає змогу правильно оцінити та передбачити різні економічні показники, прийняти оптимальні управлінські рішення. Використання комп'ютерів дозволяє розв'язувати задачі великих розмірів. В курсовій роботі студенти виконують конкретні розрахунки, які необхідні для дослідження типових економіко-математичних моделей.

2 ТЕОРЕТИЧНА ЧАСТИНА ДОСЛІДЖЕННЯ

В даному курсовому проекті необхідно розглянути декілька глобальних моделей виробництва та споживання.

Розділ “ТЕОРЕТИЧНО-РОЗРАХУНКОВА ЧАСТИНА” вміщує підрозділи:

1.1 Побудова та опис двогалузевої макроекономічної моделі
1.2 Дослідження виробничих функцій
1.3 Дослідження моделі Солоу

2.1 Побудова та опис двогалузевої макроекономічної моделі

Розглянемо модель галузі економіки, що є декомпозицією загальної вербальної моделі. Нехай галузь випускає продукцію тільки одного виду. На рис. 2.1. показана схема галузі економіки. Схема включає підсистему виробництва продукції F, блоки розподілення R_X, R_Y, R_I , блок основних виробничих фондів K' та блок V приросту капіталу.

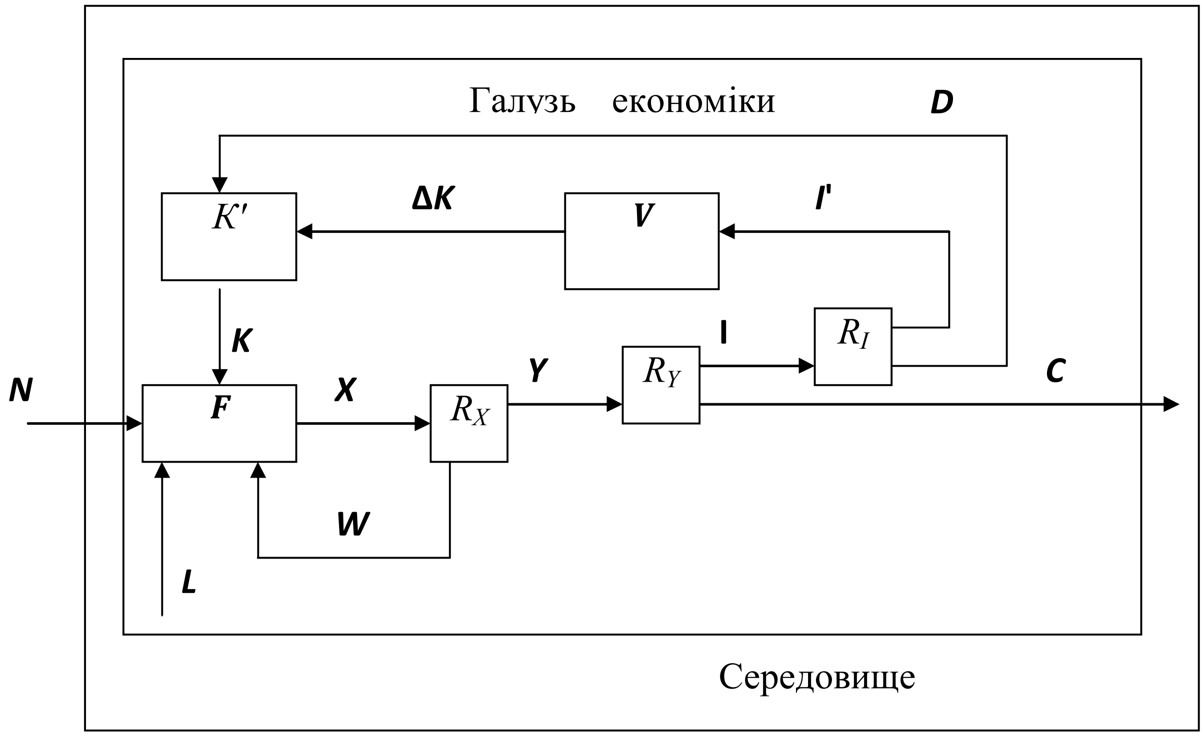

Рисунок 2.1 – Схема галузі економіки

Галузь характеризують такі фактори:

K – основні виробничі фонди або виробничий капітал;

N – природні ресурси;

L – трудові ресурси;

X – валова продукція;

Y – кінцева продукція;

W – проміжна продукція;

I – інвестиції;

C – продукція невиробничого споживання;

I' – чисті інвестиції, які йдуть на розширення основних виробничих фондів;

D – амортизаційні відрахування;

ΔK – приріст виробничого капіталу.

На вхід підсистеми F надходять основні виробничі фактори K, природні ресурси N, трудові ресурси L, проміжна продукція W. Ця продукція у блоці R_x розподіляється на кінцеву продукцію Y та проміжну продукцію W, яка йде на виробниче споживання

$$X = W + Y$$

У блоці R_Y продукція Y розподіляється на інвестиції I та продукцію невиробничого споживання C

$$Y = I + C$$

У блоці R_I інвестиції I поділяються на амортизаційні відрахування D та чисті інвестиції I' , які йдуть до блоку V на розширення ОВФ.

На підставі цієї моделі побудувати двогалузеву макроекономічну модель та дати її опис. Схему кожної галузі необхідно ідентифікувати та доповнити блоком розподілення $R_{Wi}, i = \overline{1,2}$. У цьому блоці проміжна продукція $W_i, i = \overline{1,2}$, розподіляється на проміжну продукцію, яка використовується в своїй та іншій галузях (та W_{12} W_{11}- для першої галузі, W_{22} та W_{21} - для другої галузі). Чисті інвестиції $I'_i,\ i = \overline{1,2}$, також поділяються на чисті інвестиції, які використовуються в своїй та іншій галузях (I'_{11} та I'_{12} - для першої галузі, I'_{22} та I'_{21} - для другої галузі). Міжгалузевими потоками тут будуть W_{12}, W_{21}, I'_{12}, I'_{21}.

Записати математичні вирази для X_i, Y_i, I_i. $i = \overline{1,2}$.

2.2 Дослідження виробничих функцій

Виробнича функція (ВФ) [production function] – економіко-математичне рівняння, що зв'язує змінні величини витрат (ресурсів) з величинами продукції (випуску). ВФ застосовуються для аналізу впливу різних комбінацій факторів на обсяг випуску в певний момент часу (статичний варіант ВФ) і для аналізу, а також прогнозування співвідношення обсягів факторів і обсягу випуску в різні моменти часу (динамічний варіант ВФ) на різних рівнях економіки – від фірми (підприємства) до народного господарства в цілому (агрегована ВФ, у якій випуском служить показник сукупного суспільного продукту або національного доходу й т. п.). В окремій фірмі, корпорації й т.п. ВФ описує максимальний обсяг випуску продукції, яку вони в стані зробити при кожній комбінації використовуваних факторів проведення. Вона може бути представлена безліччю ізоквант, пов'язаних з різними рівнями обсягу виробництва.

Такий вид ВФ, коли встановлюється явна залежність обсягу виробництва продукції від наявності або споживання ресурсів, називається функцією випуску. Зокрема, широко використовуються функції випуску в сільському господарстві, де з їхньою допомогою вивчається вплив на врожайність таких факторів, як, напр., різні види й склади добрив, методи обробки ґрунту. Поряд з подібними ПФ використовуються зворотні до них функції виробничих витрат. Вони характеризують залежність витрат ресурсів від обсягів випуску продукції (строго говорячи, вони обернені тільки до ВФ із взаємозамінними ресурсами). Окремими випадками ВФ можна вважати функцію витрат (зв'язок обсягу продукції й витрат проведення), інвестиційну функцію (залежність потрібних капіталовкладень від виробничої потужності майбутнього підприємства) і ін.

Найбільше широко поширені мультипликативно-статистичні форми вистави ВФ. Їхня особливість полягає в наступному: якщо один зі співмножників дорівнює нулю, то результат звертається в нуль. Легко помітити, що це реалістично відображає той факт, що в більшості випадків у проведенні беруть участь усі аналізовані первинні ресурси й без кожного з них випуск продукції виявляється неможливим.

На практиці часто исполизуют двухфакторную однопродуктову виробничу функцію $Y = f(x1, x2)$.

2.2.1. Виробнича функція Кобба-Дугласа

Підсистему виробництва продукції F (рис. 2.1) можна описати за допомогою виробничої функції

$$X = F(K, L) \qquad (2.1)$$

Тут змінні характеризують такі фактори: K - обсяг виробничих фондів у вартісному або натуральному вигляді (вартість або кількість обладнання), L - обсяг трудових ресурсів (кількість робітників, кількість людино-днів), X - обсяг продукції (валової) у вартісному або натуральному вигляді.

У даному підрозділі розглядаються виробнича функція Кобба-Дугласа (для першої галузі) та лінійна виробнича функція (для другої галузі). Припускається, що ці функції неперервні та диференційовані.

Виробнича функція Кобба-Дугласа (CDPF) належить до найбільш відомих, широко використовуваних функцій. Функція має вигляд

$$X_1=aK_1^{\alpha}L_1^{1-\alpha}, \tag{2.2}$$

$$(a,\alpha,(1-\alpha))>0,\ \alpha<1,$$

де (a,α) - параметри моделі.

Параметр a залежить від одиниць вимірювання змінних.

2.2.2. Виробнича функція CES

Функція CES (з постійною еластичності заміни) має вигляд:

$$f(x_1, x_2) = a(\delta x_1^{-p}+(1-\delta)x_2^{-p})^{-\gamma/p} \tag{2.3}$$

де $a>0$ – коефіцієнт шкали;

$\delta>0$ – коефіцієнт розподілу;

p – коефіцієнт заміщення;

γ - коефіцієнт однорідності.

З урахуванням технічного прогресу функція CES записується:

$$f(x_1, x_2) = ae^{vt}(\delta x_1^{-p}+(1-\delta)x_2^{-p})^{-\gamma/p} \tag{2.4}$$

Функція CES, як і функція Кобба-Дугласа, виходить із допущення про постійне убування граничної норми заміщення використовуваних ресурсів. Тим часом еластичність заміщення капіталу працею й, навпаки, праці капіталом у функції Кобба-

Дугласа, рівна одиниці, тут може приймати різні особисті значення, не рівні одиниці, хоча і є постійними. Нарешті, на відміну від функції Кобба-Дугласа логарифмування функції CES не приводить її до лінійного виду, що змушує використовувати для оцінки параметрів більш складні методи нелінійного регресійного аналізу.

2.2.3 Виробнича функція з фіксованими пропорціями

Ця функція виходить із Ces-Функції при $\rho\to\infty$ і має вигляд:

$$f(x_1, x_2) = (\alpha x_1^{\gamma}, \beta x_2^{\gamma}) \tag{2.5}$$

2.2.4 Виробнича функція витрат-випуску (функція Леонтьева)

Ця функція отримується з попередньої при $\gamma=1$:

$$f(x_1, x_2) = min(\alpha x_1, \beta x_2) \tag{2.6}$$

Змістовно ця функція задає пропорцію, за допомогою якої визначається кількість витрат кожного виду, необхідне для проведення одної одиниці, відповідно випускаємої продукції.

2.2.5. Виробнича функція аналізу способів виробничої діяльності.

Дана функція узагальнює виробничу функцію витрат-випуску на випадок, коли існує деяке число (r) базових процесів (способів виробничої діяльності), кожний з яких може протікати з кожної ненегативною інтенсивністю. Вона має вигляд оптимизаційної задачі:

$$f(x_1, x_2) = \sum_{j=1}^{r} d_j y_j \tag{2.7}$$

$$\sum_{j=1}^{r} x_{kj} y_j \le x_k, k = 1,2$$

Тут y_j – випуск продукції при одиничній інтенсивності j-го базового процесу, d_j – рівень інтенсивності, x_{kj} – кількість витрат виду k, необхідних при одиничній інтенсивності способу j.

Якщо випуск, зроблений при одиничній інтенсивності й витрати, необхідні на одиницю інтенсивності, відомі, то загальний випуск і загальні витрати знаходяться шляхом додавання випуску й витрат відповідно для кожного базового процесу при обраних інтенсивностях. Завдання максимізації функції f по $y_1 \dots y_r$ при заданих обмежуючих нерівностях є моделлю аналізу виробничої діяльності (максимізація випуску при обмежених ресурсах).

2.2.6 Лінійна виробнича функція (функція із взаимозамещением ресурсів)

Вона застосовується при наявності лінійної залежності випуску від витрат:

$$f(x_1, x_2) = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \tag{2.8}$$

де $\alpha_k \geq 0$ - норма витрат $к$-го виду для виробництва одиниці продукції (граничний фізичний обсяг витрат).

2.2.7 Модель Солоу

Стан економіки в моделі Солоу задається змінними:

Y- кінцева продукція;

L- трудові ресурси;

K- основні виробничі фонди або виробничий капітал;

I – інвестиції;

C – продукція невиробничого споживання.

Всі змінні взаємопов'язані (рис.2.1)

Назвемо нормою накопичення ρ долю кінцевої продукції, яка використовується в інвестиціях. Тоді

$$\begin{gathered} I=\rho Y, \\ C=(1-\rho)Y, \\ 0<\rho<1. \end{gathered} \tag{2.9}$$

Інвестиції використовуються для відновлення фондів, які вибувають, та на їх приріст. Приймемо, що фонди вибувають із постійним коефіцієнтом вибування μ, $0<\mu<1$..

Також зробимо припущення, що інвестиції у тому ж році повністю витрачаються на приріст ОВФ та на амортизацію. В дискретному варіанті цей зв'язок має вигляд

$$I\Delta t = \Delta K + D\Delta t,$$

де Δt - приріст часу,

ΔK - приріст капіталу,

D - амортизаційні відрахування.

Перепишемо останній вираз у формі

$$\Delta K = I\Delta t - D\Delta t,$$

$$\Delta K = \Delta t(I - D),$$

$$\frac{\Delta K}{\Delta t} = I - D,$$

$$\frac{\Delta K}{\Delta t} = \rho Y - \mu K.$$

Тут амортизаційні відрахування дорівнюють $D=\mu K$.

У випадку неперервного часу аналогом останнього рівняння є

$$\frac{dK}{dt} = \rho Y - \mu K .$$

Якщо вважати, що приріст трудових ресурсів пропорційний наявним трудовим ресурсам $(\Delta L = \nu L \Delta t)$, то одержуємо диференційне рівняння

$$\frac{dL}{dt} = \nu L,$$

де ν - доля приросту трудових ресурсів.

Розв'язання рівняння дає

$$L = L_0 e^{\nu t},$$

де $L_0 = L(0)$ - трудові ресурси на початку спостереження (для $t=0$).

Модель Солоу задається системою рівнянь

$$C = (1-\rho)Y,$$

$$Y = f(K,L),$$

$$L = L_0 e^{\nu t},$$

$$\frac{dK}{dt} = \rho Y - \mu K,$$

$$K(0) = K_0.$$

На початку спостереження основні фонди дорівнюють K_0.

Розглянемо стаціонарну траєкторію, на якій середня фондоозброєність

$$k = \frac{K}{L}$$

постійна і дорівнює своєму початковому значенню:

$$k(t) = const = k_0.$$

Позначимо стаціонарне значення фондоозброєності через $\tilde{k}$. Для функції Кобба-Дугласа

$$Y_1 = f(K_1,L_1) = F(K_1,L_1)/2 = aK_1^{\alpha} L_1^{1-\alpha}/2,$$

воно обчислюється за формулою

$$\tilde{k}_1 = [\rho a/(2\mu + 2\nu)]^{1/(1-\alpha)}.$$

Середня продуктивність праці $y = \frac{Y}{L}$.

На стаціонарній траєкторії позначимо продуктивність праці $\tilde{y}$. Для функції Кобба-Дугласа $\tilde{y}$ можна знайти за формулою:

$$\tilde{y}_1 = a[\rho a/(2\mu + 2\nu)]^{\alpha/(1-\alpha)}/2.$$

3 ТЕОРЕТИЧНА ЧАСТИНА ДОСЛІДЖЕННЯ

Завдання 1. Виробничі функції

Нехай виробничі функції мають вигляд:

$$X_1 = Ae^{bK} e^{cL}$$

$$X_2 = AK^b + BL^c$$

$$X_3 = AK^b L^c .$$

а) Визначити межу виробничих факторів;

б) Знайти еластичність функцій при заданих значеннях обсягу виробничих фондів *K* та витрат праці *L*;

в) межу норми заміщення ресурсів;

г) рівняння ізокванти та побудувати її графік.

Таблиця 3.1 - **Вихідні дані для виконання завдання 1**

Варіант	A	B	b	c	K	L
1	1	2	0,06	0,83	5	3
2	2	4	0,07	0,81	10	12
3	3	6	0,08	0,79	15	27
4	4	8	0,09	0,77	20	48
5	5	10	0,1	0,75	25	75
6	6	12	0,11	0,73	30	108
7	7	14	0,12	0,71	35	147
8	8	16	0,13	0,69	40	192
9	9	18	0,14	0,67	45	243
10	10	20	0,15	0,65	50	300
11	11	22	0,16	0,63	55	363
12	12	24	0,17	0,61	60	432
13	13	26	0,18	0,59	65	507
14	14	28	0,19	0,57	70	588
15	15	30	0,2	0,55	75	675
16	16	32	0,21	0,53	80	768
17	17	34	0,22	0,51	85	867
18	18	36	0,23	0,49	90	972
19	19	38	0,24	0,47	95	1083
20	20	40	0,25	0,45	100	1200
21	21	42	0,26	0,43	110	1320

Завдання 2. « Ces-Функції»

Нехай виробнича функція виду CES має вигляд:

$$X = A\left(\frac{\lambda}{K^b} + \frac{1-\lambda}{L^b}\right)^{-\frac{a}{b}}$$

Знайдіть еластичність заміщення ресурсів при заданих *K* і *L*.

Таблиця 3.2 - **Вихідні дані для виконання завдання 2**

Варіант	A	λ	b	a	K	L
1	3	0,02	0,51	3,57	5	3
2	4	0,04	0,52	3,64	10	12
3	5	0,06	0,53	3,71	15	27
4	6	0,08	0,54	3,78	20	48
5	7	0,1	0,55	3,85	25	75
6	8	0,12	0,56	3,92	30	108
7	9	0,14	0,57	3,99	35	147
8	10	0,16	0,58	4,06	40	192
9	11	0,18	0,59	4,13	45	243
10	12	0,2	0,6	4,2	50	300
11	13	0,22	0,61	4,27	55	363
12	14	0,24	0,62	4,34	60	432
13	15	0,26	0,63	4,41	65	507
14	16	0,28	0,64	4,48	70	588
15	17	0,3	0,65	4,55	75	675
16	18	0,32	0,66	4,62	80	768
17	19	0,34	0,67	4,69	85	867
18	20	0,36	0,68	4,76	90	972
19	21	0,38	0,69	4,83	95	1083
20	22	0,4	0,7	4,9	100	1200
21	23	0,42	0,71	4,97	110	1320
22	24	0,44	0,72	5,04	130	1500

Завдання 3. «Функція Кобба-Дугласа»

Нехай діяльність підприємства описує виробнича функція Кобба-Дугласа, яка має вигляд:

$$P = AK^aL^b \ .$$

Ставка орендної плати (K) вище ставки заробітної плати (L) в C раз. Фірма використовує A одиниць устаткування й B одиниць праці. З'ясуєте, на скільки відсотків фірма може знизити витрати при збереженні випуску незмінним, якщо виробнича функція має одиничну віддачу на масштаб.

Таблиця 3.3 - **Вихідні дані для виконання завдання 3**

Варіант	A	B	C	b
1	3	2	1,1	0,06
2	4	4	1,2	0,07
3	5	6	1,3	0,08
4	6	8	1,4	0,09
5	7	10	1,5	0,1
6	8	12	1,6	0,11
7	9	14	1,7	0,12
8	10	16	1,8	0,13
9	11	18	1,9	0,14
10	12	20	2	0,15
11	13	22	2,1	0,16
12	14	24	2,2	0,17
13	15	26	2,3	0,18
14	16	28	2,4	0,19
15	17	30	2,5	0,2
16	18	32	2,6	0,21
17	19	34	2,7	0,22
18	20	36	2,8	0,23
19	21	38	2,9	0,24
20	22	40	3	0,25
21	23	42	3,1	0,26
22	24	44	3,2	0,27

Завдання 4. Модель Солоу.

При заданих значеннях екзогенних параметрів табл. 3.4 необхідно:

Побудувати по них модель Солоу в абсолютних і питомих показниках (виробнича функція задана у вигляді функції Кобба-Дугласа);

Знайти аналітично наступні значення фондоозброєності на стаціонарній траєкторії та при якій швидкості росту функцій $g_1(k)$ і

g_2(k) рівні (перевірити ці значення графічно в координатах g-k і $\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}t}-k$).

Побудувати графік функції фондоозброєності від часу при різних початкових умовах (розглянути три можливі режими)

Таблиця 3.4 - **Вихідні дані для виконання завдання 4**

Варіант	K0	L0	ν	μ	a	ρ	α	A
1	300	15	0,02	0.001	0,22	0,135	0,25	10
2	320	14	0,019	0.002	0,21	0,125	0,24	11
3	310	13	0,018	0.003	0,26	0,145	0,23	12
4	325	12	0,017	0.004	0,27	0,145	0,22	13
5	340	12	0,016	0.005	0,28	0,145	0,21	10
6	345	13,5	0,021	0.004	0,29	0,175	0,26	11
7	350	14,5	0,022	0.003	0,3	0,185	0,27	12
8	355	15,5	0,023	0.002	0,24	0,16	0,28	13
9	360	16	0,024	0.001	0,25	0,17	0,29	10
10	365	16,5	0,025	0.005	0,24	0,17	0,3	11
11	335	12,5	0,018	0.004	0,23	0,135	0,24	12
12	315	15	0,021	0.003	0,22	0,135	0,25	13
13	310	14	0,018	0.003	0,21	0,125	0,24	10
14	325	13	0,017	0.004	0,27	0,15	0,23	11
15	340	12	0,016	0.005	0,28	0,15	0,22	12
16	345	12	0,021	0.004	0,29	0,15	0,21	13
17	315	14,5	0,021	0.004	0,3	0,185	0,27	10

ЛІТЕРАТУРА

1 Вітлінський В.В. Моделювання економіки: Навч. посібник. – К.: КНЕУ, 2010.- 408с.

2 Пономаренко О.І. Пономаренко В.О. Системні методи в економіці, менеджменті та бізнесі.: Навч.посібник. К.-Либідь, 2005. - 240с.

3 Клебанова Т.С., Забродський В.О., Полякова О.Ю., Петренко В.Л. Моделювання економіки: Навч. посібник. – Харків: Видавництво ХДЕУ, 2009.-140 с.

4 Бережна О.В., Бережной В.Г. Математичні методи моделювання економічних систем. Навч. посібник. – М.: Фінанси та статистика, 2001. – 368с.

5 Хачатрян С.Р. Прикладні методи математичного моделювання економічних систем. Науково-метод. Посібник / Московська академія економіки та права. – М.: "Екзамен", 2002. - 192с.

6 Губин Н.М. и др. Экономико-математические методы и модели в планировании и управлении в отрасли связи: Учеб. пособие / Губин Н.М., Добронравов А.С., Дорохов Б.С. – М.: Радио и связь, 2003. –376с.

7 Малыхин В.И. Математическое моделирование экономики: Учебно-практическое пособие. - М.: Издательство УРАО, 2008. – 160с.

8 Экономико-математические методы и прикладные модели: Учеб. пособие для вузов/ В.В. Федосеев, А.Н. Гармаш, Д.М. Дайитбегов и др.; Под ред. В.В. Федосеева. – М.: ЮНИТИ, 2009. - 391с.

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
ДО ВИКОНАННЯ КУРСОВОЇ РОБОТИ
З ДИСЦИПЛІНИ “ЕКОНОМІКО-МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ”

для студентів напряму підготовки
6.030504 – Економіка підприємства
(заочна форма навчання)

Укладачі Бредихін Володимир Михайлович
Вербицька Вікторія Іванівна

Відповідальний за випуск І.А.Дмитрієв

Підп. до друку Формат 60*80 1/16 Папір тип.
Друк офсетний. Розум. печ. л. 1,4 Навч. вид.л. 1,5
Зак. № Тираж 200 экз. Ціна договірна

ХНАДУ, 61002, Харків, вул. Петровського, 25

Підготовлено до друку РІО Харківського національного автомобільно-дорожнього університету