МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ

ХАРЬКОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ АВТОМОБИЛЬНО-ДОРОЖНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ДЛЯ ВЫПОЛНЕНИЯ ПРАКТИТЕСКИХ РАБОТ ПО ДИСЦИПЛИНЕ «ОПТИМИЗАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ И МОДЕЛИ»

для студентов дневной формы обучения

специальностей 051 «Экономика», 076 «Предпринимательство, торговля и биржевая деятельность»

Харьков 2017

Составители Федорова В.А.

Кафедра экономики и предпринимательства

В данном методическом пособии показано как с помощью средства поиска решений ППП Excel и средств линейного программирования MatLab решаются линейные оптимизационные задачи на примере типичных производственных ситуаций: планирование производства, составление расписаний, транспортная задача и планирование работ. Приведены примеры оценки наилучшего и наихудшего вариантов развития экономической ситуации с использованием возможностей сценариев и матричных игр. Рассмотрены задачи для решения которых применяется теория системы массового обслуживания.

В заданиях i – последняя цифра зачетной книжки, j – предпоследняя цифра.

ПРАКТИЧЕСКАЯ №1

ПЛАНИРОВАНИЕ ПРОИЗВОДСТВА

Фабрика выпускает два типа красок: для внутренних (I) и наружных (E) работ.

Продукция обоих видов поступает в оптовую продажу. Для производства красок используются два исходных продукта A и B. Максимально возможные суточные запасы этих продуктов составляют 6 и 8 тонн, соответственно. Расходы продуктов A и B на 1 т соответствующих красок приведены в табл. 1.1.

Таблица 1.1 - Исходные данные задачи о планировании производства красок

Исходный продукт	Расход исходных продуктов на тонну краски, т		Максимально возможный запас, т
	краска E	краска I	
A	1	2	6
B	2	1	8

Изучение рынка сбыта показало, что суточный спрос на краску I никогда не превышает спроса на краску E более чем на 1 т. Кроме того, установлено, что спрос на краску I никогда не превышает 2 т в сутки. Оптовые цены одной тонны красок равны: 3000 руб. для краски E и 2000 руб. для краски I. Какое количество краски каждого вида должна производить фабрика, чтобы доход от реализации продукции был максимальным?

Для решения этой задачи необходимо построить математическую модель.

В нашем случае фабрике необходимо спланировать объем производства красок так, чтобы максимизировать прибыль. Поэтому переменными являются:

Xi — суточный объем производства краски I и Xe — суточный объем производства краски E.

Суммарная суточная прибыль от производства Xi краски I и Xe краски E равна

$$Z = 3000*Xe + 2000*Xi \quad (1.1)$$

Целью фабрики является определение среди всех допустимых значений Xi и Xe таких, которые максимизируют суммарную прибыль, т. е, целевую функцию Z.

Перейдем к ограничениям, которые налагаются на Xe и Xi. Объем производства красок не может быть отрицательным, следовательно:

$$Xt, Xi > 0 \quad (1.2)$$

Расход исходного продукта для производства обоих видов красок не может превосходить максимально возможный запас данного исходного продукта, следовательно:

$$Xe + 2Xi <= 6 \quad (1.3)$$

$$2Xe + Xi <= 8 \quad (1.4)$$

Кроме того, ограничения на величину спроса на краски таковы:

$$Xi-Xe <= 1 \quad (1.5)$$

$$Xi < 2 \quad (1.6)$$

Таким образом, математическая модель данной задачи имеет следующий вид:

максимизировать

$$Z= 300Xe + 2000Xi$$

при следующих ограничениях:

$Xe+2Xi<= 6$
$2Xe+Xi<= 8$
$Xi-Xe<=1$
$Xi<=2$
$Xi, Xe>=0$

Заметим, что данная модель является линейной, т. к. целевая функция 1-ограничения линейно зависят от переменных.

1. Решим данную задачу с помощью команды Сервис - Поиск решения (Tools Solver) ППП Excel. Средство поиска решений является одной из надстроек Excel. Если в меню Сервис (Tools) отсутствует команда Поиск решения (Solver), то для ее установки необходимо выполнить команду Сервис, Надстройки, Поиск решения (Tools, Add-ins, Solver).

Отведем ячейки **А3** и **В3** под значения переменных Xe и Xi

В ячейку **С4** введем функцию цели

=3000*А3+2000*В3

в ячейки **А7:А10** введем левые части ограничений

=А3+2*В3

=2А3+*В3

=В3-А3

=В3

а в ячейки **В7:В10** — правые части ограничений.

После этого выберем команду Сервис, Поиск решения (Tools, Solver) и заполним открывшееся диалоговое окно Поиск решения (Solver).

После нажатия кнопки Выполнить (Solve) открывается окно Результаты поиска решения (Solver Results), которое сообщает что решение найдено.

Задание

Какое количество деталей каждого вида должна производить фабрика, чтобы доход от реализации продукции был максимальным? Исходные данные приведены в табл. 1.2.

Таблица 1.2. - Исходные данные

Компоненты	Расход компонентов на 1 деталь, т		Максимально возможный запас, т
	Деталь 1	Деталь 1	
A	i	2*i	10*i
B	j	2*j	7*j+2*i

Остальные данные взять из примера.

Контрольные вопросы

1. Для определения каких величин строится модель (т. е. каковы переменные модели)?
2. В чем состоит цель, для достижения которой из множества всех допустимых значений переменных выбираются оптимальные?
3. Каким ограничениям должны удовлетворять неизвестные?

Литература

[1-3], [5-6]

ПРАКТИЧЕСКАЯ №2

ПЛАНИРОВАНИЕ ПОРТФЕЛЯ ЗАКАЗАВ

Для получения сплавов А и В используются четыре металла I, II, III и IV, требования к содержанию которых в сплавах А и В приведены в табл. 1.3.

Таблица 1.3 - Требования к содержанию металлов в состава сплавов

Сплав	Требования к содержанию металла
А	Не более 80% металла I
	Не более 30% металла II
В	От 40 до 60% металла II
	Не менее 30% металла III
	Не более 70% металла IV

Характеристики и запасы руд, используемых для производства металлов I, II, III и IV, указаны в табл. 1.4.

Таблица 1.4 - Характеристики и запасы руд в задаче об определении состава сплавов

Руда	Максимальный запас, т	Состав, %					Цена, S/т
		1	11	III	IV	Другие компоненты	
1	1000	20	10	30	30	10	30
2	2000	10	20	30	30	10	40
3	3000	5	5	70	20	0	50

Пусть цена 1 т сплава А равна 200 долларов, а 1 т сплава В — 210 долларов. Необходимо максимизировать прибыль от продажи сплавов А и В.

Обозначим через x1a, x2a, x3a, x4a и x1в, x2в, x3в, x4в количество I, II, III и IV металлов, используемых для получения сплавов А и В, соответственно. Количество использованной i-я руды обозначим yi I=[1, 3].

Тогда математическая модель данной задачи имеет вид:

максимизировать:

$$Z = 200(x1a+x2a+x3a+x4a) + 210(x1в+x2в+x3в+x4в) -$$

$$- 30y1 - 40y2 - 50y3 \qquad (1.7)$$

при ограничениях на состав сплавов (на основании данных из табл.):

$$x1a <= 0,8(x1a+x2a+x3a+x4a) \quad (1.8)$$

$$x2a <= 0,3 (x1a+x2a+x3a+x4a) \quad (1.9)$$

$$x2в <= 0,6(x1в+x2в+x3в+x4в) \quad (1.10)$$

$$x2в >= 0,4(x1в+x2в+x3в+x4в) \quad (1.11)$$

$$x3в >= 0,3(x1в+x2в+x3в+x4в) \quad (1.12)$$

$$x4b <= 0,7(x1в+x2в+x3в+x4в) \quad (1.13)$$

на характеристики и состав руды (на основании данных из табл. 1.4):

$$x1a+x1b <= 0,2y1+0,1y2+0,05y3 \quad (1.14)$$

$$x2a+x2b <= 0,1y1+0,2y2+0,05y3 \quad (1.15)$$

$$x3a+x3b <= 0,3y1+0,3y2+0,7y3 \quad (1.16)$$

$$x4a+x4b <= 0,3y1+0,3y2+0,2y3 \quad (1.17)$$

а также на диапазоны использования переменных:

$$xia >= 0,\ xib >= 0,\ I=[1,4] \quad (1.18)$$

$$0 <= y1 <= 1000 \quad (1.19)$$

$$0 <= y2 <= 2000 \quad (1.20)$$

$$0 <= y3 <= 3000 \quad (1.21)$$

1. Решим данную задачу с помощью команды Сервис - Поиск решения (Tools Solver) ППП Excel. Отведем под переменные xia, xib I=[1, 4] диапазон ячеек **C3:D6**, а под переменные yi, I=[1, 3] - диапазон ячеек **F3:F5**.

В ячейку **G9** введем функцию цели

=200*СУММ(C3:C6)+210*СУММ(D3:D6)-30*F3-40*F4-50*F5

В диапазоне ячеек **C8:C17** введем левые части ограничении, причем преобразуем их к виду когда все переменные находятся слева, а все знаки неравенств — меньше или равно:

=C3-0.8*СУММ(C3:C6)
=C4-0.3*СУММ(C3:C6)
=D4-0.6*СУММ(D3:D6)
=0.4*СУММ(D3:D6)-D4
=0.3*СУММ(D3:D6)-D5
=D6-0.7*СУММ(D3:D6)
=СУММ(C3:D3)-0.2*$F$3-0.1*$F$4-0.05*$F$5
=СУММ(C4:D4)-0.1*$F$3-0.2*$F$4-0.05*$F$5
=СУММ(C5:D5)-0.3*$F$3-0.3*$F$4-0.7*$F55
=СУММ(C6:D6)-0.3*$F$3-0.3*$F$4-0.2*$F$5

В диапазон ячеек НЗ:Н5 введем количество имеющихся запасов руд. Выберем команду Сервис, Поиск решения (Tools, Solver) и заполним диалоговое окно Поиск решения (Solver)

Задание

Составить портфель заказов, чтобы доход от реализации продукции был максимальным? Исходные данные приведены в табл. 1.5.

Таблица 1.5. - Исходные данные

Полуфабрикаты	Максимальный запас, т	Состав, %					Цена, S/т
		1	11	III	IV	Другие компоненты	
1	1000	i	2*i	5+i	4+j	10	30
2	2000	j	2*j	4+j	2+i	10	40
3	3000	i+j	2*i+j	i+j	i+4*j	0	50

Остальные данные взять из примера.

Контрольные вопросы

1. Для определения каких величин строится модель (т. е. каковы переменные модели)?
2. В чем состоит цель, для достижения которой из множества всех допустимых значений переменных выбираются оптимальные?
3. Каким ограничениям должны удовлетворять неизвестные?

Литература

[1-3], [5-6]

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №3

ПЛАНИРОВАНИЕ РАСПИСАНИЯ

Авиакомпании требуется определить, сколько стюардесс следует принять на работу в течение шести месяцев при условии, что любая из них должь-i пройти предварительную подготовку. Потребности в количестве человеко-часов летного времени для стюардесс известны: в январе — 8000 , в феврале — 9000, в марте — 8000. в апреле — 10000, в мае — 9000 и в июне — 12000.

Подготовка стюардессы к выполнению своих обязанностей занимает один Месяц. Следовательно, прием на работу должен, по крайней мере, на один месяц опережать ввод стюардессы в строй. Кроме того, каждая стюардесса Должна в течение месяца, отведенного на ее подготовку, пройти 100-часовую практику непосредственно во время полетов. Таким образом, за счет каждой обучаемой стюардессы в течение месяца освобождается 100 человеко-часов летного времени, отведенного для уже обученных стюардесс.

Каждая полностью обученная стюардесса в течение месяца может иметь налет до 150 часов. Авиакомпания в начале января уже имеет 60 опытных стюардесс. При этом ни одну из них не снимают с работы. Установлено также что приблизительно 10% обучаемых стюардесс по окончании обучения увольняются по каким-либо обстоятельствам. Опытная стюардесса обходится авиакомпании в

$800, а обучаемая — в $400 в месяц. Необходимо спланировать штат авиакомпании таким образом, чтобы минимизировать издержки за отчетные шесть месяцев.

Для данной задачи также можно разработать математическую модель, но ее удобнее проанализировать в более развернутой форме. Отведем диапазон ячеек **B3:B8** под число новых стюардесс, принимаемых на работу с января по июнь

В ячейку **B2** введем число стюардесс, работающих в декабре. В диапазоне ячеек **D3:D8** вычислим число стюардесс, постоянно работающих в текущем месяце, введя в ячейки **D3** и **D4** формулы

=B2
=D3+0,9*B3

и протаскивая последнюю из них на диапазон **D5:D8**. В диапазоне **E3:E8** вычислим налет по месяцам, введя в ячейку **E3** формулу

=D3*$E$12+B3*$D$12

и протаскивая ее на диапазон **E3:E8**, где в ячейке **D12** и **E12** введены затраты на обучение и работу стюардессы. Вычислим суммарные затраты за планируемый период в ячейке **F9** по формуле

СУММ(E3:E8)

Выберем команду Сервис, Поиск решения (Tools, Solver) и заполним диалоговое окно Поиск решения (Solver).

Задание

Исходные данные взять из примера, но предположить, что в июне рабочих не брать а в июле не более **i+j** человек.

Контрольные вопросы

1. Для определения каких величин строится модель (т. е. каковы переменные модели)?
2. В чем состоит цель, для достижения которой из множества всех допустимых значений переменных выбираются оптимальные?
3. Каким ограничениям должны удовлетворять неизвестные?

Литература

[1-5], [5-6]

ПРАКТИЧЕСКАЯ №4

ТРАНСПОРТНАЯ ЗАДАЧА

Предположим, что фирма имеет 4 фабрики и 5 центров распределения ее товаров. Фабрики фирмы располагаются в А, Б, В, Г с производственными возможностями 200, 150, 225 и 175 единиц продукции ежедневно, соответственно. Центры распределения товаров фирмы располагаются в 1, 2, 3, 4, 5 с потребностями в 100, 200, 50, 250 и 150 единиц продукции ежедневно, соответственно. Хранение на фабрике единицы продукции, не поставленной в центр распределения, обходится в $0,75 в день, а штраф за просроченную поставку единицы продукции, заказанной потребителем в центре распределения, но там не находящейся, равен $2,5 в день. Стоимость перевозки единицы продукции с фабрик в пункты распределения приведена в табл. 1.6.

Таблица 1.6 - Транспортные расходы

		1	2	3	4	5
1	А	1.5	2	1.75	2.25	2,25
2	Б	2.5	2	1.75	1	1.5
3	В	2	1,5	1.5	1.75	1.75
4	Г	2	0.5	1.75	1.75	1.75

Необходимо так спланировать перевозки, чтобы минимизировать суммарные транспортные расходы.

Поскольку данная модель сбалансирована (суммарный объем произведенной продукции равен суммарному объему потребностей в ней), то в этой модели не надо учитывать издержки, связанные как со складированием, так и с недопоставками продукции. В противном случае в модель нужно было бы ввести:

В случае перепроизводства — фиктивный пункт распределения, стоимость перевозок единицы продукции в который полагается равной стоимости складирования, а объемы перевозок — объемам складирования излишков продукции на фабриках

В случае дефицита — фиктивную фабрику, стоимость перевозок единицы продукции с которой полагается равной стоимости штрафов за недопоставку продукции, а объемы перевозок — объемам недопоставок продукции в пункты распределения.

Для решения данной задачи построим ее математическую модель. Неизвестными в данной задаче являются объемы перевозок. Пусть Xij — объем перевозок с i-й фабрики в j-й центр распределения.

Функция цели — это суммарные транспортные расходы, т. е.

$$Z=\Sigma\Sigma cij*xij \quad (1.22)$$

где Cij— стоимость перевозки единицы продукции с i-й фабрики j-й центр распределения.

Неизвестные в данной задаче должны удовлетворять следующим ограничениям:

Объемы перевозок не могут быть отрицательными

Так как модель сбалансирована, то вся продукция должна быть вывезена с фабрик, а потребности всех центров распределения должны быть полностью удовлетворены

В результате имеем следующую модель:

минимизировать:

$$Z=\Sigma\Sigma cij*xij \quad (1.23)$$

при ограничениях:

$$\Sigma xij=Ьj, ,j=[1, 5] \quad (1.24)$$

$$\Sigma xij=ai, i=[1,4], \quad (1.25)$$

$$xij>=0, i=[1,4], j= [1,5]. \quad (1.26)$$

где ai — объем производства на i-й фабрике, bi — спрос вj-м центре распределения.

1. Решим данную задачу с помощью команды Сервис - Поиск решения (Tools Solver) ППП Excel.

В ячейки **A1:E4** введены стоимости перевозок. Ячейки **A6:E9** отведены под значения неизвестных (объемы перевозок). В ячейки **G6:G9** введены объемы производства на фабриках, а в ячейки **A11:E11** введена потребность в продукции в пунктах распределения.

В ячейку **F10** введена целевая функция
=СУММПРОИЗВ(A1:E4;A6:E9)

В ячейки **A10:E10** введены формулы
=СУММ(A6:A9)
=СУММ(B6:B9)
=СУММ(C6:C9)
=СУММ(D6:D9)
=СУММ(E6:E9)
определяющие объем продукции, ввозимой в центры распределения.

В ячейки **F6:F9** введены формулы
=СУММ(A6:E6)
=СУММ(A7:E7)
=СУММ(A8:E8)
=СУММ(A9:E9)
вычисляющие объем продукции, вывозимой с фабрик.

Теперь выберем команду Сервис, Поиск решения (Tools, Solver) и заполним открывшееся диалоговое окно Поиск решения (Solver).

Не забудьте в диалоговом окне Параметры поиска решения (Solver Options установить флажок Линейная модель (Assume Linear Model). После нажатия кнопки Выполнить (Solve) средство поиска решений находит оптимальный план поставок продукции и соответствующие ему транспортные расходы.

Задание

Спланировать перевозки, чтобы минимизировать суммарные транспортные расходы для исходных данных расстояний представленных в табл. 1.7. Остальные данные взять из примера

Таблица 1.7 - Транспортные расходы

		1	2	3	4	5
1	а	i	2*i	5+2*i	10+j	i
2	б	j	5+j	5+2*j	2*i+10	j
3	в	2+i	2*j	2*i+2*j	j+2*i	2+i
4	г	5+j	i+j	10+i	i+j	3+j

Контрольные вопросы

1. Для определения каких величин строится модель (т. е. каковы переменные модели)?
2. В чем состоит цель, для достижения которой из множества всех допустимых значений переменных выбираются оптимальные?
3. Каким ограничениям должны удовлетворять неизвестные?

Литература

[1-5], [5-6]

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №5

НАЗНАЧЕНИЕ НА РАБОТЫ

Четверо рабочих могут выполнять четыре вида работ. Стоимости C_y выполнения i-м рабочим j-работы приведены в табл. 1.8

Таблица 1.8 – Стоимость выполнения работ

	Работа 1	Работа 2	Работа 3	Работа 4
Рабочий 1	1	4	6	3
Рабочий 2	9	10	7	9
Рабочий 3	4	5	11	7
Рабочий 4	8	7	8	5

Внесем в ячейки диапазона **A1:D4** стоимости выполнения работ соответственно.

В этой таблице строки соответствуют рабочим, а столбцы — работам. Необходимо составить план выполнения работ так, чтобы все работы были выполнены, каждый рабочий был загружен только на одной работе, а суммарная стоимость выполнения всех работ была минимальной. Отметим, что данная задача является сбалансированной, т. е. число работ совпадает с числом рабочих. Если задача не сбалансирована, то перед началом решения ее необходимо сбалансировать, введя недостающее число фиктивных строчек или столбцов с достаточно большими штрафными стоимостями работ.

Для решения данной задачи построим ее математическую модель. Пусть переменная xij= 1, если i-м рабочим выполняется j-я работа, и xij= 0, если i-м рабочим не выполняется j-я работа. Тогда модель имеет следующий вид:

минимизировать:

$$Z=\Sigma\Sigma cij*xij \qquad (1.27)$$

при ограничениях:

$$\Sigma xij=1,\ j=[1,4] \tag{1.28}$$

$$\Sigma\ xij=1,\ I=[1,4] \tag{1.29}$$

$$xij=[0,1],\quad I=[1,4],\quad j=[1,4]. \tag{1.30}$$

1. Решим данную задачу с помощью команды Сервис - Поиск решения (Tools Solver) ППП Excel. Для этого отведем под неизвестные диапазон ячеек **F2:I5**. В ячейку **J2** введем целевую функцию

=СУММПРОИЗВ(F2:I5;A1:D4)

вычисляющую стоимость работ.

В ячейки **J2:J5** и **F6:I6** введем формулы, задающие левые части ограничений.

=СУММ(F2:I2)
=СУММ(F3:I3)
=СУММ(F4:I4)
=СУММ(F5:I5)
=СУММ(F2:F5)
=СУММ(G2:G5)
=СУММ(H2:H5)
=СУММ(I2:I5)

Затем выберем команду Сервис, Поиск решения (Tools, Solver) и заполним открывшееся диалоговое окно Поиск решения (Solver).

Не забудьте в диалоговом окне Параметры поиска решения (Solver) установить флажок Линейная модель (Assume Linear Model). После нажатия кнопки Выполнить (Solve) средство поиска решений найдет оптимальное решение.

Заметим что флажок Формулы диалогового окна Параметры (Options), открываемого командой Сервис, Параметры (Tools, Options), обеспечивает отображение формул в ячейках, если они там находятся.

Задание

Спланировать выполнение работ, чтобы минимизировать суммарные расходы для исходных данных расстояний представленных в табл. 1.9. Остальные данные взять из примера

Таблица 1.9 – Стоимость работ

		1	2	3	4	5
1	А	I	2*i	5+2*i	10+j	I
2	Б	J	5+j	5+2*j	2*i+10	J
3	В	2+i	2*j	2*i+2*j	J+2*i	2+i
4	Г	5+j	I+j	10+i	I+j	3+j

Контрольные вопросы

1. Для определения каких величин строится модель (т. е. каковы переменные модели)?
2. В чем состоит цель, для достижения которой из множества всех допустимых значений переменных выбираются оптимальные?
3. Каким ограничениям должны удовлетворять неизвестные?

Литература

[2-3], [5-6]

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 6.

ПЛАНИРОВАНИЕ ПРОИЗВОДСТВЕННОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ СТО АВТОМОБИЛЕЙ

Цель занятия - изучить методику расчета потребности СТО в производственных элементах, использующую модели теории массового обслуживания

Задание. На автомагистрали проектируется станция технического обслуживания автомобилей индивидуальных владельцев. Требуется определить, какое количество моечных постов необходимо иметь на этой станции, если известно, что станция будет работать T часов в сутки. В среднем за каждый час по магистрали проходит λ автомобилей, нуждающихся в мойке. Среднее время мойки одного автомобиля равно $t_{обсл}$ мин. Оплата за мойку одного автомобиля d_3 д.е., а содержание одного поста в сутки составляет C_n д.е. Значения указанных параметров приведены по вариантам в таблице 6.

Указания к выполнению задания

Решение задачи рассмотрим на примере при условии T =16 часов, λ =12 авт./ч; $\boldsymbol{t}_{обсл}$ = 10 мин; d_3= 1 у.е.; $C_п$= 33 д.е.

1.Традиционное решение (основанное на средних).

Обычно при решении такой задачи рассуждают следующим образом. Мойка автомобиля длится 10 мин, значит за 1 ч на одном посту будет обслужено 6 автомобилей. Так как требуется в час обслужить 12 автомобилей, необходимо иметь на станции два поста мойки. Однако при таком рассуждении совершенно не учитывается случайный характер данного процесса обслуживания. Ведь автомобили могут следовать по магистрали не строго через каждые 5 мин, и время их мойки в зависимости от загрязнения может колебаться около 10 мин. Если в момент прибытия автомобиля на станцию все моечные посты будут заняты, его владелец не будет ждать, и станция потеряет клиента. Однако при проектировании станции можно предусмотреть любое количество моечных постов и тогда есть большая вероятность того, что каждый автомобиль будет обслужен.

2. Указания к решение типовой задачи методами теории массового обслуживания

Описанный выше пример относится к типу систем массового обслуживания с неограниченным числом аппаратов обслуживания и возможными потерями требований на обслуживание. Критерием качества функционирования такого типа систем обслуживания иногда принимается вероятность занятости всех аппаратов обслуживания или отказа в обслуживании в момент поступления очередного требования на обслуживание, которая рассчитывается по формуле

$$P_n = \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \frac{1}{n!}}{\sum \frac{1}{m!} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^m} \qquad (1.31)$$

где: P_n - вероятность занятости всех аппаратов или отказа в обслуживании;

n - число обслуживающих аппаратов;

m - количество требований на обслуживание.

Так как здесь одновременно могут обслуживаться п требований, то $n=m$, λ =12, а так как 10 мин=1/6 часа, то интенсивность выходящего потока
μ = 1/(1/6) = 6 автомобилей.

Вычислим P_n при наличии на станции двух моечных постов

$$P_n = \frac{\left(\frac{12}{6}\right)^2 \cdot \frac{1}{2!}}{\sum_{m=0}^{n=2} \frac{1}{m!}\left(\frac{12}{6}\right)^m} = \frac{2^2 \cdot \frac{1}{2}}{\frac{1}{0!} \cdot 2^0 + \frac{1}{1!} \cdot 2^1 + \frac{1}{2!} \cdot 2^2} = \frac{2}{1+2+2} = \frac{2}{5} = 0.4 \qquad (1.32)$$

Аналогичные вычисления производим для четырех, пяти, шести и более постов. Результаты заносим во вторую графу таблицы 1.10.

Таблица 1.10 - вероятность занятости всех аппаратов

Число моечных постов, *n*	Вероятность занятости всех постов, *P„*	Доходы, д.е.	Расходы, д.е.	Прибыль (+), убыток (—), д.е.
2	0,4	115	66	+49
3	0,21	151	99	+52
4	0,096	173	132	+41
5	0,037	186	165	+21
6	0,001		198	-6

3. Расчет экономических показателей эффективности работы СТО с использованием вероятностных параметров

При наличии двух моечных постов вероятность отказа составляет 0,4, или из 100 проходящих по магистрали автомобилей 40 найдут посты занятыми и уедут, а 60 будут обслужены. Так как за 1 ч по магистрали в среднем проходит 12 автомобилей, а станция будет работать 16 ч в день, общее число обслуженных автомобилей за сутки составит 115 автомобилей (12*16*0,6) из общего числа проходящих автомобилей за это время, которое равно 192 (12*16).

Таким образом, 77 автомобилей не будет обслужено.

Если рассчитать количество обслуживаемых автомобилей за сутки по той же формуле для различного числа моечных постов и определить сумму доходов из расчета оплаты за мойку одного автомобиля в размере 1 у.е. и сумму расходов из расчета 33 у.е. на каждый пост в сутки, то получим данные, приведенные в табл. 1.10. Они показывают, что с экономической точки зрения целесообразно иметь три, а не два моечных поста.

Эту же систему массового обслуживания также необходимо проверить на другой критерий — среднее число занятых обслуживанием аппаратов, что в рассматриваемом примере соответствует средней занятости моечных постов. Расчет производится по формуле

$$M = \frac{\lambda}{\mu}\left(1 - P_n\right) \tag{1.33}$$

где: M - математическое ожидание (среднее число) одновременно занятых аппаратов;

P_n - вероятность того, что все обслуживающие аппараты свободны;

n - число обслуживающих аппаратов (постов).

Соответствующие расчеты по этой формуле для рассматриваемого примера приведены в табл. 1.11.

Таблица 1.11 - Вероятностная оценка загрузки оборудования СТО

Число моечных постов, n	Математическое ожидание числа одновременно занятых постов, M	Средняя загруженность одного поста, M/n	Число моечных постов, n	Математическое ожидание числа одновремен - но занятых постов, M	Средняя загруженность одного поста, M/n
2	1,20	0,60	4	1,81	0,45
3	1,59	0,53	5	1,93	0,39

Отношение M/n показывает среднюю загруженность одного моечного поста. Из табл. 1.11 видно, что при двух постах будет обеспечена их максимальная загрузка. Однако, если сравнить это с результатами, полученными в табл. 1.10, то видно, что максимальная загрузка оборудования не гарантирует получение максимального экономического эффекта.

В приведенном примере рассмотрен один тип систем массового обслуживания — с неограниченным числом аппаратов обслуживания и с потерями требований на обслуживание.

В теории массового обслуживания рассматриваются и другие типы систем обслуживания требований.

Задание

Таблица 1.12 – Исходные данные к работе

Варианты	Время работы СТО, ч	Интенсивность входящего потока автомобилей, авт/ч	Среднее время обслуживания одного автомобиля, мин	Средний доход от обслуживания одного автомобиля, д.е,	Расходы на содержание одного поста в сутки, д.е.
1	2	3	4	5	6
0	16	12,00	10,00	1,00	33,00
1	13	9,60	8,00	0,80	26,40
2	16	10,51	9,60	0,96	31,68
3	18	7,67	10,56	1,06	34,85
4	12	8,62	7,18	0,72	23,70
5	10	7,32	6,10	0,61	20,14
6	10	7,18	5,98	0,60	19,74
7	8	5,38	4,49	0,45	14,80
8	10	6,46	5,38	0,54	17,77
9	15	9,69	8,08	0,81	26,65
10	18	4,63	9,69	0,97	31,98
11	18	5,31	9,59	0,96	31,66
12	15	9,79	8,15	0,82	26,91
13	17	10,76	8,97	0,90	29,60
14	19	6,84	9,87	0,99	32,56
15	15	9,47	7,89	0,79	26,05
16	12	7,58	6,31	0,63	20,84
17	10	6,06	5,05	0,51	16,67
18	18	6,91	9,09	0,91	30,01

Продовження табл. 1.12

1	2	3	4	5	6
19	14	6,73	7,27	0,73	24,01
20	15	8,60	8,00	0,80	26,41
21	12	4,68	6,40	0,64	21,13
22	19	3,29	10,24	1,02	33,80
23	18	2,43	9,53	0,95	31,43
24	12	9,77	6,48	0,65	21,38
25	10	10,22	5,18	0,52	17,10

Контрольные вопросы

1. Какие типы систем массового обслуживания вы знаете?
2. Какие основные характеристики систем массового обслуживания вы знаете?
3. Что такое Пуассоновские системы массового обслуживания?

Литература

[2-3], [5-6]

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 7

ПЛАНИРОВАНИЕ РЕКЛАМНОЙ КОМПАНИИ

Цель занятия - изучить методику расчета потребности в рекламе с использованием игровых ситуаций

Задание. Фирма еженедельно анализирует, как обстоят дела со сбытом одного из видов своей продукции и дает оценку:

отличную ("о" — состояние 1),

хорошую ("х" — состояние 2)

или удовлетворительную ("у" — состояние 3).

Необходимо принять решение о целесообразности рекламирования этой продукции с целью расширения ее сбыта.

В диапазонах B3:D5 и B6:D8 матрицы P1 и P2 определяют переходные вероятности без рекламы и при ее наличии в течение любой недели.

Так, $P1_{22}$ = 0,5 и $P1_{23}$ = 0,5 означает, что если в предыдущую неделю сбыт был хорошим, то и без рекламы на текущей неделе с равной вероятностью он останется хорошим или станет удовлетворительным.

Соответствующие доходы заданы матрицами R1 и R2 в диапазонах E3:G5 и E6:G8. Отметим, что элементы матрицы R2 учитывают затраты на рекламу. Необходимо спланировать оптимальную рекламную кампанию на последующие три недели.

Для общности предположим, что план составляется на N недель, а число состояний для каждого этапа равно *m*. Пусть *fn*(i) — оптимальный ожидаемый доход за этапы *n, n+1, ...N* при условии, что система находится в состоянии *i* в начале *n-й* недели.

Тогда:

$$f_n(i) = \max\left\{\sum_{j=1}^{m} p_{ij}^k \left(r_{ij}^k + f_{n+1}(i)\right)\right\}, \quad n \in [1, N] \tag{1.34}$$

Где f_{n+1}(i)=0 при всех j.

Пусть

$$\nu_i^k = \sum_{j=1}^{m} p_{ij}^k r_{ij}^k \tag{1.35}$$

Тогда

$$f_N(i) = \max\left\{\nu_i^k \right\} \tag{1.36}$$

$$f_n(i) = \max\left\{\nu_i^k + \sum_{j=1}^{m} p_{ij}^k f_{n+1}\right\}, \ n \in [1, N-1] \tag{1.37}$$

В ячейку I3 введена формула

=СУММПРОИЗВ (B3:D3; E3:G3)

Вычисляющая ν_1^1, которая протаскивается на диапазон I4:I8 для вычисления $\nu_2^1 \ldots \nu_3^2$

В ячейки диапазона I10:I15 последовательно введены формулы

=I3

=I6

= I4

= I7

= I5

= I8

упорядочивающие ожидаемые доходы по следующим парам: первое состояние без рекламы и при ее наличии, второе состояние без рекламы и при ее наличии и третье состояние без рекламы и при ее наличии. В ячейки диапазона B11:B13 введены формулы

=МАКС(I10:I11)

=МАКС(I12:I13)

=МАКС(I14:I15)

определяющие максимальную ожидаемую прибыль на третьей неделе, если на предыдущей неделе система находилась в первом, втором или третьем состоянии, соответственно. В ячейках диапазона C11:C13 по формулам

=ПОИСКП03(B11;I10:I11;0)

=ПОИСКПОЗ(B12;I12:I13;0)

=ПОИСКПОЗ(B13;I14:I15;0)

определяется оптимальный вариант действий. Если 1, то деньги на рекламу не тратить, а если 2 — то тратить.

Перейдем ко второй неделе рекламной кампании. В ячейку J3 введена формула

=I3+МУМНОЖ(B3:D3;$B$11:$B$13)

вычисляющая

$$\nu_1^1 + \sum_{j=1}^{3} p_{2j}^1 f_3(j) \tag{1.38}$$

которая протаскивается на диапазон J4:J8 для вычисления

$$\begin{gathered} \nu_2^1 + \sum_{j=1}^{3} p_{2j}^1 f_3(j) \\ \ldots \\ \nu_3^2 + \sum_{j=1}^{3} p_{3j}^2 f_3(j) \end{gathered} \tag{1.39}$$

В ячейки диапазона J10: J15 введены последовательно формулы

=J3

=J6

= J4

=J7

=J5

=J8

упорядочивающие ожидаемые доходы по следующим парам: первое состояние без рекламы и при ее наличии, второе состояние без рекламы и при ее наличии и третье состояние без рекламы и при ее наличии. В ячейки диапазона D11:D13 введены формулы

=МАКС(J10:J11)

=МАКС(J12:J13)

=МАКС(J14:J15)

определяющие максимальную ожидаемую прибыль на второй неделе, если на предыдущей неделе система находилась в первом, втором или третьем состоянии, соответственно. В ячейках диапазона E11:E13 по формулам

=П0ИСКПОЗ(D11;J10:J11;0)

=ПОИСКПОЗ(D12;J12:J13;0)

=ПСИСКПОЗ(D13;J14:J15;0)

определяется оптимальный вариант действий. Аналогично проводятся расчеты для первой недели.

В результате решения видно, что на первой и второй неделях необходимо использовать рекламу, не считаясь с состоянием системы, однако, на третьей неделе рекламу следует использовать только тогда, когда система находится во втором или третьем состояниях. Суммарный ожидаемый доход фирмы составит 10736 при отличной оценке, 7923 — при хорошей и 4222 — при удовлетворительной оценке.

Задание

В каждом массиве сумма цифр по строкам равна 1. Все цифры записываются 0,… (ноль целых).

Вероятности продаж без рекламы				Доходы продаж без рекламы		
	О	Х	У	О	Х	У
О	i	j		7000	6000	3000
Х	0		i+j	0	5000	1000
У	0	0	1	0	0	-1000
Вероятности продаж при наличии рекламы				Доходы продаж без рекламы		
О	i+j			6000	5000	-1000
Х	i			7000	4000	0
У				6000	3000	-2000

Контрольные вопросы

1. Для решения каких задач используются игровые модели?

2. В чем состоит цель, для достижения которой из множества всех допустимых значений переменных выбираются оптимальные?

3. Каким ограничениям должны удовлетворять неизвестные?

Литература

[2-3], [5-6]

ЛИТЕРАТУРА

1. Варфоломеев В.И. Алгоритмическое моделирование элементов экономических систем: Практикум.-М.: Финансы и статистика, 2000.-208с.
2. Малыхин В.И. Математическое моделирование экономики: Учеб.-практ. Пособие.-М.:УРАО, 1998.-160с.
3. Трояновский В.М. Математическое моделирование в менеджменте: Учеб.пособие.-М.:Русская деловая литература, 1999.-240с.
4. Экономико-математические методы и модели : Учеб.пособие / Н.И.Холод и др. - МИНСК:БГЭУ, 1999,-413.
5. Шелобаев С.И. Математические методы и модели в экономикке, фінансах, бизнесе : Уч.пособие для вузов.-М.:ЮНИТИ:ДАНА, 2000.-367с.
6. Шикин Е.В. Математические методы и модели в управлении: Учебное пособие.-М.: Дело, 2000.-440с.

Учебное издание

«ОПТИМИЗАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ И МОДЕЛИ»

для студентов дневной формы обучения

специальностей 051 «Экономика», 076 «Предпринимательство, торговля и биржевая деятельность»

Составители: Федорова Виктория Александровна

Ответственный за выпуск: Дмитриев И.А.

Подп. В печать.	Формат 60×80	1/16 Бум. Тип №
Печать офсетниая	Ум. др. л.	Нав - вид. л.
Тираж экз.	Цена договорная	Зак. №

ХНАДУ, ГСП, Харьков, ул. Петровского, 25

Подготовлено в Харьковском национальном автомобильно-дорожном университете