МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ
ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ АВТОМОБІЛЬНО-ДОРОЖНІЙ УНІВЕРСИТЕТ

МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ ДО ВИКОНАННЯ САМОСТІЙНИХ РОБІТ З ДИСЦИПЛІНИ «ОПТИМІЗАЦІЙНІ МЕТОДИ ТА М ОДЕЛІ»

для студентів денної форми навчання
спеціальностей 051 «Економіка», 076 «Підприємництво, торгівля та біржова діяльність»

Харків, 2017

Укладачі Федорова В.О.

Кафедра економіки і підприємництва

ВСТУП

Метою проведення самостійних робіт з курсу «Економіко-математичні моделі» є закріплення теоретичних знань, отриманих студентами при вивченні теоретичної частини курсу, і додаток цих знань для рішення конкретних завдань.

При виконанні робіт студенти повинні навчитися працювати із двома програмними пакетами – «Machcad» і «Microsoft Excel», а при виконанні розрахунково-графічної роботи ще й довідковою літературою.

САМОСТІЙНА РОБОТА № 1

«Рішення завдань лінійного програмування в рограмі MICROSOFT EXCEL»

Метою проведення даної роботи є знайомство із програмою електронних таблиць як засобом рішення завдань лінійного програмування .

Програма Excel зі складу MS Office може бути використана для рішення завдань лінійного програмування завдяки наявній у ній надбудови «Пошук рішення» у меню «Сервіс».

Розглянемо процес рішення завдань на прикладі:

Завдання.

Знайти мінімальне значення цільової функції $Z = 3X_1 + 3X_2$ при обмеженнях: $X_1 - 0{,}5*X_2 \geq 0$; $X_1 - 5*X_2 \geq -5$; $2*X_1 + 3*X_2 \geq 7$.

1. Відкриваємо програму - у меню ‘Пуск’, ‘Програми’ вибираємо Microsoft Excel.

2. Відразу ж зберігаємо майбутній файл під яким-небудь іменем – ‘Файл’, ‘Зберегти як’. (Наприклад –ЕММ).

3. Для наочного відображення завдання необхідно зробити шаблон під значення, що вводяться, – у клітинці A1 напишемо – ‘Рішення завдання на мінімум‘, у клітинці *A*2 – *X*1, у клітинці *B*2 – *X*2 .

4. Клітини A3 і B3 залишаємо під значення змінних, які будуть отримані в результаті рішення завдання.

5. Далі, у клітини A4-A7, B4-B7 уводимо один по одному коефіцієнти при *X*1 і *X*2 у цільовій функції й обмеженнях відповідно.

6. У клітини C5-C7 записуємо знаки обмежень, в D5-D7 – праві частини обмежень.

7. Робимо активним клітинку, у якому буде прописана цільова функція (наприклад - *G*4), у панелі інструментів вибираємо пункт ‘вставка функції’.

У категорії функції вибираємо – ‘математичні’, функцію – ‘сума добутків’. У якості першого масиву вибираємо масив A3:B3 – масив змінних, у якості другого – масив коефіцієнтів цільової функції - A4-B4. Натискаємо кнопку ‘OK’. У клітинці *G*4 з'явилася цифра нуль.

8. Аналогічно прописуємо обмеження в клітинках *G*5-*G*7 як суму добутків масиву змінних і коефіцієнтів обмежень.

9. У меню ‘Сервіс’ вибираємо пункт - ‘Пошук рішення ‘. У вікні, яке відкрилося, установлюємо цільову клітинку *G*4 – (за замовчуванням позначена та клітинка, на якому стоїть курсор). Натискаємо кнопку ‘Додати’ і вводимо обмеження посилаючись на клітини з коефіцієнтами при *X*, знаками обмежень, правими частинами.

10. Натискаємо кнопку Параметри, у новім вікні встановлюємо галочки на пунктах. ‘Лінійна модель’ і ‘Невід’ємні значення’, “OK”. – вертаємося в попереднє вікно:

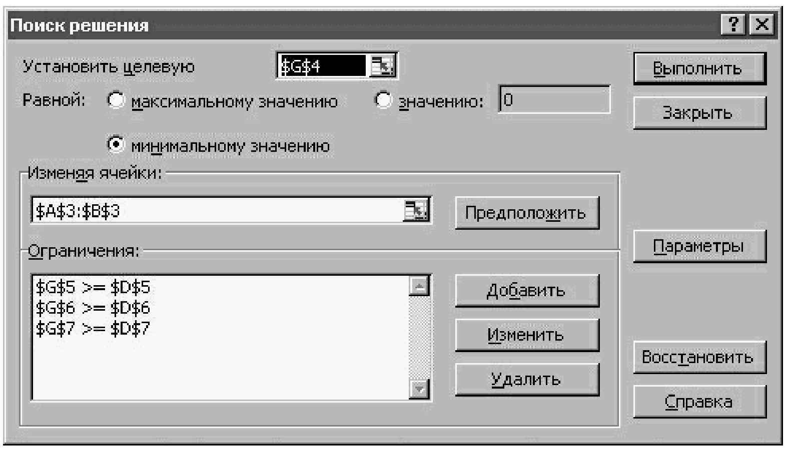

Рисунок 1 – Вікно «Пошук рішення»

11. Натискаємо кнопку ‘Виконати ‘.

Якщо всі дані були введені правильно, то вийде оптимальне рішення:

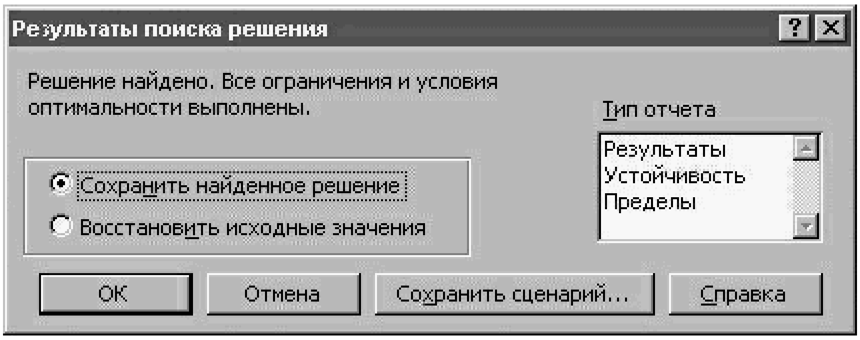

Рисунок 2 – Результати розрахунків

Вибираємо необхідний нам тип звіту: за результатами, по стійкості, або по межах. Натискаємо кнопку “ОК”.

У клітиних А3 і В3 з'явилися значення змінних, у клітинці *G*4- значення цільової функції при цих значеннях.

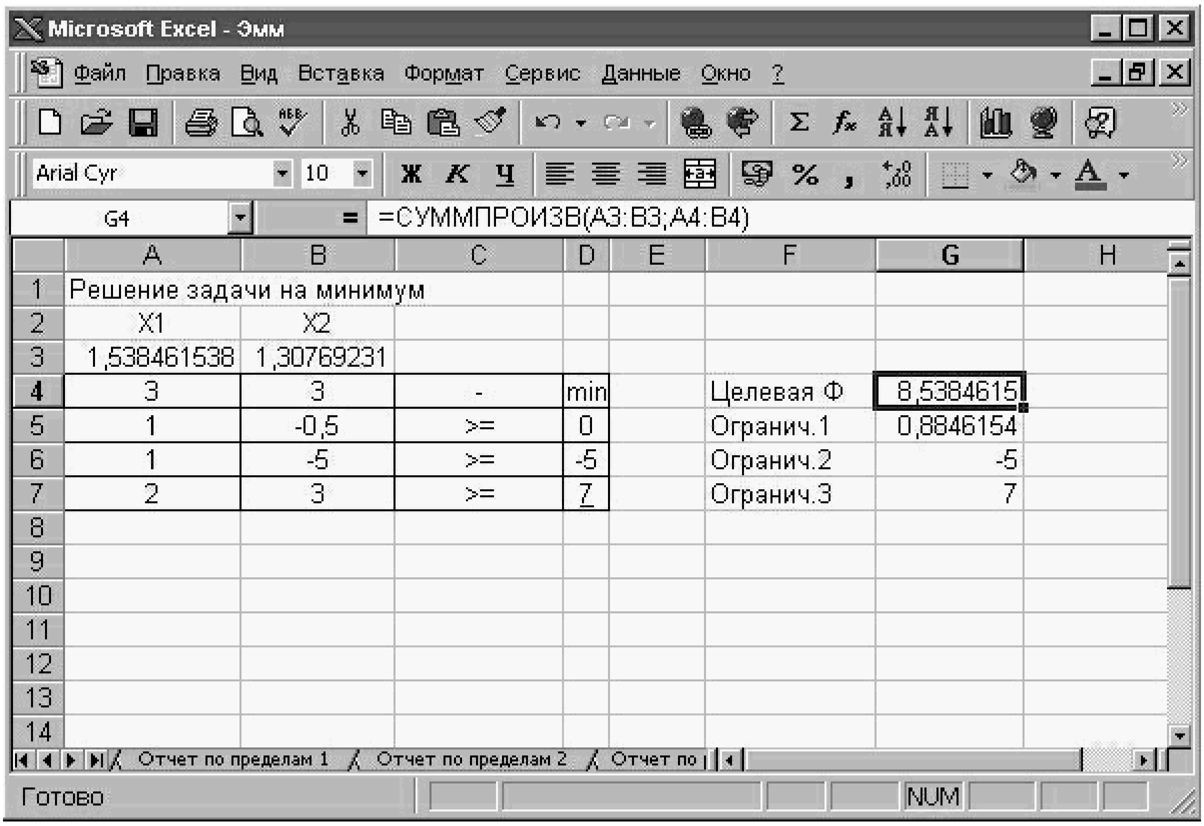

Рисунок 3 – Кінцеві результати розрахунків

САМОСТІЙНА РОБОТА № 2

«Основи аналізу оптимальних рішень стосовно правих частин обмежень»

Метою проведення даної роботи є придбання студентами знань по проведенню аналізу отриманих оптимальних рішень стосовно правих частин обмежень.

У ході виконання даної роботи студенти повинні виконати наступні завдання:

1. Розділити наявні в завданні обмеження на дефіцитні й не дефіцитні.
2. Визначити межі зміни дефіцитних ресурсів.
3. Підтвердити отримане рішення за допомогою програми ЛП.
4. Визначити двоїсті оцінки.

Виконання вище названих завдань покажемо на прикладі, використаному в СРС №1 .

Завдання.

Знайти мінімальне значення цільової функції $Z = 3*X_1 + 3*X_2$ при обмеженнях: $X_1 - 0{,}5*X_2 \geq 0$; $X_1 - 5*X_2 \geq -5$; $2*X_1 + 3*X_2 \geq 7$.

Усі завдання, у яких число змінних рівне двом мають дуже наочне графічне рішення. Кожне з обмежень являє собою формулу якоїсь лінії, яка ділить площину на дві півплощини, а спільне перетинання ліній, що вийшли, дасть область рішення завдання. Графік цільової функції, проходячи через якусь точку (тички) даної області, буде давати конкретне рішення – координати цієї точки. Щоб довідатися, яка з півплощин є рішенням обмеження потрібно підставити в нерівність координати будь-якої точки із цієї півплощини, якщо нерівність виконується – те, отже, уся півплощина є рішенням, якщо не виконується – те рішенням буде інша півплощина.

Побудуємо графіки кожного з обмежень. Тому що обмеження являють собою графік лінійної залежності, то для побудови досить одержати координати двох точок. У якості однієї з них, для зручності, будемо використовувати початок координат.

1) $X_1 - 0,5*X_2 \ge 0$	2) $X_1 - 5*X_2 \ge -5$	3) $2*X_1 + 3*X_2 \ge 7.$
$X_1 - 0,5*X_2 = 0$	$X_1 - 5*X_2 = -5$	$2*X_1 + 3*X_2 = 7.$
$X_1 = 0, \quad X_2 = 0$	$X_1 = 0, \quad X_2 = 1$	$X_1 = 0, \quad X_2 = 7/3$
$X_1 = 1, X_2 = 2$	$X_2 = 0, X_1 = -5$	$X_2 = 0, X_1 = 7$

Як бачимо із графіка, рішення утворюється перетинанням 2-го й 3-го обмеження.

Таким чином, 2-е й 3-е обмеження – дефіцитні, тобто їхня зміна впливає на положення точки рішення. Координати точки рішення А можна знайти розв'язавши систему із двох рівнянь:

$$\begin{cases} X_1 - 5*X_2 = -5 \\ 2*X_1 + 3*X_2 = 7 \end{cases}$$

$$X_1 = 20/13 = 1,5384$$
$$X_2 = 17/13 = 1,3077$$

$$Z = 8,5385$$

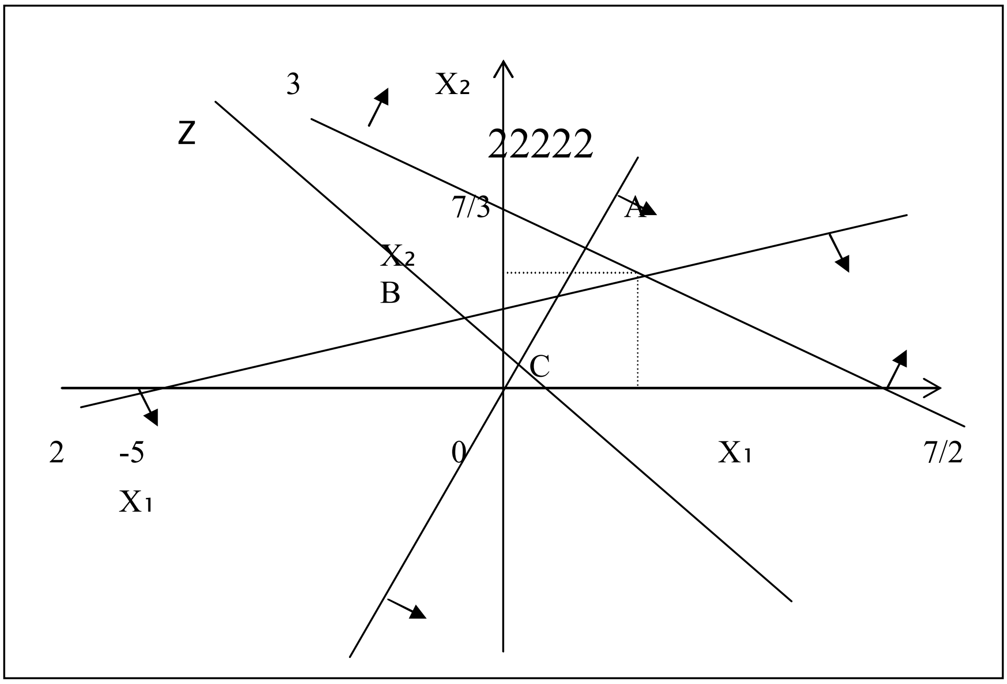

Рисунок 4 – Графічне рішення задачі

Виконаємо друге поставлене завдання – визначимо межі зміни дефіцитних ресурсів, тобто перевіримо до яких величин можна зменшувати й збільшувати праві частини обмежень, щоб вони при цьому залишалися дефіцитними.

Із графіка видне, що переміщення вправо точки рішення нічим не обмежується, тому можливо нескінченне збільшення правої частини 3гго обмеження. Нижня межу дадуть координати точки В (вирішуємо систему рівнянь 1-го й 2-го обмежень). Друге обмеження, переміщаючись нагору, перестає бути дефіцитним після точки перетинання 1гго й 3гго обмежень. Підставивши координати цієї точки у формулу другого обмеження, одержимо верхню межу зміни цього обмеження. (Вирішуємо систему рівнянь 1-го й 3-го обмежень). Нижня межа обмеження дадуть координати точки (7/2; 0), подальше зменшення приведе до того, що точка рішення буде зміщуватися вправо по осі X1.

Отже, для другого обмеження:

$$-7.875 \leqslant B \geqslant 3.5$$

Для третього обмеження:

$$4.444 \leqslant B \geqslant \infty$$

Підтвердження нашого рішення можна одержати в «Microsoft Excel». По стійкості можна одержати в результаті рішення завдання в один з підсумкових звітів.

Останнім нашим завданням у цій роботі є знаходження двоїстих оцінок – відносини збільшення цільової функції до збільшення дефіцитних ресурсів.

Двоїста оцінка знаходиться по формулі:

$$Y = \frac{Z - Zmax}{B' - B_1} \tag{1}$$

Знаменник являє собою різницю двох можливих значень правих частин обмежень, а чисельник – різниця значень цільової функції при цих значеннях правих частин обмежень.

Microsoft Excel 8.0 Звіт по стійкості

Робочий аркуш: [EMM.xls]Аркуш1

Звіт створений: 15.11.01 23:22:38

Змінювані клітини

Клітинка	Ім'я	Результат значення	Нормир. Вартість	Цільовий Коефіцієнт	Допустиме значення Збільшення	Допустиме значення Зменшення
A3	X1	1,538461538	0	3	1E+30	1
B3	X2	1,307692308	0	3	1,5	18

Обмеження

Клітинка	Ім'я	Результат значення	Тіньова Ціна	Обмеження Права частина	Допустиме значення Збільшення	Допустиме значення Зменшення
G5	Обмеження 1	0,884615385	0	0	0,884615385	1E+30
G6	Обмеження 2	-5	0,230769231	-5	8,5	2,875
G7	Обмеження 3	7	1,384615385	7	1E+30	2,555555556

Рисунок 5 – Результат розрахунку стійкості

У нашому випадку, для другого обмеження X_1 - 5*X_2 = -5, при B'_1 = 0 B_1= 3,5 і відповідно Z = 9,6923 і $Zmax$ = 10,5, Y_2 = 0.2307;

Для третього обмеження 2*X_1 + 3*X_2 = 7, при B'_1 = 5 B_1 = 7 і відповідно Z = 5,7692 і $Zmax$ = 8,5385, Y_1 = 1,3846.

У звіті по стійкості значення двоїстих оцінок можна знайти в графі «Тіньова ціна».

САМОСТІЙНА РОБОТА № 3

«Аналіз оптимальних рішень стосовно коефіцієнтів цільової функції»

Метою проведення даної роботи є придбання студентами знань по проведенню аналізу отриманих оптимальних рішень стосовно коефіцієнтів цільової функції.

У ході виконання даної роботи студенти повинні виконати наступні завдання:

1. Знайти оптимальне рішення для наявного завдання.
2. Визначити дефіцитні ресурси.
3. Знайти припустимі межі зміни коефіцієнтів цільової функції.

При зміні коефіцієнтів цільової функції відбувається її поворот навколо точки оптимального рішення, у зв'язку із чим, виникає проблема збереження стійкості. Рішення буде стійким до збігу графіка цільової функції з графіком будь-якого дефіцитного ресурсу.

Розглянемо на прикладі весь процес виконання призначених завдань.

Завдання.

Знайти мінімальне значення цільової функції $Z = 6*X_1 + 5*X_2$, при обмеженнях: $4*X_1 + 3*X_2 \leqslant 60$; $2*X_1 + X_2 \geqslant 24$; $X_1 + 2*X_2 \geqslant 20$; $X_1 \leqslant 18$; $X_2 \leqslant 25$.

Рішення виконаємо графічно.

1) $4*X_1 + 3*X_2 = 60$ 2) $2*X_1 + X_2 = 24$ 3) $X_1 + 2*X_2 = 20$ $Z = 6*X_1 + 5*X_2$

$X_1 = 0$ $X_2 = 20$ $X_1 = 0$ $X_2 = 24$ $X_1 = 0$ $X_2 = 10$ $X_1 = 0$ $X_2 = 0$

$X_2 = 0$ $X_1 = 15$ $X_2 = 0$ $X_1 = 12$ $X_2 = 0$ $X_1 = 20$ $X_2 = 6$ $X_1 = -5$

На схематичному графіку бачимо, що точкою рішення завдання буде точка А. Її координати знайдемо з рішення системи рівнянь 2-го й 3-го обмежень:

$$\begin{cases} 2*X_1 + X_2 = 24 \\ X_1 + 2*X_2 = 20 \end{cases}$$

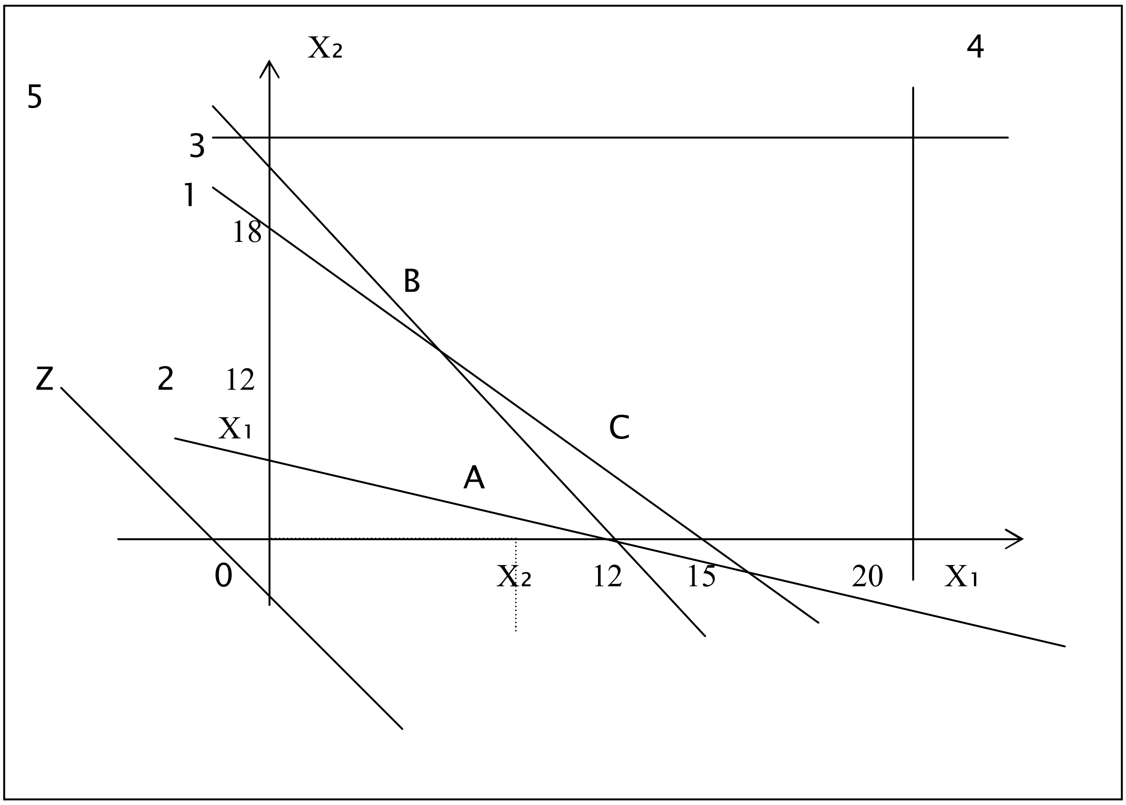

Рисунок 6 – Результат розрахунку оптимальних рішень

$$X_1 = 28/3$$
$$X_2 = 16/3$$
$$Z = 248/3$$

Тепер нам необхідно довідатися які значення можуть ухвалювати коефіцієнти цільової функції. Для цього потрібно розв'язати дві системи рівнянь, перше – що виходить з цільової функції й 2-го обмеження, друге – із цільової функції й 3-го обмеження.

Причому коефіцієнти цільової функції ми по черзі заміняємо змінними C_1 і C_2. Другий невідомої буде виступати величина *Z*.

$$\begin{cases} C_1*X_1 + 5*X_2 = Z \\ 2*X_1 + X_2 = 24 \end{cases}$$

Розділимо перше рівняння на 5, одержимо:

$$\begin{cases} C_1/5*X_1 + X_2 = Z/5 \\ 2*X_1 + X_2 = 24 \end{cases}$$

Отже : $C_1/5 = 2$, $C_1 = 10$ і $Z/5 = 24$, $Z = 120$.

$$\begin{cases} 6*X_1 + C_2*X_2 = Z \\ 2*X_1 + X_2=24 \end{cases}$$

Помножимо друге рівняння на 3, одержимо:

$$\begin{cases} 6*X_1 + C_2*X_2 = Z \\ 6*X_1+3*X_2=72 \end{cases}$$

$$C_2 = 3,\ Z = 72\ .$$

$$\begin{cases} C_1*X_1 + 5*X_2 = Z \\ X_1 + 2*X_2 = 20 \end{cases}$$

Перше рівняння помножимо на 2, а друге на 5:

$$\begin{cases} 2*C_1*X_1 + 10*X_2 = 2*Z \\ 5*X_1 + 10*X_2 = 100 \end{cases}$$

$$2*C_1 = 5,\ C_1 = 5/2;$$

$$2*Z = 100,\ Z = 50.$$

$$\begin{cases} 6*X_1 + C_2*X_2 = Z \\ X_1 + 2*X_2 = 20 \end{cases}$$

Друге рівняння помножимо на 6:

$$\begin{cases} 6*X_1 + C_2*X_2 = Z \\ 6*X_1 + 12*X_2 = 120 \end{cases}$$

$$C_2 = 12,\ Z = 120$$

У підсумку маємо:

- для C_1 $\quad 2{,}5 \leqslant C_1 \geqslant 10, \quad 50 \leqslant Z \geqslant 120$
- для C_2 $\quad 3 \leqslant C_2 \geqslant 12, \quad 72 \leqslant Z \geqslant 120$

При великій кількості змінних провести аналіз у ручну дуже важко, тому що графічне рішення на площині можливо тільки для двох змінних. Такий аналіз поводиться на комп'ютері. Задаються нові значення коефіцієнтів цільової функції й визначаються граничні значення по зміні координат точки рішення й оцінки.

САМОСТІЙНА РОБОТА № 4

«Симплексний метод рішення завдань лінійного програмування»

Метою проведення даної роботи є придбання студентами знань по проведенню аналізу отриманих оптимальних рішень стосовно коефіцієнтів цільової функції.

У ході виконання даної роботи студенти повинні виконати наступні завдання:

1. Визначити яким способом вирішується запропонована викладачем завдання.

2. Виконати рішення завдання у вигляді таблиць.

При рішенні завдань лінійного програмування з більшим числом змінних неможливе застосування графічного методу. Рішення проводиться аналітичним методом – симплексним, з будь-якою кількістю змінних і обмежень. Найбільш зручна вистава цього методу в табличній формі.

Усі можливі завдання, розв'язувані симплексним методом зводяться до двом різновидам - залежно від виду обмежень.

Перший - симплексний метод із природнім базисом, другий – зі штучним.

Першим методом вирішуються завдання з обмеженнями виду $\leqslant$. Слід зазначити також, що обмеження типу $\geqslant$ можуть бути наведені до типу $\leqslant$ множенням на (–1) усього рівняння, але також важливо знати, що праві частини обмежень завжди повинні бути ненегативні.

Другий метод застосовується для рішення завдань із обмеженнями утримуючими й знак рівності. Часткам случаємо цього методу є метод рішення завдань із обмеженнями різного виду, що дозволяє приблизно вдвічі скоротити обсяг обчислень.

Розглянемо два приклади – окремо для кожного випадку.

Завдання 1

Знайти максимальне значення цільової функції

$Z = -X_1 + X_2 + 3*X_3$, при обмеженнях:

$2*X_1 - X_2 + X_3 \leqslant 1$; $4*X_1 - 2*X_2 + X_3 \geqslant -2$; $3*X_1 + X_3 \leqslant 5$.

Помноживши на (-1) цільову функцію й 2-е обмеження, ми зведемо рішення завдання до рішення на мінімум, і права частина другого обмеження стане позитивною. Одержуємо:

$$F = X_1 - X_2 - 3*X_3 \rightarrow min$$

$$2*X_1 - X_2 + X_3 \leqslant 1$$

$$-4*X_1 + 2*X_2 - X_3 \leqslant 2$$

$$3*X_1 + X_3 \leqslant 5$$

Для того щоб перейти від нерівностей до рівностей необхідно ввести додаткові змінні – базисні. В обмеженнях виду □ вони будуть природніми, в інших випадках вони будуть штучними.

$$2*X_1 - X_2 + X_3 + X_4 = 1$$
$$-4*X_1 + 2*X_2 - X_3 + X_5 = 2$$
$$3*X_1 + X_3 + X_6 = 5$$

Обов'язково повинне виконуватися умова, щоб у кожнім обмеженні було по одній змінної не вхідній в інші обмеження. Ці змінні вводимо в цільову функцію з нульовими коефіцієнтами:

$$F = X_1 - X_2 - 3*X_3 + 0*X_4 + 0*X_5 + 0*X_6 \rightarrow min$$

Для складання симплексної таблиці потрібно одержати перше рішення в такий спосіб:

$$X_1 = X_2 = X_3 = 0,$$
$$X_4 = 1,\ X_5 = 2,\ X_6 = 5$$

№ п./п.	Базис	Оцін-ка	Св. член	1	-1	-3	0	0	0
				X1	X2	X3	X4	X5	X6
1	X4	0	1	2	-1	1	1	0	0
2	X5	0	2	-4	2	-1	0	1	0
3	X6	0	5	3	0	1	0	0	1
M+1			0	-1	1	3	0	0	0

Рисунок 7 – 1 етап побудування симплекс таблиці

По індексному рядку ми судимо про оптимальність рішення, що вийшло. Для завдань на мінімум показник оптимального рішення – відсутність позитивних значень. Як правило, перше рішення далеке не оптимальне, що ми й маємо в цьому випадку. Для подальшого рішення завдання необхідно знайти розв'язний елемент. Щоб його знайти в індексному рядку вибираємо максимальне позитивне число – у цьому випадку 3. Ми знайшли розв'язний стовпець. Тепер у цьому стовпці знаходимо розв'язний елемент, як мінімальне відношення величини із графи «вільний член», до величини з даного стовпця, крім негативних значень: B*i* / *xi* → *min*, *xi* > 0. Розв'язним елементом буде число 1. Ту змінну, яка перебуває в базисі напроти розв'язного елемента ми виводимо з базису, на її місце вводиться змінна з розв'язного стовпця. *X*4 міняємо на *X*3. Оцінка нової базисної змінної перебуває в цьому ж розв'язному стовпці.

Наступну симплексну таблицю становимо за наступними правилами:

1. Замість розв'язного елемента пишемо число 1.
2. Усі значення розв'язного стовпця рівні 0.
3. Усі елементи розв'язного рядка ділимо на розв'язний елемент.
4. Усі інші значення розраховуємо в такий спосіб. Клітинку розв'язного елемента й клітинку шуканого значення утворюють собою сторону або діагональ прямокутника. Знаходимо добуток розв'язного елемента й діагонального йому елемента – по головній діагоналі, і добуток двох інших елементів – по побічній діагоналі. Тепер знаходимо різницю між, що вийшли значеннями й ділимо її на розв'язний елемент.

№ п./п.	Базис	Оцін-ка	Св. член	1	-1	-3	0	0	0
				X1	X2	X3	X4	X5	X6
1	X3	-3	1	2	-1	1	1	0	0
2	X5	0	3	-2	1	0	1	1	0
3	X6	0	4	1	-1	0	-1	0	1
M+1			-3	-7	4	0	-3	0	0

Рисунок 8 – 2 етап побудування симплекс таблиці

Як видне з індексного рядка – рішення не є оптимальним, можливо подальше поліпшення результату. Проробляємо всі операції знову. Одержуємо нову таблицю:

№ п./п.	Базис	Оцін-ка	Св. член	1 X1	-1 X2	-3 X3	0 X4	0 X5	0 X6
1	X3	-3	-4	0	0	1	2	1	0
2	X2	-1	3	-2	1	0	1	1	0
3	X6	0	1	3	0	0	-2	-1	1
M+1			-15	1	0	0	-7	-4	-1/3

Рисунок 9 – 3 етап побудування симплекс таблиці

В індексному рядку є одне позитивне значення, продовжуємо наше рішення:

№ п./п.	Базис	Оцін-ка	Св. член	1 X1	-1 X2	-3 X3	0 X4	0 X5	0 X6
1	X3	-3	-4	0	0	1	2	1	0
2	X2	-1	3 2/3	0	1	0	2 1/3	1 2/3	2/3
3	X1	1	1/3	3	0	0	-2/3	-1/3	1/3
M+1			-15 1/3	0	-1/3	0	-6 2/3	-3 2/3	-1/3

Рисунок 10 – 4 етап побудування симплекс таблиці

Нарешті ми одержуємо кінцеве рішення – в індексному рядку немає позитивних оцінок. Змінні, які перебувають у базисі одержали значення X1=1/3, X2=3 2/3, X3=-3, F=-15 1/3, усі інші змінні дорівнюють нулю.

Розглянемо тепер процес рішення завдання зі штучним базисом.

Завдання 2

Знайти максимальне значення цільової функції функції

$Z = -5*X_1 - 3*X_2 - 4*X_3 + X_4$, при обмеженнях

$X_1 + 3*X_2 + 2*X_3 + 2*X_4 = 3, \quad 2*X_1 + 2*X_2 + X_3 + X_4 = 3$

Тому що обмеження вже являють собою рівняння, що вводяться змінні будуть штучними.

$$X_1 + 3*X_2 + 2*X_3 + 2*X_4 + X_5 = 3$$

$$2*X_1 + 2*X_2 + X_3 + X_4 + X_6 = 3$$

$$Z = -5*X_1 - 3*X_2 - 4*X_3 + X_4 + 0*X_5 + 0*X_6 \rightarrow max$$

Помноживши на (-1) цільову функцію зводимо рішення завдання до рішення на мінімум. Нульові коефіцієнти при штучних змінних зміняться на деякі більші числа М.

$$Z = 5*X_1 + 3*X_2 + 4*X_3 - X_4 + \mathrm{M}*X_5 + \mathrm{M}*X_6 \rightarrow min$$

Одержуємо перше можливе рішення:

$$X_1 = X_2 = X_3 = X_4 = 0,$$

$$X_5 = 3, \; X_6 = 3$$

Становимо симплексну таблицю:

№ п./п.	Базис	Оцін-ка	Св. член	5	3	4	-1	М	М
				X1	X2	X3	X4	X5	X6
1	X5	М	3	1	3	2	2	1	0
2	X6	М	3	2	2	1	1	0	1
М+1			0	-5	-3	-4	1	0	0
М+2			6	3	5	3	3	0	0

Рисунок 11 – 1 етап побудування симплекс таблиці

У методі рішення зі штучним базисом у таблиці заповнюється два індексні рядки. Вони заповнюються по наступній формулі:

$$Zj - Cj = \sum_{i,j=1}^{n,m} \mathrm{A}_{ij}\, \mathrm{C}ij - \mathrm{C}_i$$

Простіше говорячи знаходимо суму добутків стовпця змінної й стовпця оцінки, коефіцієнт при М записуємо в рядок М+2, а вільний член у М+1 рядок. У рядку М+2 знаходимо максимальне позитивне число й у цьому стовпці – розв'язний елемент. Подальший хід рішення аналогічний методу із природнім базисом. Коли всі оцінки в рядку М+2 перестануть бути позитивними, у наступній таблиці починаємо працювати з рядком М+1, так само домагаємося відсутності позитивних оцінок.

№ п./п.	Базис	Оцін-ка	Св. член	5	3	4	-1	M	M
				X1	X2	X3	X4	X5	X6
1	X2	3	1	1/3	1	2/3	2/3	1/3	0
2	X6	M	1	4/3	0	-1/3	-1/3	-2/3	1
M+1			3	-4	0	-2	3	1	0
M+2			1	4/3	0	-1/3	-1/3	-5/3	0

Рисунок 12 – 2 етап побудування симплекс таблиці

№ п./п.	Базис	Оцін-ка	Св. член	5	3	4	-1
				X1	X2	X3	X4
1	X2	3	3/4	0	1	3/4	3/4
2	X1	5	3/4	1	0	-1/4	-1/4
M+1			6	0	0	-3	2
M+2			1	0	0	0	0

Рисунок 13 – 3етап побудування симплекс таблиці

Штучні змінні вийшли з базису, і надалі їх можна не розглядати.

№ п./п.	Базис	Оцінка	Св. член	5	3	4	-1
				X1	X2	X3	X4
1	X4	-1	1	0	4/3	1	1
2	X1	5	1	1	1/3	0	0
M+1			4	0	-8/3	-5	0

Рисунок 14 – 4 етап побудування симплекс таблиці

Одержали оптимальне рішення:

$X1 = 1,\ X4 = 1, Z = 4$

САМОСТІЙНА РОБОТА № 5

«СКЛАДАННЯ Й РІШЕННЯ ДВОЇСТИХ ЗАВДАНЬ»

Метою проведення даної роботи є придбання студентами знань по проведенню аналізу отриманих оптимальних рішень стосовно коефіцієнтів цільової функції.

У ході виконання даної роботи студенти повинні виконати наступні завдання:

1. До наявного завдання лінійного програмування скласти двоїсте завдання.
2. Перевірити правильність складання двоїстого завдання.
3. Одержати рішення двоїстого завдання й зрівняти його з рішенням прямої.

Кожному завданню лінійного програмування відповідає двоїсте завдання. Для одержання двоїстого завдання потрібно: 1) Кожному обмеженню прямого завдання поставити у відповідність оцінку ресурсу; 2) Транспонувати матрицю коефіцієнтів обмежень; 3) Розставити знаки обмежень. Для симетричних завдань (усі обмеження якої представлені нерівностями одного виду), знаки обмежень міняємо на протилежні. Для несиметричних завдань (обмеження яких містять знаки рівності) уводимо додаткові штучні змінні, усі обмеження приводимо до виду рівностей. Знаки обмежень розставляємо відповідно до таблиці 1:

Таблиця 1 – Постанова двоїстої задачі

Пряме завдання	Двоїсте завдання		
Цільова функція	Цільова функція	Знак обмеження	Змінні
Max	Min	$\geqslant$	Не обмежено
Min	Max	$\leqslant$	Не обмежено

Розглянемо на прикладі перехід від прямого завдання до двоїстої.

$$Z = -2*X_1 + 5*X_2 + X_3 \rightarrow min$$

$$7*X_1 + 2*X_2 + 11*X_3 \leqslant 13$$

$$5*X_1 + 6*X_2 - 3*X_3 = 25$$

$$3*X_1 + 8*X_2 + 2*X_3 \geqslant 16$$

Усі нерівності приводимо до рівностей:

$$7*X_1 + 2*X_2 + 11*X_3 = 13 \qquad Y_1$$

$$5*X_1 + 6*X_2 - 3*X_3 = 25 \qquad Y_2$$

$$3*X_1 + 8*X_2 + 2*X_3 = 16 \qquad Y_3$$

Коефіцієнтами нової цільової функції будуть праві частини обмежень, а правими частинами обмежень – коефіцієнти цільової функції.

$$F = 13*Y_1 + 25*Y_2 + 16*Y_3 \rightarrow max$$

$$7*Y + 5*X_2 + 3*X_3 \leqslant -2$$

$$2*Y_1 + 6*Y_2 + 8*Y_3 \leqslant 5$$

$$11*Y_1 - 3*Y_2 + 2*Y_3 \leqslant 1$$

Враховуючи введені нами штучні змінні, уводимо два додаткові обмеження:

$$Y_1 \leqslant 0$$

$$-Y_3 \leqslant 0$$

Враховуючи, те що праві частини обмежень повинні бути позитивні, множимо перше обмеження на (-1):

$$7*Y + 5*X_2 + 3*X_3 \geqslant -2$$

$$2*Y_1 + 6*Y_2 + 8*Y_3 \leqslant 5$$
$$11*Y_1 - 3*Y_2 + 2*Y_3 \leqslant 1$$
$$Y_1 \leqslant 0$$
$$-Y_3 \leqslant 0$$

Це остаточний вид шуканого двоїстого завдання. Для перевірки правильності складання двоїстого завдання потрібно перевірити виконання четвертої властивості двоїстих завдань.

Відзначимо властивості двоїстого завдання:

1. Теоретично в оптимальних рішеннях цільова функція прямої завдання дорівнює цільової функції двоїстої.
2. Якщо пряме завдання має n змінних і m обмежень, то зворотне завдання - m змінних і n обмежень.
3. У симетричних двоїстих завданнях, змінні прямій і двоїстого завдання позитивні. У несиметричних завданнях змінні можуть бути негативними.
4. Двоїсте завдання до двоїстої – пряма.
5. Пряма й двоїсте завдання можуть виступати в якості прямої.
6. Змінні двоїстої завдання дорівнюють оцінкам змінних прямого завдання, і навпаки.
7. Стовпці коефіцієнтів прямого завдання – рядка коефіцієнтів двоїстої.
8. Праві частини обмежень прямого завдання – коефіцієнти цільової функції двоїстого завдання.
9. Коефіцієнти цільової функції прямого завдання – праві частини обмежень двоїстого завдання.
10. Якщо пряме завдання не має рішення, то й двоїста теж не має рішення.

Зрівнявши рішення прямій і двоїстого завдання, робимо висновок про правильність виконання всіх дій.

Рішення прямої завдачі:

$$Z = 15{,}4375;\ X_1 = 0{,}875(-1{,}156);\ \ X_2 = 3{,}437(1{,}2187);\ \ X_3 = 0(0).$$

У дужках зазначені оцінки змінних.

Рішення двоїстого завдання:

$F = 15{,}4375;\quad Y_1 = -1{,}156(0{,}875);\quad Y_2 = 3{,}437(1{,}2187);\quad Y_3 = 0(0).$

ПЕРЕЛІК САМОСТІЙНИХ ЗАВДАНЬ

Таблиця 2 - Перелік самостійних завдань

№	Завдання	№	Завдання
1	2	3	4
1	$W = 2x_1 - x_2 + x_4 \to \min$ $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 \le 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 \le 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 \ge 3 \end{cases}$	2	$W = 3 + 2x_2 + x_3 \to \max$ $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 \ge 1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 \ge 1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 \ge -1 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 \le 5 \end{cases}$
3	$W = x_3 + 3x_4 \to \min$ $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 \le 2 \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 \ge 0 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 \ge -3 \\ x_1 \ge 1 \end{cases}$	4	$W = x_1 - x_2 - 2x_4 \to \max$ $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 \le 4 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - 2x_4 \ge 2 \\ x_1 - x_4 \ge 1 \\ x_2 + x_3 \le 1 \end{cases}$
5	$W = -x_2 - 2x_3 + x_4 \to \min$ $\begin{cases} 3x_1 - x_2 \le 2 \\ x_2 - 2x_3 \le -1 \\ 4x_3 - x_4 \le 3 \\ 5x_1 + x_4 \ge 6 \end{cases}$	6	$W = -4 - 2x_1 - x_2 - x_3 \to \min$ $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 \ge -10 \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 \le -4 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 \ge -6 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \le 10 \end{cases}$
7	$W = 2 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 \to \max$ $\begin{cases} -x_1 + x_2 - 2x_4 \ge -1 \\ x_1 + x_3 + x_4 \ge 1 \\ x_2 + x_3 - x_4 \ge 1 \\ x_3 \le 4; x_2 \le 10 \end{cases}$	8	$W = x_1 - 10x_2 + 100x_3 \to \max$ $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \le 1 \\ x_1 - x_2 - x_3 \le 2 \\ -x_1 + 2x_3 \le 0 \\ x_1 + 2x_3 \le 5 \end{cases}$
9	$W = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 1 \to \max$ $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \le 3 \\ x_1 + x_2 \le 2 \\ x_1 + x_3 \le 2 \\ x_2 + x_3 \le 2 \end{cases}$	10	$W = 2 + x_1 - x_2 + 2x_3 \to \min$ $\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 2 \\ x_1 - x_2 \le 0 \\ x_1 + x_3 \ge 2 \\ x_1 + x_2 - x_3 \le 3 \end{cases}$

Продовження табл. 2

1	2	3	4
11	$W = 2 + x_1 + 2x_2 \to \min$ $\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 2 \\ x_1 + 2x_2 \geq 3 \\ -2x_1 + 2x_2 \geq -4 \\ x_1 + 3x_2 \geq 4 \\ 3x_1 + x_2 \geq 4 \end{cases}$	12	$W = x_1 + x_3 \to \min$ $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \leq 4 \\ x_1 - x_2 + x_3 \leq 2 \\ x_1 + x_2 - x_3 \geq 2 \\ -x_1 + x_2 + x_3 \leq 2 \end{cases}$
13	$W = 2 + x_1 + 3x_3 - x_4 \to \min$ $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 \leq 2 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 \leq 2 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 \leq 2 \\ -x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 2 \end{cases}$	14	$W = x_2 + 2x_3 - x_4 \to \min$ $\begin{cases} -x_1 + x_2 - 2x_4 \geq -1 \\ x_1 + x_3 + x_4 \geq 1 \\ x_2 + x_3 - x_4 \geq 1 \end{cases}$
15	$W = -x_1 - x_2 + 2x_4 \to \min$ $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + 2x_5 \leq 3 \\ x_1 + x_3 + x_4 + 2x_5 \leq 2 \\ x_1 + x_2 + 2x_4 - x_5 \leq 2 \end{cases}$	16	$W = x_1 + x_3 \to \max$ $\begin{cases} 2x_1 - 7x_2 + 22x_3 \leq 22 \\ 2x_1 - x_2 + 6x_3 \leq 6 \\ 2x_1 - 5x_2 + 2x_3 \leq 2 \\ -4x_1 + x_2 + x_3 \leq 1 \end{cases}$
17	$W = 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 - x_5 \to \min$ $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_5 \geq 1 \\ x_1 + x_3 \geq 1 \\ x_1 + x_4 \geq 1 \end{cases}$	18	$W = -x_1 + x_2 \to \max$ $\begin{cases} x_1 - 2x_2 \geq 2 \\ 2x_1 - x_2 \geq 2 \\ x_1 + x_2 \geq 5 \end{cases}$
19	$W = x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 \to \max$ $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_4 \leq 1 \\ x_2 - x_3 + x_4 \leq 1 \\ x_1 + x_3 + 2x_4 \leq 2 \\ -2x_2 + x_4 \leq 0 \end{cases}$	20	$W = x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 \to \max$ $\begin{cases} x_1 - 5x_2 + 4x_3 \leq 5 \\ x_1 - 2x_2 - 3x_3 \leq 4 \\ x_1 + 6x_2 + 5x_3 \leq 4 \\ x_2 + x_3 \leq 1 \end{cases}$
21	$W = x_1 + x_2 + x_3 + 1 \to \min$ $\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 0 \\ x_1 + x_3 \geq 1 \\ x_2 - x_3 \geq 1 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 \geq 0 \end{cases}$	22	$W = x_1 + x_2 + 3 \to \max$ $\begin{cases} x_1 - x_2 \leq 1 \\ x_1 - 2x_2 \geq -2 \\ -x_1 + x_2 \geq -1 \\ 2x_1 + x_2 \geq -2 \end{cases}$

Продовження табл. 2

1	2	3	4
23	$W=-3+x_1+3x_2+5x_3\to\max$ $\begin{cases}x_1-x_2+x_3\le 1\\2x_1+x_2+x_3\le 1\\x_1+2x_2+x_3\le 1\\x_1+x_2+2x_3\le 1\end{cases}$	24	$W=-5+x_1-x_2-3x_3\to\max$ $\begin{cases}x_1+x_2\ge 2\\x_1-x_2\le 0\\x_1+x_3\ge 2\\x_1+x_2-x_3\le 3\end{cases}$
25	$W=-3-2x_1-x_3-2x_4\to\min$ $\begin{cases}x_1-x_2+2x_3+x_4\ge 1\\2x_1-x_2+x_3-x_4\ge 1\\x_1-2x_2+x_3-x_4\ge -1\\x_1+x_2+x_3+2x_4\le 5\end{cases}$	26	$W=x_1+x_2-x_3-2x_4\to\min$ $\begin{cases}x_1-x_2+x_3+x_4\le 1\\-x_1-x_4\le 5\\x_2+x_3\le 10\end{cases}$
27	$W=x_1+x_2+x_3-3x_4\to\min$ $\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4+x_5\le 1\\x_1-x_2-x_4\le 2\\x_2+x_3+x_5\le 1\end{cases}$	28	$W=x_1+x_2+4x_3\to\max$ $\begin{cases}x_1+x_2+x_3\le 1\\-x_1+x_2+x_3\le 1\\-x_1-x_2+x_3\le 1\\x_1-x_2+x_3\le 1\end{cases}$
29	$W=x_1+x_2+x_3-x_4\to\max$ $\begin{cases}3x_1-x_2\le 2\\x_2-2x_3\le -1\\4x_3-x_4\le 3\\5x_1+x_4\ge 6\end{cases}$	30	$W=-x_1-x_2+2x_3\to\min$ $\begin{cases}x_1+x_2+x_3\le 1\\x_1-x_2-x_3\le 2\\-x_1+2x_3\le 2\end{cases}$

ЛІТЕРАТУРА

1. Варфоломеев В.И. Алгоритмическое моделирование элементов экономических систем: Практикум.-М.: Финансы и статистика, 2000.-208с.
2. Малыхин В.И. Математическое моделирование экономики: Учеб.-практ. Пособие.-М.: УРАО, 1998.-160с.
3. Трояновский В.М. Математическое моделирование в менеджменте: Учеб.пособие.-М.: Русская деловая литература, 1999.-240с.
4. Экономико-математические методы и модели : Учеб.пособие / Н.И.Холод и др. - МИНСК:БГЭУ, 1999,-413.
5. Шелобаев С.И. Математические методы и модели в экономикке, фінансах, бизнесе : Уч.пособие для вузов. - М.: ЮНИТИ:ДАНА, 2000.-367с.

Навчальне видання

МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ ДО ВИКОНАННЯ САМОСТІЙНИХ РОБІТ З ДИСЦИПЛІНИ "ЕКОНОМІКО-МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ"

для студентів денної форми навчання
спеціальностей 051 «Економіка», 076 «Підприємництво, торгівля та біржова діяльність»

Укладачі: Федорова Вікторія Олександрівна

Відповідальний за випуск: Дмитрієв І.А.

Подп. До друку.		Формат 60×80		1/16 Бум. Тип №
Печатка офсетниая Ум. ін. л.		Нав - вид. л.
Тираж	экз.	Ціна договірна Зауводити, увести до ладу. №

ХНАДУ, ГСП, Харків, вул. Петровського, 25

Підготовлене в Харківському національному автомобільно-дорожньому університеті