Міністерство освіти і науки України

ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ АВТОМОБІЛЬНО-ДОРОЖНІЙ УНІВЕРСИТЕТ

Михайленко І.В.,
Нестеренко В.О.

ЛЕКЦІЇ І ПРАКТИКУМ з вищої математики «Криволінійні інтеграли» для іноземних студентів

Навчально-методичний посібник

Харків
ХНАДУ
2019

УДК 658
М 25

Рецензенти:
Міщенко В.А., д-р екон. наук, професор,
(Національний технічний університет «ХПІ»);
Іванілов О.С., д-р екон. наук, професор,
(Харківський національний університет будівництва і архітектури)

Колектив авторів:
Михайленко І.В., канд. пед. наук, старший викладач;
Нестеренко В.О., старший викладач.

Михайленко І.В., Нестеренко В.О.
М 25 Лекції і практикум з вищої математики «Криволінійні інтеграли» для іноземних студентів: навчально-методичний посібник. – Харків: ХНАДУ, 2019. – 92 с.

Посібник містить традиційне подання теоретичного матеріалу з теми «Криволінійні інтеграли» у формі лекцій і практичних занять до них, розв’язання великої кількості прикладів. Наведено 30 варіантів задач для самостійної роботи та зразок розв’язання варіанта самостійної роботи.

Рекомендовано для поглибленої роботи студентів-іноземців 2-го курсу навчання.

Лекції та практикум з вищої математики для іноземних студентів «Криволінійні інтеграли» складено відповідно до робочих програм з дисципліни «Вища математика» для освітньо-кваліфікаційного рівня «Бакалавр». Посібник містить лекції з теми «Криволінійні інтеграл», практичні заняття до них, варіанти для самостійної роботи, зразок виконання варіанта самостійної роботи. Така побудова посібника дозволяє студенту скоріше набувати компетентних знань з цієї теми.

Викладення матеріалу на лекціях супроводжується великою кількістю прикладів як для безпосереднього обчислення криволінійних інтегралів, так і завдань прикладного характеру. Розв'язання прикладів на лекціях та практичних заняттях супроводжується докладними поясненнями та аналізом правильного застосування теоретичних знань на практиці. Це формує вдумливий і неформальний підхід студентів до виконання завдань. Посібник містить 30 варіантів завдань для самостійної роботи й зразок виконання варіанта.

Навчально-методичний посібник рекомендовано для іноземних студентів 2-го курсу очної форми навчання.

Лекція 1
КРИВОЛІНІЙНІ ІНТЕГРАЛИ ПЕРШОГО РОДУ
(за довжиною дуги)

Мета лекції: ознайомлення з поняттям криволінійного інтеграла першого роду, його властивостями, способами обчислення, механічними застосуваннями.

План лекції

1.1. Задача про масу неоднорідної лінії.

1.2. Означення криволінійного інтеграла першого роду (за довжиною дуги), його властивості, теорема існування криволінійного інтеграла першого роду.

1.3. Обчислення криволінійного інтеграла першого роду.

1.4. Застосування криволінійного інтеграла першого роду.

1.1. Задача про масу неоднорідної лінії

Нехай дана матеріальна дуга AB гладкої кривої L: $\gamma=\gamma(x;y)$ – лінійна густина кривої (неперервна функція на дузі AB). Гладка крива – це крива, що має в кожній точці дотичну, кутовий коефіцієнт якої є неперервною функцією від точок дотику.

Задача

Знайти масу неоднорідної лінії AB.

Проведемо операції аналогічні операціям у визначених і кратних інтегралах:

1. Розіб'ємо дугу AB на n частин точками $A = M_0$, M_1, ..., M_{n-1}, $B = M_n$; довжини дуг розбиття: $\Delta l_k = \cup M_{k-1}M_k$; $\lambda = \max \Delta l_k$, $1 \le k \le n$ – найбільша довжина дуг розбиття (рис. 1).

2. На кожній дузі розбиття оберемо точку $C_k(\xi_k;\eta_k)$ і знайдемо значення густини $\gamma(C_k)=\gamma(\xi_k;\eta_k)$, тоді маса дуги $\cup M_{k-1}M_k$ буде мало відрізнятися від добутку $\gamma(\xi_k;\eta_k)\cdot\Delta l_k$.

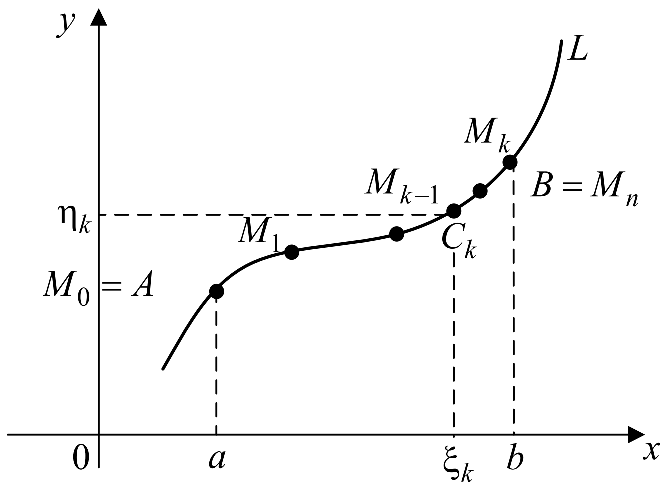

Рисунок 1

3. Складемо суму

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \gamma(C_k)\Delta l_k = \sum_{k=1}^{n} \gamma(\xi_k;\eta_k)\Delta l_k,$$

що називається інтегральною сумою.

4. За масу кривої AB приймаємо скінченну границю інтегральної суми за умови, що $n \to \infty$, $\lambda \to 0$, яка не залежить ні від способу розбиття (пункт 1) дуги на частини, ні від обрання точки C_k на кожній дузі розбиття (пункт 2)

$$m_{AB} = m = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \lambda\to 0}} S_n = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \lambda\to\infty}} \sum_{k=1}^{n} \gamma(\xi_k;\eta_k)\Delta l_k.$$

Таким чином, задача про обчислення маси неоднорідної лінії зводиться до знаходження границі інтегральної суми.

1.2. Визначення криволінійного інтеграла першого роду (за довжиною дуги), його властивості. Теорема існування криволінійного інтеграла першого роду

Нехай AB – дуга гладкої кривої L, $f(x, y)$ – функція, що визначена в кожній точці дуги AB. Проведемо аналогічні операції, які робили раніше:

1. Розіб'ємо дугу AB точками $M_0 = M_1$, M_2, ..., M_{n-1}, $B = M_n$. Одержимо дуги розбиття $\cup M_0 M_1, ..., \cup M_{k-1} M_k, ..., \cup M_{n-1} M_n$, їх довжини дорівнюють $\Delta l_k = \cup M_{k-1} M_k$; нехай $\lambda = \max \Delta l_k$, $1 \le k \le n$ – найбільша довжина дуг розбиття.

2. На кожній дузі $\cup M_{k-1} M_k$ оберемо точку $C_k(\xi_k; \eta_k)$ і знайдемо добуток $f(C_k)\Delta l_k = f(\xi_k; \eta_k)\Delta l_k$.

3. Складемо інтегральну суму

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(C_k)\Delta l_k = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k; \eta_k)\Delta l_k.$$

Криволінійним інтегралом по довжині дуги, або криволінійним інтегралом першого роду, від функції $f(x, y)$ по дузі AB називається скінченна границя інтегральної суми S_n за умови, що $n \to \infty$, $\lambda \to 0$, і вона не залежить ні від способу розбиття дуги AB на частини, ні від обрання точок C_k усередині кожної дуги розбиття.

Позначаємо

$$\int_{AB} f(x, y)dl = \int_{L} f(x, y)dl = \lim_{\substack{n \to \infty \\ \lambda \to 0}} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k; \eta_k)\Delta l_k,$$

де dl – диференціал дуги (іноді позначають через ds).

Аналогічно вводимо поняття криволінійного інтеграла першого роду від функції $f(x, y, z)$ уздовж дуги AB у просторі.

Теорема існування криволінійного інтеграла першого роду

Якщо крива L – гладка, а функція $f(x, y)$ неперервна в кожній точці цієї дуги, тоді існує криволінійний інтеграл першого роду

$$\int_{L} f(x, y)\, dl.$$

Властивості криволінійного інтеграла першого роду.

1. Властивості лінійності:

а) сталий множник можна виносити за знак інтеграла

$$\int\limits_L k\cdot f(x,y)\,dl = k\cdot\int\limits_L f(x,y)\,dl;$$

б) криволінійний інтеграл першого роду від алгебраїчної суми скінченного числа функцій дорівнює сумі інтегралів від кожної

$$\int\limits_L (f(x,y)+g(x,y)-p(x,y)\,dl =$$

$$=\int\limits_L f(x,y)\,dl+\int\limits_L g(x,y)\,dl-\int\limits_L p(x,y)\,dl;$$

2. Властивість адитивності.

Якщо C точка дуги AB, тоді

$$\int\limits_{AB} f(x,y)\,dl = \int\limits_{AC} f(x,y)\,dl+\int\limits_{CB} f(x,y)\,dl.$$

Зауваження

Цю властивість зручно застосовувати, коли дуга AB – кусково гладка (AC і CB – гладкі криві).

3. Криволінійний інтеграл першого роду не залежить від напрямку інтегрування, тобто

$$\int\limits_{AB} f(x,y)\,dl = \int\limits_{BA} f(x,y)\,dl.$$

З визначення криволінійного інтеграла першого роду одержимо перші застосування.

1. Маса неоднорідної лінії дорівнює

$$m_{AB} = \int\limits_{AB} \gamma(x,y)\,dl. \qquad (1)$$

2. Довжина дуги кривої дорівнює

$$L_{AB} = \int\limits_{AB} dl, \qquad (2)$$

тобто вона чисельно дорівнює масі дуги кривої, коли її густина $\gamma(x,y)=1$.

1.3. Обчислення криволінійних інтегралів першого роду

Вивчаючи диференціальне обчислення, ми одержали формулу для диференціала дуги гладкої кривої

$$dl = \sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

Якщо крива задана явно, тобто $y = \varphi(x)$, тоді

$$dy = \varphi'(x)dx,$$

і

$$dl = \sqrt{1 + y'^2(x)}dx. \qquad (3)$$

Якщо крива задана параметрично $x = x(t)$ і $y = y(t)$, тоді

$$dl = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\, dt. \qquad (4)$$

Якщо крива задана в полярній системі координат $\rho = \rho(\varphi)$, тоді

$$dl = \sqrt{\rho^2(\varphi) + \rho'^2(\varphi)}d\varphi. \qquad (5)$$

Обчислення криволінійних інтегралів першого роду зводиться до обчислення визначених інтегралів.

Правило обчислення

Для того, щоб криволінійний інтеграл першого роду

$$\int\limits_{AB} f(x, y)\, dl,$$

де лінія *AB* задана параметричними рівняннями $x = x(t)$, $y = y(t)$, а $x(t)$ і $y(t)$ диференційовані функції і за умови $t \in [\alpha; \beta], (\alpha < \beta)$ точка $M(x, y)$ пробігає криву *AB*, перетворити до визначеного інтеграла, треба в підінтегральному виразі замінити x на $x(t)$, y на $y(t)$, $dl = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\, dt$ і знайти інтеграл за інтервалом змінення t

$$\int\limits_{AB} f(x,y)dl = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x(t),\, y(t))\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\, dt. \quad (6)$$

Із загального правила перетворення криволінійного інтеграла першого роду випливають правила перетворення в окремих випадках:

а) якщо AB задана у вигляді $y = y(x),\, x \in [a;b]\, (a < b)$, тоді

$$\int\limits_{AB} f(x,y)dl = \int\limits_{a}^{b} f(x, y(x))\sqrt{1 + y'^2(x)}dx; \quad (7)$$

б) якщо AB задана у вигляді $x = x(y),\ y \in [c;d]\ (c < d)$, тоді

$$\int\limits_{AB} f(x,y)dl = \int\limits_{c}^{d} f(x(y), y)\sqrt{1 + x'^2(y)}dy; \quad (8)$$

в) якщо AB задана в полярній системі координат $\rho = \rho(\varphi)$, $\varphi \in [\alpha;\beta],\ (\alpha < \beta)$, тоді

$$\int\limits_{AB} f(x,y)dl = \int\limits_{\alpha}^{\beta} (\rho(\varphi)\cos\varphi; \rho(\varphi)\sin\varphi)\sqrt{\rho^2(\varphi) + \rho'^2(\varphi)}d\varphi; \quad (9)$$

г) якщо AB крива у просторі $x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t)$, $t \in [\alpha;\beta],\ (\alpha < \beta)$, тоді

$$\int\limits_{AB} f(x,y,z)dl = \int\limits_{\alpha}^{\beta} (x(t), y(t), z(t))\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}dt. \quad (10)$$

Приклад 1

Обчислити $\int\limits_{AB} (x + y)dl$, де AB – дуга кола $x^2 + y^2 = 1$ від т. $A(0,1)$ до т. $B(1,0)$.

Розв'язання

Запишемо параметричні рівняння кола: $x = \cos t$, $y = \sin t$, $t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Застосуємо формулу (6), спочатку знайдемо dl (рис. 2)

$$x' = -\sin t,\ \ y' = \cos t,$$

$$dl = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t}dt = dt.$$

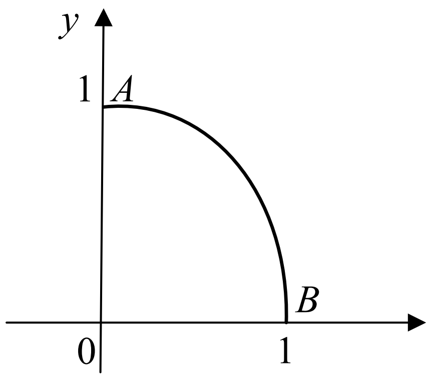

Рисунок 2

Тоді

$$\int\limits_{AB} (x+y)dl = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t + \sin t)dt =$$

$$= (\sin t - \cos t)\Big|_0^{\pi/2} = (1-0)-(0-1) = 2.$$

Відповідь: 2.

Приклад 2

Обчислити $\int\limits_{AB} (2x-y)dl$, де AB відрізок прямої від т. $A(0;0)$ до т. $B(2;3)$.

Розв'язання

Запишемо рівняння прямої AB за рівнянням прямої через дві точки $\frac{x-0}{2-0} = \frac{y-0}{3-0} \Rightarrow y = \frac{3}{2}x,\ \ y' = \frac{3}{2},\ \ x \in [0;2]$. За формулою (7) перейдемо до визначеного інтеграла, $dl = \sqrt{1+\left(\frac{3}{2}\right)^2}dx = \frac{\sqrt{13}}{2}dx,$

$$\int\limits_{AB} (2x-y)dl = \int\limits_0^2 \left(2x - \frac{3}{2}x\right)\frac{\sqrt{13}}{2}dx = \frac{\sqrt{13}}{4}\int\limits_0^2 dx = \frac{\sqrt{13}}{4}\cdot x\Bigg|_0^2 = \frac{\sqrt{13}}{2}.$$

Відповідь: $\frac{\sqrt{13}}{2}$.

Приклад 3

Обчислити $\int\limits_L \sqrt{x^2+y^2}dl$, де L – дуга кола $x^2+y^2 = 2x,\ y \geq 0$.

Розв'язання

Перетворимо рівняння

$$x^2+y^2=2x \Rightarrow x^2-2x+y^2=0, (x-1)^2+y^2=1.$$

Це коло з центром в т. C (1; 0) і $R=1$, яке знаходиться вище за вісь Ox.

Частина кола (рис. 3) у I чверті $L=OA$. Перейдемо до полярних координат $x=\rho\cos\varphi,\ y=\sin\varphi \Rightarrow \rho^2\cos\varphi+\rho^2\sin^2\varphi=2\rho\cos\varphi \Rightarrow$ $\Rightarrow \rho=2\cos\varphi$ рівняння заданого кола в полярних координатах, $\varphi\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$

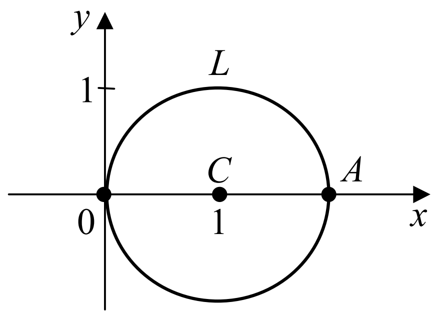

Рисунок 3

$$dl=\sqrt{\rho^2+\rho'^2}d\varphi=$$

$$=\sqrt{4\cos^2\varphi+4\sin^2\varphi}d\varphi=2d\varphi;$$

$$x^2+y^2=\rho^2=(2\cos\varphi)^2=$$

$$=4\cos^2\varphi,\ \sqrt{x^2+y^2}=2\cos\varphi,$$

оскільки $\varphi\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$, за формулою (9)

$$\int\limits_L\sqrt{x^2+y^2}dl=\int\limits_0^{\pi/2}2\cos\varphi 2d\varphi=4\sin\varphi\Big|_0^{\pi/2}=4.$$

Відповідь: 4.

1.4. Застосування криволінійних інтегралів першого роду

Геометричні застосування криволінійного інтеграла першого роду

1. Довжину дуги кривої L_{AB}, відповідно до формули (2), знаходимо за формулою

$$L=\int\limits_{AB}dl.$$

2. Нехай дана циліндрична поверхня σ, твірні якої паралельні Oz і перетинають криву L_{AB} у площині xOy, на цій поверхні

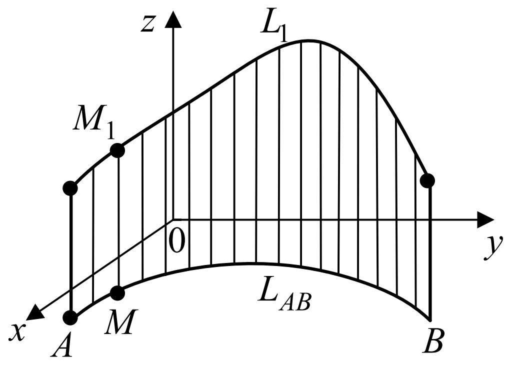

Рисунок 4

знаходиться крива L_1 вище, ніж крива L_{AB}, яка є проекцією L_1 на площину xOy (рис. 4). Апліката точки $M_1 \in L_1$ є функцією координат т. M лінії L_{AB}: $z = f(x, y)$. Тоді площу Q циліндричної поверхні σ, яка знаходиться між L_{AB} і L_1, знаходимо за формулою

$$Q = \int\limits_{L_{AB}} f(x, y)dl = \int\limits_{L_{AB}} zdl. \tag{11}$$

Цю формулу одержимо, якщо повторимо всі операції 1–4, які було зроблено в задачі про масу неоднорідної лінії.

Фізичні застосування криволінійних інтегралів першого роду

Нехай задана неоднорідна крива L_{AB} з лінійною густиною $\gamma = \gamma(x, y)$.

1. Маса гладкої кривої AB з неперервною густиною $\gamma(x, y)$ знаходимо за формулою (1)

$$m_{AB} = \int\limits_{AB} \gamma(x, y)\,dl.$$

2. Центр мас плоскої неоднорідної кривої.

Із курсу теоретичної механіки відомо, що центр мас системи матеріальних точок $M_k(x_k, y_k)$, $1 \le k \le n$ з масами m_k знаходять за формулами

$$x_c = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} x_k m_k}{\sum\limits_{k=1}^{n} m_k}, \qquad y_c = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} y_k m_k}{\sum\limits_{k=1}^{n} m_k}.$$

Застосовуючи операції 1–4, які наведені в задачі про масу неоднорідної лінії, одержимо

$$x_c = \frac{\int\limits_{AB} x\gamma(x, y)dl}{\int\limits_{AB} \gamma(x, y)dl}; \quad y_c = \frac{\int\limits_{AB} y\gamma(x, y)dl}{\int\limits_{AB} \gamma(x, y)dl}. \tag{12}$$

Аналогічним будуть міркування, якщо крива просторова.

Приклад 4

Знайти довжину дуги кривої

а) однієї арки циклоїди $(a > 0)$ $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$;

б) кардіоїди $\rho = 2(1 + \cos\varphi)$.

Розв'язання

а) для наочності зробимо рисунок кривої (рис. 5). Одна арка циклоїди – це крива *OA*, $t \in [0; 2\pi]$, оскільки крива задана параметричними рівняннями, тоді скористаємося формулою (4) для знаходження диференціала дуги за формулою (2) $L = \int\limits_{OA} dl$

$$dl = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}dt$$

$$x'_t = a(1 - \cos t),$$

$$y'_t = a\sin t$$

$$x_t'^2 + y_t'^2 = a^2(1 - \cos t)^2 + a^2\sin^2 t = a^2(1 - 2\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t) =$$

$$= 2a^2(1 - \cos t) = 4a^2\sin^2\frac{t}{2}.$$

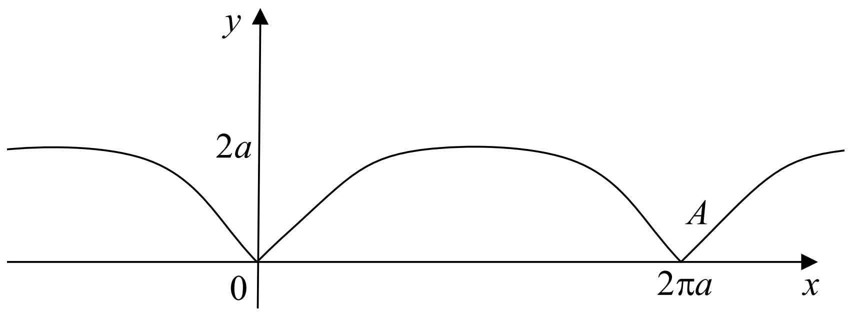

Рисунок 5

Отже,

$$dl = 2a\left|\sin\frac{t}{2}\right|dt = 2a\sin\frac{t}{2}dt,$$

оскільки $t \in [0; 2\pi]$.

$$L = \int\limits_{OA} dl = \int\limits_0^{2\pi} 2a\sin\frac{t}{2}dt = -4a\cos\frac{t}{2}\bigg|_0^{2\pi} =$$

$$= -4a(\cos\pi - \cos 0) = 8a \text{ (од).}$$

Відповідь: $8a$ (од).

б) зробимо рисунок кривої (рис. 6) $\rho = 2(1+\cos\varphi)$, $L = \int\limits_{Am0nA} dl.$

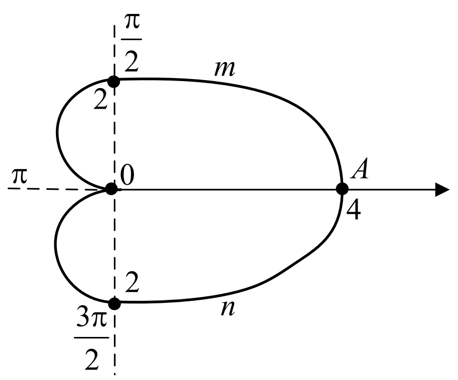

Рисунок 6

Диференціал дуги в полярній системі координат знаходимо за формулою (5):

$$dl = \sqrt{\rho^2 + \rho'^2}\, d\varphi$$

$$\rho' = -2\sin\varphi$$

$$\rho^2 + \rho'^2 = 4(1+\cos\varphi)^2 + 4\sin^2\varphi =$$

$$= 8(1+\cos\varphi) = 16\cos^2\frac{\varphi}{2}.$$

Оскільки довжини кривих $Am0$ и $0nA$ рівні, тоді

$$L = 2\int\limits_{Am0} dl, \quad t \in [0;\pi],$$

$$dl = \sqrt{16\cos^2\frac{\varphi}{2}}\, d\varphi = 4\left|\cos\frac{\varphi}{2}\right| d\varphi = 4\cos\frac{\varphi}{2}\, d\varphi,$$

тому що $\cos\dfrac{\varphi}{2} \geq 0, \quad t \in [0;\pi].$

$$L = 2\int\limits_0^{\pi} 4\cos\frac{\varphi}{2}\, d\varphi = 16\sin\frac{\varphi}{2}\Big|_0^{\pi} = 16\left(\sin\frac{\pi}{2} - \sin 0\right) = 16 \text{ (од)}.$$

Відповідь: 16 (од).

Приклад 5

Знайти координати центра мас однорідної кривої $L: y = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}, \ 0 \leq x \leq \ln 2$.

Розв'язання

Оскільки крива однорідна, $\gamma = \text{const}$, тоді формули (12) для знаходження центра мас будуть мати вигляд

$$x_c = \frac{\int\limits_L x\,dl}{\int\limits_L dl}, \qquad y_c = \frac{\int\limits_L y\,dl}{\int\limits_L dl}.$$

Задача про центр мас, таким чином, зводиться до обчислення трьох інтегралів: $\int\limits_L dl,\ \int\limits_L xdl,\ \int\limits_L ydl.$

Крива задана явно, значить диференціал дуги знаходимо за формулою (3) $dl = \sqrt{1 + y'^2(x)}dx.$

$$y' = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}),$$

$$1 + y'^2 = 1 + \frac{1}{4}(e^x - e^{-x})^2 = \frac{1}{4}(4 + e^{2x} - 2e^x \cdot e^{-x} + e^{-2x}) =$$

$$= \frac{1}{4}(e^{2x} + 2 + e^{-2x}) = \frac{1}{4}(e^x + e^{-x})^2;$$

$$dl = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})dx.$$

Обчислимо інтеграли, якщо $x \in [0; \ln 2]$

$$\int\limits_L dl = \int\limits_0^{\ln 2} \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})dx = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})\Big|_0^{\ln 2} = \frac{1}{2}\left(2 - \frac{1}{2} - 1 + 1\right) = \frac{3}{4};$$

$$\int\limits_L xdl = \int\limits_0^{\ln 2} x\frac{1}{2}(e^x + e^{-x})dx =$$

$$= \left| \begin{array}{ll} \multicolumn{2}{c}{\text{інтегруємо частинами}} \\ u = x; & du = dx \\ dv = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})dx; & v = \int \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})dx = \\ & = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \end{array} \right| =$$

$$= x \cdot \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})\Big|_0^{\ln 2} - \frac{1}{2}\int\limits_0^{\ln 2}(e^x - e^{-x})\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\ln 2\left(2 - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})\Big|_0^{\ln 2} =$$

$$= \frac{3}{4}\ln 2 - \frac{1}{2}\left(2 + \frac{1}{2} - 1 - 1\right) = \frac{3\ln 2 - 1}{4};$$

$$\int\limits_L y dl = \int\limits_0^{\ln 2} \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \cdot \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})dx = \frac{1}{4}\int\limits_0^{\ln 2} (e^{2x} + 2 + e^{-2x})dx =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}e^{2x} + 2x - \frac{1}{2}e^{2x}\right)\Bigg|_0^{\ln 2} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\cdot 4 + 2\ln 2 - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{32}(15 + 16\ln 2).$$

Отже,

$$x_c = \frac{\int\limits_L x dl}{\int\limits_L dl} = \frac{3\ln 2 - 1}{4} \cdot \frac{4}{3} = \frac{3\ln 2 - 1}{3};$$

$$y_c = \frac{\int\limits_L y dl}{\int\limits_L dl} = \frac{1}{32}(15 + 16\ln 2) \cdot \frac{4}{3} = \frac{15 + 16\ln 2}{24}.$$

Відповідь: $x_c = \dfrac{3\ln 2 - 1}{3}$; $y_c = \dfrac{15 + 16\ln 2}{24}$.

Запитання для самоконтролю

1. Дайте визначення криволінійного інтеграла першого роду.
2. Перелічіть властивості криволінійного інтеграла першого роду.
3. Запишіть формули для знаходження диференціала дуги кривої.
4. Запишіть формули, за якими обчислюють криволінійні інтеграли першого роду.
5. Застосування криволінійного інтеграла першого роду.

Практичне заняття № 1
КРИВОЛІНІЙНИЙ ІНТЕГРАЛ ПЕРШОГО РОДУ

Мета практичного заняття – розширення, поглиблення й деталізація теми «Криволінійний інтеграл першого роду», закріплення знань, одержаних на лекції.

Практичне заняття починаємо з оцінки засвоєння теоретичних знань з лекції, для цього проводимо опитування студентів за запитаннями самоконтролю, які були запропоновані лектором. Можна записати формули (1) – (12) для зручності користування.

Приклад 1.1

Обчислити криволінійний інтеграл: $\int\limits_L \frac{x}{y}dl, \quad L: y = 5\sqrt{x},$ $x \in [1;4]$.

Розв'язання

Крива L задана явно $y = \varphi(x)$, тому для обчислення інтеграла використаємо формулу (7). Крім того, знаємо, як змінюється змінна x, тому робити рисунок кривої не обов'язково.

$$y' = \frac{5}{2\sqrt{x}}; \quad 1 + y'^2 = 1 + \frac{25}{4x}; \quad dl = \sqrt{\frac{4x+25}{4x}}dx,$$

тоді

$$\int\limits_L \frac{x}{y}dl = \int\limits_1^4 \frac{x}{5\sqrt{x}}\sqrt{\frac{4x+25}{4x}}dx = \frac{1}{10}\int\limits_1^4 \sqrt{4x+25}dx =$$

$$= \frac{1}{10}(4x+25)^{3/2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4}\Big|_1^4 = \frac{1}{60}\left(\sqrt{41^3} - \sqrt{29^3}\right) = 1,773.$$

Відповідь: 1,773.

Приклад 1.2

Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_L y^2 dl,\ L: x=\dfrac{y^2}{2}-\ln y;$ $y\in[1;3].$

Розв'язання

Крива L задана явно $x=x(y)$, тому для обчислення обираємо формулу (8). Рисунок кривої не робимо

$$x'=y-\frac{1}{y},\ 1+x'^2=1+\left(y-\frac{1}{y}\right)^2=1+\left(y^2-\frac{2y}{y}+\frac{1}{y^2}\right)=\frac{y^4-y^2+1}{y^2};$$

$$dl=\sqrt{1+x'^2}dy=\frac{\sqrt{y^4-y^2+1}}{y}dy;$$

$$\int\limits_L y^2 dl=\int\limits_1^3 y^2\frac{\sqrt{y^4-y^2+1}}{y}dy=\int\limits_1^3 y\sqrt{y^4-y^2+1}\,dy=$$

$$=\left|\begin{matrix}\text{заміна} & y^2=t\\ 2ydy=dt & ydy=\dfrac{1}{2}dt\\ t_1=1, & t_2=9\end{matrix}\right|=\frac{1}{2}\int\limits_1^9\sqrt{t^2-t+1}\,dt=\frac{1}{2}\int\limits_1^9\sqrt{\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\,dt=$$

$$=\left[\begin{matrix}\text{скористаємося інтегралом}\\ \int\sqrt{x^2+a^2}\,dx=\dfrac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2}+\dfrac{a^2}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right|+C\end{matrix}\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{t-\frac{1}{2}}{2}\sqrt{\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}+\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\ln\left|t-\frac{1}{2}+\sqrt{\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\right|\right)\Bigg|_1^9=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{17}{4}\sqrt{73}+\frac{3}{8}\ln\left(\frac{17}{4}+\sqrt{73}\right)-\frac{1}{4}\cdot1-\frac{3}{8}\ln\left(\frac{1}{2}+1\right)\right)\approx 9,243.$$

Відповідь: 9,243.

Приклад 1.3

Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_L xyzdl,\ L: x = 4\cos t,$ $y = 4\sin t,\ z = 3t;\ t \in \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right].$

Розв'язання

L крива в просторі, вона задана параметричними рівняннями, зміна параметра t відома, тому рисунок кривої не робимо. Для обчислення інтеграла використовуємо формулу (10)

$$x'_t = -4\sin t;$$
$$y'_t = 4\cos t;$$
$$z'_t = 3;$$
$$x'^2_t + y'^2_t + z'^2_t = 16\sin^2 t + 16\cos^2 t + 9 = 25;$$

тоді

$$dl = 5dt;$$
$$xyz = 4\cos t \cdot 4\sin t \cdot 3t = 24t\sin 2t;$$
$$\int\limits_L xyzdl = 5\int\limits_0^{\pi/2} 24t\sin 2tdt = 120\int\limits_0^{\pi/2} t\sin 2tdt =$$
$$= \left| \begin{array}{ll} \text{інтегрування частинами} & \\ u = t; & du = dt \\ dv = \sin 2tdt; & v = \int \sin 2tdt = -\dfrac{1}{2}\cos 2t \end{array} \right| =$$
$$= -60t\cos 2t\Big|_0^{\pi/2} + 60\int\limits_0^{\pi/2} \cos 2tdt = 60 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot 1 + 30\sin 2t\Big|_0^{\pi/2} = 30\pi.$$

Відповідь: $30\pi = 94,248.$

Приклад 1.4

Знайти довжину дуги кривої L : $\rho = \sin^2 \varphi$.

Розв'язання

Крива L задана в полярній системі координат. Диференціал дуги dl знаходимо за формулою (5), а довжину за формулою (2). Зробимо рисунок кривої, щоб визначити інтервал змінення φ (рис. 7) $L = 0mAn0kBp0 = 4(0mA)$, тому

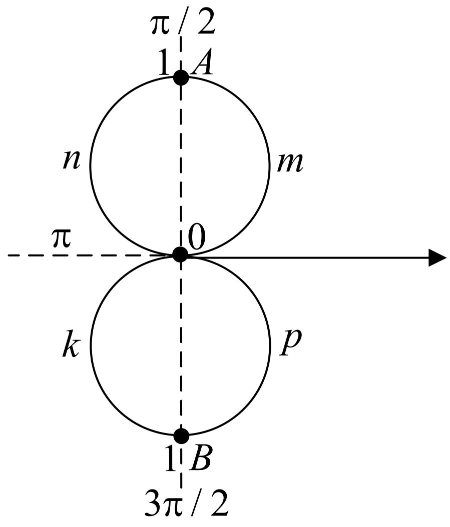

Рисунок 7

$$L = \int\limits_L dl = 4 \int\limits_{0mA} dl, \quad \varphi \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right];$$

$$\rho' = 2\sin\varphi \cdot \cos\varphi$$

$$\rho^2 + \rho'^2 = \sin^4\varphi + 4\sin^2\varphi\cos^2\varphi =$$

$$= \sin^2\varphi(\sin^2\varphi + 4\cos^2\varphi) =$$

$$= \sin^2\varphi(1 + 3\cos^2\varphi)$$

значить

$$dl = \sqrt{\sin^2\varphi(1+3\cos^2\varphi)}\, d\varphi =$$

$$= |\sin\varphi| \cdot \sqrt{1+3\cos^2\varphi}\, d\varphi,$$

оскільки

$$\varphi \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right], \quad \text{то} \quad |\sin\varphi| = \sin\varphi;$$

$$L = 4\int\limits_0^{\pi/2} \sin\varphi\sqrt{1+3\cos^2\varphi}\, d\varphi = \left| \begin{array}{l} \text{заміна} \\ \sqrt{3}\cos\varphi = t \qquad t_1 = \sqrt{3}, \quad t_2 = 0 \\ -\sqrt{3}\sin\varphi d\varphi = dt, \ \sin\varphi d\varphi = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}dt \end{array} \right| =$$

$$= -\frac{4}{\sqrt{3}} \int\limits_{\sqrt{3}}^{0} \sqrt{1+t^2}\, dt = \frac{4}{\sqrt{3}} \int\limits_0^{\sqrt{3}} \sqrt{1+t^2}\, dt =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \text{скористаємося інтегралом} \\ \text{з прикладу 1.2} \end{array} \right| =$$

$$=\frac{4}{\sqrt{3}}\left(\frac{t}{2}\sqrt{1+t^2}+\frac{1}{2}\ln\left|t+\sqrt{t^2+1}\right|\right)\Bigg|_0^{\sqrt{3}}=$$

$$=\frac{4}{\sqrt{3}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 2+\frac{1}{2}\ln\left(\sqrt{3}+2\right)\right)=5{,}521 \text{ (од.).}$$

Відповідь: $5{,}521$ (од.).

Приклад 1.5

Знайти масу дуги кривої L, густина якої $\gamma=\gamma(x,y)$, $L: y=2\sqrt{x},\ x\in[1;4],\ \gamma(x,y)=y^2\cdot\sqrt{x}.$

Розв'язання

Масу кривої знаходимо за формулою (1) $m=\int\limits_L \gamma(x,y)dl.$ Криву не зображуємо, оскільки знаємо інтервал змінення x. Інтеграл знаходимо за формулою (7)

$$y'=\frac{1}{\sqrt{x}};\quad 1+y'^2=1+\frac{1}{x};\quad dl=\sqrt{1+\frac{1}{x}}\,dx=\sqrt{\frac{1+x}{x}}\,dx;$$

$$m=\int\limits_L y^2\sqrt{x}dl=\int\limits_1^4 4x\cdot\sqrt{x}\sqrt{\frac{1+x}{x}}dx=$$

$$=4\int\limits_1^4 x\sqrt{1+x}\,dx=\begin{vmatrix}\sqrt{1+x}=t, & 1+x=t^2\\ x=t^2-1, & dx=2tdt\\ t_1=\sqrt{2}, & t_2=\sqrt{5}\end{vmatrix}=$$

$$=8\int\limits_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}}(t^2-1)^2\,tdt=8\left(\frac{t^5}{5}-\frac{t^3}{3}\right)\Bigg|_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}}=$$

$$=8\left(\frac{25\sqrt{5}}{5}-\frac{5\sqrt{5}}{3}-\frac{4\sqrt{2}}{5}+\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)=58{,}12 \text{ (кг).}$$

Відповідь: $58{,}12$ (кг).

Приклад 1.6

Знайти координати центра мас лінії L, якщо її лінійна густина $\gamma=\gamma(x,y)$, $L: y=4-x,\ x\in[0;2],\ \gamma(x,y)=x^2+y^2.$

Розв'язання

Центр мас плоскої лінії L знаходимо за формулою (12). Рисунок кривої не робимо, оскільки інтервал для x задано. Нам треба знайти три інтеграли

$$m=\int\limits_L \gamma(x,y)dl,\quad \int\limits_L x\gamma(x,y)dl,\quad \int\limits_L y\gamma(x,y)dl.$$

$$dl=\sqrt{1+y'^2}\,dx=\sqrt{1+1}\,dx=\sqrt{2}\cdot dx;$$

$$m=\int\limits_L (x^2+y^2)dl=\sqrt{2}\int\limits_0^2\left(x^2+(4-x)^2\right)dx=$$

$$=\sqrt{2}\left(\frac{x^3}{3}-\frac{(4-x)^3}{3}\right)\Bigg|_0^2=\sqrt{2}\left(\frac{8}{3}-\frac{8}{3}+\frac{64}{3}\right)=\frac{64\sqrt{2}}{3};$$

$$\int\limits_L x(x^2+y^2)dl=\sqrt{2}\int\limits_0^2 x\left(x^2+(x-4)^2\right)dx=$$

$$=\sqrt{2}\int\limits_0^2 x\left(2x^2-8x+16\right)dx=\sqrt{2}\left(\frac{x^4}{2}-\frac{8x^3}{3}+\frac{16x^2}{2}\right)\Bigg|_0^2=$$

$$=\sqrt{2}\left(\frac{1}{2}\cdot 16-\frac{64}{3}+32\right)=\frac{56\sqrt{2}}{3}.$$

$$\int\limits_L y(x^2+y^2)dl=\sqrt{2}\int\limits_0^2(4-x)\left(2x^2-8x+16\right)dx=$$

$$=\sqrt{2}\int\limits_0^2\left(8x^2-32x+64-2x^3+8x^2-16x\right)dx=$$

$$=\sqrt{2}\int\limits_0^2\left(-2x^3+16x^2-48x+64\right)dx=$$

$$=\sqrt{2}\left(-\frac{x^4}{2}+16\frac{x^3}{3}-24x^2+64x\right)\Bigg|_0^2=$$

$$=\sqrt{2}\left(-8+\frac{128}{3}-24\cdot 4+128\right)=\frac{200\sqrt{2}}{3},$$

тоді

$$x_c=\frac{56\sqrt{2}}{3}:\frac{64\sqrt{2}}{3}=0,875;$$

$$y_c=\frac{200\sqrt{2}}{3}:\frac{64\sqrt{2}}{3}=3,125.$$

Відповідь: $x_c = 0,875;\quad y_c = 3,125.$

Приклад 1.7

Знайти площу Q бокової поверхні циліндра $x^2+y^2=4,\ y\geq 0,$ $z\geq 0$, відрізаної площиною $z=y$.

Розв'язання

Зробимо рисунок поверхні σ: $x^2+y^2=4$ (рис. 8).

За формулою (11) $Q=\int\limits_L z dl.$

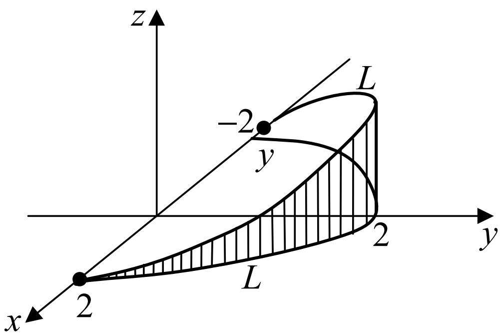

Рисунок 8

Запишемо рівняння кола L у параметричному вигляді

$$x=2\cos t,\quad y=2\sin t,$$

$$x'=-2\sin t,\quad y'=2\cos t;$$

$$dl=\sqrt{x'^2+y'^2}\,dt=$$

$$=\sqrt{4\sin^2 t+4\cos^2 t}\,dt=2dt;$$

$$t\in[0;\pi];$$

$$Q=\int\limits_L y dl=\int\limits_0^{\pi} 2\sin t\cdot 2dt=-4\cos t\Big|_0^{\pi}=4+4=8\ \ (\text{од}^2).$$

Відповідь: 8 (од^2).

Лекція 2
КРИВОЛІНІЙНІ ІНТЕГРАЛИ ДРУГОГО РОДУ
(за координатами)

Мета лекції: ознайомлення з поняттям криволінійного інтеграла другого роду, його властивостями, способами обчислення, обчислення криволінійних інтегралів другого роду за замкнутим контуром.

План лекції

2.1. Векторне поле. Задача про роботу силового поля.
2.2. Криволінійний інтеграл другого роду та його властивості.
2.3. Обчислення криволінійних інтегралів другого роду, криволінійних інтегралів за замкнутим контуром.

2.1. Векторне поле. Задача про роботу силового поля

Визначення

Векторним полем називається ділянка V простору або площини D, у якій кожній точці M відповідає вектор $\overline{F}$. Проекції вектора $\overline{F}$ на координатні осі в V будуть функціями $P = P(x, y, z)$, $Q = Q(x, y, z)$, $R = R(x, y, z)$, тобто

$$\overline{F} = \overline{F}(M) = P(x, y, z)\overline{i} + Q(x, y, z)\overline{j} + R(x, y, z)\overline{k} =$$
$$= (P(x, y, z); Q(x, y, z); R(x, y, z)).$$

Зокрема, якщо поле задано на площині D, тоді

$$\overline{F} = \overline{F}(M) = P(x, y)\overline{i} + Q(x, y)\overline{j} = (P(x, y); Q(x, y)).$$

Якщо вектор $\overline{F}$ є силою, тоді поле називається силовим полем.

Розглянемо задачу. Знайти роботу силового поля $\overline{F} = P(x, y, z)\overline{i} + Q(x, y, z)\overline{j} + R(x, y, z)\overline{k}$ за умови руху в ньому матеріальної точки вздовж кривої L_{AB} із точки A в точку B.

З курсу теоретичної механіки знаємо, що робота сталої сили $\overline{F}$ у процесі переміщення матеріальної точки вздовж вектора $\overline{a}$ дорівнює скалярному добутку сили й цього вектора

$$A = \overline{F} \cdot \overline{a}. \qquad (13)$$

У загальному випадку сила $\overline{F}$ змінюється як за напрямком, так і за модулем, а переміщення по кривій L не завжди прямолінійне.

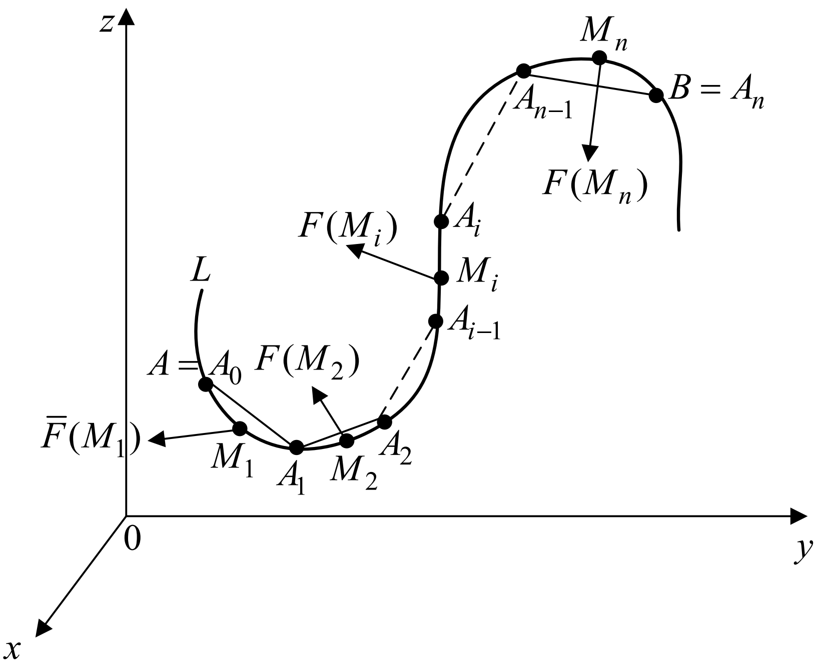

Рисунок 9

Проведемо певні операції.

1. Поділимо криву L_{AB} точками $A_0 = A, A_1, A_2, ..., A_{i-1}, A_i, ...,$ $A_n = B$ на n малих дуг, впишемо в цю криву ломану лінію (рис. 9), з'єднавши послідовні точки ділення відрізками прямих. Одержимо вектори $\overline{A_0A_1}$, $\overline{A_1A_2}$, ..., $\overline{A_{i-1}A_i}$, ..., $\overline{A_{n-1}A_n}$. Кожен вектор $\overline{A_{i-1}A_i} = \overline{OA_i} - \overline{OA_{i-1}} = (\Delta x_i, \Delta y_i, \Delta z_i), 1 \le i \le n$. $\overline{OA_i}$ і $\overline{OA_{i-1}}$ радіуси – вектори точок A_i й A_{i-1}.

2. На кожній дузі $\cup A_{i-1}A_i$ оберемо точку $M_i, 1 \le i \le n$, тоді робота силового поля вздовж дуги $\cup A_{i-1}A_i$ буде наближено дорівнювати роботі сили $\overline{F}(M_i)$ уздовж вектора $\overline{A_{i-1}A_i}$, яка дорівнює

$$\Delta A_i \approx \overline{F}(M_i) \cdot \overline{A_{i-1}A_i} = P(M_i)\Delta x_i + Q(M_i)\Delta y_i + R(M_i)\Delta z_i.$$

3. Складемо інтегральну суму

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \left(P(M_i)\Delta x_i + Q(M_i)\Delta y_i + R(M_i)\Delta z_i \right),$$

вона наближено дорівнює роботі силового поля.

4. За точне значення роботи A візьмемо границю інтегральної суми S_n, коли $n \to \infty$ і довжина кожної дуги $\cup A_{i-1}A_i$ стягується в точку, у такому разі ця границя не залежить ні від способу розбиття кривої L на малі дуги, ні від вибору точок M_i на кожному розбитті

$$A = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \max|A_{i-1}A_i|\to 0}} \sum_{i=1}^{n} \left(P(M_i)\Delta x_i + Q(M_i)\Delta y_i + R(M_i)\Delta z_i \right).$$

Таким чином, обчислення роботи силового (векторного) поля привело нас до знаходження границі інтегральних сум. Вивчимо властивості таких сум у загальному вигляді.

2.2. Криволінійний інтеграл другого роду та його властивості

Нехай у певній ділянці V тривимірного простору задана гладка крива L (дуга AB) та векторне поле $\bar{F} = P(x,y,z)\bar{i} + Q(x,y,z)\bar{j} + R(x,y,z)\bar{k}$, яке визначено в кожній точці кривої L.

Проведемо операції 1–3, як у задачі про роботу силового поля.

1. Розділимо криву AB точками $A = A_0, A_1, ..., A_{n-1}$, $B = A_n$ у напрямку від A до B.

2. На кожній дузі $\cup A_{i-1}A_i$ оберемо довільну точку $M_i(x_i, y_i, z_i)$ і знайдемо скалярний добуток векторів $\bar{F}\left(M_i\right) \overline{A_{i-1}A_i} = (\Delta x_i, \Delta y_i, \Delta z_i)$

$$\bar{F}(M_i) \cdot \overline{A_{i-1}A_i} = P(M_i)\Delta x_i + Q(M_i)\Delta y_i + R(M_i)\Delta z_i.$$

3. Складемо інтегральну суму

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \bar{F}(M_i) \cdot \overline{A_{i-1}A_i} = \sum_{i=1}^{n} \left(P(M_i)\Delta x_i + Q(M_i)\Delta y_i + R(M_i)\Delta z_i \right).$$

Визначення

Якщо існує скінченна границя інтегральної суми за умови $n \to \infty$ і довжині всіх дуг $\cup A_{i-1}A_i \to 0$, яка не залежить ні від способу розбиття кривої L (дуги AB) на частини, ні від вибору точок M_i всередині кожного розбиття, то ця границя називається криволінійним інтегралом від вектор-функції $\overline{F}$ уздовж кривої L (або кривої AB) у напрямку від точки A до точки B і позначається

$$\int\limits_{AB} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$$

або (13)

$$\int\limits_{L} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz.$$

Цей інтеграл часто називають криволінійним інтегралом за координатам або *криволінійним інтегралом другого роду*. Іноді його записують у скороченій формі

$$\int\limits_{L} \overline{F} \cdot \overline{dr},$$

де

$$\overline{dr} = dx \cdot \overline{i} + dy \cdot \overline{j} + dz \cdot \overline{k}.$$

Отже, за визначенням

$$\int\limits_{AB} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz =$$

$$= \lim_{\substack{n\to\infty \\ \max|A_{i-1}A_i|\to 0}} \sum_{i=1}^{n} \left(P(x_i,y_i,z_i)\Delta x_i + Q(x_i,y_i,z_i)\Delta y_i + R(x_i,y_i,z_i)\Delta z_i \right).$$

Із визначення криволінійного інтеграла другого роду випливає, що робота силового поля $\overline{F}$ уздовж дуги L_{AB} дорівнює

$$A = \int\limits_{AB} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz. \tag{14}$$

Має місце теорема існування криволінійного інтеграла другого роду.

Теорема

Нехай у ділянці V тривимірного простору задана гладка крива L (дуга AB) і в кожній точці цієї кривої вектор-функція $\overline{F} = P(x,y,z)\overline{i} + Q(x,y,z)\overline{j} + R(x,y,z)\overline{k}$ неперервна, тобто неперервні $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$, тоді існує криволінійний інтеграл другого роду.

За формою запису інтеграла можна сказати, що він є криволінійним інтегралом другого роду, якщо він містить функцію трьох (або двох) змінних й один диференціал будь-якої змінної, а також вказана крива L, наприклад

$$\int\limits_L f(x,y,z)dy,$$

коли

$$\overline{F} = f(x,y,z)\overline{j}.$$

Для плоского векторного поля криволінійний інтеграл має вигляд

$$\int\limits_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy. \tag{15}$$

Властивості криволінійного інтеграла другого роду

1. Властивості лінійності:

а) криволінійний інтеграл від суми двох функцій дорівнює сумі криволінійних інтегралів другого роду від кожної, тобто якщо $P(x,y,z) = f(x,y,z) + g(x,y,z)$, тоді

$$\int\limits_L \big(f(x,y,z) + g(x,y,z)\big)dx = \int\limits_L f(x,y,z)dx + \int\limits_L g(x,y,z)dx;$$

б) сталий множник можна виносити за знак криволінійного інтеграла другого роду. Якщо

$$P(x,y,z) = kf(x,y,z),$$

тоді

$$\int\limits_L kf(x,y,z)dx = k\int\limits_L f(x,y,z)dx.$$

2. Властивість адитивності. Якщо

$$L = L_1 \cup L_2,$$

тоді

$$\int_L f(x,y,z)dx = \int_{L_1} f(x,y,z)dx + \int_{L_2} f(x,y,z)dy.$$

3. Криволінійний інтеграл другого роду залежить від напрямку руху по кривій

$$\int_{AB} f(x,y,z)dx = -\int_{BA} f(x,y,z)dx.$$

4. Зв'язок криволінійних інтегралів першого та другого роду.

Якщо $\overline{\tau}$ одиничний вектор дотичної в кожній точці гладкої кривої L, то його проекції на осі є його напрямні косинуси $(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$, тоді

$$\int_L P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz =$$
$$= \int_L \big(P(x,y,z)\cos\alpha + Q(x,y,z)\cos\beta + R(x,y,z)\cos\gamma\big)dl,$$

оскільки

$$dx = \cos\alpha \cdot dl, \quad dy = \cos\beta dl, \quad dz = \cos\gamma \cdot dl.$$

2.3. Обчислення криволінійних інтегралів другого роду, криволінійні інтеграли за замкнутим контуром

Нехай гладка крива L_{AB} задана параметричними рівняннями $x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t)$. Ці функції мають неперервні похідні на $[\alpha;\beta]$, зокрема якщо $t = \alpha$, маємо точку A на кривій L_{AB}, а за умови $t = \beta$ – точку B. Нехай функція $P(x,y,z)$ неперервна на кривій L_{AB}, тобто виконуються умови існування криволінійного інтеграла другого роду, тоді

$$\int_{AB} P(x,y,z)dx = \int_{\alpha}^{\beta} P(x(t), y(t), z(t))x'(t)dt. \tag{16}$$

Дійсно, зробимо операції 1–4, як у задачі про роботу силового поля.

1. Розділимо відрізок $[\alpha;\beta]$ на n частин $t_0=\alpha, t_1, t_2, ..., t_{n=\beta}$. Цим значенням параметра t відповідають точки дуги AB $A=A_0, A_1, ..., A_{n-1}, A_n=B$, у цьому випадку точки, які ділять дугу AB, розташовані в напрямку від точки A до точки B.

2. Для кожної дуги $\cup A_{i-1}A_i$, $\Delta x_i = x(t_i)-x(t_{i-1})$. За теоремою Лагранжа одержимо $\Delta x_i = x'(\tau_i)\Delta t_i$, $t_{i-1}<\tau_i<t_i$. Значенню параметра $t=\tau_i$ відповідає точка $M_i \in \cup A_{i-1}A_i$, $M_i = M\big(x(\tau_i), y(\tau_i), z(\tau_i)\big)$. Знайдемо добуток $P(M_i)\cdot\Delta x_i = P(M_i)\cdot x'(\tau_i)\Delta t_i$.

3. Складемо інтегральну суму

$$S_n=\sum_{i=1}^{n} P(M_i)\cdot\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n} P\big(x(\tau_i), y(\tau_i), x(\tau_i)\big)x'(\tau_i)\Delta t_i.$$

4. Оскільки

$$\int\limits_{AB} P(x,y,z)dx=\lim_{\substack{n\to\infty\\ \Delta x_i\to 0}} S_n$$

(за теоремою існування криволінійного інтеграла другого роду), тоді

$$\int\limits_{AB} P(x,y,z)dx=\lim_{\substack{n\to\infty\\ \Delta x_i\to 0}} \sum_{i=1}^{n} P\big(x(\tau_i), y(\tau_i), z(\tau_i)\big)x'(\tau_i)\Delta t_i.$$

Сума, яка знаходиться під знаком границі, є інтегральною сумою функції однієї змінної t: $P\big(x(t), y(t), z(t)\big)x'(t)$, яка задана на відрізку $[\alpha;\beta]$, тобто границя цієї суми є визначеним інтегралом $\int\limits_{\alpha}^{\beta} P\big(x(t), y(t), z(t)\big)x'(t)dt$, що й доводить формулу (16).

Аналогічно знаходимо

$$\int\limits_{AB} Q(x,y,z)dy=\int\limits_{\alpha}^{\beta} Q\big(x(t), y(t), z(t)\big)y'(t)dt;$$

$$\int\limits_{AB} R(x,y,z)dy=\int\limits_{\alpha}^{\beta} R\big(x(t), y(t), z(t)\big)z'(t)dt.$$

Отже, одержали формулу для обчислення криволінійного інтеграла другого роду

$$\int\limits_{AB} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz =$$

$$= \int\limits_{\alpha}^{\beta} \Big(P\big(x(t), y(t), z(t)\big) x'(t) +. \qquad (17)$$

$$+Q\big(x(t), y(t), z(t)\big) y'(t) + R\big(x(t), y(t), z(t)\big) z'(t) \Big) dt.$$

Якщо дуга *AB* плоска в площині *xOy* та задана параметрично $x = x(t),\ y = y(t),\ \alpha \le t \le \beta,$ у цьому випадку $A = A(x(\alpha)), y(\alpha)),$ $B = B(x(\beta)), y(\beta))$ і векторне поле плоске, у якого $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ неперервні функції на кривій *AB*, тоді

$$\int\limits_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy =$$

$$= \int\limits_{\alpha}^{\beta} (P\big(x(t), y(t))\big) x'(t) + (Q\big(x(t), y(t))\big) y'(t) dt. \qquad (18)$$

Якщо крива *AB* задана рівнянням $y = \varphi(x)$, то одержимо формулу для обчислення:

$$\int\limits_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy =$$

$$= \int\limits_{x_B}^{x_A} \Big((P\big(x, \varphi(x)\big) + Q\big(x, \varphi(x)\big) \varphi'(x) \Big) dx. \qquad (19)$$

Приклад 6

Обчислити криволінійний інтеграл $I = \int\limits_{AB} 2xydx + y^2dy + z^2dz$, де *AB* – перший виток гвинтової лінії $x = \cos t,\ y = \sin t,\ z = 2t$ від точки *A* (1; 0; 0) до точки *B* (1; 0; 4π).

Розв’язання

Рисунок кривої робити не будемо, оскільки відомо, як змінюється параметр $t:\ t_A = 0,\ t_B = 2\pi$. Будемо застосовувати формулу (17). Знайдемо похідні $x'(t) = -\sin t,\ y'(t) = \cos t,\ z'(t) = 2,$ тоді

$$I = \int_0^{2\pi} \left(2\cos t \sin t(-\sin t) + \sin^2 t \cos t + 4t^2 \cdot 2\right) dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(8t^2 - \cos t \sin^2 t\right) dt = \left(\frac{8t^3}{3} - \frac{\sin^3 t}{3}\right)\Bigg|_0^{2\pi} = \frac{64}{3}\pi^3.$$

Відповідь: $\frac{64}{3}\pi^3$.

Приклад 7

Обчислити криволінійний інтеграл $I = \int\limits_{AB} (x^2 + y^2)dx + 2xydy$ уздовж дуги кубічної параболи $y = x^3$ від точки A (1; 1) до точки B (2; 8).

Розв'язання

Крива AB задана явно $y = x^3$, маємо координати початкової та кінцевої точок кривої *AB,* тому немає необхідності в її зображенні. Будемо застосовувати формулу (19)

$$y' = 3x^3;\; x_A = 1;\; x_B = 2;$$

$$I = \int_1^2 \left((x^2 + x^6) + 2x \cdot x^3 \cdot 3x^2\right) dx =$$

$$= \int_1^2 (7x^6 + x^2) dx = \left(x^7 + \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_1^2 = \left(128 + \frac{8}{3} - 1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{388}{3} = 129,33.$$

Відповідь: 129,33.

Приклад 8

Знайти роботу силового поля $\overline{F} = (-x^2 - y^2)\overline{i} + 4x\overline{j}$ за умови переміщення матеріальної точки вздовж лінії $L_{AB} : y = 2x^2$ з точки A (0; 0) у точку B (2; 8).

Розв'язання

Роботу силового поля $\overline{F}$ уздовж кривої L_{AB} знаходимо за формулою (14). Задано плоске силове поле $P(x,y)=(-x^2-y^2)$, $Q=4x$, $R=0$ у площині xOy, тоді $A=\int\limits_{AB} Pdx+Qdy.$

Для визначення роботи силового поля одержимо інтеграл $A=\int\limits_{AB}(-x^2-y^2)dx+4xdy.$ Відома початкова точка A й кінцева точка B. Для обчислення інтеграла застосуємо формулу (19), тоді

$$y'=4x;\ x_A=0;\ x_B=2.$$

$$A=\int\limits_0^2\left((-x^2-y^2)+4x\cdot 4x\right)dx=\int\limits_0^2(15x^2-4x^4)dx=$$

$$=\left(5x^3-\frac{4}{5}x^5\right)\Bigg|_0^2=5\cdot 8-\frac{4}{5}\cdot 32=14,4\ \text{(Дж)}.$$

Відповідь: $14,4$ (Дж).

Якщо криволінійний інтеграл $\int\limits_L \overline{F}\cdot\overline{dr}$ від вектор-функції $\overline{F}$ беремо по замкнутій лінії L (або по замкнутому контуру L), то він називається циркуляцією векторного поля $\overline{F}$ по замкнутому контуру L, позначається

$$\oint\limits_L \overline{F}\cdot\overline{dr},$$

$$\oint P(x,y)dx+Q(x,y)dy+R(x,y)dz$$

у випадку плоского векторного поля $\oint\limits_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy$.

У випадку просторового замкнутого контуру L завжди вказується напрямок руху, а у випадку плоского замкнутого контуру ми повинні самі визначати напрямок обходу.

Якщо замкнутий контур L лежить у площині xOy, тоді він обмежує ділянку D у цій площині (рис. 10). Контур L без самоперетинання (типу вісімки).

Ділянка D – однозв'язна. Це значить, що кожний замкнутий контур у D може бути в ній стягнутий до точки.

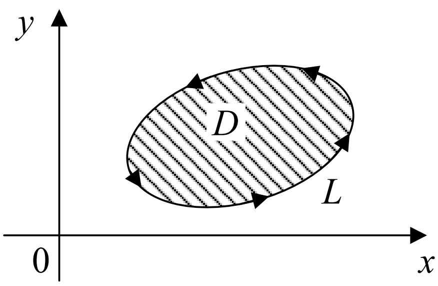

Рисунок 10

Додатним напрямком обходу замкнутого контуру L будемо називати той напрямок, коли ділянка D знаходиться ліворуч (рис. 10).

Особливістю плоского замкнутого контуру L є те, що початкова й кінцева точки кривої збігаються. Тому під час інтегрування ми самі визначаємо цю точку й додатний напрямок обходу контуру L .

Приклад 9

Обчислити інтеграл за замкнутим контуром $\oint\limits_L (x^2 - 2y)dx + Q(2x + y)dy$, де L контур ΔABC з вершинами $A(0; 0)$, B (1; 0), C (0; 2), який проходить у додатному напрямку.

Розв'язання

Зробимо рисунок кривої L й покажемо на ньому додатний напрямок (рис. 11).

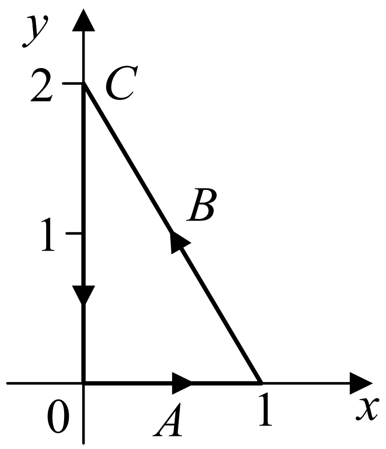

Рисунок 11

За властивістю адитивності криволінійних інтегралів другого роду маємо

$$\oint\limits_{ABC} = \int\limits_{AB} + \int\limits_{BC} + \int\limits_{CA}.$$

Кожен з інтегралів знаходимо за формулою (19):

1) AB:

$$y = 0,\ x_A = 0,\ x_B = 1,$$
$$y' = 0,\quad dy = y'dx = 0.$$

Тоді

$$\int\limits_{AB} (x^2 - 2y)dx + (2x + y)dy = \int\limits_0^1 x^2 dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1 = \frac{1}{3};$$

2) BC: запишемо рівняння прямої BC, або як рівняння прямої через дві точки $\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$, або як рівняння прямої у відрізках $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1.$

Тут $a=1;\ b=2$, тоді рівняння BC має вигляд

$$\frac{x}{1}=\frac{y}{2}=1,\ y=2(1-x),\ y'=-2,\ x_B=1,\ x_C=0;$$

$$\int\limits_{BC}=\int\limits_1^0\Big(\big((x^2-2\cdot 2(1-x)\big)+(2x+2(1-x))\cdot(-2)\Big)dx=$$

$$=\int\limits_1^0\left(x^2-4+4x-4\right)dx=\left(\frac{x^3}{3}+2x^2-8x\right)\Bigg|_1^0=0-\left(\frac{1}{3}+2-8\right)=\frac{17}{3};$$

3) CA:

$$x=0,\ y_C=2,\ y_A=0,\ dx=x'dy,\ x'=0,\ dx=0.$$

$$\int\limits_{CA}=\int\limits_2^0 ydy=\frac{y^2}{2}\Bigg|_2^0=0-2=-2.$$

Таким чином,

$$\oint\limits_{ABC}(x^2-2y)dx+(2x-y)dy=\frac{1}{3}+\frac{17}{3}-2=4.$$

Відповідь: 4.

Приклад 10

Обчислити інтеграл за замкнутим контуром $\oint\limits_L xdx+(2x-y)dy$, де L – еліпс $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$, який проходить у додатному напрямку.

Розв'язання

Зробимо рисунок еліпса й визначимо додатний напрямок (рис. 12).

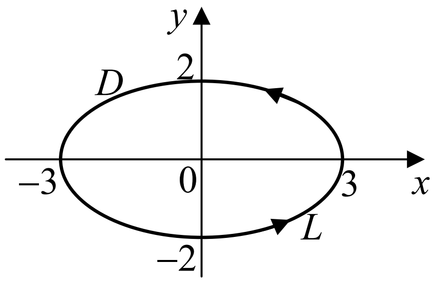

Рисунок 12

Запишемо параметричні рівняння еліпса

$$x = 3\cos t, \quad y = 2\sin t, \quad t \in [0; 2\pi].$$

Додатний напрямок проти ходу годинникової стрілки збігається зі зростанням параметра t, значить $t_1 = 0$, $t_2 = 2\pi$.

Для обчислення інтеграла користуємося формулою (18)

$x' = -3\sin t, \quad y' = 2\cos t;$

$$\oint\limits_L xdx + (2x - y)dy = \int\limits_0^{2\pi} \left(3\cos t \cdot (-3\sin t) + (6\cos t - 2\sin t) \cdot 2\sin t\right) dt =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} \left(-9\sin t\cos t + 12\cos^2 t - 4\sin t\cos t\right) dt =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} \left(-13\sin t)d(\sin t\right) + 6\int\limits_0^{2\pi} \left(1 + \cos 2t\right) dt =$$

$$= -\frac{13}{2}\sin^2 t\Bigg|_0^{2\pi} + 6\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{2\pi} = 12\pi.$$

Відповідь: 12π.

Приклад 11

Обчислити $\oint\limits_L (z - y)dx + xdy + (y + z)dz$, де L – коло $x^2 + y^2 + z^2 = 8$, $y = z$, яке проходить у додатному напрямку, коли дивитися з боку додатного напрямку осі Oy.

Розв'язання

Зробимо рисунок просторової лінії L та визначимо додатний напрямок (рис. 13).

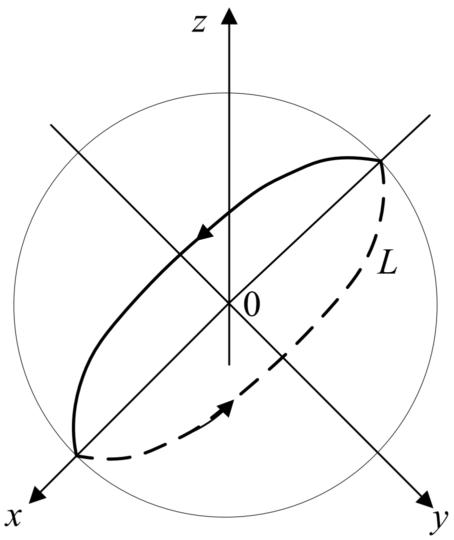

Рисунок 13

Запишемо параметричні рівняння кривої L.

Нехай $x=\sqrt{8}\cos t$, тоді $y^2+z^2=$ $=8-8\cos^2 t=8\sin^2 t$, оскільки $y=z$, тоді $2y^2=8\sin^2 t$, значить $y=2\sin t$, $y=z=2\sin t, t\in[0;2\pi]$.

За умови зворотнього напрямку обходу параметр t спадає, тому $t_1=2\pi,\ t_2=0$.

Для обчислення інтеграла користуємося формулою (17)

$$x'_t=\sqrt{8}(-\sin t);\ \ y'_t=2\cos t;\ \ z'_t=2\cos t;$$

одержимо

$$\oint_L (z-y)dx+xdy+(y+z)dz=$$

$$=\int_{2\pi}^{0}\Big((2\sin t-2\sin t)(-\sqrt{8}\sin t)+$$

$$+\sqrt{8}\cos t\cdot 2\cos t+(2\sin t+2\sin t)2\cos t\Big)dt=$$

$$=2\sqrt{8}\int_{2\pi}^{0}\cos^2 tdt+4\int_{2\pi}^{0}\sin t\cdot 2\cos tdt=$$

$$=\sqrt{8}\int_{2\pi}^{0}(1+\cos 2t)+4\int_{2\pi}^{0}\sin 2tdt=$$

$$=\sqrt{8}\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_{2\pi}^{0}-2\cos 2t\Bigg|_{2\pi}^{0}=\sqrt{8}(0-2\pi)=-2\pi\sqrt{8}.$$

Відповідь: $-2\pi\sqrt{8}$.

Запитання для самоконтролю

1. Надати визначення векторного поля, силового поля.
2. Надати визначення криволінійного інтеграла другого роду.
3. Які властивості має криволінійний інтеграл другого роду.
4. Записати формули для обчислення криволінійних інтегралів другого ряду.
5. Замкнутий контур, додатний напрямок руху по замкнутому контуру.
6. Обчислення криволінійних інтегралів за замкнутим контуром.

Практичне заняття № 2
КРИВОЛІНІЙНИЙ ІНТЕГРАЛ ДРУГОГО РОДУ

Мета практичного заняття – розширення, поглиблення знань з теми «Криволінійний інтеграл другого роду»; набуття навичок з обчислення криволінійних інтегралів другого роду, як по дузі, так і по замкнутій кривій; уміння знаходити роботу силового поля.

Практичне заняття починаємо з відповідей на питання самоконтролю. Яка ділянка є однозв'язною на площині. Записати формули (17)–(19) переходу від криволінійного інтеграла другого роду до визначеного інтеграла, формулу для обчислення роботи силового поля (4).

Приклад 2.1

Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_L ydx-(y+x^2)dy$, де L – дуга параболи $y=2x-x^2$, що знаходиться над віссю Ox та проходить за ходом годинникової стрілки.

Розв'язання

Оскільки не визначені початкова й кінцева точки дуги L, то зробимо рисунок (рис. 14) цієї лінії. Одержимо, що дуга кривої L – це частина параболи AB, і точка A (0; 0) – початок, точка B (2; 0) – кінець цієї дуги.

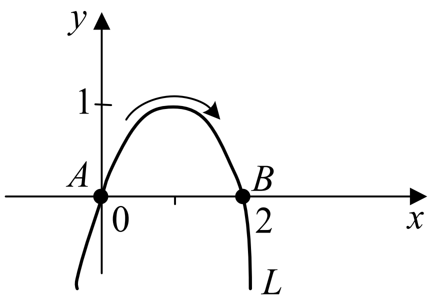

Рисунок 14

Крива $L=AB$ задана явно $y=2x-x^2$, тому для обчислення інтеграла візьмемо формулу (19), спочатку знайдемо $y'=2-2x=2(1-x)$, $x_A=0,\ x_B=2$

$$\int\limits_L ydx-(y+x^2)dy=\int\limits_0^2\Big((2x-x^2)-(2x-x^2+x^2)(2-2x)\Big)dx=$$

$$=\int\limits_0^2(3x^2-2x)dx=(x^3-x^2)\Big|_0^2=8-4=4.$$

Відповідь: 4.

Приклад 2.2

Обчислити $\int\limits_{AB} xydx + yzdy + zxdz$, де AB – чверть кола, яку проходить точка в напрямку зростання параметра t : $t_A = 0$, *AB:* $x = \cos t,\ y = \sin t,\ z = 1.$

Розв'язання

Крива *AB* задана параметричними рівняннями, тому обчислення заданого криволінійного інтеграла будемо проводить за формулою (17). Знайдемо $x'_t = -\sin t,\ y'_t = \cos t,\ z'_t = 0.$ Визначимо точку *B*. Оскільки крива *AB* – чверть кола, що лежить у площині, паралельній *xOy*, то чверть кола буде за умови $t = \dfrac{\pi}{2}$, тобто $t_B = \dfrac{\pi}{2}$. Тоді

$$\int\limits_{AB} xydx + yzdy + zxdz =$$

$$= \int\limits_0^{\pi/2} \left(\cos t \cdot \sin t \cdot (-\sin t) + \sin t \cdot 1 \cdot \cos t + 0\right) dt =$$

$$= \int\limits_0^{\pi/2} \left(-\cos t \sin^2 t + \frac{1}{2}\sin 2t\right) dt =$$

$$= -\int\limits_0^{\pi/2} \sin^2 t d(\sin t) + \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/2} \sin 2t dt =$$

$$= -\frac{\sin^3 t}{3}\Bigg|_0^{\pi/2} - \frac{1}{4}\cos 2t\Bigg|_0^{\pi/2} = -\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{6}.$$

Відповідь: $\dfrac{1}{6}$.

Приклад 2.3

Обчислити $\int\limits_L (x-y)^2 dx + (x+y)^2 dy,$ де L – ламана *OAB,* *O* (0; 0), *A* (2; 0), *B* (4; 2).

Розв'язання

Для наочності зробимо рисунок ламаної (рис. 15).

Крива L не є гладкою, вона складається з двох гладких відрізків $L = OAB = OA \cup AB$. За властивістю адитивності криволінійного інтеграла другого роду одержимо

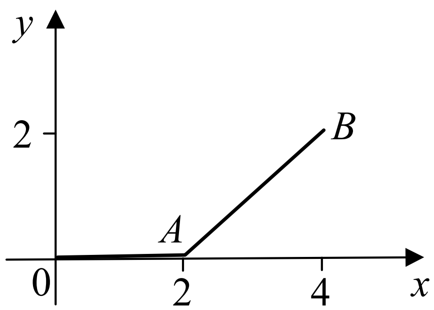

Рисунок 15

$$\int_L = \int_{OA} + \int_{AB}.$$

Запишемо рівняння відрізків ламаної

AO: $y = 0,\ x_0 = 0,\ x_A = 2.$

AB: $\dfrac{x-2}{4-2} = \dfrac{y=0}{2-0}$ як пряма, що проходить через дві точки, $y = x - 2$, $x_A = 2$, $x_B = 4$.

Обчислимо інтеграли за OA і AB:

1) OA:

$$y = 0,\ x_0 = 0,\ x_A = 2,\ y' = 0,$$

за формулою (19)

$$\int_{OA} (x-y)^2 dx + (x-y)^2 dy = \int_0^2 x^2 dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^2 = \frac{8}{3};$$

2) AB:

$$y = x - 2,\ x_A = 2,\ x_B = 4,\ y' = 1,$$

$$\int_{AB} (x-y)^2 dx + (x-y)^2 dx = \int_2^4 \left((x-x+2)^2 + (x+x-2)^2 \cdot 1\right) dx =$$

$$= \int_2^4 \left(4 + 4(x-1)^2\right) dx = \left.\left(4x + \frac{4}{3}(x-1)^3\right)\right|_2^4 =$$

$$= \left(16 + \frac{4}{3} \cdot 27\right) - \left(8 + \frac{4}{3}\right) = \frac{128}{3}.$$

Отже,

$$\int_L = \frac{8}{3} + \frac{128}{3} = \frac{136}{3}.$$

Відповідь: $\dfrac{136}{3}$.

Приклад 2.4

Обчислити криволінійний інтеграл другого роду $\int\limits_L x^3dx + y^2dy + zdz$, де L – пряма *AB,* від точки A (1; 2; 3) до точки B (3; 4; 5).

Розв'язання

Запишемо рівняння прямої *AB* як рівняння прямої, що проходить через дві точки

$$\frac{x-1}{3-1} = \frac{y-2}{4-2} = \frac{z-3}{5-3} \quad \text{або} \quad \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{1}$$

перейдемо до параметричних рівнянь прямої

$$x = t+1,\ \ y = t+2,\ \ z = t+3,\ \ t_A = 0,\ \ t_B = 2.$$

$$x'_t = 1, \quad y'_t = 1, \quad z'_t = 1,$$

за формулою (17) для обчислення криволінійного інтеграла

$$\int\limits_{AB} x^3dx + y^2dy + zdz = \int\limits_0^2 \Big((t+1)^3 + (t+2)^2 + (t+3)\Big)dt =$$

$$= \left(\frac{(t+1)^4}{4} + \frac{(t+2)^3}{3} + \frac{(t+3)^2}{2} \right)\Bigg|_0^2 =$$

$$= \left(\frac{84}{4} + \frac{64}{3} + \frac{25}{2} \right) - \left(\frac{1}{4} + \frac{8}{3} + \frac{9}{2} \right) = 20 + \frac{56}{3} + 8 = \frac{140}{3}.$$

Відповідь: $\dfrac{140}{3}$.

Приклад 2.5

Знайти роботу силового поля $\overline{F} = (2x - y^2)\overline{i} + xy\overline{j}$ за умови переміщення матеріальної точки вздовж дуги *AB* лінії $L: y^2 + x^2 = 4$, $y \geq 0$, $A(-2;0)$, $B(2;0)$.

Розв'язання

Роботу силового поля знаходимо за формулою (15). Криву L запишемо в параметричному вигляді

$$x = 2\cos t,\ \ y = 2\sin t,\ \ t_A = \pi,\ \ t_B = 0.$$
$$x' = -2\sin t,\ \ y' = 2\cos t,$$

одержимо

$$A = \int\limits_{AB} (2x - y^2)\,dx + xydy =$$
$$= \int\limits_{\pi}^{0} \Big((2\cdot 2\cos t - 4\sin^2 t)(-2\sin t) + 2\cos t \cdot 2\sin t \cdot 2\cos t \Big) dt =$$
$$= \int\limits_{\pi}^{0} \Big(-8\sin t\cos t + 8\sin^3 t + 8\cos^2 t\sin t \Big) dt =$$
$$= \int\limits_{0}^{\pi} \Big(4\sin 2t - 8(\sin^2 t + \cos^2 t)\sin t \Big) dt =$$
$$= \int\limits_{0}^{\pi} 4\sin 2t dt - \int\limits_{0}^{\pi} 8(\sin t) dt = -2\cos 2t\Big|_0^{\pi} + 8\big(\cos t\big)\Big|_0^{\pi} =$$
$$= -2(1-1) + 8\big(-1\big) = -16 \text{ (Дж)}.$$

Відповідь: -16 (Дж).

Приклад 2.6

Обчислити криволінійний інтеграл за замкнутим контуром L:

$$\oint\limits_{L} (\sqrt{x} - y)dx + (3x - y^2)dy;$$
$$L: x = 0,\ \ y = 0;\ \ y = 2 - 2x.$$

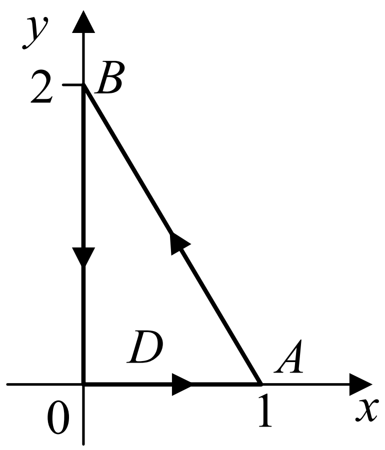

Рисунок 16

Розв'язання

Зробимо рисунок кривої L й визначимо додатний напрямок обходу ділянки D (рис. 16).

$$\oint\limits_{L} = \oint\limits_{OAB} = \int\limits_{OA} + \int\limits_{AB} + \int\limits_{BO}$$

за властивістю адитивності.

Кожна ланка ламаної $OABO$ задана явно, для обчислення криволінійних інтегралів застосовуємо формулу (19)

1) *OA:*

$$y = 0,\ \ x_0 = 0,\ \ x_A = 1,\ \ y' = 0,\ \ dy = 0.$$

$$\int\limits_{OA} (\sqrt{x} - y)dx + (3x - y^2)dy = \int\limits_0^1 \sqrt{x}dx = \sqrt{x^3} \cdot \frac{2}{3}\Bigg|_0^1 = \frac{2}{3};$$

2) *AB:*

$$y = 2 - 2x,\ \ x_A = 1,\ \ x_B = 0,\ \ y' = -2,$$

$$\int\limits_{AB} (\sqrt{x} - y)dx + (3x - y^2)dx =$$

$$= \int\limits_1^0 \left(\sqrt{x} - 2 + 2x + \left(3x - (2 - 2x)^2\right) \cdot (-2)\right)dx =$$

$$= \int\limits_1^0 \left(\sqrt{x} - 2 - 4x + 8(1 - x)^2\right)dx = \left(\frac{2\sqrt{x^3}}{3} - 2x - 2x^2 - \frac{8}{3}(1 - x)^3\right)\Bigg|_1^0 =$$

$$= -\frac{8}{3} - \left(\frac{2}{3} - 2 - 2\right) = \frac{2}{3};$$

3) *BO:*

$$x = 0,\ \ y_B = 2,\ \ y_0 = 0,\ \ dx = 0,$$

$$\int\limits_{BO} \left(\sqrt{x} - y)dx + (3x - y^2\right)dy = -\int\limits_2^0 y^2 dy = \int\limits_0^2 y^2 dy = \frac{y^3}{3}\Bigg|_0^2 = \frac{8}{3}.$$

Отже,

$$\oint\limits_L = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \frac{8}{3} = 4.$$

Відповідь: 4.

Лекція 3
ФОРМУЛА ГРІНА. НЕЗАЛЕЖНІСТЬ КРИВОЛІНІЙНОГО ІНТЕГРАЛА ДРУГОГО РОДУ ВІД ШЛЯХУ ІНТЕГРУВАННЯ

Мета лекції: подальше вивчення криволінійного інтеграла другого роду на площині: його обчислення за допомогою формули Гріна, умови незалежності криволінійного інтеграла другого роду від шляху інтегрування, як застосування – відновлення функції за її повним диференціалом, розв’язання звичайних диференціальних рівнянь першого порядку в повних диференціалах.

План

3.1. Формула Гріна.

3.2. Незалежність криволінійного інтеграла другого роду від шляху інтегрування. Знаходження функції двох змінних за її повним диференціалом.

3.3. Диференціальні рівняння першого порядку в повних диференціалах.

3.1. Формула Гріна

Розглянемо в площині xOy однозв’язну замкнуту ділянку D, обмежену замкнутою гладкою кривою L, правильну як в напрямку осі Ox, так і в напрямку осі Oy. Крива L проходить у додатному напрямку.

Теорема

Якщо функції $P(x,y)$ і $Q(x,y)$ неперервні разом зі своїми частинними похідними $\dfrac{\partial P(x,y)}{\partial y}$ і $\dfrac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$ у ділянці D, обмеженій замкнутим контуром L, то має місце рівність

$$\oint_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} \right) dxdy. \qquad (20)$$

Рівність (20) називається **формулою Гріна**. Вона зв'язує криволінійні інтеграли по замкнутому контуру L з подвійним інтегралом по ділянці D, обмеженій цим контуром.

Якщо функції $P(x,y)$ і $Q(x,y)$ такі, що $\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) = 1$, тоді

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = \iint_D dxdy = S,$$

тобто чисельно дорівнює площі ділянки D. За умови $P(x,y) = -\frac{y}{2}$ та $Q = \frac{x}{2}$ одержимо, оскільки $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$, формулу для обчислення площі плоскої ділянки D:

$$S_D = \frac{1}{2} \oint_L xdy - ydx. \qquad (21)$$

Доведення формули Гріна

Крива L гладка замкнута, під час проходження якої в додатному напрямку однозв'язна ділянка D, яка обмежена кривою L, розташована ліворуч. Ділянка D правильна в напрямку осей Ox і Oy, тобто будь-які прямі, паралельні осям координат, перетинають межу ділянки D не більше ніж у двох точках. Зробимо схематичний рисунок цієї ділянки D (рис. 17). Замкнута крива $L = AnBmA$. Обчислимо подвійний інтеграл $\iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dxdy$. Нехай $y = \psi(x)$ – рівняння дуги AmB, а $y = \varphi(x)$ – рівняння дуги AnB , перейдемо від подвійного інтеграла до повторного

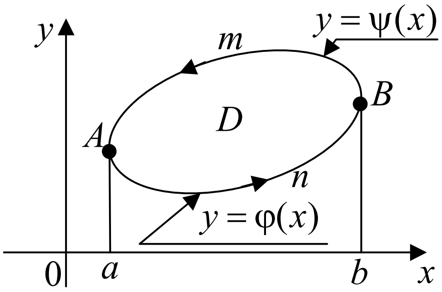

Рис. 17

$$\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}dxdy = \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \frac{\partial P}{\partial y}dy.$$

Оскільки $P(x,y)$ за умови сталої змінної x є однією з первісних для $\frac{\partial P}{\partial y}$, тоді

$$\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \frac{\partial P}{\partial y}dy = P(x,y)\Bigg|_{\varphi(x)}^{\psi(x)} = P(x,\psi(x)) - P(x,\varphi(x)),$$

тому

$$\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}dxdy = \int_a^b \left(P(x,\psi(x)) - P(x,\varphi(x))\right)dx =$$

$$= \int_a^b P(x,\psi(x))dx - \int_a^b P(x,\varphi(x))\,dx =$$

$$= -\int_b^a P(x,\psi(x)) - \int_a^b P(x,\varphi(x))\,dx =$$

$$= [\text{за формулою (19)}] = \int_{BmA} P(x,y)dx - \int_{AnB} P(x,y)dx =$$

$$= \begin{bmatrix} \text{за властивістю аддитівності криволінійного} \\ \text{інтеграла другого роду} \end{bmatrix} =$$

$$= -\oint_{AnBmA} P(x,y)dx.$$

Одержали

$$\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}dxdy = -\oint_L P(x,y)dx. \tag{22}$$

Аналогічно доводиться, що

$$\iint_D \frac{\partial Q}{\partial y}dxdy = \oint_L Q(x,y)dy. \tag{23}$$

Якщо з рівності (23) відняти (22), то одержимо формулу Гріна

$$\oint\limits_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint\limits_D \left(\frac{\partial Q(x,y)}{dx} - \frac{\partial P(x,y)}{dy} \right) dxdy.$$

Приклад 12

Знайти площу еліпса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Розв'язання

Площу фігури знайдемо за формулою (21). Для наочності зробимо рисунок (рис. 18)

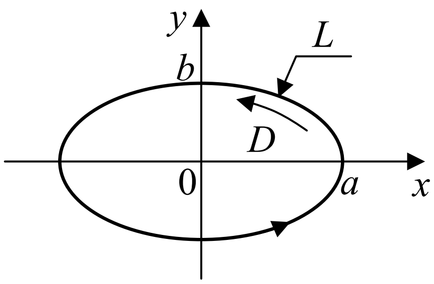

Рисунок 18

$$S_D = \frac{1}{2}\oint\limits_L xdy - ydx.$$

Будемо обчислювати за формулою (18), спочатку запишемо криву L: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ у параметричному вигляді:

$$L:\ x = a\cos t,\ \ y = b\sin t,\ \ 0 \le t \le 2\pi.$$

$$x'_t = -a\sin t, \quad y'_t = b\cos t,$$

тоді

$$S_D = \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi} \left(a\cos t \cdot b\cos t + b\sin t \cdot a\sin t \right) dt =$$

$$= \frac{1}{2}ab\int\limits_0^{2\pi} \left(\cos^2 t + \sin^2 t \right) dt = \frac{1}{2}abt \Big|_0^{2\pi} = \pi ab\ \ (\text{од}^2).$$

Відповідь: πab (од^2).

Тобто одержали ще раз формулу для визначення площі еліпса

$$S_э = \pi a b, \tag{24}$$

де *a, b* – піввісі.

Приклад 13

Знайти площу фігури, обмеженої лініями $y = x^4, x = 0, y = 16,$ за допомогою криволінійного інтеграла другого роду.

Розв'язання

Зобразимо фігуру й визначимо додатний напрямок на контурі (рис. 19)

$$L = OABO = OA \cup AB \cup BO,$$

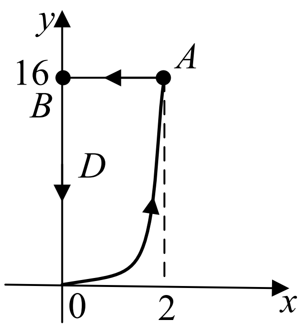

Рисунок 19

за формулою (21)

$$S_D = \frac{1}{2}\oint_L xdy - ydx.$$

За властивістю адитивності криволінійного інтеграла одержимо:

$$\oint_L = \int_{OA} + \int_{AB} + \int_{BO}.$$

Обчислимо кожен з інтегралів за формулою (19)

1) *OA:*

$$y' = x^4,\ \ y' = 4x^3,\ \ x_0 = 0,\ \ x_A = 2;$$

$$\int_{OA} = \frac{1}{2}\int_0^2 (x \cdot 4x^3 - x^4)dx = \frac{3}{2}\int_0^2 x^4 dx = \frac{3}{2} \cdot x^5 \cdot \frac{1}{5}\Big|_0^2 = \frac{48}{5} = 9,6;$$

2) *AB:*

$$y = 16,\ \ y' = 0,\ \ dy = 0,\ \ x_A = 2,\ \ x_B = 0;$$

$$\int_{AB} = \frac{1}{2}\int_2^0 (-16)dx = 8\int_0^2 dx = 8x\Big|_0^2 = 16;$$

3) *BO:*

$$x = 0,\ \ dx = 0,\ \ y_B = 16,\ \ y_0 = 0;$$

$$\int\limits_{BO} = \frac{1}{2}\int\limits_{2}^{0} 0dy = 0.$$

Отже,

$$S_D = 9{,}6 + 16 = 25{,}6\ \ (\text{од}^2).$$

Відповідь: $25{,}6\ \ (\text{од}^2)$.

Приклад 14

Обчислити за формулою Гріна $\oint\limits_L (5x^3 + y)dx + (2x - e^y)dy$, де L контур ΔABC з вершинами A (0; 0), B (4; 0); C (0; 8).

Розв'язання

Виконаємо рисунок ділянки ΔABC (рис. 20), визначимо додатний напрямок контуру $L = \Delta ABO$. Запишемо рівняння AB як рівняння прямої у відрізках

$$\frac{x}{4} + \frac{y}{8} = 1; \quad y = 8 - 2x.$$

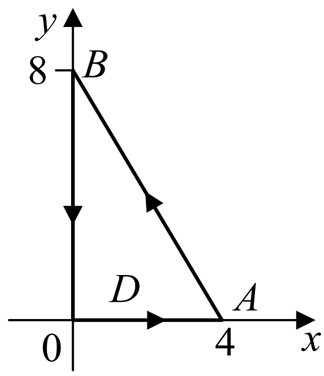

Рисунок 20

Обчислимо інтеграл за формулою Гріна, формула (20)

$$\oint\limits_L Pdx + Qdy = \iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy;$$

$$P(x, y) = 5x^3 + y;\ \ Q(x, y) = 2x - e^y;$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 1;\ \ \frac{\partial Q}{\partial x} = 2;\ \ \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 2 - 1 = 1,$$

значить

$$\oint\limits_L (5x^3 + y)dx + (2x - e^y)dy = \iint\limits_D 1 \cdot dxdy =$$

$$= \int\limits_0^4 dx \int\limits_0^{8-2x} dy = \int\limits_0^4 (8 - 2x)dx = \left(8x - x^2\right)\Big|_0^4 = 32 - 16 = 16.$$

Відповідь: 16.

Приклад 15

Обчислити за формулою Гріна $\oint\limits_L (3x+2y)xdx+(4x^2+3y)dy$, де L – коло $x^2+y^2=9$, що проходить у додатному напрямку.

Розв'язання

Зробимо рисунок кривої L (рис. 21)

$$L: x=\pm\sqrt{9-y^2},$$

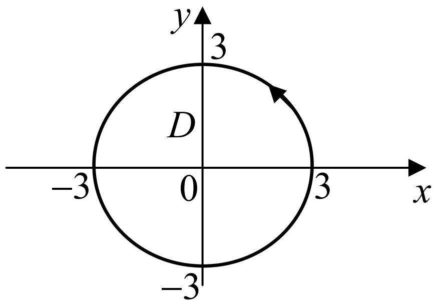

Рисунок 21

за формулою Гріна (20)

$$P(x,y)=(3x+2y)x,\quad \frac{\partial P}{\partial y}=2x;$$

$$Q(x,y)=4x^2+3y,\quad \frac{\partial Q}{\partial x}=8x;$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=8x-2x=6x;$$

тоді

$$\oint\limits_L (3x+2y)xdx+(4x^2+3y)dy=\iint\limits_D 6xdxdy=$$

$$=6\int\limits_{-3}^{3}dy\int\limits_{-\sqrt{9-y^2}}^{\sqrt{9-y^2}}xdx=3\int\limits_{-3}^{3}dy\cdot x^2\Bigg|_{-\sqrt{9-y^2}}^{\sqrt{9-y^2}}=3\int\limits_{-3}^{3}0\cdot dy=0.$$

Відповідь: 0.

3.2. Незалежність криволінійного інтеграла другого роду від шляху інтегрування. Знаходження функції двох змінних за її повним диференціалом

Теорема

Нехай функції $P(x,y)$, $Q(x,y)$, $\dfrac{\partial P(x,y)}{\partial y}$, $\dfrac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$ неперервні в замкнутій обмеженій ділянці D і контур L є гладким. Тоді наведені твердження рівносильні:

1) криволінійний інтеграл другого роду на будь-якому замкнутому контурі $C \subset D$, тобто C, що розміщений у ділянці D, дорівнює 0:

$$\oint_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0; \qquad (25)$$

2) криволінійний інтеграл другого роду не залежить від шляху інтегрування, тобто, якщо точки A і $B \in D$ з'єднані двома різними лініями в D, C_{1AB} і C_{2AB}, то

$$\int_{C_{1AB}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_{C2AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy. \qquad (26)$$

Зауваження

Якщо інтеграл не залежить від шляху інтегрування, то його можна записати у вигляді

$$\int_{AB} = \int_A^B; \qquad (27)$$

3) у ділянці D

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}; \qquad (28)$$

4) підінтегральний вираз є повним диференціалом деякої функції $U(x,y)$, тобто

$$dU(x,y) = P(x,y)dx + Q(x,y)dy. \qquad (28)$$

Доведення

Доведення наводимо за схемою $1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 1$.

1) $1 \to 2$. Нехай твердження № 1 правильне, тоді твердження № 2 правильне.

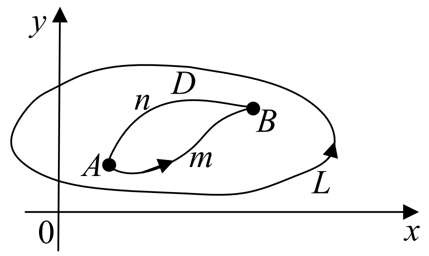

Рисунок 22

Розглянемо (рис. 22) замкнутий контур C в D. $C = AmB \cup BnA$, за твердженням № 1 $\oint_C Pdx + Qdy = 0$, тоді

$$O = \int_C = \int_{AmB} + \int_{BnA} = \int_{AmB} - \int_{AnB} \Rightarrow \int_{AmB} = \int_{AnB}$$

інтеграл не залежить від шляху інтегрування. Правильним є і $2 \to 1$.

2) $2 \to 3$. Нехай твердження № 2 правильне, тоді твердження № 3 правильне. Криволінійний інтеграл $\int\limits_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ не залежить від шляху інтегрування в ділянці D, тоді $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$.

Припустимо протилежне, що в деякій точці $M_0(x_0; y_0) \in D$ $\frac{\partial P(M_0)}{\partial y} \neq \frac{\partial Q(M_0)}{\partial x}$, нехай $\frac{\partial Q(M_0)}{\partial x} - \frac{\partial P(M_0)}{\partial y} > 0$, оскільки в ділянці D $\frac{\partial P}{\partial y}$ і $\frac{\partial Q}{\partial x}$ неперервні функції, то їх різниця неперервна функція. Навколо точки M_0 можна описати коло σ $(\sigma \subset D)$, в усіх точках якого різниця $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} > 0,$ $L-$ контур σ. Тоді, за властивістю подвійного інтеграла $\iint\limits_{\sigma} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy > 0,$ і за формулою Гріна $\oint\limits_{L_1} Pdx + Qdy > 0$, тобто $\neq 0$, для $L_1 \subset D$, це суперечить тому, що криволінійний інтеграл не залежить від шляху інтегрування. Отже, наше припущення не правильне, маємо в усіх точках ділянки D $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$;

3) $3 \to 4$. Нехай в усіх точках ділянки D $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, доведемо, що вираз $P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ є повним диференціалом деякої функції $U(x,y)$, тобто $dU(x,y) = P(x,y)dx + Q(x,y)dy.$

Інтеграл $\int\limits_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ не залежить від шляху інтегрування, а залежить лише від положення точок A і B з ділянки D, тобто $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$. Зафіксуємо точку A, тоді інтеграл залежить лише від точки B, інтеграл є функцією координат точки B. Нехай $A(x_0; y_0)$, $B(x,y)$. Позначимо $\int\limits_{(x_0;y_0)}^{(x;y)} Pdx + Qdy$, який знаходимо за довільною кривою в D, що з'єднує точки A і B, через $U(x,y)$

$$U(x,y)=\int\limits_{(x_0;y_0)}^{(x;y)} Pdx+Qdy.$$

Знайдемо частинні похідні цієї функції $U(x,y)$ у точці $B(x,y)$.

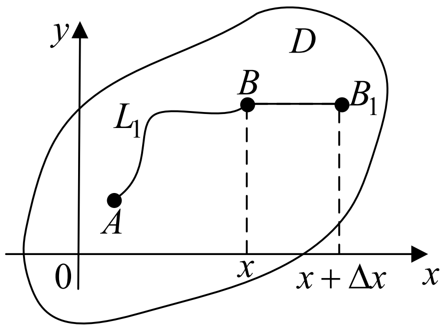

Рисунок 23

Знайдемо $\dfrac{\partial U(x,y)}{\partial x}$. Розглянемо рис. 23. Вважаючи y сталою величиною, переходимо від точки B до точки B_1 $(x+\Delta x, y)$ (рис. 22). Тоді

$$U(x+\Delta x,y)=\int\limits_{(x_0;y_0)}^{(x+\Delta x;y)} Pdx+Qdy.$$

Частинний приріст $\Delta_x U$ функції $U(x,y)$ буде дорівнювати

$$\Delta_x U=U(x+\Delta x,y)-U)x,y)=\int\limits_{(x_0;y_0)}^{(x+\Delta x;y)}-\int\limits_{(x_0;y_0)}^{(x,y)},$$

Оскільки інтеграл не залежить від шляху інтегрування, то візьмемо його по кривій ABB_1, тоді

$$\Delta_x U=\int\limits_{ABB_1}-\int\limits_{AB}=\int\limits_{BB_1} Pdx+Qdy.$$

На BB_1 $x=t$, $y=y$ – стала величина, $x\le t\le x+\Delta x$, маємо

$$dx=dt,\ dy=0;$$

$$\int\limits_{BB_1} Pdx+Qdy=\int\limits_{x}^{x+\Delta x} P(t,y)dt=P(\overline{x},y)\cdot\Delta x,$$
$$x\le\overline{x}\le x+\Delta x,$$

за теоремою про середнє значення для визначеного інтеграла. Одержимо, що для

$$\Delta_x U=P(\overline{x},y)\Delta x,\quad x\le\overline{x}\le x+\Delta x.$$

Тоді

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x U}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} P(\overline{x}, y) = P(x, y),$$

тому, що за умови $\Delta x \to 0$ величина $\overline{x}$ також прямує до x, а функція $P(x, y)$ неперервна. Таким чином, отримали, що в точці B $\frac{\partial U}{\partial x} = P(x, y).$

Аналогічно доводимо, що в точці B $\frac{\partial U}{\partial y} = Q(x, y)$. З того, що точка B довільна точка ділянки D, одержимо

$$\frac{\partial U}{\partial x} = P(x, y), \quad \frac{\partial U}{\partial y} = Q(x, y),$$

й вираз

$$dU = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$$

є повним диференціалом, тобто криволінійний інтеграл

$$\int_{(x_0;y_0)}^{(x;y)} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = U(x, y)$$

і є та сама функція, повний диференціал якої дорівнює $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = dU(x, y).$

4) $4 \to 1$. Нехай у ділянці D $dU = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ повний диференціал функції $U(x, y)$. Оскільки повний диференціал $dU = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy$, то $P(x, y) = \frac{\partial U}{\partial x}$, $Q(x, y) = \frac{\partial U}{\partial y}$. Знайдемо мішані похідні другого порядку для функції U

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = \frac{\partial P}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

$\frac{\partial Q}{\partial x}$ і $\frac{\partial P}{\partial y}$ неперервні функції, а якщо мішані похідні другого порядку неперервні, то вони рівні, тобто $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$, за формулою Гріна, інтеграл за замкнутим контуром у ділянці D дорівнює 0.

Теорему доведено.

Визначення

Функція $U(x,y)$, повний диференціал якої дорівнює виразу $Pdx+Qdy$, називається первісною для цього виразу

$$U(x,y)=\int_{(x_0;y_0)}^{(x;y)} P(x,y)dx+Q(x,y)dy,$$

де шляхом інтегрування є будь-яка крива, яка з’єднує точку $(x_0;y_0)$ з точкою (x,y) за умови, що ця крива знаходиться в ділянці D, оскільки інтеграл не залежить від шляху інтегрування.

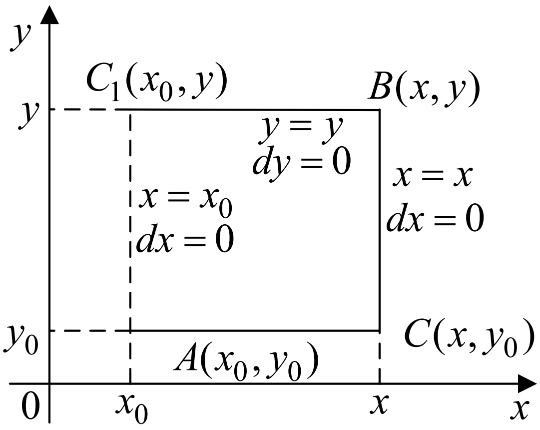

Рисунок 24

Для спрощення обчислень зручніше обирати шлях інтегрування у вигляді ламаної ACB або AC_1B, щоб ламані були паралельні осям координат (рис. 24)

$$\int_{ACB}=\int_{AC}+\int_{CB}, \quad \int_{AC_1B}=\int_{AC_1}+\int_{C_1B}.$$

Звідси одна з первісних дорівнює

$$U(x,y)=\int_{x_0}^{x} P(x,y_0)dx+\int_{y_0}^{y} Q(x,y)dy, \tag{30}$$

або

$$U(x,y)=\int_{y_0}^{y} Q(x_0,y)dy+\int_{x_0}^{x} P(x,y)dx. \tag{31}$$

Тоді маємо, якщо $U(x,y)$ є первісною для диференціального виразу, то $U(x,y)+C$ також є первісною $(C=\text{const})$.

Приклад 16

Знайти первісну для диференціального виразу $(x^2+y^2)dx+2xydy$.

Розв'язання

$P(x,y)=x^2+y^2$, $Q(x,y)=2xy$. Перевіримо, чи буде цей вираз повним диференціалом, умова $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$.

$\dfrac{\partial P}{\partial y}=2y$, $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=2y$, умова $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ виконується в усіх точках площини *xOy*. Для знаходження $U(x,y)$ візьмемо одну з формул для $U(x,y)$, наприклад (30).

За початкову точку візьмемо точку O (0; 0), тоді

$$U(x,y)=\int\limits_{(0;0)}^{(x,y)}\left(x^2+y^2\right)dx+2xydy=$$

$$=\int\limits_0^x x^2dx+\int\limits_0^y 2xydy=\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^x+2x\cdot\left.\frac{y^2}{2}\right|_0^y=\frac{x^3}{3}+xy^2.$$

Відповідь: $U(x,y)=\dfrac{x^3}{3}+xy^2$, одна з первісних.

3.3. Диференціальні рівняння першого порядку в повних диференціалах

Визначення

Звичайне диференціальне рівняння першого порядку вигляду

$$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0, \tag{32}$$

у якому виконується рівність $\dfrac{\partial P(x,y)}{\partial y}=\dfrac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$, називається диференціальним рівнянням у повних диференціалах.

Такі рівняння розв'язуються таким чином. Ліва частина рівняння (32) є повним диференціалом деякої функції $U(x,y)$, тобто $dU(x,y)=0$, звідси $U(x,y)=C$. Таким чином, загальний розв'язок (32) має вигляд за формулами (30) и (31)

$$C=\int_{x_0}^{x} P(x,y_0)dx+\int_{y_0}^{y} Q(x,y)dy, \tag{33}$$

або

$$C=\int_{y_0}^{y} Q(x_0,y)dy+\int_{x_0}^{x} P(x,y)dx. \tag{34}$$

У цьому випадку межі інтегрування x_0, y_0 довільні, їх вибір обмежується умовою – інтеграли в правих частинах формул (33), (34) існують.

Приклад 17

Розв'язати диференціальне рівняння

$$(e^x+y+\sin y)dx+(e^x+x+x\cos y)dy=0.$$

Розв'язання

$$P(x,y)=e^x+y+\sin y,\quad \frac{\partial P}{\partial y}=1+\cos y;$$

$$Q(x,y)=e^y+x+x\cos y,\quad \frac{\partial Q}{\partial x}=1+\cos y,$$

отримали $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$, зробимо висновок, що задане рівняння є рівнянням у повних диференціалах. Функції $P(x,y)$ і $Q(x,y)$ неперервні в площині xOy, тому за початкову точку візьмемо будь-яку, наприклад початок координат (0; 0), тоді за формулою, наприклад (33), отримаємо $x_0=0$, $y_0=0$,

$$C = \int_0^x e^x dx + \int_0^y (e^x + x + x\cos y)dy,$$

звідси

$$C = e^x \Big|_0^x + (e^y + xy\sin y)\Big|_0^y,$$

$$C = e^x - 1 + \left(e^y + xy + x\sin y\right) - 1,$$

$$C = e^x + e^y + xy + x\sin y.$$

Відповідь: $e^x + e^y + xy + x\sin y = C.$

Запитання для самоконтролю

1. Запишіть формулу Гріна.
2. Коли застосовується формула Гріна?
3. Запишіть умови незалежності криволінійного інтеграла від шляху інтегрування.
4. Запишіть формули, за якими знаходяться первісні, якщо задано диференціал функції двох змінних.
5. Які диференціальні рівняння першого порядку називаються диференціальними рівняннями в повних диференціалах, та як вони розв'язуються ?

Практичне заняття № 3
ФОРМУЛА ГРІНА. НЕЗАЛЕЖНІСТЬ КРИВОЛІНІЙНОГО ІНТЕГРАЛА ДРУГОГО РОДУ ВІД ШЛЯХУ ІНТЕГРУВАННЯ

Мета практичного заняття – поглиблене вивчення теми «Криволінійний інтеграл другого роду», незалежність інтеграла від шляху інтегрування, застосування формули Гріна, розв'язання диференціальних рівнянь першого порядку в повних диференціалах.

Практичне заняття починаємо з відповідей на запитання самоконтролю. Записуємо формули (20), (21), (30), (31), (33), (34).

Приклад 3.1

Обчислити криволінійний інтеграл $\oint\limits_L 2(x^2 - y^2)dx + (x-y)^2 dy$, де L – контур трикутника ABC з вершинами A (1; 1), B (4; 4), C (1; 7), за формулою Гріна.

Розв'язання

У заданому прикладі

$$P(x,y) = 2(x^2 - y^2),$$

$$Q(x,y) = (x-y)^2,$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -4y; \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 2(x-y)$$

неперервні в площині xOy, контур L замкнутий, тому можна застосовувати (20) формулу Гріна:

$$\oint\limits_L Pdx + Qdy = \iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy.$$

Для зручності зобразимо ділянку D і додатний напрямок руху по контуру ΔABC (рис. 25).

За формулою Гріна (20)

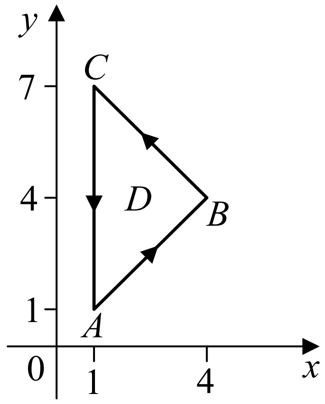

Рисунок 25

$$\oint_L 2(x^2-y^2)dx+(x-y)^2dy=$$

$$=\iint_D \big(2(x-y)+4y\big)dxdy;$$

$$=\big|AB:\ y=x,\quad BC:\ y+x=8,\ y=8-x;\big|=$$

$$=2\int_1^4 dx\int_x^{8-x}(x+y)dy=2\int_1^4 dx\left(\frac{(x+y)^2}{2}\right)\Bigg|_x^{8-x}=$$

$$=2\int_1^4 \frac{1}{2}(64-4x^2)dx=\left(64x-\frac{4x^3}{3}\right)\Bigg|_1^4=$$

$$=64\cdot 4+\frac{4}{3}64-64-\frac{4}{3}=108.$$

Відповідь: 108.

Приклад 3.2

Обчислити за формулою Гріна криволінійний інтеграл другого роду $\oint_L (x^2-5y)dx-(x+y)^2dy$, де $L:\ x^2+y^2=9,\ x\ge 0,\ y=0$.

Розв’язання

$$P(x,y)=x^2-5y,\quad Q=-(x+y)^2;$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=-5,\quad \frac{\partial Q}{\partial x}=-2(x+y).$$

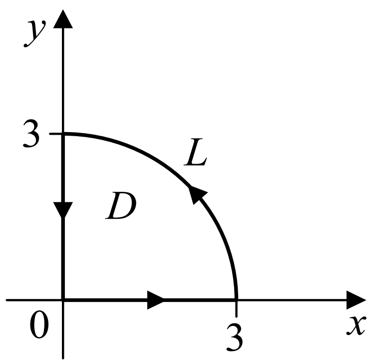

Рисунок 26

За формулою Гріна

$$I=\oint_L (x^2-5y)dx-(x+y)^2dy=$$

$$=\iint_D \big(-2(x+y)+5\big)dxdy.$$

Зобразимо ділянку D і додатний напрямок руху по L (рис. 26).

Обчислимо подвійний інтеграл, для цього переходимо до полярних координат:

$$D:\ 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2},\ 0 \le \rho \le 3,$$
$$dxdy = \rho d\varphi d\rho,$$
$$x = \rho\cos\varphi,\ \ y = \rho\sin\varphi.$$

Одержимо

$$I = \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^3 \left(-2\rho(\cos\varphi + \sin\varphi) + 5\right)\rho d\rho =$$

$$= \int_0^{\pi/2} d\varphi \left(-\frac{2\rho^3}{3}(\cos\varphi + \sin\varphi) + \frac{5}{2}\rho^2 \right)\Bigg|_0^3 =$$

$$= \int_0^{\pi/2} \left(-18(\cos\varphi + \sin\varphi) + \frac{45}{2} \right) d\varphi =$$

$$= \left(-18(\sin\varphi + \cos\varphi) + \frac{45}{2}\varphi \right)\Bigg|_0^{\pi/2} =$$

$$= -18 - 18 + \frac{45}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{45}{4}\pi - 36.$$

Відповідь: $11{,}25\pi - 36$.

Приклад 3.3

За допомогою криволінійного інтеграла другого роду знайти площу ділянки D, яка обмежена лініями $y = x^2$, $y = 2 - x$.

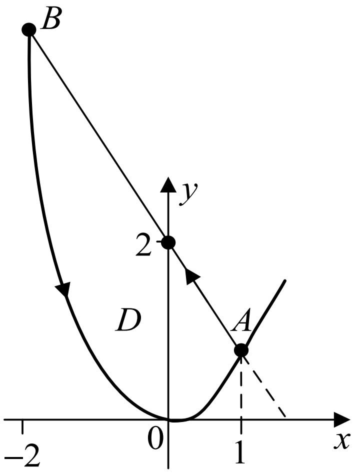

Рисунок 27

Розв'язання

Зробимо рисунок ділянки D і вкажемо напрямок додатного руху по контуру L. Знаходимо площу фігури D за формулою (21)

$$S_D = \frac{1}{2}\oint_L xdy - ydx,$$

де $L = \cup ABO$, (рис. 27)

Обчислимо $\oint\limits_L$, за властивістю адитивності, оскільки

$$L = AB \cup BOA,$$

одержимо

$$\oint\limits_L = \int\limits_{AB} + \int\limits_{BOA};$$

1) *AB:*

$$y = 2 - x, \;\; y' = -1, \;\; x_A = 1, \;\; x_B = -2,$$

за формулою (19)

$$\int\limits_{AB} = \int\limits_1^{-2} (x(-1) - (2 - x))dx = -\int\limits_1^{-2} 2dx = -2x\Big|_1^{-2} = -2(-2-1) = 6;$$

2) *BOA:*

$$y = x^2, \;\; y' = 2x, \;\; x_B = -2, \;\; x_A = 1,$$

за формулою (19)

$$\int\limits_{BOA} = \int\limits_{-2}^{1} (x \cdot 2x - x^2)dx = \frac{x^3}{3}\Bigg|_{-2}^{1} = \frac{1}{3}(1+8) = 3.$$

Отже,

$$S_D = \frac{1}{2}(6+3) = \frac{9}{2} = 4{,}5 \;\; (\text{од}^2).$$

Відповідь: $4{,}5 \;\; (\text{од}^2)$.

Приклад 3.4

Обчислити $\int\limits_L x^3dx + y^2dy$, де L – верхня половина кола $x^2 + y^2 = 9$, що проходить за ходом годинникової стрілки.

Розв'язання

Контур L незамкнутий (рис. 28)

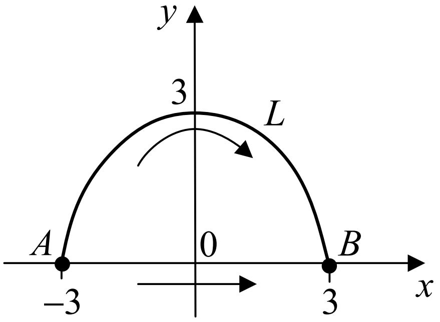

Рисунок 28

$$P(x,y) = x^3,\ Q(x,y) = y^2,$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 0,$$

тобто $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, виконується умова (28) незалежності інтеграла від шляху інтегрування. Це значить, що можна замінити інтегрування по дузі кола інтегруванням по відрізку *AB* осі *Ox*. На *Ox*

$$AB\!: y = 0,\ dy = 0,\ x_A = -3,\ x_B = 3,$$

тому

$$\int\limits_L x^3 dx + y^2 dy = \int\limits_{-3}^{3} x^3 dx + 0 = \int\limits_{-3}^{3} x^3 dx = \left.\frac{x^4}{4}\right|_{-3}^{3} = \frac{81}{4} - \frac{81}{4} = 0.$$

Відповідь: 0.

Приклад 3.5

Обчислити $\oint\limits_L \frac{xdx + ydy}{x^3 + y^2}$, де L – коло $(x-1)^2 + (y-1) = 1$, яке проходить проти ходу годинникової стрілки.

Розв'язання

Контур L замкнутий

$$P = \frac{x}{x^2 + y^2},\ Q = \frac{y}{x^2 + y^2},\ \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{\partial Q}{\partial x},$$

тобто виконується умова (28), а значить і умова (25).

Таким чином $\oint\limits_L = 0$. Буде той самий результат, якщо застосувати формулу Гріна.

Відповідь: 0.

Приклад 3.6

Обчислити $\int\limits_{(-1;2)}^{(2;5)} (y^3 + 2xy^2)dx + (3xy^2 + 2x^2y)dy$, спочатку перевірити, що він не залежить від шляху інтегрування.

Розв'язання

$$P(x,y) = y^3 + 2xy^2;\quad \frac{\partial P}{\partial y} = 3y^2 + 4xy,$$

$$Q(x,y) = 3xy^2 + 2x^2y;\quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 3y^2 + 4xy \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ інтеграл не залежить від шляху інтегрування, тобто від кривої, яка з'єднує точки (–1; 2) і (2; 5). Візьмемо за шлях інтегрування ламану, ланки якої паралельні координатним осям (рис. 29)

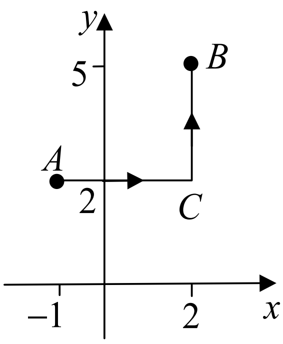

Рисунок 29

$$\int\limits_{(-1;2)}^{(2;5)} = \int\limits_{AC} + \int\limits_{CB};$$

1) *AC:*

$$y = 2,\ dy = 0,\ x_A = -1,\ x_B = 2;$$

$$\int\limits_{AC} = \int\limits_{-1}^{2} (8 + 8x)dx = 8\frac{(x+1)^2}{2}\Bigg|_{-1}^{2} = 4(9 - 0) = 36;$$

2) *CB:*

$$x = 2,\ dx = 0,\ y_C = 2,\ y_B = 5;$$

$$\int\limits_{CB} = \int\limits_{2}^{5} (6y^2 + 8y)\,dy = (2y^3 + 4y^2)\Big|_{2}^{5} = 250 + 100 - (16 + 16) = 318,$$

значить

$$\int\limits_{(-1;2)}^{(2;5)} = 36 + 318 = 354.$$

Відповідь: 354.

Приклад 3.7

Перевірити, чи є диференціальний вираз $(y+e^x \sin y)dx+(x+e^x \cos y)dy$ повним диференціалом функції. Якщо так, то знайти всі ці функції.

Розв'язання

Оскільки

$$P(x,y)=y+e^x \sin y,\quad Q=x+e^x \cos y,$$

тоді

$$\frac{\partial P}{\partial y}=1+e^x \cos y,\quad \frac{\partial Q}{\partial x}=1+e^x \cos y,$$

маємо

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Отже, цей вираз є повним диференціалом деякої функції $U(x,y)$. Знайдемо її за формулою, наприклад (30), візьмемо за початкову точку (0; 0)

$$U(x,y)=\int_0^x 0\cdot dx+\int_0^y (x+e^x \cos y)\,dy=$$

$$=0+(xy+e^x \sin y)\Big|_0^y=xy+e^x \sin y.$$

Тоді, оскільки усі первісні мають вигляд $U(x,y)+C$, одержимо $U(x,y)=xy+e^x \sin y+C.$

Відповідь: $xy+e^x \sin y+C$.

Приклад 3.8

Розв'язати диференціальне рівняння $(3x^2y+y^3-6xy^2)dx+(x^3+3xy^2-6xy^2)dy=0.$

Розв'язання

$$P(x,y)=3x^2y+y^3-6xy^2,\quad Q=x^3+3xy^2-6xy^2,$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 3x^2 + 3y^2 - 12xy; \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 3x^3 + 3y^2 - 12xy \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ задане рівняння є диференціальним рівнянням у повних диференціалах, тому його розв’язок знаходимо за формулою (33) або (34). Візьмемо, наприклад, (34), за початкову точку можна взяти будь-яку, візьмемо початок координат (0; 0), $x_0 = 0,\ y_0 = 0$, оскільки $P(x, y), Q(x, y),\ \frac{\partial P}{\partial y},\ \frac{\partial Q}{\partial x}$ неперервні в площині xOy

$$C = \int_0^y 0dy + \int_0^x (3x^3 + y + y^3 - 6xy^2)\, dx;$$

$$C = 0 + (x^3y + y^3x - 3x^2y^2)\Big|_0^x;$$

$$C = x^3y + y^3x - 3x^2y^2$$

загальний розв’язок або загальний інтеграл.

Відповідь: $x^3y + y^3x - 3x^2y^2 = C$.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

1. Обчислити криволінійний інтеграл першого роду $\int\limits_L f(x,y)dl$.

2. У варіантах 1–15 знайти масу кривої, у варіантах 16–30 центр мас кривої, яка має лінійну густину $\gamma = \gamma(x,y)$.

3. Обчислити криволінійний інтеграл другого роду $\int\limits_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy$.

4. Знайти роботу силового поля $\overline{F}(x,y)$ за умови переміщення матеріальної точки з точки A в точку B уздовж кривої L, яка задана рівняннями, де $\overline{F} = \left(P(x,y);Q(x,y)\right)$.

5. Визначити, чи є вираз $P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ повним диференціалом деякої функції від (x,y). Якщо так, то знайти одну з цих функцій.

6. Обчислити криволінійний інтеграл другого роду за замкнутим контуром L, за формулою Гріна: $\oint\limits_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy$.

7. Перевірити, чи є задане диференціальне рівняння рівнянням у повних диференціалах, якщо так, то розв'язати його.

ВАРІАНТ 1

1. $f(x,y) = xy$; L: відрізок прямої AB, $A(1;2)$, $B(3;-2)$.

2. $\gamma(x,y) = \dfrac{y}{\sqrt{1+x^2}}$; L: $2y = x^2$, $A(2;2)$, $B(4;8)$.

3. $P(x,y) = xy - x$, $Q(x,y) = \dfrac{1}{2}x^2$; L: $y = 2x^2$, $A(0;0)$, $B(1;2)$.

4. $\overline{F} = (x^2 + 2y;\ y^2 + 2x)$; L: $2x + y + 4 = 0$, $A(0;-4)$, $B(1;-6)$.

5. $\left(x^3 + 2xy\right)dx + \left(y^2 + x^2\right)dy$.

6. $P = (x^2 - 2y)$, $Q = (y^2 - 2x)$; L: $x - y = 1$, $x = 0$, $y = 0$.

7. $x\left(2x^2 + y^2\right)dx + y\left(x^2 + 2y^2\right)dy = 0$.

ВАРІАНТ 2

1. $f(x,y)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+4}}$; L: відрізок прямої AB, $A(0;0)$, $B(1;2)$.
2. $\gamma=\dfrac{xy}{\sqrt{1+x^4}}$; L: $3y=x^3$, $A(3;9)$, $B(0;0)$.
3. $P(x,y)=xy-y^2$, $Q(x,y)=x$; L: $y=2\sqrt{x}$, $A(0;0)$, $B(1;2)$.
4. $\overline{F}=(x^2-2y;\ y^2-2x)$; L: $2x-y+4=0$, $A(-2;0)$, $B(0;4)$.
5. $(\sin x+y)dx+(\cos y+x)dy$.
6. $P=x^2+2y$, $Q=y^2-2x$; L: $x+y=2$, $x=0$, $y=0$.
7. $(x+\sin y)dx+(x\cos y+\sin y)dy=0$.

ВАРІАНТ 3

1. $f(x,y)=x+y^2$; L: ламана ABC, $A(0;0)$, $B(1;0)$, $C(0;1)$.
2. $\gamma=xy$; L: $y=\sqrt{R^2-x^2}$, $A(0;R)$, $B(R;0)$.
3. $P(x,y)=x^2-2xy$, $Q(x,y)=y^2-2xy$; $L: y=x^2$, $A(-1;1)$, $B(1;1)$.
4. $\overline{F}=(x+2y;\ y-2x)$; L: $8y+x^2=16$, $A(-4;0)$, $B(0;2)$.
5. $\left(x^2+xy\right)dx+\left(y^2+x+e^y\right)dy$.
6. $P=(x+y)$, $Q=2x$; L: $x^2+y^2=4$.
7. $\left(3x^2+6xy^2\right)dx+\left(6x^2y+4y^3\right)dy=0$.

ВАРИАНТ 4

1. $f(x,y)=\dfrac{1}{x-y}$; L: відрізок прямої AB, $A(2;-1)$, $B(1;-3)$.
2. $\gamma=y$; L: $y=x$, $-2\le x\le 2$.
3. $P(x,y)=x+2y$, $Q(x,y)=x-y$;
L: $x=2\cos t$; $y=2\sin t$, $0\le t\le 2\pi$.

4. $\overline{F}=(x+y;\,2x);\ L:\ y=x^3,\ A(1;1),\ B(-1;-1).$
5. $\left(x^3+2y\right)dx+\left(y^3+2x+\sin y\right)dy.$
6. $P=x-y,\ Q=y+x;\ L:\ x^2+y^2=1.$
7. $\left(y+e^x\sin y\right)dx+\left(x+e^x\cos y\right)dy=0.$

ВАРІАНТ 5

1. $f(x,y)=y;\ L:x=\dfrac{y^2}{2},\ 0\le y\le 2.$
2. $\gamma=x;\ L:\ \ x=\sin t,\ y=\cos t,\ t\in\left[0;\dfrac{\pi}{4}\right].$
3. $P(x,y)=x^2-3x,\ \ Q(x,y)=y^2x+2y;$
$L:\ x=t+1;\ y=t^2,\ A(2;1),\ B(3;4).$
4. $\overline{F}=(x^3;-y^3);\ L:\ x^2+y^2=4,\ x\ge 0,\ y\ge 0,\ A(2;0),\ B(0;2).$
5. $\left(x+y^2x\right)dx+\left(y+x^2y+\cos y\right)dy.$
6. $P=(x+y),\ Q=(y-x);\ L:\ y=x-1,\ x=0,\ y=0.$
7. $\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}+\dfrac{1}{y}\right)dx+\left(\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}-\dfrac{x}{y^2}\right)dy=0.$

ВАРІАНТ 6

1. $f(x,y)=(x^2+y^2)^3;\ L:x=2\cos t,\ y=2\sin t,\ t\in[0;\pi].$
2. $\gamma=y;\ L:\ \ x=t-\sin t,\ y=1-\cos t,\ 0\le t\le\pi.$
3. $P(x,y)=-y,\ \ Q(x,y)=x;\ \ \ L:\ y=x^3,\ A(1;1),\ B(2;8).$
4. $\overline{F}=(x+y;x-y);\ L:\ y=x^2-2x,\ A(-1;3),\ B(1;-1).$
5. $\left(x-1+y\right)dx+\left(y-\sin y+x\right)dy.$
6. $P=x^2y,\ Q=-y;\ L:\ y=x+2,\ x=0,\ y=0.$

7. $\left(xy+\sin y\right)dx+\left(0,5x^2+x\cos y\right)dy=0.$

ВАРІАНТ 7

1. $f(x,y)=\sqrt{2y};\ L: x=2(t-\sin t),\ \ y=2(1-\cos t),\ \ t\in\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right].$

2. $\gamma=\dfrac{x}{\sqrt{1+y^2}};\ L:\ \ y=e^x,\ 0\le x\le 1.$

3. $P(x,y)=\dfrac{y}{x^2+y^2},\ Q(x,y)=\dfrac{x}{x^2+y^2};\ L:\ y=x,\ A(1;1),\ B(2;2).$

4. $\overline{F}=(x^2y;-y);\ L:\ x+y=2,\ A(0;2),\ B(-2;4).$

5. $\left(x^2-2+3y\right)dx+\left(y^3-4+3x-\ln y\right)dy.$

6. $P=xy,\ Q=x^2+x;\ L:\ x^2+y^2=4.$

7. $\left(3x^2-\sin y\right)dx+\left(y^3-x\cos y\right)dy=0.$

ВАРІАНТ 8

1. $f(x,y)=x-y;\ L: x+y=1,\ x\in[-1;2].$

2. $\gamma=1;\ L:\ \ \rho=1+\cos\rho,\ \varphi\in[0;\pi].$

3. $P(x,y)=x^2+y,\ Q(x,y)=y+x;\ L:$ ламана $ABC,\ A(2;1),\ B(2;3),\ C(5;3).$

4. $\overline{F}=(2xy-y;x^2+x);\ L:\ x^2+y^2=9,\ (y\ge 0),\ A(3;0),\ B(-3;0).$

5. $ydx+\left(e^y-\cos y+x\right)dy.$

6. $P=x^2+y^2,\ Q=y^2-x^2;\ L:\ y=x^2,\ x=0,\ y=4.$

7. $\left(x^2+y^2+y\right)dx+\left(2xy+x+e^y\right)dy=0.$

ВАРІАНТ 9

1. $f(x,y)=x^2+y,\ L:\ x^2+y^2=4,\ (x\ge 0),$

2. $\gamma = \dfrac{y}{x}$; $L:\ y = 3x+1,\ 1 \le x \le 2,$

3. $P(x,y) = x^2 - y,\ Q(x,y) = y - x;\ L-$ ламана $ABC,\ A(1;2),\ B(3;2),\ C(3;5).$

4. $F(x+y, y-x);\ L:\ 9x^2 + y^2 = 9,\ (y \ge 0),\ A(0;3),\ B(1;0).$

5. $(x^2 - \cos x + y)\,dx + (y^2 - \sin y + x + 2)dy.$

6. $P = x^2 - y^3,\ Q = x^3 - y^2,\ L:\ x^2 + y^2 = 1.$

7. $\left(2x + \dfrac{x^2 + y^2}{x^2}\right)dx + \left(y^2 - \dfrac{2y}{x}\right)dy = 0.$

ВАРІАНТ 10

1. $f(x,y) = x^2 + 2y;\ L:$ відрізок прямої $AB,\ A(-4;0),\ B(0;2).$

2. $\gamma = \dfrac{y^2}{\sqrt{1+16x^2}};\ L:\ y = 2x^2,\ 0 \le x \le 1.$

3. $P(x,y) = -y,\ Q(x,y) = x;\ L:$трикутник $ABC,\ A(-1;0), B(1;0), C(0;1).$

4. $\overline{F}(y; y-x);\ L:\ x^2 + y^2 = 1,\ A(1;0),\ B(0;1).$

5. $(\sin x - y + x^2)\,dx + (y^2 - x + 3)dy.$

6. $P = y^2 - y;\ Q = 2xy + x;\ L:\ x^2 + y^2 = 9.$

7. $\left(2xy - e^{x^2} + \ln y\right)dx + \left(e^{x^2} + \dfrac{x}{y}\right)dy = 0,\ y(0) = 1.$

ВАРІАНТ 11

1. $f(x,y) = x - y;\ L: x^2 - y^2 = 16,\ (y \ge 0).$

2. $\gamma = x;\ L:\ y = \dfrac{x^2}{2},\ 0 \le x \le 2.$

3. $P(x,y) = x + y,\ Q(x,y) = 2x - y;\ L: x = 5y^2,\ A(5;1),\ B(0;0).$

4. $\overline{F}(x^2 + y^2; x^2 - y^2);\ L:\ y = x - 2,\ A(2;0),\ B(0;-2).$

5. $(4x+3+y)\,dx+(e^{y}+\cos y+x)dy.$

6. $P=2x-y;\ Q=2y+x;\ L:\ x^2+y^2=16.$

7. $\left(\dfrac{\sin 2x}{y}+x\right)dx+\left(y-\dfrac{\sin^2 x}{y^2}\right)dy=0.$

ВАРІАНТ 12

1. $f(x,y)=(x+y)^2;\ L:$ відрізок прямої AB, $A(1;0),\ B(0;2).$

2. $\gamma=\cos x;\ L:\ y=\cos x,\ x\in\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right].$

3. $P(x,y)=y^2-2xy,\ Q=2xy+y^2;\ L: y=x^2,\ A(1;1), B(0;0).$

4. $\overline{F}=(y^2+x;x^2-y);\ L:\ x^2+y^2=4,\ A(2;0),\ B(0;2).$

5. $(3xy-y)\,dx+(\sin y+1{,}5x^2-x)dy.$

6. $P=x^3-3y;\ Q=y^2+3x;\ L:\ y=x^2,\ y=0,\ x=2.$

7. $\left(\sin y-y\cos x\right)dx+\left(x\cos y-\sin x\right)dy=0.$

ВАРІАНТ 13

1. $f(x,y)=x^2;\ L: x^2+y^2=0,\ (x\geq 0).$

2. $\gamma=\dfrac{xy}{\sqrt{1+9x^4}};\ L:\ y=x^3,\ x\in[0;1].$

3. $P(x,y)=2x-3y,\ Q(x,y)=x;\ L: x=4\cos t,\ y=3\sin t,\ 0\leq t\leq \pi.$

4. $\overline{F}=(x^2+y^2;x^2-y^2);\ L:\ x+y=1,\ A(1;0),\ B(-1;2).$

5. $(x^4-x+y)\,dx+(y^3-y+x)dy.$

6. $P=5y+x^2;\ Q=-5x-y^3;\ L:\ x^2+y^2=1.$

7. $\left(3x^2-2x-y\right)dx+\left(2e^{y}-x+3y^2\right)dy=0.$

ВАРІАНТ 14

1. $f(x,y)=x^2+y^2$; L: відрізок прямої AB, $A(2;-1)$, $B(1;0)$.
2. $\gamma=\dfrac{y}{\sqrt{1+4x^2}}$; L: $y=4-x^2$, $x\in[0;1]$.
3. $P(x,y)=2y$, $Q(x,y)=3x-y$; $L: y=\sqrt{x}$, $A(1;1)$, $B(4;2)$.
4. $\overline{F}=x^2y;-xy^2)$; L: $x^2+y^2=4$, $A(-2;0)$, $B(0;2)$.
5. $(x^2+y^2+1)\,dx+(y^2+2xy)dy=0$.
6. $P=x^2y$; $Q=yx$; L: $y=4-x^2$, $y=0$.
7. $\left(y+x\ln y\right)dx+\left(\dfrac{x^2}{2y}+x+1\right)dy=0$.

ВАРІАНТ 15

1. $f(x,y)=x+y$, L: $x^2+y^2=9$, $(x\geq 0)$, $(y\leq 0)$.
2. $\gamma=\dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{1+x^2}}$; L: $2y=x^2$, $x\in[0;4]$.
3. $P(x,y)=x^2-y$, $Q(x,y)=y^2-x$; $L-$ відрізок прямої AB, $A(0;0)$, $B(3;4)$.
4. $\overline{F}=(y^2;-x^2)$; L: $y=x+3$, $A(0;3)$, $B(1;4)$.
5. $(x^3+\sin x+2xy)\,dx+(y^3+x^2+\cos y)dy$.
6. $P=x^2+y$, $Q=y^2-x$, L: $y=x^2$, $y^2=x$.
7. $\left(x^2+xy\right)dx+\left(\dfrac{x^2}{2}+e^y\right)dy=0$.

ВАРІАНТ 16

1. $f(x,y)=x+\sqrt{x^2+y^2}$, L: $x^2+y^2=16$, $(y\geq 0)$.
2. $\gamma=5$; L: $y=\sqrt{16-x^2}$, $A(0;4)$, $B(4;0)$.
3. $P(x,y)=\dfrac{y^2+1}{y}$, $Q=\dfrac{y^2-x^2}{y^2}$; $L-$ відрізок прямої

AB, $A(1;2)$, $B(2;4)$.

4. $\overline{F}=\left((x+y)^2-(x^2+y^2)\right)$; $L:\ 2x+3y=6$, $A(0;2)$, $B(3;0)$.

5. $(x^2-x-y)\,dx+(y-x+\mathrm{tg}y)dy$.

6. $P=y^2$, $Q=-x^2$; $L:\ x^2+y^2=9$.

7. $\left(x^2+\sin y\right)dx+\left(1+x\cos y\right)dy=0$.

ВАРІАНТ 17

1. $f(x,y)=y-x\sqrt{x^2+y^2}$, $L:\ x^2+y^2=4$, $(y\geq 0)$.

2. $\gamma=3$; $L:\ x=\sin^3 t$, $y=\cos^3 t$, $t\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

3. $P(x,y)=2x^2-1$, $Q(x,y)=3xy^2+5$; $L-$ відрізок прямої AB, $A(0;0)$, $B(2;4)$.

4. $\overline{F}=(y^2-y;2xy+x)$; $L:\ x=y^2$, $A(1;1)$, $B(4;2)$.

5. $(3x+4y)\,dx+(e^y+4x)dy$.

6. $P=x^2-y^2$, $Q=x^2+y^2$; $L:\ x^2+y^2=9$.

7. $\dfrac{xdx+ydy}{\sqrt{x^2+y^2}}+\dfrac{xdy-ydx}{x^2}=0$.

ВАРІАНТ 18

1. $f(x,y)=xy-x$; $L: y=2x+3$; $0\leq x\leq 2$.

2. $\gamma=4$; $L:\ x=2(t-\sin t)$, $y=2(1-\cos t)$, $t\in[0;\pi]$.

3. $P(x,y)=3x^2y+1$, $Q(x,y)=x^3+2$; $L: y=2\sqrt{x}$, $A(1;2)$, $B(4;4)$.

4. $\overline{F}=(xy;0)$; $L:\ y=\sin x$, $A(\pi;0)$, $B(0;0)$.

5. $(x^2+y^2-x)\,dx+(2xy+e^y)dy$.

6. $P=xy-y^2$; $Q=x$; $L:\ y=4x^2$, $x=1$, $y=0$.

7. $ye^x dx+\left(y+e^x\right)dy=0$.

ВАРІАНТ 19

1. $f(x,y) = y(2x-1)$; $L: x^2 + y^2 = 16$, $(y \geq 0)$.
2. $\gamma = 3$; $L:\ x^2 + y^2 = 9$, $(y \leq 0)$.
3. $P(x,y) = y^2 + x$, $Q(x,y) = \dfrac{2x}{y}$; $L: y = e^x$, $A(0;1)$, $B(1;e)$.
4. $\overline{F} = (0; xy^2)$; $L:\ y = \cos x$, $A(0;1)$, $B\left(\dfrac{\pi}{2};0\right)$.
5. $(3x + 4y + e^x)\,dx + (y^3 + 4x + \sin y)dy$.
6. $P = 3x^2 - y$; $Q = x$; $L:\ y - 2x = 4$, $x = 0$, $y = 0$.
7. $\left(\sin y + y\sin x + \dfrac{1}{x}\right)dx + \left(x\cos y - \cos x + \dfrac{1}{y}\right)dy = 0$.

ВАРІАНТ 20

1. $f(x,y) = x(x+y)$; $L: x^2 + y^2 = 1$, $(y \geq 0)$.
2. $\gamma = 2$; $L:\ y = 3x + 1$, $x \in [1;2]$.
3. $P(x,y) = x^2 + y^2$, $Q(x,y) = x^2 - y^2$; $L: y = x^2$, $A(-1;1)$, $B(1;1)$.
4. $\overline{F} = (xy^2; x)$; $L:\ y = 2x^2 - 3$, $A(0;-3)$, $B(1;-1)$.
5. $(x^2 + y^2 + e^x)\,dx + (y^3 + 2xy + e^y)dy$.
6. $P = 2x - 2y^3$; $Q = 2y + 2x^3$; $L:\ x^2 + y^2 = 36$.
7. $\left(e^x \sin y + x\right)dx + \left(e^x \cos y + y\right)dy = 0$.

ВАРІАНТ 21

1. $f(x,y) = x^2 - y$; $L: y = 3 - 2x$, $0 \leq x \leq 2$.
2. $\gamma = 3x$; $L:\ y = x$, $x \in [1;2]$.
3. $P(x,y) = \dfrac{y}{x}$, $Q = x$; $L: y = x^3$, $A(1;1)$, $B(2;8)$.
4. $\overline{F} = (xy - y^2; x)$; $L:\ y = x^2 - 1$, $A(-1;0)$, $B(0;-1)$.

5. $(\sin x+\cos x+2xy)\,dx+(\sin y+\cos y+x^2)dy.$
6. $P=x+y^3;\ Q=-2y-x^3;\ L:\ x^2+y^2=16.$
7. $\left(y^2+e^x+1\right)dx+\left(e^y+2+2xy\right)dy=0.$

ВАРІАНТ 22

1. $f(x,y)=x-2y+1;\ L:x+y=4,\ x\in[0;2].$
2. $\gamma=4;\ L:\ y=3x+5,\ 1\le x\le 3.$
3. $P(x,y)=-y,\ Q(x,y)=x;\ L:$
$x=t-\sin t,\ y=1-\cos t,\ A(0;0),\ B(\pi;2).$
4. $\overline{F}=(x-2y;y+2x);\ L:\ y=x^2+1,\ A(0;1),\ B\left(1;2\right).$
5. $(7x+e^{x+y})\,dx+(8y+e^{x+y}+y^2)dy.$
6. $P=3x^3;\ Q=y^2-2x;\ L:\ 2x+3y=6,\ x=0,\ y=0.$
7. $5y^2\sin 5xdx+\left(1-2y\cos 5x\right)dy=0.$

ВАРІАНТ 23

1. $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2};\ L:x=\cos t,\ y=\sin t,\ 0\le t\le\pi.$
2. $\gamma=5;\ L:\ y=8x-7,\ x\in[0;2].$
3. $P(x,y)=x+y,\ Q(x,y)=x-y;\ L:$
$x=4\cos t,\ y=4\sin t,\ 0\le t\le\pi.$
4. $\overline{F}=(3x-y^2;3y+x^2);\ L:\ y=x+1,\ A(1;2),\ B\left(3;4\right).$
5. $(x+y)\,dx+(\sin y+x)dy.$
6. $P=x^3-3y;\ Q=y^3+3x;\ L:\ y=x,\ y=2-x,\ y=0.$
7. $\dfrac{2x}{y^3}dx+\dfrac{y^2-3x^2}{y^4}dy=0,\quad y(1)=1.$

ВАРІАНТ 24

1. $f(x,y)=x+3y,\ L:\ x^2+y^2=4,\ (y\le 0,\ x\le 0).$
2. $\gamma=2y;\ L:\ y=3x+5,\ 0\le x\le 2.$
3. $P(x,y)=x^2+y,\ Q(x,y)=y^2+x;\ L-$ відрізок прямої $AB,\ A(1;2),\ B(3;5).$
4. $\overline{F}=(x+y;x);\ L:\ y=x^3+3,\ A(0;3),\ B(1;4).$
5. $(x^2+y^2-2xy)\,dx+(2xy-x^2+\sin y)dy.$
6. $P=xy^2,\ Q=-x^2y;\ L:\ y=4-x^2,\ y=x^2.$
7. $\left(3x^2y+\sin y\right)dx+\left(x^3-\cos y\right)dy=0.$

ВАРІАНТ 25

1. $f(x,y)=2x+5y,\ L:\ 2x-3y=6,\ 0\le x\le 3.$
2. $\gamma=\dfrac{xy}{\sqrt{1+9x^4}};\ L:\ y=x^3,\ x\in[0;1].$
3. $P(x,y)=-y,\ Q(x,y)=x;\ L-$ трикутник $ABC,\ A(-2;0),\ B(2;0),\ C(0;2).$
4. $\overline{F}=(2x-y;y);\ L:\ y=\sin x,\ A\left(\dfrac{\pi}{2};1\right),\ B(\pi;0).$
5. $ye^x dx+(e^y+e^x+y^2)dy.$
6. $P=x^2+y,\ Q=y^2-x;\ L:\ y=x^2-3x+2,\ y=0.$
7. $x\left(x^2+y^2\right)dx+y\left(x^2+y^2+1\right)dy=0.$

ВАРІАНТ 26

1. $f(x,y)=\dfrac{1}{x+y};\ L: y=3x-1,\ x\in[0;2].$
2. $\gamma=\dfrac{3xy}{\sqrt{1+4x^2}};\ L:\ y=1-x^2,\ 0\le x\le 1.$
3. $P(x,y)=-x^2,\ Q(x,y)=2xy;\ L: x=2y^2,\ A(0;0),\ B(2;1).$

4. $\overline{F}=(x;y+x);\ L:\ x=y^3,\ A(1;1),\ B\left(0;0\right).$

5. $(xy+e^{x+y})\,dx+\left(e^{x+y}+\dfrac{1}{2}x^2+3\right)dy.$

6. $P=x-y^2;\ Q=y+x^2;\ L:\ y=x^2,\ y=4.$

7. $\left(e^{x+y}+5x\right)dx+\left(e^{x+y}+4y^3\right)dy=0,\quad y(0)=0.$

ВАРІАНТ 27

1. $f(x,y)=x(y+1);\ L: y=2x+1,\ x\in[1;2].$

2. $\gamma=\dfrac{y}{x\sqrt{1+x}};\ L:\ y=2\sqrt{x},\ x\in[1;3].$

3. $P(x,y)=y,\ Q(x,y)=xe^{x^3};\ L: y=x^2,\ A(0;0),\ B(2;4).$

4. $\overline{F}=(xy;y+x);\ L:\ y=\sin t,\ x=\cos t,\ A(1;0),\ B\left(0;1\right).$

5. $(x^2+y^2+\sin x)\,dx+\left(2xy+\cos y\right)dy.$

6. $P=2x+y;\ Q=2y-x;\ L:\ x^2=2y,\ y=0,\ x=2.$

7. $\left(3x^2y+y^3\right)dx+\left(x^3+3xy^2\right)dy=0.$

ВАРІАНТ 28

1. $f(x,y)=y(x-y);\ L=2x-2, 1\le x\le 2.$

2. $\gamma=x+y;\ L:\ y=3+4x,\ 0\le x\le 2.$

3. $P(x,y)=y^3,\ Q(x,y)=x^3;\ L: x^2+y^2=9,\ A(3;0),\ B(0;3).$

4. $\overline{F}=(x^2-y;y);\ L:\ y=x^3+2x,\ A(0;0),\ B\left(1;3\right).$

5. $(x+y+\cos x)\,dx+\left(e^y+x+5\right)dy.$

6. $P=3x^2-y;\ Q=3y^2+x;\ L:\ y=3x-x^2,\ y=-x.$

7. $\left(1-\dfrac{y}{\sin^2 x}\right)dx+\left(\mathrm{ctg}x+y\right)dy=0.$

ВАРІАНТ 29

1. $f(x,y)=x^2y+1,\ L:\ y+2x=2,\ 1\le x\le 2.$

2. $\gamma=\dfrac{y}{x};\ L:\ 3x+y=9,\ 1\le x\le 3.$

3. $P(x,y)=x^2-y^2,\ Q=xy;\ L-$ відрізок прямої $AB,\ A(1;1),\ B(3;4).$

4. $\overline{F}=(y^2-x^2;y^2);\ L:\ y=e^x,\ A(0;1),\ B(1;e).$

5. $(3x+y+\sin x)dx+\left(x+\cos y+e^y\right)dy.$

6. $P=x^3+2y,\ Q=y^3-2x;\ L:\ y=8-x^2,\ y=x^2.$

7. $\left(3x^2+y\right)dx+(x+\sin y)dy=0.$

ВАРІАНТ 30

1. $f(x,y)=y^2+1,\ L:\ y=2x,\ 1\le x\le 2.$

2. $\gamma=\dfrac{y}{x^2};\ L:\ 5x+3y=6,\ 1\le x\le 4.$

3. $P(x,y)=(x-y)^2,\ Q(x,y)=(x+y)^2;\ L-$ ламана $ABC,\ A(0;0),\ B(2;0),\ C(4;2).$

4. $\overline{F}=\left(\sqrt{x^2+y^2};x\right);\ L:\ x^2+y^2=1,\ A(0;1),\ B(1;0).$

5. $(5x+4y)dx+(5y+4x)dy.$

6. $P=x^3+y^3,\ Q=x^3-y^3;\ L:\ x^2+y^2=9.$

7. $(2xy+\sin x)dx+\left(x^2+y+e^y\right)dy=0.$

ЗРАЗОК ВИКОНАННЯ ВАРІАНТА ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

ВАРІАНТ 0

1. $f(x,y)=y\sqrt{x^2+y^2}, L: x=2\cos t,\ y=2\sin t,\ A(2;0), B(-2;0), (y\geq 0).$

2. $\gamma=\dfrac{y}{\sqrt{1+9x^4}};\ L:\ y=x^3,\ A(1;1),\ B\left(2;8\right).$

3. $P(x,y)=x+y,\ Q=x^2-y;\ L-$ відрізок прямої $AB,\ A(2;4),\ B(-1;6).$

4. $\overline{F}=\left((x-y)^2, x^2+y^2\right);\ L:\ y=x^2,\ A\left(0;0\right),\ B(2;4).$

5. $\left(x^2-1-y\right)dx+\left(\sin y+y^2-x\right)dy.$

6. $P=y^2,\ Q=xy;\ L:\ x^2+y^2=4.$

7. $\left(2y+x^2\right)dx+\left(2x+y^2+\sin y\right)dy=0.$

Розв’язання

1. Обчислити криволінійний інтеграл першого роду

$$\int\limits_L y\sqrt{x^2+y^2}\,dl,\ L: x=2\cos t,$$
$$y=2\sin t,\ A(2;0),\ B(-2;0),\ (y\geq 0).$$

Розв’язання

Крива L задана параметрично, тому диференціал дуги знаходимо за формулою

$$dl=\sqrt{x_t'^2+y_t'^2}\,dt;$$
$$x_t'=-2\sin t,\quad y_t'=2\cos t,$$
$$x_t'^2+y_t'^2=4\sin^2 t+4\cos^2 t=4;$$

тому

$$dl = \sqrt{4}dt = 2dt.$$

Інтегруємо по дузі AB, якщо $t \in [0; \pi]$, тобто $t_1 = 0$, $t_2 = \pi$, (умова $t_1 < t_2$ виконується). Обчислимо криволінійний інтеграл першого роду, для цього перейдемо до визначеного інтеграла за формулою (6), на L $\sqrt{x^2 + y^2} = 2$:

$$\int_L y\sqrt{x^2 + y^2}dl = \int_0^{\pi} 2\sin t \cdot 2 \cdot 2dt = 8(-\cos t)\Big|_0^{\pi} = 8(1+1) = 16.$$

Відповідь: 16.

2. Знайти масу кривої з лінійною густиною

$$\gamma = \frac{y}{\sqrt{1+9x^4}}; \; L: \; y = x^3, \; A(1;1), \; B\left(2;8\right).$$

Розв'язання

Крива задана явно $x \in [1; 2]$. Масу кривої знаходимо за формулою (1)

$$m = \int_L \frac{y}{\sqrt{1+9x^4}}dl.$$

Диференціал дуги знаходимо за формулою (3)

$$y' = 3x^2, \; dl = \sqrt{1+9x^4}dx,$$

одержимо, оскільки $x_1 = 1$, $x_2 = 2$,

$$m = \int_L \frac{y}{\sqrt{1+9x^4}}dl = \int_1^2 \frac{x^3}{\sqrt{1+9x^4}} \cdot 1 + 9x^4 dx =$$

$$= \int_1^2 x^3 dx = \frac{1}{4}(x^4)\Big|_1^2 = \frac{1}{4}(16-1) = \frac{15}{4} = 3,75 \;\text{(кг)}.$$

Відповідь: 3,75 (кг).

3. Обчислити криволінійний інтеграл другого роду $\int\limits_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy$, $P(x,y) = x + y$, $Q(x,y) = x^2 - y$; $L -$ відрізок прямої AB, $A(2;4)$, $B(-1;6)$.

Розв'язання

Запишемо інтеграл, враховуючи задані дані

$$I = \int\limits_L (x+y)dx + (x^2 - y)dy,$$

складемо рівняння відрізка прямої AB за формулою прямої, яка проходить через дві точки:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{x_2 - x_1},$$

одержимо

$$\frac{x-2}{-1-2} = \frac{y-4}{6-4}, \quad 2x - 4 = -3y + 12, \quad y = \frac{1}{3}(16 - 2x), \quad y' = -\frac{2}{3}.$$

Заданий інтеграл обчислимо за формулою (19), $x_A = 2$, $x_B = -1$:

$$I = \int\limits_L (x+y)dx + (x^2 - y)dy =$$

$$= \int\limits_2^{-1} \left(x + \frac{1}{3}(16 - 2x) + \left(x^2 - \frac{1}{3}(16 - 2x) \right) \cdot \left(-\frac{2}{3} \right) \right) dx =$$

$$= \int\limits_2^{-1} \left(-\frac{2}{3}x^2 - \frac{1}{9}x + \frac{80}{9} \right) dx = \left(-\frac{2x^3}{9} - \frac{1x^2}{18} + \frac{80}{9}x \right) \Bigg|_2^{-1} =$$

$$= \frac{1}{9}\left(2 - \frac{1}{2} - 80 \right) - \frac{1}{9}(-16 - 2 + 160) = -\frac{49}{2}.$$

Відповідь: $-\dfrac{49}{2}$.

4. Знайти роботу силового поля F за умови переміщення матеріальної точки з точки A в точку B уздовж кривої L:

$$\overline{F}=\left((x-y)^2, x^2+y^2\right);\ L:\ y=x^2,\ A\left(0;0\right),\ B(2;4).$$

Розв'язання

Силове поле плоске, тобто $R=0$, і роботу цього поля знаходимо за формулою (14) , ураховуючи (15)

$$A=\int_L \overline{F}\cdot\overline{dr}=\int_L (x-y)^2\,dx+(x^2+y^2)\,dy.$$

Відносно кривої L дані $x_A=0,\ x_B=2,$ і рисунок кривої не дробимо. Інтеграл знаходимо за формулою (19), у цьому випадку $y'=2x$:

$$A=\int_0^2\left((x-x^2)^2+(x^2+y^2)\cdot 2x\right)dx=$$

$$=\int_0^2\left(x^2-2x^3+x^4+2x^3+2x^5\right)dx=$$

$$=\int_0^2\left(2x^5+x^4+x^2\right)dx=\left(\frac{2x^5}{6}+\frac{x^5}{5}+\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^2=\frac{64}{3}+\frac{32}{5}+\frac{8}{3}=30{,}4\ \text{(Дж)}.$$

Відповідь: $30{,}4$ (Дж).

5. Визначити, чи є вираз $P(x,y)dx+Q(x,y)dx$ повним диференціалом функції $U(x,y)$. Якщо так, то знайти одну з функцій. Дано:

$$\left(x^2-1-y\right)dx+\left(\sin y+y^2-x\right)dy.$$

Розв'язання

Оскільки

$$P(x,y)=(x^2-1-y),\ Q=(\sin y+y^2-x);$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=-1,\quad \frac{\partial Q}{\partial x}=-1,$$

виконується рівність $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$, значить заданий диференціальний вираз є диференціалом функції $U(x,y)$, тобто

$$dU=\left(x^2-1-y\right)dx+\left(\sin y+y^2-x\right)dy.$$

Для знаходження однієї з функцій $U(x,y)$ візьмемо формулу, наприклад (30), $x_0=0,\ y_0=0$

$$U(x,y)=\int_{x_0}^{x}P(x,y_0)dx+\int_{y_0}^{y}Q(x,y)dy=$$

$$=\int_0^x(x^2-1)dx+\int_0^y(\sin y+y^2-x)dy=$$

$$=\left[\begin{array}{l}\text{при обчисленні другого інтегралу}\\ \text{змінну } x \text{ вважаємо сталою величиною}\end{array}\right]=$$

$$=\left.\left(\frac{x^3}{3}-x\right)\right|_0^x+\left.\left(-\cos y+\frac{y^3}{3}-xy\right)\right|_0^y=\frac{x^3}{3}-x-\cos y+\frac{y^3}{3}-xy+1.$$

Відповідь: $U(x,y)=\frac{x^3}{3}+\frac{y^3}{3}-\cos y-x-xy+1.$

6. Обчислити криволінійний інтеграл другого роду за замкнутим контуром L за допомогою формули Гріна:

$$\oint_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy,$$

$$P(x,y)=y^2,\ Q(x,y)=xy,\ L:\ x^2+y^2=4.$$

Розв'язання

Запишемо інтеграл

$$\oint_L y^2dx+xydy;\ L:\ x^2+y^2=4.$$

За формулою Гріна (20), оскільки

$$P(x,y)=y^2,\ \frac{\partial P}{\partial y}=2y;\quad Q(x,y)=xy,\ \frac{\partial Q}{\partial x}=y,$$

одержимо (рис. 30)

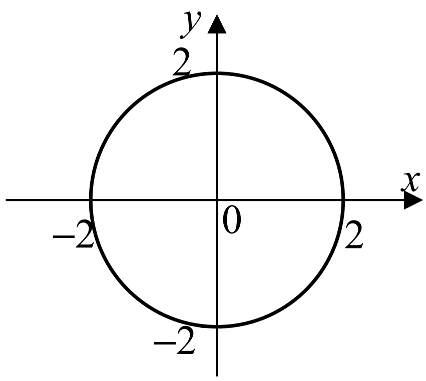

Рисунок 30

$$\oint\limits_L y^2dx+xydy=\iint\limits_D (y-2y)dxdy=-\iint\limits_D ydxdy=$$

$$=\left[\begin{array}{l}\text{перейдемо до полярних координат}\\ x=\rho\cos\varphi,\ y=\rho\sin\varphi,\ dxdy=\rho d\rho d\varphi\\ D:\ 0\le\rho\le 2,\ 0\le\varphi\le 2\pi\end{array}\right]=$$

$$=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^2\rho\sin\varphi\rho d\rho d\varphi=-\int\limits_0^{2\pi}\sin\varphi d\varphi\cdot\int\limits_0^2\rho^2d\rho=$$

$$=\cos\varphi\Big|_0^{2\pi}\cdot\frac{\rho^3}{3}\Bigg|_0^2=(1-1)\cdot\frac{8}{3}=0.$$

Відповідь: 0.

7. Перевірити, чи є дане диференціальне рівняння рівнянням у повних диференціалах. Якщо так, то знайти його розв'язок

$$\left(2y+x^2\right)dx+\left(2x+y^2+\sin y\right)dy=0.$$

Розв'язання

$$P(x,y)=2y+x^2,\ \frac{\partial P}{\partial y}=2;\quad Q(x,y)=2x+y^2+\sin y,\ \frac{\partial Q}{\partial x}=2,$$

Виконується умова $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$, значить дане рівняння є рівнянням у повних диференціалах. Його розв'язок знаходимо за формулою, наприклад (34), оскільки $dU(x,y)=0$, то $U=C$

$$C=\int\limits_{y_0}^{y}Q(x_0y)dy+\int\limits_{x_0}^{x}P(x,y)dx.$$

Для обчислення другого інтеграла y вважаємо сталою величиною. Отже, візьмемо $x_0 = 0,\ y_0 = 0$:

$$C = \int_0^y 0dy + \int_0^x (2y + x^2)dx; \qquad C = 0 + \left(2yx + \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^x;$$

$$C = 2yx + \frac{x^3}{3}.$$

Відповідь: $\frac{x^3}{3} + 2yx = C$.

ЛІТЕРАТУРА

1. Дубовик В. П., Юрик І. І. Вища математика. – Київ: А.С.К., 2006. – 648 с.

2. Пак В. В., Носенко Ю. Л. Вища математика: підручник. – Київ: Либідь, 1996. – 440 с.

3. Пискунок М. М. Дифференциальное интегральное исчисление. – Москва: Интеграл-Пресс, 2004. – Т. 2. – 530 с.

4. Высшая математика в примерах и задачах: учебное пособие: в 2 т. / Ю. Л. Геворкян и др.; под ред. Ю. Л. Геворкян. – Харьков: НТУ «ХПИ», 2005. – Т. 2. Дифференциальные уравнения. Ряды. Двойные и тройные интегралы. Криволинейные и поверхностные интегралы. Элементы теории поля. Элементы теории функции комплексного переменного. Операционное исчисление. 412 с.

5. Нестеренко В. О. Кратні та криволінійні інтеграли: конспект лекцій. – Харків: ХДАДТУ, 2000. – 56 с.

6. Нестеренко В. О., Саппа Ж. В. Методичні вказівки до типових завдань з вищої математики з теми «Криволінійні інтеграли та їх застосування». – Харків: ХНАДУ, 2010. – 50 с.

ЗМІСТ

Навчальне видання

Михайленко І.В.,
Нестеренко В.О.

ЛЕКЦІЇ І ПРАКТИКУМ з вищої математики «Криволінійні інтеграли» для студентів іноземців

Навчально-методичний посібник

Відповідальний за випуск *Т.О. Ярхо*

Редактор *І. Крівушкіна*

Комп'ютерна верстка *Н.В. Журавльової*

План 2019, поз. 11.
Підписано до друку 12.06.2019 р. Формат 60×84 1/16. Папір офсетний.
Гарнітура Times New Roman Cyr. Віддруковано на ризографі
Ум.друк. арк. 5,3. Обл.–вид.арк. 5,9.
Зам. №193/19. Тираж 50 прим. Ціна договірна

ВИДАВНИЦТВО
Харківського національного автомобільно–дорожнього університету

Видавництво ХНАДУ, 61200, Харків-МСП, вул. Ярослава Мудрого, 25.
Тел. /факс: (057)700–38–64; 707–37–03, e-mail: rio@khadi.kharkov.ua

Свідоцтво Державного комітету інформаційної політики, телебачення та радіомовлення України про внесення суб'єкта видавничої справи до Державного реєстру видавців, виготівників і розповсюджувачів видавничої продукції, серія ДК №897 від 17.04 2002 р.