Міністерство освіти і науки України

ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ
АВТОМОБІЛЬНО-ДОРОЖНІЙ УНІВЕРСИТЕТ

НЕВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ:

ТЕОРЕТИЧНІ ТА ПРАКТИЧНІ АСПЕКТИ ФОРМУВАННЯ ОПЕРАЦІЙНО-ТЕХНОЛОГІЧНИХ МАТЕМАТИЧНИХ КОМПЕТЕНЦІЙ

(для практичних занять і самостійної роботи)

Навчальний посібник
за редакцією Т. О. Ярхо

Харків
ХНАДУ
2019

УДК 517.9(075)
Н40

Рецензенти:

Ямпольський Олександр Леонідович –доктор фізико-математичних наук, завідувач кафедри фундаментальної математики (Харківський національний університет ім. В. Н. Каразіна),

Нечуйвітер Олеся Петрівна – доктор фізико-математичних наук, завідувач кафедри інформаційних, комп'ютерних технологій і математики (Українська інженерно-педагогічна академія),

Кириченко Ігор Костянтинович – доктор фізико-математичних наук, професор, професор кафедри фізико-математичних дисциплін (Національний університет цивільного захисту України).

Н40 **Невизначений** інтеграл: теоретичні та практичні аспекти формування операційно-технологічних математичних компетенцій (для практичних занять і самостійної роботи): навчальний посібник / Т. О. Ярхо, Т. В. Ємельянова, О. Д. Пташний, Т. Б. Фастовська; за ред. Т. О. Ярхо. – Харків: ХНАДУ, 2019. – 188 с.
ISBN 978-966-303-738-7

Рекомендовано для поглиблених практичних занять і самостійної роботи студентів з формування операційно-технологічних математичних компетенцій щодо базової теми загального курсу вищої математики «Невизначений інтеграл».

Подано основні методи інтегрування (табличний, заміни змінної, інтегрування частинами), прийоми інтегрування раціональних, ірраціональних та деяких трансцендентних виразів.

Наведено основні теоретичні положення та візуальне відображення їхнього змісту, докладно розібрані приклади та завдання для самостійної роботи.

Навчальний посібник призначений для студентів перших курсів бакалаврату всіх спеціальностей денної та заочної (дистанційної) форм навчання. Може бути корисним як засіб повторення під час підготовки з математичних дисциплін студентів магістратури та аспірантури.

ISBN 978-966-303-738-7

ПЕРЕДМОВА

Глибока і всебічна математична підготовка майбутніх фахівців у закладах вищої освіти (ЗВО) є необхідною умовою їхньої якісної професійної підготовки. Це зумовлено універсальним значенням математики в моделюванні та вивченні процесів і явищ різної природи, а також впливом математики на загальний інтелектуальний розвиток особистості.

Математична компетентність студентів ЗВО, що формується в межах багатоступеневої базової математичної підготовки, яка містить три цикли вищої освіти (бакалаврат, магістратура та аспірантура), визначається сукупністю набутих математичних компетенцій, серед яких важливою є група операційно-технологічних компетенцій. До таких компетенцій належать навички вирішення завдань з техніки математичних перетворень, здатності розв'язувати стандартні та нестандартні математичні задачі, уміння формувати математичні постави прикладних та професійно орієнтованих задач, що досліджуються тощо.

Рівень набуття операційно-технологічних математичних компетенцій студентами бакалаврату значною мірою зумовлений якістю опанування базовою темою загального курсу вищої математики «Невизначений інтеграл» та основою для таких тем і розділів курсу: «Визначений інтеграл», «Кратні інтеграли», «Криволінійні інтеграли», «Поверхневі інтеграли», «Звичайні диференціальні рівняння», «Інтеграл Фур'є та перетворення Фур'є», «Теорія ймовірностей».

Цей навчальний посібник розроблено для поглиблених практичних занять і самостійної роботи студентів за темою «Невизначений інтеграл». Посібник складено відповідно до програми навчальної дисципліни «Вища математика» для освітньо-кваліфікаційного рівня «бакалавр».

Кожний підрозділ посібника містить виклад основних теоретичних положень з рекомендаціями щодо особливостей їхнього практичного застосування, візуальне відображення змісту зазначених положень, а також значну кількість докладно розібраних прикладів, рівень складності яких зростає поступово.

У посібнику подані в достатньому обсязі основні методи інтегрування (табличний, заміни змінної, інтегрування частинами), прийоми інтегрування деяких виразів, що містять квадратний тричлен, інтегрування раціональних, ірраціональних та деяких трансцендентних виразів.

Останній розділ посібника містить завдання для самостійної роботи студентів (до окремими розділами та до теми в цілому).

Навчальний посібник призначений для студентів перших курсів бакалаврату всіх спеціальностей денної та заочної (дистанційної) форм навчання. Він може бути корисним як засіб повторення теми «Невизначений інтеграл» під час підготовки з математичних дисциплін студентів магістратури та аспірантури.

1 ОСНОВНІ ВИЗНАЧЕННЯ ТА ВЛАСТИВОСТІ ІНТЕГРУВАННЯ

1.1 Первісна та невизначений інтеграл

Визначення. Функція $F(x)$ називається первісною функції $f(x)$ на інтервалі (a,b) (скінченному або нескінченному), якщо

1) $F(x)$ є диференційованою на (a,b);

2) $F'(x)=f(x),\ x\in(a,b)$.

Приклад 1.1 Функція $F(x)=x^3$ є первісною функції $f(x)=3x^2$ на всій числовій прямій, оскільки

$$\left(x^3\right)'=3x^2,\ x\in R.$$

Теорема. Якщо функція $F(x)$ є первісною функції $f(x)$ на (a,b), то довільна інша первісна $f(x)$ на тому ж інтервалі може мати такий вид:

$$F(x)+C,$$

де C – деяка стала.

Таким чином, якщо відома тільки одна первісна $F(x)$ функції $f(x)$, можна знайти множину усіх первісних цієї функції, а саме:

$$F(x)+C,$$

де C – довільна стала.

Визначення. Сукупність усіх первісних функції $f(x)$ на інтервалі (a,b) називається невизначеним інтегралом від функції $f(x)$.

Позначається як $\int f(x)dx$ (читається «інтеграл еф від ікс де ікс»).

Отже, за визначенням

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C,$$

де $F'(x) = f(x)$, $x \in (a,b)$; C – довільна стала.

Знак $\int$ називається інтегралом, функція $f(x)$ – це підінтегральна функція, а $f(x)\,dx$ – підінтегральній вираз.

Визначення. Операція знаходження невизначеного інтеграла від цієї функції називається інтегруванням цієї функції.

Операція інтегрування полягає у відновленні функції $(F(x)+C)$ за значенням її похідної $(f(x))$. Таким чином, інтегрування є операцією, зворотньою до диференціювання (тобто до операції знаходження похідної від цієї функції). Щоб перевірити правильність здійснення інтегрування, достатньо продиференціювати результат і одержати підінтегральну функцію.

Приклад 1.2

1) $\int \cos dx = \sin x + C$, оскільки

$$(\sin x + C)' = (\sin x)' + (C)' = \cos x;$$

2) $\int x\,dx = \dfrac{x^2}{2} + C$, оскільки

$$\left(\frac{x^2}{2} + C\right)' = \left(\frac{x^2}{2}\right)' = \frac{1}{2}2x = x.$$

Виникає запитання: чи будь-яка функція $f(x)$ має первісну $F(x)$ на інтервалі (a,b), тобто чи для будь-якої функції $f(x)$ існує невизначений інтеграл)? Відповідь дає наступне *твердження.*

Твердження. Якщо функція $f(x)$ є неперервною на (a,b), то для цієї функції існує первісна, а отже, і невизначений інтеграл.

Таким чином, підінтегральні функції розглядаються лише на тих інтервалах, де вони є неперервними.

1.2 Таблиця основних інтегралів

1) $\int 0\,dx = C$;

2) $\int x^{\alpha} dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \ \left(\alpha \neq -1\right)$;

2.1) $\int dx = x + C$;

2.2) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C$;

2.3) $\int \dfrac{dx}{x^2} = -\dfrac{1}{x} + C$;

3) $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$;

4) $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C \ \left(a > 0,\ a \neq 1\right)$;

5) $\int e^x dx = e^x + C$;

6) $\int \sin x\, dx = -\cos x + C$;

7) $\int \cos x\, dx = \sin x + C$;

8) $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$;

9) $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$;

10) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$;

11) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C \ \left(a \neq 0\right);$

12) $\int \frac{dx}{x^2 + 1} = \operatorname{arctg} x + C\,;$

13) $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C \ \left(a \neq 0\right);$

14) $\int \frac{dx}{x^2 - 1} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C\,;$

15) $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C \ \left(a \neq 0\right);$

16) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 + a}\right| + C\,.$

Зауваження. Іноді до списку основних інтегралів додають ще кілька інтегралів, зокрема інтеграли від гіперболічних функцій:

17) $\int \operatorname{tg} x\,dx = -\ln\left|\cos x\right| + C\,;$

18) $\int \operatorname{ctg} x\,dx = \ln\left|\sin x\right| + C;$

19) $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C\,;$

20) $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C\,;$

21) $\int sh\ x\,dx = ch\ x + C\,;$

22) $\int ch\ x\,dx = sh\ x + C\,;$

23) $\int \frac{dx}{ch^2 x} = th\ x + C$;

24) $\int \frac{dx}{sh^2 x} = -cth\ x + C$.

Приклад 1.3. Користуючись таблицею основних інтегралів, знайти такі інтеграли:

1) $\int x^5 dx$; 2) $\int \frac{dx}{x^3}$; 3) $\int \frac{dx}{\sqrt[7]{x^2}}$;

4) $\int 5^x dx$; 5) $\int \frac{dx}{\sqrt{7-x^2}}$; 6) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-7}}$;

7) $\int \frac{dx}{x^2+3}$; 8) $\int \frac{dx}{x^2-3}$.

Розв'язання

1) використовуючи табличний інтеграл $2(\alpha = 5)$,

$$\int x^5 dx = \left|\int x^\alpha dx,\ \alpha = 5\right| = \frac{x^{5+1}}{5+1} + C = \frac{x^6}{6} + C;$$

2) аналогічно знаходимо

$$\int \frac{dx}{x^3} = \int x^{-3} dx = \left|\int x^\alpha dx,\ \alpha = -3\right| = \frac{x^{-3+1}}{-3+1} = \frac{x^{-2}}{-2} + C = -\frac{1}{2x^2} + C;$$

3) таким же чином знаходимо

$$\int \frac{dx}{\sqrt[7]{x^2}} = \int x^{-2/7} dx = \left|\int x^\alpha dx,\ \alpha = -\frac{2}{7}\right| = \frac{x^{-\frac{2}{7}+1}}{-\frac{2}{7}+1} + C = \frac{x^{\frac{5}{7}}}{\frac{5}{7}} + C = \frac{7}{5}\sqrt[7]{x^5} + C;$$

4) використовуючи табличний інтеграл $4(a = 5)$,

$$\int 5^x\,dx = \left|\int a^x dx,\ a=5\right| = \frac{5^x}{\ln 5} + C;$$

5) скористуємося табличним інтегралом $11\left(a=\sqrt{7}\right)$:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{7-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{\left(\sqrt{7}\right)^2 - x^2}} = \left|\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}},\ a=\sqrt{7}\right| = \arcsin\frac{x}{\sqrt{7}} + C;$$

6) скористуємося табличним інтегралом $16(a=-7)$:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-7}} = \left|\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}},\ a=-7\right| = \ln\left|x+\sqrt{x^2-7}\right| + C;$$

7) скористуємося табличним інтегралом $13\left(a=\sqrt{3}\right)$:

$$\int \frac{dx}{x^2+3} = \int \frac{dx}{x^2+\left(\sqrt{3}\right)^2} = \left|\int \frac{dx}{x^2+a^2},\ a=\sqrt{3}\right| = \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{3}} + C;$$

8) скористуємося табличним інтегралом $15\left(a=\sqrt{3}\right)$:

$$\int \frac{dx}{x^2-3} = \int \frac{dx}{x^2-\left(\sqrt{3}\right)^2} = \left|\int \frac{dx}{x^2-a^2},\ a=\sqrt{3}\right| = \frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{3}}{x+\sqrt{3}}\right| + C.$$

1.3 Основні властивості невизначеного інтеграла

1) $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$;

2) $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$;

3) $\int dF(x) = F(x) + C$;

4) $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$, де k – стала (сталий множник можна виносити за знак інтеграла);

5) $\int\left(f(x)\pm g(x)\right)dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$ (інтеграл від алгебраїчної суми функцій дорівнює алгебраїчній сумі інтегралів від цих функцій);

6) якщо $\int f(x)dx = F(x)+C$, то

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b)+C \quad (a\neq 0);$$

6.1) $\int f(x+b)dx = F(x+b)+C \quad (a=1)$;

6.2) $\int f(ax)dx = \dfrac{1}{a}F(ax)+C \quad (b=0)$.

Приклад 1.4 Користуючись властивістю 6 та її окремими випадками 6.1 та 6.2, знайти такі інтеграли:

1) $\int (x+2)^{15}dx$; 2) $\int (5x+3)^7$; 3) $\int \dfrac{dx}{x+7}$;

4) $\int \dfrac{dx}{5x-4}$; 5) $\int \sqrt{3x+5}\,dx$; 6) $\int 4^{2-3x}dx$;

7) $\int \cos 7x\,dx$; 8) $\int \sin 13x\,dx$; 9) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{16-9x^2}}$;

10) $\int \dfrac{dx}{3x^2-25}$.

Розв'язання. Зауважимо, що інтеграли 1)–10) відрізняються від табличних лінійним зсувом аргументу. Знайдемо ці інтеграли:

1) скористуємось табличним інтегралом $\int x^{15}dx$ і властивістю 6.1 ($b=2$):

$$\int (x+2)^{15}\,dx = \left| \begin{array}{l} \int x^{15}dx = \dfrac{x^{16}}{16}; \\ \text{власт. } 6.1(b=2) \end{array} \right| = \frac{(x+2)^{16}}{16} + C;$$

2) скористуємось табличним інтегралом $\int x^7 dx$ і властивістю 6 ($a=5,\ b=3$):

$$\int (5x+3)^7 dx = \left| \begin{array}{l} \int x^7 dx = \dfrac{x^8}{8} + C; \\ \text{власт. } 6(a=5, b=3) \end{array} \right| = \frac{1}{5}\frac{(5x+3)^8}{8} + C =$$

$$= \frac{(5x+3)^8}{40} + C;$$

3) $$\int \frac{dx}{x+7} = \left| \begin{array}{l} \int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C; \\ \text{власт. } 6.1(b=7) \end{array} \right| = \ln|x+7| + C;$$

4) $$\int \frac{dx}{5x-4} = \left| \begin{array}{l} \int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C; \\ \text{власт. } 6(a=5,\ b=-4) \end{array} \right| = \frac{1}{5}\ln|5x-4| + C;$$

5) $$\int \sqrt{3x+5}\,dx = \left| \begin{array}{l} \int \sqrt{x}dx = \int x^{\frac{1}{2}}dx = \dfrac{2}{3}x^{3/2} + C; \\ \text{власт. } 6(a=3, b=5) \end{array} \right| = \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}(3x+5)^{3/2} + C =$$

$$= \frac{2}{9}\sqrt{(3x+5)^3} + C;$$

6) $$\int 4^{2-3x}dx = \left| \begin{array}{l} \int 4^x dx = \dfrac{4^x}{\ln 4} + C; \\ \text{власт. } 6(a=-3, b=2) \end{array} \right| = -\frac{1}{3}\frac{4^{2-3x}}{\ln 4} + C = -\frac{4^{2-3x}}{3\ln 4} + C;$$

7) $\int \cos 7x\, dx = \left| \begin{matrix} \int \cos x\, dx = \sin x + C; \\ \text{власт. } 6.2(a=7) \end{matrix} \right| = \frac{1}{7}\sin 7x + C = \frac{\sin 7x}{7} + C$;

8) $\int \sin 13x\, dx = \left| \begin{matrix} \int \sin x\, dx = -\cos x + C; \\ \text{власт. } 6.2(a=13) \end{matrix} \right| = \frac{1}{13}(-\cos 13x) + C =$

$= -\frac{\cos 13x}{13} + C$;

9) оскільки $\sqrt{16-9x^2} = \sqrt{16-(3x)^2}$, то цей інтеграл відрізняється від табличного $\int \frac{dx}{\sqrt{16-x^2}}$ заміною x на $3x$. Скористуємось властивістю 6.2 ($a = 3$):

$$\int \frac{dx}{\sqrt{16-(3x)^2}} = \left| \begin{matrix} \int \frac{dx}{\sqrt{16-x^2}} = \arcsin\frac{x}{4} + C; \\ \text{власт. } 6.2(a=3) \end{matrix} \right| = \frac{1}{3}\arcsin\frac{3x}{4} + C;$$

10) $\int \frac{dx}{3x^2-25} = \int \frac{dx}{\left(\sqrt{3}x\right)^2 - 25} = \left| \begin{matrix} \int \frac{dx}{x^2-25} = \frac{1}{10}\ln\left|\frac{x-5}{x+5}\right| + C; \\ \text{власт. } 6.2\left(a=\sqrt{3}\right) \end{matrix} \right| =$

$= \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{1}{10}\ln\left|\frac{\sqrt{3}x-5}{\sqrt{3}x+5}\right| + C = \frac{\sqrt{3}}{30}\ln\left|\frac{x\sqrt{3}-5}{x\sqrt{3}+5}\right| + C.$

2 ОСНОВНІ МЕТОДИ ІНТЕГРУВАННЯ

2.1 Метод безпосереднього (табличного) інтегрування

Безпосереднім (табличним) інтегруванням називається обчислення інтегралів за допомогою таблиці основних інтегралів і основних властивостей невизначеного інтеграла.

Розв'язані в розділі 1 приклади 1.3–1.4 ілюструють цей метод. Розглянемо ще декілька прикладів.

Приклад 2.1 Знайти інтеграли

1) $\int \frac{dx}{\sqrt{16-9x^2}}$; 2) $\int \frac{dx}{3x^2-25}$; 3) $\int \frac{dx}{10x^2+9}$.

Розв'язання. Зауважимо, що приклади 1 і 2 були розв'язані в складі прикладів 1.4 (9 та 10) з використанням властивості 6 невизначеного інтеграла. Застосуємо до знаходження цих інтегралів інший підхід:

1) наявність в підінтегральному виразі $\frac{dx}{\sqrt{16-9x^2}}$ множника 9 не дає змогу ототожнити його з табличним інтегралом 11. Необхідно в підкореневому виразі винести цей множник за дужки:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{16-9x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{9\left(\frac{16}{9}-x^2\right)}} = \int \frac{dx}{3\sqrt{\left(\frac{4}{3}\right)^2 - x^2}} = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{4}{3}\right)^2 - x^2}} =$$

$$= \left| \begin{array}{c} \text{табл.інтеграл 11;} \\ a = \frac{4}{3} \end{array} \right| = \frac{1}{3}\arcsin\frac{x}{\frac{4}{3}} + C = \frac{1}{3}\arcsin\frac{3x}{4} + C.$$

2) наявність в підінтегральному виразі $\frac{dx}{3x^2-25}$ множника 3 не дає змогу ототожнити його з табличним інтегралом 15. Отже:

$$\int \frac{dx}{3x^2-25}=\int \frac{dx}{3\left(x^2-\frac{25}{3}\right)}=\frac{1}{3}\int \frac{dx}{x^2-\left(\frac{5}{\sqrt{3}}\right)^2}=\left|\begin{array}{c}\text{табл.інтеграл 15;}\\ a=\frac{5}{\sqrt{3}}\end{array}\right|=$$

$$=\frac{1}{3}\frac{1}{2\cdot\frac{5}{\sqrt{3}}}\ln\left|\frac{x-\frac{5}{\sqrt{3}}}{x+\frac{5}{\sqrt{3}}}\right|+C=\frac{\sqrt{3}}{30}\ln\left|\frac{x\sqrt{3}-5}{x\sqrt{3}+5}\right|+C.$$

3) $$\int \frac{dx}{10x^2+9}=\int \frac{dx}{10\left(x^2+\frac{9}{10}\right)}=\frac{1}{10}\int \frac{dx}{x^2+\left(\frac{3}{\sqrt{10}}\right)^2}=$$

$$=\left|\begin{array}{c}\text{табл.інтеграл 13;}\\ a=\frac{3}{\sqrt{10}}\end{array}\right|=\frac{1}{10}\frac{1}{\frac{3}{\sqrt{10}}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\frac{3}{\sqrt{10}}}+C=$$

$$=\frac{\sqrt{10}}{30}\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{10}}{3}+C.$$

Приклад 2.2 Знайти інтеграли

1) $\int\left(7\cdot 3^x-\frac{2}{\sqrt[3]{x}}+4\right)dx$; 2) $\int\left(7^x-\frac{8}{x}+4\cos x\right)dx$.

Розв'язання

1) спочатку застосуємо властивості невизначеного інтеграла 4 і 5, тобто представимо інтеграл від алгебраїчної суми функцій як алгебраїчну суму інтегралів і винесемо сталі множники за знаки інтегралів, скористуємось табличними інтегралами 2 і 4:

$$\int\left(7\cdot 3^x-\frac{2}{\sqrt[3]{x}}+4\right)dx=\int 7\cdot 3^x\,dx-\int\frac{2}{\sqrt[3]{x}}dx+\int 4dx=$$

$$=7\int 3^x\,dx-2\int x^{-1/3}dx+4\int dx=7\left(\frac{3^x}{\ln 3}+C_1\right)-2\left(\frac{x^{-1/3+1}}{-1/3+1}+C_2\right)+$$

$$+4\left(x+C_3\right)=\frac{7\cdot 3^x}{\ln 3}-3\sqrt[3]{x^2}+4x+\left(7C_1-2C_2+4C_3\right)=$$

$$=\frac{7\cdot 3^x}{\ln 3}-3\sqrt[3]{x^2}+4x+C.$$

Зауважимо, що на практиці не прийнято записувати проміжні довільні сталі, що виникають у випадку окремого інтегрування доданків. У результаті записують єдину довільну сталу *C*, позначаючи нею алгебраїчну суму всіх окремих довільних сталих;

2) як і в попередньому прикладі спочатку застосуємо властивості невизначеного інтеграла 4 і 5, а потім скористаємось табличними інтегралами 3, 4 і 7:

$$\int\left(7^x-\frac{8}{x}+4\cos x\right)dx=\int 7^x\,dx-\int\frac{8}{x}dx+\int 4\cos x dx=$$

$$=\frac{7^x}{\ln 7}-8\int\frac{dx}{x}+4\int\cos x\,dx=\frac{7^x}{\ln 7}-8\ln|x|+4\sin x+C.$$

У наступних прикладах знаходження інтегралів розпочинається з перетворення підінтегральних виразів.

Приклад 2.3 Знайти інтеграли:

1) $\int\frac{\left(x^4-1\right)\left(2x+1\right)}{x^2}dx$; 2) $\int\left(\sqrt[3]{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2dx$;

3) $\int\frac{\sqrt{2+x^2}-5\sqrt{2-x^2}}{\sqrt{4-x^2}}dx$; 4) $\int\frac{x^2}{x^2+4}dx$;

5) $\int\frac{dx}{x^2\left(x^2+1\right)}$; 6) $\int\frac{dx}{\sin^2+\cos^2 x}$.

Розв'язання

1) $\int \frac{\left(x^4-1\right)\left(2x+1\right)}{x^2}dx=\int \frac{2x^5+x^4-2x-1}{x^2}dx=$

$=\int\left(2x^3+x^2-\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}\right)dx=2\int x^3dx+\int x^2dx-2\int\frac{dx}{x}-\int x^{-2}dx=$

$=2\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}-2\ln|x|-\frac{x^{-1}}{-1}+C=\frac{x^4}{2}+\frac{x^3}{3}-2\ln|x|+\frac{1}{x}+C.$

2) $\int\left(\sqrt[3]{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2dx=\int\left(\left(\sqrt[3]{x}\right)^2+2\sqrt[3]{x}\frac{1}{\sqrt{x}}+\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2\right)dx=$

$=\int\left(x^{2/3}+2x^{-1/6}+\frac{1}{x}\right)dx=\int x^{2/3}dx+2\int x^{-1/6}dx+\int\frac{1}{x}dx=$

$=\frac{x^{2/3+1}}{2/3+1}+2\frac{x^{-1/6+1}}{-1/6+1}+\ln|x|+C=\frac{3}{5}x^{5/3}+\frac{12}{5}x^{5/6}+\ln|x|+C=$

$=\frac{3}{5}\sqrt[3]{x^5}+\frac{12}{5}\sqrt[6]{x^5}+\ln|x|+C.$

3) $\int\frac{\sqrt{2+x^2}-5\sqrt{2-x^2}}{\sqrt{4-x^2}}dx=\int\frac{\sqrt{2+x^2}-5\sqrt{2-x^2}}{\sqrt{\left(2+x^2\right)\left(2-x^2\right)}}dx=$

$=\int\frac{dx}{\sqrt{2-x^2}}-5\int\frac{dx}{\sqrt{2+x^2}}=\arcsin\frac{x}{\sqrt{2}}-5\ln\left|x+\sqrt{2+x^2}\right|+C.$

4) $\int\frac{x^2}{x^2+4}dx=\int\frac{x^2+4-4}{x^2+4}dx=\int\left(1-\frac{4}{x^2+4}\right)dx=$

$=\int dx-\int\frac{4}{x^2+4}dx=x-4\int\frac{dx}{x^2+4}=x-4\cdot\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}+C=x-2\operatorname{arctg}\frac{x}{2}+C.$

5) $$\int \frac{dx}{x^2\left(x^2+1\right)} = \int \frac{1+x^2-x^2}{x^2\left(x^2+1\right)}dx = \int\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^2+1}\right)dx$$

$$= \int \frac{dx}{x^2} - \int \frac{dx}{x^2+1} == -\frac{1}{x} - \operatorname{arctg}\, x + C.$$

6) $$\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x} = \left|\sin^2 x + \cos^2 x = 1\right| = \int \frac{\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)dx}{\sin^2 x\cos^2 x} =$$

$$= \int\left(\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x}\right)dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int \frac{dx}{\sin^2 x} = \operatorname{tg}\, x - \operatorname{ctg}\, x + C\,.$$

7) $$\int tg^2 x dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}dx = \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} - \int dx = tgx - x + C.$$

2.2 Метод заміни змінної (підставляння)

Сутність цього методу полягає у введенні нової змінної інтегрування, що дає змогу звести інтеграл, який не обчислюється безпосередньо, до табличного або відомого інтеграла. Він ґрунтується на властивості інваріантності формул інтегрування.

2.2.1 Властивість інваріантності формул інтегрування

Теорема

Будь-яка формула інтегрування зберігає свій вигляд у випадку підставляння замість незалежної змінної x довільної функції $t = \varphi\left(x\right)$, що має неперервну похідну. Отже, якщо

$$\int f\left(x\right)dx = F\left(x\right) + C\,,$$

то

$$\int f\left(t\right)dt = F\left(t\right) + C\,. \qquad (2.1)$$

Зауваження

1. Твердження (2.1) теореми можна записати у розгорнутому вигляді:

$$\int f\left(\varphi(x)\right)d\left(\varphi(x)\right)=F\left(\varphi(x)\right)+C. \qquad (2.2)$$

2. В основі доведення цієї теореми знаходиться властивість інваріантності форми першого диференціала.

Приклад 2.4

$\int x^2dx=\dfrac{x^3}{3}+C$ (табличний інтеграл 2, $\alpha=2$).

На основі (2.1) буде правильним:

$\int t^2dt=\dfrac{t^3}{3}+C$, де $t=\varphi(x)$ – довільна функція з неперервною похідною $\varphi'(x)$.

Зокрема, підставляючи послідовно $t=\sin x$, $t=\ln x$, $t=\arcsin x$, маємо

$$\int \sin^2 x\,d\left(\sin x\right)=\frac{\sin^3 x}{3}+C;$$

$$\int \ln^2 x\;d\left(\ln x\right)=\frac{\ln^3 x}{3}+C;$$

$$\int \arcsin^2 x\;d\left(\arcsin x\right)=\frac{\arcsin^3 x}{3}+C \text{ тощо.}$$

Отже, властивість інваріантності формул інтегрування значно розширює таблицю інтегралів.

З відомих нам формул для диференціалів

$$d\left(\sin x\right)=\cos x\,dx;\; d\left(\ln x\right)=\frac{dx}{x};\; d\left(\arcsin x\right)=\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

отримуємо справедливість таких рівностей:

$$\int \sin^2 x \cos x\,dx = \int \sin^2 x\,d\left(\sin x\right) = \frac{\sin^3 x}{3} + C; \qquad (2.3)$$

$$\int \ln^2 x \frac{1}{x}dx = \int \ln^2 x\,d\left(\ln x\right) = \frac{\ln^3 x}{3} + C; \qquad (2.4)$$

$$\int \arcsin^2 x \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int \arcsin^2 x\,d\left(\arcsin x\right) = \frac{\arcsin^3 x}{3} + C. \qquad (2.5)$$

Перехід $\int \underbrace{\sin^2 x}_{\left(\varphi(x)\right)^2}\ \underbrace{\cos x\,dx}_{\varphi'(x)dx} = \int \underbrace{\sin^2 x}_{\left(\varphi(x)\right)^2}\underbrace{d\left(\sin x\right)}_{d\left(\varphi(x)\right)}$

називають уведенням функцій $\varphi\left(x\right) = \sin x$ під знак диференціала. У рівностях виразів (2.4) і (2.5) під знак диференціала введено $\varphi\left(x\right) = \ln x$ і $\varphi\left(x\right) = \arcsin x$ відповідно.

Операція введення функції під знак диференціала здійснюється з метою використання властивості інваріантності формул інтегрування у вигляді (2.2). Розглянемо умови їх застосування і наведемо приклади.

2.2.2 Операція введення функції під знак диференціала

Нехай треба знайти складний для безпосереднього інтегрування

$$\int g\left(x\right)dx, \qquad (2.6)$$

в якому підінтегральний вираз $g\left(x\right)dx$ можна представити у вигляді

$$g\left(x\right) = f\left(\varphi\left(x\right)\right)\varphi'\left(x\right)dx, \qquad (2.7)$$

де для функції $f\left(x\right)$ відома первісна $F\left(x\right)$, а $\varphi'\left(x\right)$ є неперервною функцією. Тоді

$$\int g\left(x\right)dx = \int f\left(\varphi\left(x\right)\right)\varphi'\left(x\right)dx = \int f\left(\varphi\left(x\right)\right)d\left(\varphi\left(x\right)\right) = F\left(\varphi\left(x\right)\right) + C.$$

уведення функції $\varphi(x)$ під знак диференціала

властивість інваріантності формул інтегрування (2.2)

Приклад 2.5 Знайти інтеграли:

1) $\int\frac{\text{arctg}^5x}{1+x^2}dx$; 2) $\int\frac{\cos x}{\sin x}dx$; 3) $\int\frac{e^{\text{tg}\,x}}{\cos^2 x}dx$;

4) $\int\frac{dx}{x\sin^2(\ln x)}$; 5) $\int x5^{x^2}dx$; 6) $\int 4^{2-3x}dx$.

Розв'язання

1) $$\int\frac{\text{arctg}^5x}{1+x^2}dx=\int(\text{arctg}x)^5\frac{1}{1+x^2}dx=\int(arctg\,x)^5(arctg\,x)'\,dx=$$

$$=\int(\text{arctg}\,x)^5\,d(\text{arctg}\,x)=\left|\int t^5dt\right|=\frac{\text{arctg}^6x}{6}+C;$$

2) $$\int\frac{\cos x}{\sin x}dx=\int\frac{1}{\sin x}\cos xdx=\int\frac{1}{\sin x}(\sin x)'\,dx=\int\frac{1}{\sin x}d(\sin x)=\left|\int\frac{dt}{t}\right|=$$

$$=\ln|\sin x|+C;$$

3) $$\int\frac{e^{\text{tg}\,x}}{\cos^2 x}dx=\int e^{\text{tg}\,x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}dx=\int e^{\text{tg}\,x}\cdot(\text{tg}\,x)'\,dx=\int e^{\text{tg}\,x}d(\text{tg}\,x)=$$

$$=\left|\int e^t dt\right|=e^{\text{tg}\,x}+C;$$

4) $$\int\frac{dx}{x\sin^2(\ln x)}=\int\frac{1}{\sin^2(\ln x)}\frac{1}{x}dx=\int\frac{1}{\sin^2(\ln x)}(\ln x)'\,dx=$$

$$=\int\frac{1}{\sin^2(\ln x)}d(\ln x)=\left|\int\frac{dt}{\sin^2 t}\right|=-\text{ctg}(\ln x)+C;$$

5) $$\int x\cdot 5^{x^2}dx=\int 5^{x^2}\cdot 2x\frac{1}{2}dx=\frac{1}{2}\int 5^{x^2}\left(x^2\right)'dx=\frac{1}{2}\int 5^{x^2}d\left(x^2\right)=\left|\int 5^t\,dt\right|=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{5^{x^2}}{\ln 5}+C=\frac{5^{x^2}}{2\ln 5}+C;$$

6) звертаємо увагу, що інтеграл $\int 4^{2-3x}dx$ було знайдено (приклад 1.4; 6) з використанням властивості 6 невизначеного інтеграла. Для знаходження цього інтеграла можна також застосувати операцію введення функції під знак диференціала:

$$\int 4^{2-3x}dx = \int 4^{2-3x}(-3)\left(-\frac{1}{3}\right)dx = -\frac{1}{3}\int 4^{2-3x}(2-3x)'\,dx =$$

$$= -\frac{1}{3}\int 4^{2-3x}d(2-3x) = \left|\int 4^t\,dt\right| = -\frac{1}{3}\frac{4^{2-3x}}{\ln 4} + C = -\frac{4^{2-3x}}{3\ln 4} + C.$$

Зауваження

1. На практиці часто користуються формулами, які є узагальненнями результатів прикладів 1 і 2, а саме:

$$\int \varphi^n(x)\cdot\varphi'(x)\,dx = \frac{(\varphi(x))^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1,$$

$$\int \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}dx = \ln|\varphi(x)| + C.$$

2. Необхідно пам’ятати формули для диференціалів, що найчастіше зустрічаються на практиці:

$$dx = \frac{1}{a}d(ax+b); \qquad xdx = \frac{1}{2}d\left(x^2\right);$$

$$\frac{1}{x^2}dx = -d\left(\frac{1}{x}\right); \qquad \frac{1}{\sqrt{x}}dx = 2d\left(\sqrt{x}\right);$$

$$\frac{1}{x}dx = d(\ln x); \qquad e^x dx = d\left(e^x\right);$$

$$\cos x\,dx = d(\sin x); \qquad \sin x\,dx = -d(\cos x);$$

$$\frac{1}{\cos^2 x}dx = d(\operatorname{tg} x); \qquad \frac{1}{\sin^2 x}dx = -d(\operatorname{ctg} x).$$

Таким чином, у випадках, коли треба знайти $\int g(x)dx$, в якому підінтегральний вираз $g(x)dx$ можна представити у вигляді (2.7), застосовують властивість інваріантності формул інтегрування (2.2), що дозволяє одержати такий результат:

$$\int g(x)dx = F(\varphi(x)) + C.$$

Можна користуватися записом (2.1) цієї властивості:

$$\int f(t)dt = F(t) + C,$$

де $t = \varphi(x)$. Це передбачає введення нової змінної інтегрування t, тобто здійснення заміни змінної так званого першого типу.

2.2.3 Перший тип заміни змінної

Функція незалежної змінної $\varphi(x)$ замінюється новою змінною:

$$\boldsymbol{t = \varphi(x)}.$$

$$\int g(x)dx = \int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \left| \begin{array}{c} \text{Заміна} \\ t = \varphi(x) \\ dt = \varphi'(x)dx \end{array} \right| =$$

$$= \underset{\substack{\text{властивість} \\ \text{інваріантності} \\ \text{формул інтегру-} \\ \text{вання (2.1)}}}{\int f(t)dt} \quad = \quad \underset{t=\varphi(x)}{F(t) + C} = F(\varphi(x)) + C.$$

Застосуємо заміну змінної до розв’язання прикладу 2.5.

Приклад 2.6 Знайти інтеграли:

1) $\int \frac{\operatorname{arctg}^5 x}{1+x^2}dx$; 2) $\int \frac{\cos x}{\sin x}dx$; 3) $\int \frac{e^{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x}dx$;

4) $\int \frac{dx}{x\sin^2(\ln x)}$; 5) $\int x\cdot 5^{x^2}\,dx$; 6) $\int 4^{2-3x}\,dx$.

Розв'язання

1) $$\int \frac{\operatorname{arctg}^5 x}{1+x^2}dx = \int \operatorname{arctg}^5 x\cdot\frac{1}{1+x^2}dx = \begin{vmatrix} t=\operatorname{arctg} x \\ dt=\dfrac{dx}{1+x^2}\end{vmatrix} =$$

$$=\int t^5 dt = \frac{t^6}{6}+C = \frac{\operatorname{arctg}^6 x}{6}+C;$$

2) $$\int \frac{\cos x}{\sin x}dx = \int \frac{1}{\sin x}\cos x\,dx = \begin{vmatrix} t=\sin x \\ dt=\cos x\,dx\end{vmatrix} =$$

$$\int \frac{1}{t}dt = \ln|t|+C = \ln|\sin x|+C;$$

3) $$\int \frac{e^{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x}dx = \int e^{\operatorname{tg} x}\cdot\frac{dx}{\cos^2 x} = \begin{vmatrix} t=\operatorname{tg} x \\ dt=\dfrac{dx}{\cos^2 x}\end{vmatrix} =$$

$$=\int e^t dt = e^t + C = e^{\operatorname{tg} x}+C;$$

4) $$\int \frac{dx}{x\sin^2(\ln x)} = \int \frac{1}{\sin^2(\ln x)}\frac{dx}{x} = \begin{vmatrix} t=\ln x \\ dt=\dfrac{dx}{x}\end{vmatrix} = \int \frac{1}{\sin^2 t}dt =$$

$$=-\operatorname{ctg} t + C = -\operatorname{ctg}(\ln x)+C;$$

5) $$\int x\cdot 5^{x^2}dx = \int 5^{x^2}x\,dx = \begin{vmatrix} t=x^2 \\ dt=2x\,dx \\ x\,dx=\dfrac{dt}{2}\end{vmatrix} = \int 5^t\cdot\frac{dt}{2} = \frac{1}{2}\int 5^t dt =$$

$$=\frac{1}{2}\frac{5^t}{\ln 5}+C = \frac{5^{x^2}}{2\ln 5}+C;$$

6) $\int 4^{2-3x}\,dx = \left| \begin{aligned} & t = 2-3x \\ & dt = -3dx \\ & dx = -\frac{dt}{3} \end{aligned} \right| = \int 4^t \left(-\frac{dt}{3} \right) = -\frac{1}{3}\int 4^t\,dt =$

$= -\frac{1}{3}\frac{4^{2-3x}}{\ln 4} + C = -\frac{4^{2-3x}}{3\ln 4} + C.$

Звертаємо увагу, що в прикладах 5 і 6 перетворення підінтегрального виразу $g(x)dx$ до вигляду

$$g(x)dx = f\big(\varphi(x)\big)\varphi'(x)dx$$

не здійснювалось. Відповідну заміну змінної $t = \varphi(x)$ було здійснено, оскільки таке представлення є можливим. Отже, нам вдалося одержати правильні результати інтегрування.

Підкреслимо, що загального способу вибору тієї чи іншої заміни не існує. Але необхідно дотримуватись такої рекомендації: якщо в підінтегральному виразі є готовий диференціал функції $\varphi(x)$ (тобто $\varphi'(x)dx$) або вираз, що відрізняється від $\varphi'(x)dx$ лише сталим множником, то можна здійснити заміну $t = \varphi(x)$.

Приклад 2.7 Знайти інтеграли:

1) $\int \frac{x^4 dx}{1-x^5}$;

2) $\int x\cos\left(3-x^2\right)dx$;

3) $\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{1-e^{2x}}}dx$;

4) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-9x^2}\arcsin^2 3x}$;

5) $\int \frac{3-2x}{5x^2+7}dx$;

6) $\int \frac{\sin 2x}{1+\sin^4 x}dx$.

Розв'язання

$$1)\ \int\frac{x^4dx}{1-x^5}=\int\frac{1}{1-x^5}x^4dx=\left|\begin{array}{l}t=1-x^5\\ dt=-5x^4dx\\ x^4dx=-\dfrac{dt}{5}\end{array}\right|=\int\frac{1}{t}\left(-\frac{dt}{5}\right)=$$

$$=-\frac{1}{5}\int\frac{dt}{t}=-\frac{1}{5}\ln|t|+C=-\frac{1}{5}\ln\left|1-x^5\right|+C;$$

$$2)\ \int x\cos\left(3-x^2\right)dx=\int\cos\left(3-x^2\right)x\,dx=\left|\begin{array}{l}t=3-x^2\\ dt=-2x\,dx\\ x\,dx=-\dfrac{dt}{2}\end{array}\right|=$$

$$=\int\cos t\left(-\frac{dt}{2}\right)=-\frac{1}{2}\int\cos t\,dt=-\frac{1}{2}\sin t+C=-\frac{1}{2}\sin\left(3-x^2\right)+C;$$

$$3)\ \int\frac{e^{2x}}{\sqrt{1-e^{2x}}}dx=\left|\begin{array}{l}t=1-e^{2x}\\ dt=-2e^{2x}dx\\ e^{2x}dx=-\dfrac{dt}{2}\end{array}\right|=\int\frac{1}{\sqrt{t}}\left(-\frac{dt}{2}\right)=-\frac{1}{2}\int\frac{dt}{\sqrt{t}}=$$

$$=-\frac{1}{2}2\sqrt{t}+C=-\sqrt{t}+C=-\sqrt{1-e^{2x}}+C;$$

$$4)\ \int\frac{dx}{\sqrt{1-9x^2}\arcsin^2 3x}=\int\frac{1}{\arcsin^2 3x}\frac{dx}{\sqrt{1-9x^2}}=\left|\begin{array}{l}t=\arcsin 3x\\ dt=\dfrac{3\,dx}{\sqrt{1-9x^2}}\\ \dfrac{dx}{\sqrt{1-9x^2}}=\dfrac{dt}{3}\end{array}\right|=$$

$$=\int\frac{1}{t^2}\frac{dt}{3}=\frac{1}{3}\int\frac{dt}{t^2}=-\frac{1}{3t}+C=-\frac{1}{3\arcsin 3x}+C;$$

5) $\int \frac{3-2x}{5x^2+7}dx = \int \left(\frac{3}{5x^2+7} - \frac{2x}{5x^2+7} \right) dx =$

$= 3\int \frac{dx}{5x^2+7} - 2\int \frac{x\,dx}{5x^2+7} = I_1 + I_2.$

У цьому прикладі після почленного ділення чисельника дробу підінтегральної функції на знаменник заданий інтеграл зведено до суми інтегралів I_1 та I_2.

Перший інтеграл знаходимо безпосередньо:

$$I_1 = 3\int \frac{dx}{5x^2+7} = \frac{3}{5}\int \frac{dx}{x^2 + \left(\sqrt{\frac{7}{5}}\right)^2} = \frac{3}{5}\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{5}x}{\sqrt{7}} + C =$$

$$= \frac{3}{\sqrt{35}}\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{5}}{\sqrt{7}} + C.$$

Другий інтеграл знаходять за допомогою заміни змінної:

$$I_2 = -2\int \frac{x\,dx}{5x^2+7} = \left| \begin{array}{l} t = 5x^2+7 \\ dt = 10x\,dx \\ x\,dx = \dfrac{dt}{10} \end{array} \right| = -\frac{2}{10}\int \frac{dt}{t} = -\frac{1}{5}\ln|t| + C = -\frac{1}{5}\ln\left(5x^2+7\right) + C.$$

Отже, знаходимо заданий інтеграл:

$$\int \frac{3-2x}{5x^2+7}dx = \frac{3}{\sqrt{35}}\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{5}}{\sqrt{7}} - \frac{1}{5}\ln\left(5x^2+7\right) + C;$$

6) $\int \frac{\sin 2x}{1+\sin^4 x}dx = \int \frac{2\sin x\cos x}{1+\sin^4 x}dx = \left| \begin{array}{c} t = \sin x \\ dt = \cos x\,dx \end{array} \right| = \int \frac{2t\,dt}{1+t^4} =$

$= \left| \begin{array}{c} z = t^2 \\ dz = 2t\,dt \end{array} \right| = \int \frac{dz}{1+z^2} = \operatorname{arctg} z + C = \operatorname{arctg} t^2 + C = \operatorname{arctg}\left(\sin^2 x\right) + C.$

У цьому прикладі для досягнення результату довелося зробити заміну змінної двічі: перша заміна дозволила спростити заданий інтеграл, а друга звела проміжний інтеграл $\int \frac{2t\,dt}{1+t^2}$ до табличного: $\int \frac{dz}{1+z^2}$.

Зауваження. З формул (2.1) і (2.2) випливає точність рівності:

$$\int f(t)\,dt = \int f\big(\varphi(x)\big)\,d\big(\varphi(x)\big), \qquad (2.8)$$

де $t=\varphi(x)$ є функцією з неперервною похідною. Змінюючи місцями букви t і x в формулі (2.8), одержуємо:

$$\int f(x)\,dx = \int f\big(\varphi(t)\big)\,d\big(\varphi(t)\big). \qquad (2.9)$$

Отже, формула (2.9) є основою другого типу заміни змінної – підставляння.

2.2.4 Другий тип заміни змінної (підставляння)

Незалежну змінну замінюють функцією нової змінної:

$$x=\varphi(t),$$

де $\varphi(t)$ має обернену функцію $t=\varphi^{-1}(x)$.

Розглянемо умови застосування другого типу заміни змінної та наведемо приклади.

$$\underbrace{\int f(x)\,dx}_{\substack{\text{інтеграл}\\ \text{складний для}\\ \text{безпосереднього}\\ \text{інтегрування}}} = \underbrace{\left| \begin{array}{l} x=\varphi(t) \\ dx=\varphi'(t)\,dt \end{array} \right|}_{\substack{\text{формула}\\ (2.9)}} = \int \underbrace{f\big(\varphi(t)\big)\cdot\varphi'(t)}_{g(t)}\,dt = \underbrace{\int g(t)\,dt}_{\substack{\text{для функції } g(t)\\ \text{відома первісна } G(t)}} =$$

$$= G(t)+C = G\big(\varphi^{-1}(x)\big)+C.$$

$t=\varphi^{-1}(x)$.

Приклад 2.8 Знайти інтеграли:

1) $\int \frac{dx}{(5x+7)\sqrt{x}}$; 2) $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x+5}}$; 3) $\int \sqrt{e^x-1}\,dx$;

4) $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$; 5) $\int \frac{dx}{\sqrt{\left(1-x^2\right)^3}}$; 6) $\int \frac{x^2dx}{\left(x^2+1\right)^2}$.

Розв'язання

1) розглянемо $\int \frac{dx}{(5x+7)\sqrt{x}}$. Підінтегральна функція визначена на інтервалі $(0,+\infty)$. Щоб позбутися ірраціональності у знаменнику підінтегральної функції, здійснюємо підставляння:

$x=\varphi(t)$, де $\varphi(t)=t^2$, $t>0$. Функція $\varphi(t)$ має неперервну похідну $\varphi'(t)=2t$ у своїй області визначення й обернену функцію $\varphi^{-1}(x)=\sqrt{x}$. Отже:

$$\int \frac{dx}{(5x+7)\sqrt{x}} = \left| \begin{matrix} x=t^2 \\ dx=2t\,dt \\ t=\sqrt{x} \end{matrix} \right| = \int \frac{2t\,dt}{\left(5t^2+7\right)\sqrt{t^2}} = 2\int \frac{\cancel{t}\,dt}{\left(5t^2+7\right)\cancel{t}} =$$

$$= \frac{2}{5}\int \frac{dt}{t^2+\left(\sqrt{\frac{7}{5}}\right)^2} = \frac{2}{5}\cdot\frac{1}{\sqrt{\frac{7}{5}}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{\frac{7}{5}}}+C = \frac{2}{\sqrt{35}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{5}{7}}t+C \underset{t=\sqrt{x}}{=}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{35}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{5x}{7}}+C;$$

2) $$\int \frac{dx}{1+\sqrt{x+5}} = \left| \begin{matrix} x+5=t^2 \\ dx=2t\,dt \\ t=\sqrt{x+5} \end{matrix} \right| = \int \frac{2t\,dt}{1+\sqrt{t^2}} = 2\int \frac{t\,dt}{1+t} = 2\int \frac{t+1-1}{t+1}dt =$$

$$= 2\int\left(1-\frac{1}{t+1}\right)dt = 2\left(t-\ln|t+1|\right)+C \underset{t=\sqrt{x+5}}{=} 2\left(\sqrt{x+5}-\ln\left(\sqrt{x+5}+1\right)\right)+C.$$

3) розглянемо $\int\sqrt{e^x-1}dx$. Підінтегральна функція визначена на інтервалі $(0,+\infty)$. Щоб позбутися ірраціональності, здійснюємо підставляння:

$$e^x-1=t^2,\ t>0\ \ (x=\varphi(t),\ \text{де}\ \varphi(t)=\ln\left(t^2+1\right),\ t>0).$$

Функція $\varphi(t)$ має неперервну похідну $\varphi'(t)=\dfrac{2t}{t^2+1}$ в своєї області визначення й обернену функцію $\varphi^{-1}(x)=\sqrt{e^x-1}$.

Отже:

$$\int\sqrt{e^x-1}dx = \left|\begin{array}{l} e^x-1=t^2 \\ e^x=t^2+1 \\ e^x\,dx=2t\,dt \\ dx=\dfrac{2t\,dt}{t^2+1} \end{array}\right| = \int\sqrt{t^2}\cdot\frac{2t\,dt}{t^2+1} = 2\int t\frac{t\,dt}{t^2+1} =$$

$$= 2\int\frac{t^2+1-1}{t^2+1}dt = 2\int\left(1-\frac{1}{t^2+1}\right)dt = 2\left(t-\operatorname{arctg}t\right)+C \underset{t=\sqrt{e^x-1}}{=}$$

$$= 2\left(\sqrt{e^x-1}-\operatorname{arctg}\sqrt{e^x-1}\right)+C;$$

$$4)\ \int\frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}} = \left|\begin{array}{c} x=\dfrac{1}{t}, \\ dx=-\dfrac{dt}{t^2} \\ 1+x^2=\dfrac{t^2+1}{t^2} \end{array}\right| = -\int\frac{\frac{dt}{t^2}}{\frac{1}{t}\sqrt{\frac{t^2+1}{t^2}}} = -\int\frac{\frac{dt}{t^2}}{\frac{1}{t}\cdot\frac{\sqrt{t^2+1}}{t}} =$$

$$= -\int\frac{dt}{\sqrt{t^2+1}} = -\ln\left|t+\sqrt{t^2+1}\right|+C \underset{t=\frac{1}{x}}{=} -\ln\left|\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}\right|+C =$$

$$= -\ln\left|\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}\right| + C = \ln\left|\frac{x}{1+\sqrt{1+x^2}}\right| + C;$$

5) розглянемо $\int \frac{dx}{\sqrt{\left(1-x^2\right)^3}}$. Підінтегральна функція визначена на інтервалі $(-1;1)$.

Таким чином, $1-x^2>0 \Leftrightarrow x^2<1 \Leftrightarrow |x|<1 \Leftrightarrow -1<x<1$. Щоб позбутися ірраціональності в знаменнику підінтегральної функції в результаті застосування основної тригонометричної тотожності, здійснюємо підставляння: $x=\varphi(t)$, де $\varphi(t)=\sin t$. $\varphi'(t)=\cos t$ є неперервною функцією в області визначення $\varphi(t)$. Функція $\varphi(t)=\sin t$ $t\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ має обернену функцію $\varphi^{-1}(x)=\arcsin x$, $x\in(-1;1)$. Отже:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\left(1-x^2\right)^3}} = \left|\begin{matrix} x=\sin t \\ dx=\cos t\,dt \end{matrix}\right| = \int \frac{\cos t\,dt}{\sqrt{\left(1-\sin^2 t\right)^3}} = \int \frac{\cos t\,dt}{\sqrt{\left(\cos^2 t\right)^3}} = \int \frac{\cos t\,dt}{\cos^3 t} =$$

$$= \int \frac{dt}{\cos^2 t} = \operatorname{tg} t + C = \frac{\sin t}{\cos t} + C = \frac{\sin t}{\sqrt{1-\sin^2 t}} + C = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + C.$$

За умови $t\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ функція $\cos t>0$. Тому під час розв’язання цього прикладу здійснюємо перехід $\sqrt{\cos^2 t}=\cos t$;

6) $$\int \frac{x^2dx}{\left(x^2+1\right)^2} = \left|\begin{matrix} x=\operatorname{tg} t \\ dx=\dfrac{dt}{\cos^2 t} \end{matrix}\right| = \int \operatorname{tg}^2 t\cdot\cos^2 t\,dt = \int \sin^2 t\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int(1-\cos 2t)\,dt = \frac{1}{2}\left(t-\frac{\sin 2t}{2}\right) + C = \frac{1}{2}\left(t-\operatorname{tg} t\cdot\cos^2 t\right) + C =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\operatorname{arctg} x - \frac{x}{x^2+1}\right) + C.$$

$\cos^2 t = \dfrac{1}{1+\mathrm{tg}^2 t}$, $t = \mathrm{arctg}x$.

Таким чином, на практиці застосують перший і другий типи заміни змінної. Їх підбирають таким чином, щоб в результаті перетворень інтеграли були табличними або зводилися до відомих.

Після застосування методу заміни змінної завжди необхідно повернутися до заданої змінної інтегрування.

2.3 Метод інтегрування частинами

2.3.1 Формула інтегрування частинами, її зміст та рекомендації щодо застосування.

Метод інтегрування частинами ґрунтується на використанні формули диференціала добутку двох функцій:

$$d(uv) = u \cdot dv + v \cdot du,$$

звідки маємо рівність

$$u \cdot dv = d(uv) - v \cdot du.$$

Інтегруючи обидві частини останньої рівності, одержимо

$$\int udv = \int d(uv) - \int vdu$$

або

$$\int udv = uv + C - \int vdu.$$

Оскільки до складу невизначеного інтеграла $\int v\,du$ вже належить довільна стала, то до неї можна приєднати і доданок *C*. Отже, одержуємо формулу інтегрування частинами:

$$\int u\,dv = u \cdot v - \int v\,du. \qquad (2.10)$$

Зміст цієї формули полягає у тому, що під час обчислювання невизначеного інтеграла $\int f(x)dx$ підінтегральний вираз $f(x)dx$ деяким чином представляється як добуток двох множників u і dv, тобто

$$f(x)dx = u \cdot dv.$$

Після цього обчислювання інтеграла $\int f(x)dx$ здійснюється двома інтегруваннями:

1) під час обчислювання v із виразу dv:

$$v = \int dv;$$

2) під час обчислювання інтеграла в правій частині формули (2.10):

$$\int v\,du.$$

Замість одного складного інтегрування здійснюється два більш простих.

Таким чином, інтегрування здійснюється частинами.

Приклад 2.9 Знайти інтеграл $\int x e^x dx$.

Розв'язання. Представимо підінтегральний вираз $x e^x dx$ як добуток двох множників x і $e^x dx$. Нехай $u = x$, $dv = e^x dx$. Продиференцюємо множник $u(x)$ і проінтегруємо множник dv:

$$du = dx; \quad v = \int dv = \int e^x dx = e^x.$$

Зауважимо, що в результаті останнього інтегрування достатньо знайти один множник v, тому вважають, що стала інтегрування $C = 0$.

Таким чином:

$$\underbrace{\int}_{f(x)} xe^x dx = \int \underbrace{x}_{u} \cdot \underbrace{e^x dx}_{dv} = \begin{vmatrix} u = x; \quad du = dx \\ dv = e^x dx; \; v = \int e^x dx = e^x \end{vmatrix} \underset{\text{формула інтегрування частинами (2.10)}}{=}$$

$$= xe^x - \int e^x \, dx = xe^x - e^x + C = e^x(x-1) + C.$$

Звертаємо увагу на те, що під час інтегрування частинами необхідно, щоб інтеграл справа в формулі (2.10) був простішим, ніж інтеграл зліва.

Якщо зробити вибір множників u та dv навпаки, ми отримаємо справа більш складний інтеграл, ніж зліва:

$$\int xe^x dx = \int \underbrace{e^x}_{f(x)} \cdot \underbrace{x}_{u}\, \underbrace{dx}_{dv} = \left| \begin{array}{l} u = e^x; \quad du = e^x dx \\ dv = x\,dx; \; v = \int x dx = \dfrac{x^2}{2} \end{array} \right| = e^x \cdot \frac{x^2}{2} - \int \frac{x^2}{2} \cdot e^x dx .$$

Метод інтегрування частинами має більш обмежену область застосування, ніж метод заміни змінної. Але існують класи інтегралів, які обчислюються саме цим методом. Ці класи та рекомендації щодо розбиття підінтегрального виразу на множники u та dv подано в табл. 1.

Таблиця 2.1

Деякі рекомендації щодо обирання множників *u* та *dv* в методі інтегрування частинами

№ класу	Вид інтеграла	u	dv
I	$\int P(x) \cdot \left\{ \begin{array}{l} e^{ax} \\ \sin ax \\ \cos ax \end{array} \right\} dx$ $P(x)$ – многочлен; a – дійсне число $(a \neq 0)$	$u = P(x)$	$dv = \left\{ \begin{array}{l} e^{ax} \\ \sin ax \\ \cos ax \end{array} \right\} dx$
II	$\int R(x) \left\{ \begin{array}{l} \arcsin ax \\ \arccos ax \\ \mathrm{arctg}\, ax \\ \ln^m x \end{array} \right\} dx$ $R(x)$ – алгебраїчна функція; a – дійсне число $(a \neq 0)$; m – натуральне число	$u = \left\{ \begin{array}{l} \arcsin ax \\ \arccos ax \\ \mathrm{arctg}\, ax \\ \ln^m x \end{array} \right\}$	$dv = R(x) dx$
III	$\int e^{ax} \left\{ \begin{array}{l} \sin bx \\ \cos bx \end{array} \right\} dx$	Можливий довільне обирання множників u та dv. Після двократного застосування формули (2.10) одержується лінійне рівняння інтеграла, який намагалися знайти	
IV	$\int \left\{ \begin{array}{l} \sin(\ln x) \\ \cos(\ln x) \end{array} \right\} dx$	$u = \left\{ \begin{array}{l} \sin(\ln x) \\ \cos(\ln x) \end{array} \right\}$	$dv = dx$

Приклад 2.9 Знайти інтеграли:

1) $\int x\sin x\,dx$; 2) $\int x5^x\,dx$;

3) $\int(2x-1)e^{3x}dx$; 4) $\int(7x-1)\cos 5x\,dx$.

Під час знаходження всіх інтегралів цього прикладу будемо дотримуватися рекомендацій п. I таблиці 1, відповідно до яких за $u(x)$ приймають многочлен, ступінь якого під час диференціювання зменшується.

Розв'язання

1) $$\int x\sin x\,dx = \left|\begin{matrix} u = x, \;\; du = dx \\ dv = \sin x\,dx, \; v = \int \sin x = -\cos x \end{matrix}\right| =$$

формула (2.10)

$$= x(-\cos x) - \int(-\cos x)dx = -x\cos x + \int \cos x\,dx =$$

$$= -x\cos x + \sin x + C;$$

2) $$\int x5^x\,dx = \left|\begin{matrix} u = x, \;\; du = dx \\ dv = 5^x\,dx, \; v = \int 5^x\,dx = \dfrac{5^x}{\ln 5} \end{matrix}\right| = x\frac{5^x}{\ln 5} - \int \frac{5^x}{\ln 5}dx =$$

формула (2.10)

$$= x\frac{5^x}{\ln 5} - \frac{1}{\ln 5}\int 5^x\,dx = x\frac{5^x}{\ln 5} - \frac{5^x}{\ln^2 5} + C = \frac{5^x}{\ln 5}\left(x - \frac{1}{\ln 5}\right) + C;$$

3) $$\int(2x-1)e^{3x}dx = \left|\begin{matrix} u = 2x-1, \;\; du = 2dx \\ dv = e^{3x}dx, \; v = \int e^{3x} = \dfrac{e^{3x}}{3} \end{matrix}\right| = (2x-1)\frac{e^{3x}}{3} - \int \frac{e^{3x}}{3}2dx =$$

формула (2.10)

$$= \frac{(2x-1)e^{3x}}{3} - \frac{2}{9}e^{3x} + C = \frac{(6x-3)e^{3x}}{9} - \frac{2}{9}e^{3x} + C = \frac{6x-5}{9}e^{3x} + C;$$

$$4)\ \int(7x-1)\cos 5x\,dx=\left|\begin{array}{l} u=7x-1,\quad du=7dx \\ dv=\cos 5x\,dx,\ v=\int\cos 5x\,dx=\dfrac{\sin 5x}{5} \end{array}\right|=$$

формула (2.10)

$$=(7x-1)\frac{\sin 5x}{5}-\int\frac{\sin 5x}{5}7\,dx=\frac{7x-1}{5}\sin 5x-\frac{7}{25}(-\cos 5x)+C=$$

$$=\frac{7x-1}{5}\sin 5x+\frac{7}{25}\cos 5x+C.$$

Під час знаходження інтегралів наступного прикладу будемо дотримуватись рекомендацій п. II таблиці. За множник $u(x)$ приймають трансцендентну функцію $\arcsin ax$, $\arccos ax$, $\mathrm{arctg}\, ax$ або $\ln^m x$, яка спрощується під час диференціювання.

Приклад 2.10 Знайти інтеграли

1) $\int\left(x^2-2x+3\right)\ln x\,dx$;

2) $\int\frac{\ln x}{x^3}dx$;

3) $\int\mathrm{arctg}\,x\,dx$;

4) $\int x\cdot\mathrm{arctg}\,x\,dx$.

Розв'язання

$$1)\ \int\left(x^2-2x+3\right)\ln x\,dx=\left|\begin{array}{l} u=\ln x,\ du=\dfrac{dx}{x} \\ dv=\left(x^2-2x+3\right)dx,\ v=\int\left(x^2-2x+3\right)dx= \\ \qquad\qquad\qquad\qquad =\dfrac{x^3}{3}-x^2+3x \end{array}\right|=$$

$$=\left(\frac{x^3}{3}-x^2+3x\right)\cdot\ln x-\int\left(\frac{x^3}{3}-x^2+3x\right)\frac{dx}{x}=\left(\frac{x^3}{3}-x^2+3x\right)\cdot\ln x-$$

$$-\int\left(\frac{x^2}{3}-x+3\right)dx=\left(\frac{x^3}{3}-x^2+3x\right)\cdot\ln x-\frac{x^3}{9}+\frac{x^2}{2}-3x+C;$$

$$2)\ \int \frac{\ln x}{x^3}dx = \left| \begin{array}{l} u = \ln x,\ du = \dfrac{dx}{x} \\ dv = \dfrac{dx}{x^3},\ v = \int \dfrac{dx}{x^3} = \int x^{-3}dx = -\dfrac{1}{2x^2} \end{array} \right| = -\frac{\ln x}{2x^2} - \int \left(-\frac{1}{2x^2} \right) \frac{dx}{x} =$$

$$= -\frac{\ln x}{2x^2} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^3} = -\frac{\ln x}{2x^2} - \frac{1}{4x^2} + C;$$

$$3)\ \int \operatorname{arctg} x\, dx = \left| \begin{array}{l} u = \operatorname{arctg} x,\ du = \dfrac{dx}{1+x^2} \\ dv = dx, \quad v = \int dx = x \end{array} \right| = x \cdot \operatorname{arctg} x - \int x \frac{dx}{1+x^2} =$$

$$= x \cdot \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int \frac{d\left(1+x^2\right)}{1+x^2} = x \cdot \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right) + C;$$

$$4)\ \int x \cdot \operatorname{arctg} x\, dx = \left| \begin{array}{l} u = \operatorname{arctg} x,\ du = \dfrac{dx}{1+x^2} \\ dv = x\,dx,\ v = \int x\,dx = \dfrac{x^2}{2} \end{array} \right| = \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{dx}{1+x^2} =$$

$$= \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2+1-1}{x^2+1}dx = \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right)dx =$$

$$= \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\left(\int dx - \int \frac{dx}{1+x^2}\right) = \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x - \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + C =$$

$$= \frac{1}{2}\left(x^2 \operatorname{arctg} x - x + \operatorname{arctg} x\right) + C.$$

2.3.2 Подвійне застосування формули інтегрування частинами

Іноді для знаходження інтегралів формулу інтегрування частинами (2.10) доводиться застосовувати декілька разів. Розглянемо приклад двократного застосування цієї формули.

Приклад 2.11 Знайти інтеграли:

1) $\int x^2 \cos x dx$; 2) $\int \ln^2 x\, dx$;

3) $\int \sqrt[3]{x} \ln^2 x\, dx$; 4) $\int e^{2x} \sin 3x\, dx$.

Розв'язання

1) $$\int x^2 \cos x\, dx = \left| \begin{matrix} u = x^2,\ du = 2x\,dx \\ dv = \cos x\, dx,\ v = \int \cos x\, dx = \sin x \end{matrix} \right| =$$

Клас І (табл. 1)

$$= x^2 \sin x - \int \sin x \cdot 2x\, dx = x^2 \sin x - 2\int x \cdot \sin x\, dx =$$

Клас І (табл. 1)

$$= \left| \begin{matrix} u = x, \quad du = dx \\ dv = \sin x\, dx,\ v = \int \sin x\, dx = -\cos x \end{matrix} \right| =$$

$$= x^2 \cdot \sin x - 2\left(-x\cos x - \int(-\cos x)\,dx\right) = x^2 \sin x + 2x\cos x - 2\sin x + C;$$

2) $$\int \ln^2 x\, dx = \left| \begin{matrix} u = \ln^2 x, \quad du = 2\ln x \dfrac{dx}{x} \\ dv = dx,\ \ v = \int dx = x \end{matrix} \right| = x\ln^2 x - \int \cancel{x} \cdot 2\ln x \frac{dx}{\cancel{x}} =$$

Клас ІІ (табл. 1)

$$= x\ln^2 x - 2\int \ln x\, dx = \left| \begin{matrix} u = \ln x,\ du = \dfrac{dx}{x} \\ dv = dx,\ v = \int dx = x \end{matrix} \right| = x\ln^2 x - 2\left(x \cdot \ln x - \int x \cdot \frac{dx}{x} \right) =$$

Клас ІІ (табл. 1)

$$= x\ln^2 x - 2x\ln x + 2x + C = x\ln x(\ln x - 2) + 2x + C;$$

3) $$\int \sqrt[3]{x} \ln^2 x\, dx = \left| \begin{matrix} u = \ln^2 x,\ du = 2\ln x \dfrac{dx}{x} \\ dv = \sqrt[3]{x} dx,\ v = \int x^{1/3} dx = \dfrac{3}{4} x^{\frac{4}{3}} \end{matrix} \right| = \frac{3}{4} x^{\frac{4}{3}} \ln^2 x -$$

Клас ІІ (табл. 1)

$$-\int\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}\cdot 2\ln x\frac{dx}{x}=\frac{3}{4}x\sqrt[3]{x}\cdot\ln^2 x-\frac{3}{2}\int x^{\frac{1}{3}}\ln x\,dx=\left|\begin{matrix} u=\ln x, du=\dfrac{dx}{x} \\ dv=x^{1/3}dx, v=\dfrac{3}{4}x^{4/3}\end{matrix}\right|$$

$$=\frac{3}{4}x\sqrt[3]{x}\cdot\ln^2 x-\frac{3}{2}\cdot\left(\frac{3}{4}x^{4/3}\ln x-\int\frac{3}{4}x^{4/3}\frac{dx}{x}\right)=$$

$$=\frac{3}{4}x\sqrt[3]{x}\cdot\ln^2 x-\frac{9}{8}x\sqrt[3]{x}\cdot\ln x+\frac{9}{8}\int x^{\frac{1}{3}}dx=\frac{3}{4}x\sqrt[3]{x}\cdot\ln^2 x-$$

$$-\frac{9}{8}x\sqrt[3]{x}\cdot\ln x+\frac{9}{8}\cdot\frac{3}{4}x\sqrt[3]{x}+C=\frac{3}{4}x\sqrt[3]{x}\left(\ln^2 x-\frac{3}{2}\ln x+\frac{9}{8}\right)+C;$$

4) $$\int e^{2x}\sin 3x\,dx=\left|\begin{matrix} u=e^{2x}, \quad du=2e^{2x}dx \\ dv=\sin 3x\,dx,\ v=\int\sin 3x\,dx=-\dfrac{\cos 3x}{3}\end{matrix}\right|=$$

$$=-e^{2x}\frac{\cos 3x}{3}-\int\left(-\frac{\cos 3x}{3}\right)2e^{2x}dx=-e^{2x}\frac{\cos 3x}{3}+\frac{2}{3}\int e^{2x}\cos 3x\,dx=$$

$$=\left|\begin{matrix} u=e^{2x}, \quad du=2e^{2x}dx \\ dv=\cos 3x\,dx,\ v=\int\cos 3x=\dfrac{\sin 3x}{3}\end{matrix}\right|=$$

обирати множники u та dv тепер необхідно таким же чином, як під час першого інтегрування

$$=-e^{2x}\frac{\cos 3x}{3}+\frac{2}{3}\left(e^{2x}\frac{\sin 3x}{3}-\int\frac{\sin 3x}{3}2e^{2x}dx\right)=$$

$$=-e^{2x}\frac{\cos 3x}{3}+\frac{2}{3}\left(e^{2x}\frac{\sin 3x}{3}-\frac{2}{3}\int e^{2x}\sin 3x\,dx\right)=$$

$$=-e^{2x}\frac{\cos 3x}{3}+\frac{2}{9}e^{2x}\sin 3x-\frac{4}{9}\int e^{2x}\sin 3x\,dx=$$

$$=\frac{2\sin 3x-3\cos 3x}{9}e^{2x}-\frac{4}{9}\int e^{2x}\cdot\sin 3x\,dx.$$

У результаті двократного інтегрування частинами в правій частині рівності одержано шуканий інтеграл $\int e^{2x} \cdot \sin 3x\, dx$. Позначимо його як *I*. Отже, одержано лінійне рівняння шуканого інтеграла *I*:

$$I = \frac{2\sin 3x - 3\cos 3x}{9} e^{2x} - \frac{4}{9} I . \qquad (*)$$

$$I + \frac{4}{9} I = \frac{2\sin 3x - 3\cos 3x}{9} e^{2x} + C . \qquad (**)$$

$$\frac{13}{9} I = \frac{2\sin 3x - 3\cos 3x}{9} e^{2x} + C .$$

$$I = \frac{\cancel{9}}{13} \cdot \frac{2\sin 3x - 3\cos 3x}{\cancel{9}} e^{2x} + C .$$

$$I = \frac{2\sin 3x - 3\cos 3x}{13} e^{2x} + C .$$

Зауваження. Поява сталого множника *C* у рівності (**) можна пояснити тим, що кожний з інтегралів *I* в лівій і правій частинах рівності (*) є виразом

$$F(x) + C ,$$

де $F(x)$ – яка-небудь первісна для $e^{2x} \cdot \cos 3x$, а C – довільна стала, що може обиратися для цих інтегралів по-різному, тому інтеграл *I* в лівій і правій частинах рівності (*) можуть відрізнятися на сталу.

2.3.3 Застосування методу інтегрування частинами в комбінації з методом заміни змінної

Приклад 2.12. Знайти інтеграли:

1) $\int x^3 e^{x^2} dx$; 2) $\int \sin 2x \ln(\sin x) dx$;

3) $\int \arcsin^2 x\, dx$; 4) $\int x^2 \arccos 3x\, dx$.

Розв'язання

1) $$\int x^3 e^{x^2} dx = \int x^2 \cdot x \cdot e^{x^2} dx = \left| \begin{matrix} t = x^2 \\ dt = 2x\, dx \\ x\, dx = \frac{1}{2} dt \end{matrix} \right| = \frac{1}{2} \int t \cdot e^t dt =$$

$$= \left| \begin{matrix} u = t, \quad du = dt \\ dv = e^t dt,\ v = \int e^t dt = e^t \end{matrix} \right| = \frac{1}{2}\left(te^t - \int e^t dt \right) = \frac{1}{2}\left(te^t - e^t + C \right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(x^2 e^{x^2} - e^{x^2} + C \right) = \frac{e^{x^2}}{2}\left(x^2 - 1 \right) + C;$$

2) $$\int \sin 2x \ln(\sin x) dx = \int 2 \sin x \cos x \ln(\sin x) dx = \left| \begin{matrix} t = \sin x \\ dt = \cos x\, dx \end{matrix} \right| =$$

$$= 2\int t \ln t\, dt = \left| \begin{matrix} u = \ln t, \quad du = \frac{dt}{t} \\ dv = t\, dt,\ v = \int t\, dt = \frac{t^2}{2} \end{matrix} \right| =$$

$$= 2\left(\frac{t^2}{2} \ln t - \int \frac{t^{\cancel{2}}}{2} \cdot \frac{dt}{\cancel{t}} \right) = 2\left(\frac{t^2}{2} \ln t - \frac{1}{2} \int t\, dt \right) = t^2 \ln t - \frac{t^2}{2} + C =$$

$$= \frac{t^2}{2}(2 \ln t - 1) + C = \frac{\sin^2 x}{2}\left(2 \ln(\sin x) - 1 \right) + C;$$

3) $$\int \arcsin^2 x\,dx = \left| \begin{array}{l} u = \arcsin^2 x,\ du = 2\arcsin x \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ dv = dx, \quad v = \int dx = x \end{array} \right| =$$

$$= x\cdot \arcsin^2 x - \int x\cdot 2\arcsin x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= \left| \begin{array}{l} u = \arcsin x,\ \ du = \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ dv = \dfrac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}},\ \ v = \int \dfrac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\dfrac{1}{2}\int \dfrac{d\left(1-x^2\right)}{\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{1-x^2} \end{array} \right| =$$

$$= x\cdot \arcsin^2 x - 2\left(-\arcsin x\cdot\sqrt{1-x^2} - \int \left(-\sqrt{1-x^2}\cdot \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \right) \right) =$$

$$= x\cdot \arcsin^2 x + 2\sqrt{1-x^2}\cdot \arcsin x - 2x + C;$$

4) $$\int x^2 \arccos 3x\,dx = \left| \begin{array}{l} u = \arccos 3x,\ \ du = -\dfrac{3dx}{\sqrt{1-9x^2}} \\ dv = x^2 dx,\ v = \int x^2 dx = \dfrac{x^3}{3} \end{array} \right| =$$

$$= \frac{x^3}{3}\arccos 3x - \int \frac{x^3}{3}\left(-\frac{3dx}{\sqrt{1-9x^2}} \right) = \frac{x^3}{3}\arccos 3x + \int \frac{x^3 dx}{\sqrt{1-9x^2}}.$$

Знайдемо $\int \dfrac{x^3 dx}{\sqrt{1-9x^2}}$ методом заміни змінної:

$$\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{1-9x^2}} = \int \frac{x^2\cdot x\,dx}{\sqrt{1-9x^2}} = \left| \begin{array}{l} t = 1-9x^2,\ \ dt = -18x\,dx \\ x\,dx = -\dfrac{dt}{18},\ \ x^2 = \dfrac{1-t}{9} \end{array} \right| =$$

$$=\int\frac{\frac{1-t}{9}\left(-\frac{dt}{18}\right)}{\sqrt{t}}=\frac{1}{162}\int\frac{t-1}{\sqrt{t}}dt=\frac{1}{162}\int\left(\sqrt{t}-\frac{1}{\sqrt{t}}\right)dt=$$

$$\frac{1}{162}\left(\frac{2}{3}t^{3/2}-2\sqrt{t}\right)+C=\frac{1}{81}\left(\frac{1}{3}t\sqrt{t}-\sqrt{t}\right)+C=$$

$$=\frac{1}{81}\left(\frac{1}{3}\left(1-9x^2\right)\sqrt{1-9x^2}-\sqrt{1-9x^2}\right)+C.$$

Отже:

$$\int x^2\arccos 3x\,dx=\frac{x^3}{3}\arccos 3x+\frac{1}{243}\left(1-9x^2\right)\sqrt{1-9x^2}-\frac{1}{81}\sqrt{1-9x^2}+C.$$

3 ІНТЕГРУВАННЯ ДЕЯКИХ ВИРАЗІВ, ЩО МІСТЯТЬ КВАДРАТНИЙ ТРИЧЛЕН

На практиці часто зустрічаються інтеграли, що містять квадратний тричлен у знаменнику підінтегрального виразу, а саме:

$$\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}; \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}};$$

$$\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}dx; \qquad \int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx.$$

Наведемо алгоритми знаходження кожного з цих інтегралів і розглянемо відповідні приклади.

3.1 Знаходження інтеграла

$$\boldsymbol{I_1 = \int \frac{dx}{ax^2+bx+c}} \tag{3.1}$$

Цей інтеграл знаходиться шляхом виділення повного квадрата з квадратного тричлена ax^2+bx+c, що міститься в знаменнику підінтегрального виразу. Одержуємо табличний інтеграл

$$\int \frac{dt}{t^2-k^2} \quad \text{або} \quad \int \frac{dt}{t^2+k^2}.$$

Перетворюємо квадратний тричлен у знаменнику так, щоб він став сумою або різницею квадратів:

$$ax^2+bx+c = a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right) = a\left(x^2+2\frac{b}{2a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}-\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right) =$$

$$= a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\left(\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right)\right).$$

Позначимо $\dfrac{c}{a}-\dfrac{b^2}{4a^2}=\begin{cases} k^2, \text{ якщо } \dfrac{c}{a}-\dfrac{b^2}{4a^2}>0 \\ -k^2, \text{ якщо } \dfrac{c}{a}-\dfrac{b^2}{4a^2}<0. \end{cases}$

Тоді $ax^2+bx+c=a\left(\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2 \pm k^2\right)$.

$$I_1=\int\frac{dx}{a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 \pm k^2\right]}=\frac{1}{a}\int\frac{dx}{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 \pm k^2}=$$

$$=\left|\begin{matrix} t=x+\dfrac{b}{2a} \\ dt=dx \end{matrix}\right|=\frac{1}{a}\int\frac{dt}{t^2 \pm k^2}.$$

Одержано табличні інтеграли:

$$\frac{1}{a}\int\frac{dt}{t^2-k^2}=\frac{1}{2ak}\ln\left|\frac{t-k}{t+k}\right|+C$$

або

$$\frac{1}{a}\int\frac{dt}{t^2+k^2}=\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{k}\operatorname{arctg}\frac{t}{k}+C.$$

Приклад 3.1 Знайти інтеграли:

1) $\displaystyle\int\frac{dx}{x^2+8x+7}$; 2) $\displaystyle\int\frac{dx}{x^2-8x+25}$;

3) $\displaystyle\int\frac{dx}{2x^2+4x-7}$; 4) $\displaystyle\int\frac{dx}{3x^2-6x+5}$.

Розв'язання

1) $$\int\frac{dx}{x^2+8x+7}=\int\frac{dx}{x^2+2\cdot 4x+16+7-16}=\int\frac{dx}{\left(x+4\right)^2-9}=$$

$$=\left|\begin{matrix}\displaystyle\int\frac{dx}{x^2-9}=\frac{1}{2\cdot 3}\ln\left|\frac{x-3}{x+3}\right|+C\\ c.11,\quad \textit{власт.}\ 6.1\ (b=-4)\end{matrix}\right|=\frac{1}{6}\ln\left|\frac{x+4-3}{x+4+3}\right|+C=\frac{1}{6}\ln\left|\frac{x+1}{x+7}\right|+C;$$

2) $$\int\frac{dx}{x^2-8x+25}=\int\frac{dx}{x^2-2\cdot 4x+16+25-16}=\int\frac{dx}{\left(x-4\right)^2+9}=$$

$$=\left|\begin{matrix}\displaystyle\int\frac{dx}{x^2+9}=\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{3}+C\\ c.11,\ \textit{власт.}\ 6.1(b=-4)\end{matrix}\right|=\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x-4}{3}+C;$$

3) $$\int\frac{dx}{2x^2+4x-7}=\int\frac{dx}{2\left(x^2+2x-\frac{7}{2}\right)}=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+2x+1-\frac{7}{2}-1}=$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\left(x+1\right)^2-\frac{9}{2}}=\left|\begin{matrix}t=x+1\\ dt=dx\end{matrix}\right|=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^2-\frac{9}{2}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2\cdot\frac{3}{\sqrt{2}}}\ln\left|\frac{t-\frac{3}{\sqrt{2}}}{t+\frac{3}{\sqrt{2}}}\right|+C=$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{12}\ln\left|\frac{t\sqrt{2}-3}{t\sqrt{2}+3}\right|+C=\frac{\sqrt{2}}{12}\ln\left|\frac{\left(x+1\right)\sqrt{2}-3}{\left(x+1\right)\sqrt{2}+3}\right|+C;$$

4) $$\int\frac{dx}{3x^2-6x+5}=\frac{1}{3}\int\frac{dx}{x^2-2x+\frac{5}{3}}=\frac{1}{3}\int\frac{dx}{x^2-2x+1+\frac{5}{3}-1}=$$

$$=\frac{1}{3}\int\frac{dx}{\left(x-1\right)^2+\frac{2}{3}}=\left|\begin{matrix}t=x-1\\ dt=dx\end{matrix}\right|=\frac{1}{3}\int\frac{dt}{t^2+\frac{2}{3}}=\frac{1}{3}\sqrt{\frac{3}{2}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{3}{2}}t+C=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{6}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{3}{2}}\left(x-1\right)+C.$$

3.2 Знаходження інтеграла

$$\boldsymbol{I_2 = \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}} \qquad (3.2)$$

Аналогічно п. 3.1 перетворюємо підкореневий вираз у знаменнику підінтегральної функції так, щоб він став сумою або різницею квадратів:

$$ax^2 + bx + c = a\left(t^2 \pm k^2\right).$$

Тоді:

а) якщо $a > 0$, оскільки $ax^2 + bx + c > 0$, то $t^2 \pm k^2 > 0$.

Отже:

$$I_2 = \int \frac{dt}{\sqrt{a\left(t^2 \pm k^2\right)}} = \frac{1}{\sqrt{a}} = \int \frac{dt}{\sqrt{t^2 \pm k^2}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \ln\left|t + \sqrt{t^2 \pm k^2}\right| + C;$$

б) якщо $a < 0$, оскільки $ax^2 + bx + c > 0$, то $ax^2 + bx + c = a\left(t^2 - k^2\right)$, де $t^2 - k^2 < 0$.

Отже:

$$I_2 = \int \frac{dt}{\sqrt{a\left(t^2 - k^2\right)}} = \int \frac{dt}{\sqrt{-a\left(k^2 - t^2\right)}} = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \int \frac{dt}{\sqrt{k^2 - t^2}} = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \arcsin\frac{t}{k} + C.$$

Приклад 3.2 Знайти інтеграли:

1) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 5x + 2}}$; 2) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{2 + 3x - 2x^2}}$.

Розв'язання

$$1)\ \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 5x + 2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2 \cdot \frac{5}{2}x + \frac{25}{4} + 2 - \frac{25}{4}}} = \int \frac{dx}{\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{17}{4}} =$$

$$= \left| \begin{matrix} t = x + \dfrac{5}{2} \\ dt = dx \end{matrix} \right| = \int \frac{dt}{\sqrt{t^2 - \dfrac{17}{4}}} = \ln\left| t + \sqrt{t^2 - \frac{17}{4}} \right| + C =$$

$$= \ln\left| x + \frac{5}{2} + \sqrt{x^2 + 5x + 2} \right| + C;$$

$$2)\ \int \frac{dx}{\sqrt{2 + 3x - 2x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{-2\left(x^2 - \dfrac{3}{2}x - 1 \right)}} = .$$

$$= \int \frac{dx}{\sqrt{-2\left(x^2 - 2\cdot\dfrac{3}{4}x + \dfrac{9}{16} - 1 - \dfrac{9}{16} \right)}} = \int \frac{dx}{\sqrt{-2\left(\left(x - \dfrac{3}{4} \right)^2 - \dfrac{25}{16} \right)}} =$$

$$= \left| \begin{matrix} t = x - \dfrac{3}{4} \\ dt = dx \end{matrix} \right| = \int \frac{dt}{\sqrt{-2\left(t^2 - \dfrac{25}{16} \right)}} = \int \frac{dt}{\sqrt{2\left(\dfrac{25}{16} - t^2 \right)}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{dt}{\sqrt{\dfrac{25}{16} - t^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin\frac{4t}{5} + C = \frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin\frac{4\left(x - \dfrac{3}{4} \right)}{5} + C =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin\frac{4x - 3}{5} + C.$$

3.3 Знаходження інтеграла

$$\boldsymbol{I_3 = \int \frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c} dx} \qquad (3.3)$$

Цей інтеграл знаходимо шляхом виділення в чисельнику $(Ax + B)$ підінтегрального виразу похідної $(2ax + b)$ знаменника

$\left(ax^2+bx+c\right)$. Після зазначеного перетворення інтеграл I_3 стає сумою двох інтегралів, один з яких є інтегралом I_1.

Перетворимо підінтегральний вираз в інтегралі I_3:

$$I_3=\int\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}dx=\int\frac{\frac{A}{2a}\left(2ax+b\right)+\left(B-\frac{Ab}{2a}\right)}{ax^2+bx+c}dx=$$

$$=\frac{A}{2a}\int\frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}dx+\left(B-\frac{Ab}{2a}\right)\int\frac{dx}{ax^2+bx+c}=$$

$$=\frac{A}{2a}\int\frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}dx+\left(B-\frac{Ab}{2a}\right)I_1.$$

Знайдемо

$$\frac{A}{2a}\int\frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}dx=\left|\begin{matrix}t=ax^2+bx+c\\ dt=\left(2ax+b\right)dx\end{matrix}\right|=$$

$$\frac{A}{2a}\int\frac{dt}{t}=\frac{A}{2a}\ln\left|t\right|+C=\frac{A}{2a}\ln\left|ax^2+bx+c\right|+C.$$

Отже:

$$I_3=\frac{A}{2a}\ln\left|ax^2+bx+c\right|+\left(B-\frac{Ab}{2a}\right)I_1.$$

Приклад 3.3 Знайти інтеграли:

1) $\int\frac{x+3}{x^2-2x-5}dx$;

2) $\int\frac{x\,dx}{9+8x-x^2}$;

3) $\int\frac{6x-1}{x^2-4x+13}dx$;

4) $\int\frac{12x+11}{9x^2-6x+2}dx$.

Розв'язання

1) $$\int\frac{x+3}{x^2-2x-5}dx=\int\frac{\frac{1}{2}(2x-2)+\left(3+\frac{1}{2}\cdot 2\right)}{x^2-2x-5}dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{2x-2}{x^2-2x-5}dx+4\int\frac{dx}{x^2-2x-5}.$$

Знайдемо перший доданок суми:

$$\frac{1}{2}\int\frac{2x-2}{x^2-2x-5}dx=\left|\begin{matrix}t=x^2-2x-5\\ dt=(2x-2)dx\end{matrix}\right|=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t}=$$

$$=\frac{1}{2}\ln|t|+C=\frac{1}{2}\ln\left|x^2-2x-5\right|+C.$$

Знайдемо другий доданок суми:

$$4\int\frac{dx}{x^2-2x-5}=4\int\frac{dx}{x^2-2x+1-5-1}=4\int\frac{dx}{(x-1)^2-6}=\left|\begin{matrix}t=x-1\\ dt=dx\end{matrix}\right|=$$

$$=4\int\frac{dt}{t^2-6}=\frac{4}{2\sqrt{6}}\ln\left|\frac{t-\sqrt{6}}{t+\sqrt{6}}\right|+C=\frac{2}{\sqrt{6}}\ln\left|\frac{x-1-\sqrt{6}}{x-1+\sqrt{6}}\right|+C.$$

Отже:

$$\int\frac{x+3}{x^2-2x-5}dx=\frac{1}{2}\ln\left|x^2-2x-5\right|+\frac{2}{\sqrt{6}}\ln\left|\frac{x-1-\sqrt{6}}{x-1+\sqrt{6}}\right|+C;$$

2) $$\int\frac{x\,dx}{9+8x-x^2}=\int\frac{-\frac{1}{2}(-2x+8)+4}{9+8x-x^2}=$$

$$=-\frac{1}{2}\int\frac{-2x+8}{9+8x-x^2}dx+4\int\frac{dx}{9+8x-x^2}.$$

Знайдемо перший доданок суми:

$$-\frac{1}{2}\int\frac{-2x+8}{9+8x-x^2}dx=\begin{vmatrix}t=9+8x-x^2\\ dt=(-2x+8)dx\end{vmatrix}=-\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t}=$$

$$=-\frac{1}{2}\ln|t|+C=-\frac{1}{2}\ln\left|9+8x-x^2\right|+C.$$

Знайдемо другий доданок суми:

$$4\int\frac{dx}{9+8x-x^2}=-4\int\frac{dx}{x^2-8x-9}=-4\int\frac{dx}{x^2-8x+16-9-16}=$$

$$=-4\int\frac{dx}{(x-4)^2-25}=\begin{vmatrix}t=x-4\\ dt=dx\end{vmatrix}=-4\int\frac{dt}{t^2-25}=$$

$$=-4\frac{1}{2\cdot 5}\ln\left|\frac{t-5}{t+5}\right|+C=-\frac{2}{5}\ln\left|\frac{x-4-5}{x-4+5}\right|+C=-\frac{2}{5}\ln\left|\frac{x-9}{x+1}\right|+C.$$

Отже:

$$\int\frac{x\,dx}{9+8x-x^2}=-\frac{1}{2}\ln\left|9+8x-x^2\right|-\frac{2}{5}\ln\left|\frac{x-9}{x+1}\right|+C;$$

3) $$\int\frac{6x-1}{x^2-4x+13}dx=\int\frac{\frac{6}{2}(2x-4)+(-1+12)}{x^2-4x+13}dx=$$

$$=3\int\frac{2x-4}{x^2-4x+13}+11\int\frac{dx}{x^2-4x+13}=$$

$$=3\int\frac{d\left(x^2-4x+13\right)}{x^2-4x+13}+11\int\frac{dx}{x^2-4x+4+13-4}=3\ln\left|x^2-4x+13\right|+$$

$$+11\int\frac{dx}{(x-2)^2+9}=3\ln\left|x^2-4x+13\right|+11\int\frac{d(x-2)}{(x-2)^2+9}=$$

$$= 3\ln\left|x^2 - 4x + 13\right| + 11 \cdot \frac{1}{3}\text{arctg}\frac{x-2}{3} + C =$$

$$= 3\ln\left|x^2 - 4x + 13\right| + \frac{11}{3}\text{arctg}\frac{x-2}{3} + C;$$

$$4)\ \int \frac{12x+11}{9x^2-6x+2}dx = \int \frac{\frac{12}{18}(18x-6)+(11+4)}{9x^2-6x+2}dx =$$

$$= \frac{2}{3}\int \frac{18x-6}{9x^2-6x+2}dx + 15\int \frac{dx}{9x^2-6x+2} = \frac{2}{3}\int \frac{d\left(9x^2-6x+2\right)}{9x^2-6x+2} +$$

$$+15\int \frac{dx}{9\left(x^2 - \frac{6}{9}x + \frac{2}{9}\right)} = \frac{2}{3}\ln\left|9x^2-6x+2\right| + \frac{5}{3}\int \frac{dx}{x^2 - 2\cdot\frac{1}{3}x + \frac{1}{9} + \frac{2}{9} - \frac{1}{9}} =$$

$$= \frac{2}{3}\ln\left|9x^2-6x+2\right| + \frac{5}{3}\int \frac{dx}{\left(x-\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{1}{9}} = \frac{2}{3}\ln\left|9x^2-6x+2\right| +$$

$$= \frac{2}{3}\ln\left|9x^2-6x+2\right| + 5\text{arctg}\left(3x-1\right) + C.$$

3.4 Знаходження інтеграла

$$\boldsymbol{I_4 = \int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx} \tag{3.4}$$

Як і в п 3.3 для знаходження інтеграла застосовують прийом виділення в чисельнику підінтегрального виразу похідної знаменника. Після зазначеного перетворення інтеграл I_4 стає сумою двох інтегралів, один з яких є інтегралом I_2.

Перетворюємо підінтегральний вираз в інтегралі I_4:

$$I_4 = \int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx = \int \frac{\frac{A}{2a}\left(2ax+b\right) + \left(B - \frac{Ab}{2a}\right)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx =$$

$$=\frac{A}{2a}\int\frac{2ax+b}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx+\left(B-\frac{Ab}{2a}\right)\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}=$$

$$=\frac{A}{2a}\int\frac{2ax+b}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx+\left(B-\frac{Ab}{2a}\right)I_2.$$

Знайдемо

$$\frac{A}{2a}\int\frac{2ax+b}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx=\left|\begin{array}{l}t=ax^2+bx+c\\ dt=(2ax+b)dx\end{array}\right|=\frac{A}{2a}\int\frac{dt}{\sqrt{t}}=$$

$$=\frac{A}{2a}\cdot2\sqrt{t}+C=\frac{A}{a}\sqrt{ax^2+bx+c}+C.$$

Отже: $I_4=\frac{A}{a}\sqrt{ax^2+bx+c}+\left(B-\frac{Ab}{2a}\right)I_2.$

Приклад 3.4 Знайти інтеграли:

1) $\int\frac{5x+3}{\sqrt{x^2+4x+10}}dx;$ 2) $\int\frac{8x-9}{\sqrt{5+2x-x^2}}dx.$

Розв'язання

1) $$\int\frac{5x+3}{\sqrt{x^2+4x+10}}dx=\int\frac{\frac{5}{2}(2x+4)+(3-10)}{\sqrt{x^2+4x+10}}dx=$$

$$=\frac{5}{2}\int\frac{2x+4}{\sqrt{x^2+4x+10}}dx-7\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+10}}.$$

Знайдемо

$$\frac{5}{2}\int\frac{2x+4}{\sqrt{x^2+4x+10}}dx=\left|\begin{array}{l}t=x^2+4x+10\\ dt=(2x+4)dx\end{array}\right|=\frac{5}{2}\int\frac{dt}{\sqrt{t}}=$$

$$=\frac{5}{2}\cdot2\sqrt{t}+C=5\sqrt{t}+C=5\sqrt{x^2+4x+10}+C.$$

Знайдемо

$$7\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+10}}=7\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+2\cdot 2x+4+10-4}}=7\int\frac{dx}{\sqrt{(x+2)^2+6}}=$$

$$=\left|\begin{matrix}t=x+2\\ dt=dx\end{matrix}\right|=7\int\frac{dt}{\sqrt{t^2+6}}=7\ln\left|t+\sqrt{t^2+6}\right|+C=$$

$$=7\ln\left|x+2+\sqrt{x^2+4x+10}\right|+C.$$

Отже:

$$\int\frac{5x+3}{\sqrt{x^2+4x+10}}dx=5\sqrt{x^2+4x+10}+C-7\ln\left|x+2+\sqrt{x^2+4x+10}\right|+C;$$

2) $$\int\frac{8x-9}{\sqrt{5+2x-x^2}}dx=\int\frac{\frac{8}{-2}(-2x+2)+(-9+8)}{\sqrt{5+2x-x^2}}dx=$$

$$=-4\int\frac{-2x+2}{\sqrt{5+2x-x^2}}dx-\int\frac{dx}{\sqrt{5+2x-x^2}}=$$

$$=-4\int\frac{d\left(5+2x-x^2\right)}{\sqrt{5+2x-x^2}}-\int\frac{dx}{\sqrt{-\left(x^2-2x+1-5-1\right)}}=$$

$$=-8\sqrt{5+2x-x^2}-\int\frac{dx}{\sqrt{-\left((x-1)^2-6\right)}}=$$

$$=-8\sqrt{5+2x-x^2}-\int\frac{d(x-1)}{\sqrt{6-(x-1)^2}}=$$

$$=-8\sqrt{5+2x-x^2}-\arcsin\frac{x-1}{\sqrt{6}}+C.$$

4 ІНТЕГРУВАННЯ РАЦІОНАЛЬНИХ ФУНКЦІЙ

Раціональні функції – важливий клас функцій, інтеграли від яких завжди виражаються через елементарні функції.

4.1 Деякі відомості про раціональні функції

4.1.1 Ціла раціональна функція

Визначення. Багаточленом (поліномом) або цілою раціональною функцією) називається функція

$$P_n\left(x\right)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a_{n-1}x+a_n, \quad (4.1)$$

де n – ступінь багаточлена (натуральне число);

$a_0, a_1, ..., a_n$ – коефіцієнти багаточлена (дійсні або комплексні числа).

Визначення. Коренем багаточлена (4.1) називається таке числове значення $x=c$ (дійсне або комплексне), за яким багаточлен перетворюється в нуль, тобто $P_n\left(c\right)=0$.

Теорема 4.1 *(Безу).* Остача від ділення багаточлена $P_n\left(x\right)$ на різницю $x-c$ дорівнює $P_n\left(c\right)$.

Пояснимо зміст теореми Безу. Під час ділення багаточлена n-го ступеня на двочлен $x-c$ першого ступеня маємо деякий багаточлен $P_{n-1}\left(x\right)\left(n-1\right)$-го ступеня і остачу R – певне число:

$$P_n\left(x\right)=P_{n-1}\left(x\right)\left(x-c\right)+R. \quad (4.2)$$

Відповідно до теореми, $R=P_n\left(c\right)$.

Зокрема, якщо $x=c$ – корінь багаточлена $P_n\left(x\right)$, то

$$P_n\left(x\right)=P_{n-1}\left(x\right)\left(x-c\right). \quad (4.3)$$

Таким чином, з теореми Безу випливає такий наслідок:

якщо $x=c$ – корінь багаточлена $P_n\left(x\right)$, то багаточлен $P_n\left(x\right)$ можна записати як добуток

$$P_n(x) = P_{n-1}(x) \cdot (x - c). \qquad (4.4)$$

Виникає питання: чи будь-який багаточленчлен має корені? Позитивну відповідь на це питання дає основна теорема алгебри.

Теорема 4.2 (основна теорема алгебри). Будь-який багаточлен ступеня $n > 0$ має хоча б один корінь (дійсний або комплексний).

З основної теореми алгебри випливає, що багаточлен (4.1) завжди можна записати у вигляді (4.4). Неважко помітити (наприклад з процесу ділення багаточлена $P_n(x)$ на двочлен $x - a$ «у стовпчик»), що старший коефіцієнт багаточлена $P_{n-1}(x)$, тобто коефіцієнт за умови x^{n-1}, дорівнює a_0.

Приклад 4.1 Поділити багаточлен $3x^2 - 2x - 1$ на двочлен $x + 1$ «у стовпчик».

Розв'язання

$$\begin{array}{rr|l}
- & 3x^2 - 2x - 1 & \; x + 1 \\ \cline{3-3}
 & 3x^2 + 3x \phantom{{}-1} & \; 3x - 5 \\ \cline{1-2}
- & -5x - 1 & \\
 & -5x - 5 & \\ \cline{1-2}
 & 4 &
\end{array}$$

Якщо ступінь багаточлена $P_{n-1}(x)$ не дорівнює нулю, тобто $P_{n-1}(x) \neq a_0$, то до цього багаточлена знов можна застосувати теорему 4.2 і висновок з теореми Безу. Продовжуючи цей процес, маємо висновок, що це твердження є правильним.

Теорема 4.3 Будь-який багаточлен n-го ступеня $P_n(x)$ можна записати як

$$P_n(x) = a_0 (x - x_1)(x - x_2)...(x - x_n), \qquad (4.5)$$

де x_1 ,x_2, ... , x_n – корені багаточлена;

a_0 – старший коефіцієнт багаточлена (коефіцієнт за умови x^n).

Вираз (4.5) називається *розкладанням багаточлена на лінійні множники* $\left((x-x_1),(x-x_2),...(x-x_n)\right)$.

Якщо деякі з лінійних множників у виразі (4.5) однакові, то їх можна об'єднати. Тоді розклад (4.5) матиме вигляд

$$P_n(x)=a_0(x-x_1)^{k_1}(x-x_2)^{k_2}...(x-x_m)^{k_m}, \quad (4.6)$$

де m – число *різних* коренів;

$k_1,\ k_2,\ ...,k_m$ – цілі числа, що називаються кратностями коренів:

$$k_1+k_2+\ ...+k_m=n.$$

Якщо коренем кратності є одиниця, то такий корінь називається *простим*.

Будемо надалі розглядати тільки багаточлени з дійсними коефіцієнтами.

Серед коренів (4.6) можуть бути і комплексні числа. Отже, це твердження є правильним.

Теорема 4.4 Нехай α + i β – комплексний корінь багаточлена (4.1) з дійсними коефіцієнтами. Тоді комплексно-спряжене число $\alpha - i\,\beta$ також є коренем цього багаточлена.

Перемножимо лінійні множники, що відповідають комплексно-спряженим кореням α + iβ і α – iβ у виразі (4.6):

$$\left(x-(\alpha+i\beta)\right)\left(x-(\alpha-i\beta)\right)=\left((x-\alpha)-i\beta\right)\left((x-\alpha)+i\beta\right)=$$

$$=(x-\alpha)^2-(i\beta)^2=x^2-2x\alpha+\alpha^2+\beta^2=x^2+px+q,$$

де $p=-2\alpha,\ q=\alpha^2+\beta^2$ – дійсні числа.

Одержано квадратний тричлен x^2+px+q з дійсними коефіцієнтами і від'ємним дискримінантом:

$$D=p^2-4q=4a^2-4\left(a^2+b^2\right)=-4b^2<0.$$

Об'єднуючи у формулі (4.6) множники із комплексно-спряженими коренями, маємо

$$P_n(x) = a_0(x - x_1)^{k_1} \dots (x - x_r)^{k_r} \cdot (x^2 + p_1x + q_1)^{l_1} \cdot \dots \cdot (x^2 + p_sx + q_s)^{l_s}.$$

де $k_i\,(i = 1, 2, \dots r)$ – кратності дійсних коренів;

$l_j\,(j = 1, 2, \dots s)$ – кратності комплексно-спряжених коренів;

$k_1 + k_2 + \dots + k_r + 2(l_1 + l_2 + \dots + l_s) = n$;

a_0; $x_1, x_2, \dots, x_r$; $p_1, q_1, p_2, q_2, \dots p_s, q_s$ – дійсні числа.

Висновок. Будь-який багаточлен з дійсними коефіцієнтами можна розкласти (тільки єдиним способом) на лінійні та квадратичні (з від'ємним дискримінантом) множники з дійсними коефіцієнтами.

Приклад 4.2 Розкласти на множники з дійсними коефіцієнтами багаточлени:

1) $3x^2 - 5x + 2$; 2) $x^3 - 5x^2 + 3x + 1$; 3) $x^3 + 3x^2 + 5x + 3$.

Розв'язання

1) Розглянемо квадратний тричлен $3x^2 - 5x + 2$. Його дискримінант $D = 25 - 4 \cdot 3 \cdot 2 = 25 - 24 = 1 > 0$. Розкладаючи на множники квадратний тричлен $ax^2 + bx + c$ за умови, якщо $D \geq 0$, користуються формулою

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2),$$

де x_1, x_2 – корені рівняння $ax^2 + bx + c = 0$, що знаходимо за формулою

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Знайдемо корені рівняння $3x^2 - 5x + 2 = 0$:

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{6} = \frac{5 \pm 1}{6}, \quad x_1 = \frac{2}{3}; \quad x_2 = 1.$$

Таким чином, $3x^2 - 5x + 2 = 3(x-1)\left(x - \dfrac{2}{3}\right) = (x-1)(3x-2)$.

2) Розглянемо багаточлен $x^3 - 5x^2 + 3x + 1$.
Для розкладання на множники застосуємо спосіб групування:

$$x^3 - 5x^2 + 3x + 1 = x^3 - x^2 - 3x^2 + 3x - x^2 + 1 =$$

$$= \left(x^3 - x^2\right) - 3\left(x^2 - x\right) - \left(x^2 - 1\right) = x^2(x-1) - 3x(x-1) - (x-1)(x+1) =$$

$$= (x-1)\left(x^2 - 3x - x - 1\right) = (x-1)\left(x^2 - 4x - 1\right).$$

Перевіримо, чи можна розкласти на лінійні множники з дійсними коефіцієнтами квадратний тричлен $x^2 - 4x - 1$. Обчислимо його дискримінант $D = (-4)^2 + 4 = 20$. Дискримінант є додатним. Обчислимо дійсні корені квадратного тричлена:

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{20}}{2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{5}}{2} = 2 \pm \sqrt{5}.$$

Таким чином, $x^2 - 4x - 1 = \left(x - 2 - \sqrt{5}\right)\left(x - 2 + \sqrt{5}\right)$.

Отже, $x^3 - 5x^2 + 3x + 1 = (x-1)\left(x - 2 - \sqrt{5}\right)\left(x - 2 + \sqrt{5}\right)$.

3) Легко перевірити підставленням до багаточлена $x^3 + 5x^2 + 3x + 1$, що $x = 1$ є коренем багаточлена. За висновком з теореми Безу (4.4), цей багаточлен можна поділити без остачі на двочлен $(x-1)$. Виконаємо це ділення «у стовпчик».

$$\begin{array}{r|l}
-\;x^3 + 3x^2 + 5x + 3 & x + 1 \\ \cline{2-2}
x^3 + x^2 \qquad\qquad & x^2 + 2x + 3 \\ \cline{1-1}
-\;2x^2 + 5x + 3 & \\
2x^2 + 2x \qquad & \\ \cline{1-1}
-\;3x + 3 & \\
3x + 3 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}$$

Отже:

$$x^3+3x^2+5x+3=(x+1)\left(x^2+2x+3\right).$$

Оскільки дискримінантом квадратного тричлена є x^2+2x+3 $D=2^2-4\cdot 3=-8<0$, то здійснити розкладання квадратного тричлена на лінійні множники з дійсними коефіцієнтами неможливо.

Таким чином: $x^3+3x^2+5x+3=(x+1)\left(x^2+2x+3\right)$.

Це твердження є правильним.

Твердження 4.1

Якщо багаточлен $P_n(x)$ тотожно дорівнює нулю (за умови довільних значень x), то всі його коефіцієнти дорівнюють нулю.

Твердження 4.2

Якщо багаточлени тотожно дорівнюють один одному, то вони мають рівні ступені та є рівними між собою коефіцієнти, якщо ступені степенях x однакові

4.1.2 Дробово-раціональна функція

Визначення. Дробово-раціональною функцією (раціональним дробом) називається відношення двох багаточленів:

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}=\frac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+...+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+...+b_n}. \tag{4.8}$$

Зауважимо, що клас раціональних функцій є сукупністю цілих раціональних і дробово-раціональних функцій.

Визначення. Дріб $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ називається правильним, якщо ступінь чисельника $P_m(x)$ менше, ніж ступінь знаменника $Q_n(x)$ $(m<n)$. У протилежному випадку $(m\geq n)$ дріб $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ називається неправильним.

Приклад 4.3

$\dfrac{x+1}{x^3-2x+6}$ – правильний дріб,

$\dfrac{x^2+x+9}{x-2}$ – неправильний дріб.

Якщо раціональний дріб неправильний, то, виконавши ділення, його можна записати як суму багаточлена $W_k(x)$(цілої раціональної функції) і як правильний раціональний дріб $\dfrac{R_p(x)}{Q_n(x)}(p<n)$:

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}=W_k(x)+\frac{R_p(x)}{Q_n(x)}. \tag{4.9}$$

Приклад 4.4 Виділити цілу частину неправильного раціонального дробу:

$$\frac{x^5+x^3-x^2+1}{x^3-2x+1}.$$

Розв'язання. Виконаємо ділення чисельника на знаменник «у стовпчик»:

$$\begin{array}{r|l} x^5+x^3-x^2+1 & x^3-2x+1 \\ \underline{-\;x^5-2x^3+x^2} & \overline{x^2+3} \\ 3x^3-2x^2+1 & \\ \underline{-\;3x^3-6x+3} & \\ -2x^2+6x-2 & \end{array}$$

Отже, $\dfrac{x^5+x^3-x^2+1}{x^3-2x+1}=x^2+3+\dfrac{-2x^2+6x-2}{x^3-2x+1}$.

Визначення. Елементарними раціональними дробами називаються правильні раціональні дроби таких чотирьох видів:

$$\text{I) } \frac{A}{x-a}; \qquad \text{II) } \frac{A}{(x-a)^k}, \quad k=2, 3, 4, \dots;$$

$$\text{III) } \frac{Bx+C}{x^2+px+q}; \qquad \text{IV) } \frac{Bx+C}{\left(x^2+px+q\right)^k}, \quad k=2,\ 3,\ 4,\ \dots, \tag{4.10}$$

де $A,\ a,\ B,\ C,\ p, q$ – дійсні числа; $p^2-4q<0$.

4.2 Розкладання правильного раціонального дробу на елементарні дроби

Будь-який правильний раціональний дріб може бути представлений як сума скінченної кількості елементарних дробів. Це пов'язано з процесом розкладання знаменника дробу на множники.

4.2.1 Теоретичне обґрунтування

Теорема 4.5. Нехай дано правильний раціональний дріб $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}(n<m)$, в якому багаточлен $Q_m(x)$ має такий вигляд:

$$Q_m(x)=a_0(x-x_1)^{k_1}\cdot(x-x_2)^{k_2}\cdot\ldots\cdot(x-x_r)^{k_r}\times$$
$$\times\left(x^2+p_1x+q_1\right)^{l_1}\cdot\left(x^2+p_2x+q_2\right)^{l_2}\cdot\ldots\cdot\left(x^2+p_sx+q_s\right)^{l_s}, \tag{4.11}$$

де $k_1,\dots k_r$ – кратності дійсних коренів;

$l_1,\dots l_s$ – кратності комплексно сполучених коренів.

Тоді цей дріб можна записати як

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\left(\frac{A_1}{x-x_1}+\frac{A_2}{(x-x_1)^2}+\ldots+\frac{A_{k_1}}{(x-x_1)^{k_1}}\right)+\ldots+$$
$$+\left(\frac{G_1}{x-x_r}+\frac{G_2}{(x-x_r)^2}+\ldots+\frac{G_{k_r}}{(x-x_r)^{k_r}}\right)+$$
$$+\left(\frac{K_1x+L_1}{x^2+p_1x+q_1}+\ldots+\frac{K_{l_1}x+L_{l_1}}{\left(x^2+p_1x+q_1\right)^{l_1}}\right)+\ldots+ \qquad (4.12)$$
$$+\left(\frac{V_1x+W_1}{x^2+p_sx+q_s}+\ldots+\frac{V_{l_s}x+W_{l_s}}{\left(x^2+p_sx+q_s\right)^{l_s}}\right),$$

де $A_1, A_2, \ldots A_{k_1}, \ldots, G_1, G_2, \ldots G_{k_r}$, $K_1, L_1, \ldots K_{l_1}, L_{l_1}$, ..., $V_1, W_1, \ldots V_{l_s}, W_{l_s}$ – деякі дійсні числа.

Вираз (4.12) називається розкладанням правильного раціонального дробу на елементарні дроби.

Пояснимо зміст теореми 4.5:

1) кожному множнику виду $(x-x_1)^{k_1}$ в розкладанні (4.11) знаменника $Q_m(x)$ цього дробу відповідає сума k_1 елементарних дробів виду

$$\frac{A_1}{x-x_1}+\frac{A_2}{(x-x_1)^2}+\ldots+\frac{A_{k_1}}{(x-x_1)^{k_1}}$$

в розкладанні (4.12) цього дробу.

Аналогічні твердження є правильними для множників

$$(x-x_2)^{k_2},\ \ldots\ ,(x-x_r)^{k_r},$$

2) кожному множнику виду $\left(x^2+p_1x+q_1\right)^{l_1}$ в розкладанні (4.11) знаменника $Q_m(x)$ цього дробу відповідає сума l_1 елементарних дробів виду

$$\frac{K_1x+L_1}{x^2+p_1x+q_1}+\ldots+\frac{K_{l_1}x+L_{l_1}}{\left(x^2+p_sx+q_s\right)^{l_1}}$$

в розкладанні (4.12) цього дробу.

Аналогічні твердження є правильними для множників

$$\left(x^2+p_2x+q_2\right)^{l_2},\ \ldots\ ,\left(x^2+p_{l_s}x+q_{l_s}\right)^{l_s}.$$

З теореми 4.5 випливає алгоритм розкладання правильного раціонального дробу на елементарні дроби.

4.2.2 Алгоритм розкладання правильного раціонального дробу на елементарні дроби

1) розкласти знаменник $Q_m(x)$ на лінійні та квадратичні множники з дійсними коефіцієнтами (квадратичні множники не мають дійсних коренів);

2) записати розкладання цього правильного раціонального дробу $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ на суму елементарних дробів з невідомими коефіцієнтами (за 4.12);

3) одержану рівність помножити на знаменник $Q_m(x)$;

4) знайти невідомі коефіцієнти за допомогою одного з методів, що наведені в п. 4.2.3.

4.2.3 Методи знаходження невідомих коефіцієнтів у розкладанні правильного раціонального дробу

Наведемо два найбільш розповсюджених методи знаходження невідомих коефіцієнтів в чисельниках елементарних дробів розкладання (4.12):

1) метод частинних значень аргументу

помножимо обидві частини рівності (4.12) на знаменник дробу $Q_m(x)$, внаслідок чого дістанемо два тотожно рівні багаточлени:

зліва знаходиться відомий нам багаточлен $P_n(x)$, справа – багаточлен з невідомими коефіцієнтами $A_1, A_2, \ldots, V_{l_s}, W_{l_s}$. Будемо надавати змінній x конкретні числові значення стільки разів, скільки маємо невідомих коефіцієнтів. Одержимо систему лінійних алгебраїчних рівнянь, з якої визначимо шукані коефіцієнти.

Зауважимо, що система рівнянь значно спрощується, якщо змінній x надавати значення дійсних коренів знаменника $Q_m(x)$.

Приклад 4.5 Розкласти на елементарні дроби правильний раціональний дріб:

$$\frac{2x-1}{x(x-1)(x-2)}.$$

Розв'язання. Згідно з результатом (4.12) теореми 4.5 запишемо розкладання цього правильного раціонального дробу на елементарні дроби з невідомими коефіцієнтами:

$$\frac{2x-1}{x(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x-2}. \qquad (4.13)$$

Після множення обох частин рівності (4.13) на знаменник цього дробу $x(x-1)(x-2)$ одержимо тотожно рівні багаточлени:

$$2x-1 = A(x-1)(x-2) + Bx(x-2) + Cx(x-1).$$

Надамо x по черзі значення дійсних коренів знаменника дробу: $x=0,\quad x=1,\quad x=2$:

якщо $x=0$: $-1 = A(-1)(-2)$, тоді $-1 = 2A$, $A = -\dfrac{1}{2}$;

якщо $x=1$: $1 = B\cdot 1(1-2)$, тоді $1 = -B$, $B = -1$;

якщо $x=2$: $3 = C\cdot 2(2-1)$, тоді $C = \dfrac{3}{2}$.

Таким чином:

$$\frac{2x-1}{x(x-1)(x-2)}=-\frac{1}{2x}-\frac{1}{x-1}+\frac{3}{2(x-2)}.$$

Приклад 4.6 Розкласти на елементарні дроби правильний раціональний дріб:

$$\frac{x^2+6}{x(x-3)^2}.$$

Розв'язання. Запишемо розкладання цього правильного раціонального дробу на елементарні дроби з невідомими коефіцієнтами (4.12):

$$\frac{x^2+6}{x(x-3)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B_1}{x-3}+\frac{B_2}{(x-3)^2}. \qquad (4.14)$$

Після помноження обох частин рівності (4.14) на знаменник цього дробу $x(x-3)^2$ одержимо тотожно рівні багаточлени:

$$x^2+6=A(x-3)^2+B_1x(x-3)+B_2x.$$

Надамо x по черзі значення дійсних коренів знаменника дробу: $(x=0 \text{ і } x=3)$:

якщо $x=0$: $6=A(0-3)^2$, тоді $6=9A$, $A=\frac{2}{3}$;

якщо $x=3$: $3^2+6=B_2\cdot 3$, тоді $15=3B_2$, $B_2=5$.

Визначаємо коефіцієнт B_1. Надамо x довільне числове значення, наприклад $x=1$:

якщо $x=1$: $1^2+6=A(1-3)^2+B_1\cdot 1(1-3)+B_2\cdot 1$, тоді
$7=4A-2B_1+B_2$.

Підставляючи знайдені значення коефіцієнтів A і B_2, одержимо

$$7 = 4\cdot\frac{2}{3} - 2B_1 + 5,\;\; 2B_1 = \frac{8}{3} - 2,\;\;\; 2B_1 = \frac{2}{3},\;\;\; B_1 = \frac{1}{3}.$$

Отже:

$$\frac{x^2+6}{x(x-3)^2} = \frac{2}{3x} + \frac{1}{3(x-3)} + \frac{5}{(x-3)^2}.$$

Зауваження. Застосування методу частинних значень аргументу є особливо зручним, коли знаменник цього дробу має тільки дійсні прості корені (приклад 4.5);

2) метод невизначених коефіцієнтів

нехай після спрощення обох частин розкладу (4.12) маємо два тотожно рівних багато члени (зліва – з відомими коефіцієнтами, справа – з невідомими).

З тотожної рівності багаточленів випливає, що вони мають рівні ступені та рівні між собою коефіцієнти за умови однакових степунів x (Твердження 4.2). Прирівнюючи коефіцієнти багаточленів за умови однакових ступенів x, одержимо систему лінійних рівнянь відносно невідомих коефіцієнтів.

Приклад 4.7 Розкласти на елементарні дроби правильний раціональний дріб $\dfrac{2x-1}{x(x-1)(x-2)}$.

Розв'язання. У прикладі 4.5. було одержано розклад цього дробу методом частинних значень аргументу. Застосуємо метод невизначених коефіцієнтів. Після одержання тотожно рівних багаточленів

$$2x-1 = A(x-1)(x-2) + Bx(x-2) + Cx(x-1)$$

за результатом алгебраїчних перетворень маємо

$$2x-1 = (A+B+C)x^2 + (-3A-2B-C)x + 2A.$$

Прирівняємо коефіцієнти за умови однакових ступенів x у лівій і правій частинах рівності:

$$\begin{array}{c|l} x^2 & 0 = A + B + C \\ x & 2 = -3A - 2B - C \\ x^0 & -1 = 2A \end{array}$$

Розв'яжемо одержані системи лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} A+B+C=0 \\ -3A-2B-C=2; \\ 2A=-1 \end{cases} \qquad \begin{cases} -\frac{1}{2}+B+C=0 \\ \frac{3}{2}-2B-C=2\,; \\ A=-\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} B+C=\frac{1}{2} \\ -2B-C=\frac{1}{2}; \\ A=-\frac{1}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} B+C=\frac{1}{2} \\ -B=1 \qquad ; \\ A=-\frac{1}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} C=\frac{3}{2} \\ B=-1 \\ A=-\frac{1}{2} \end{cases}$$

Отже:

$$\frac{2x-1}{x(x-1)(x-2)}=-\frac{1}{2x}-\frac{1}{x-1}+\frac{3}{2(x-2)}.$$

Звертаємо увагу, що застосування методу часткових значень аргументу до розв'язання цього прикладу є набагато зручнішим.

На практиці часто користуються так званим комбінованим методом, згідно з яким деякі з невідомих коефіцієнтів визначають методом часткових значень аргументу, а інші – методом невизначених коефіцієнтів.

Приклад 4.8. Розкласти на елементарні дроби правильний раціональний дріб $\frac{x^2+6}{x(x-3)^2}$.

Розв'язання. Це розкладання вже було одержано в прикладі 4.6 методом часткових значень аргументу.

Застосуємо для розв'язання цього прикладу комбінований метод. З (4.14):

$$\frac{x^2+6}{x\left(x-3\right)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B_1}{x-3}+\frac{B_2}{\left(x-3\right)^2},$$

таким чином:

$$x^2+6=A\left(x-3\right)^2+B_1x\left(x-3\right)+B_2x. \qquad (4.15)$$

У прикладі 4.6 у результаті надання x значень дійсних коренів знаменника ($x=0$ і $x=3$) було одержано:

$$A=\frac{2}{3}; \qquad B_2=5.$$

Для знаходження коефіцієнта B_1 прирівняємо в (4.15) коефіцієнти за умови x^2 в лівій і правій частинах $x^2\left|1=B_1\right.$.

Отже, маємо результат прикладу (4.6):

$$\frac{x^2+6}{x\left(x-3\right)^2}=\frac{2}{3x}+\frac{1}{3\left(x-3\right)}+\frac{5}{\left(x-3\right)^2}.$$

4.3 Інтегрування цілих раціональних функцій

Процес інтегрування багаточлена $P_n\left(x\right)$ (4.1) нескладний. Він полягає в інтегруванні алгебраїчної суми ступеневих функцій (табличний інтеграл 2, п 1.2).

4.4 Інтегрування раціональних дробів

4.4.1. Інтегрування елементарних раціональних дробів

Розглянемо інтегрування елементарних раціональних дробів кожного з чотирьох видів (4.10):

I) $\int \frac{A}{x-a}dx = A\ln|x-a| + C$ (табличний інтеграл 3, п. 1.2);

II). $\int \frac{A\,dx}{(x-a)^k} = \frac{A}{(1-k)(x-a)^{k-1}} + C$ (табличний інтеграл 2, п. 1.2) $(k = 2,3,4,...)$;

III) $\int \frac{(Bx+C)dx}{x^2+px+q} = \frac{B}{2}\ln|x^2+px+q| + \frac{C-\frac{Bp}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\operatorname{arctg}\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}} + C$.

Цей результат одержуємо за методикою знаходження інтеграла I_3 (п. 3.3);

IV) з методами знаходження $\int \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^k}$ $(k = 2,3,4,...)$ пропонуємо ознайомитися в літературі ([2]).

4.4.2 Інтегрування правильних раціональних дробів.

Правило. Для того, щоб проінтегрувати правильний раціональний дріб $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$,потрібно:

1) розкласти правильний раціональний дріб на елементарні дроби (за алгоритмом п. 4.2.2);

2) знайти $\int \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}dx$ як суму інтегралів від знайдених дробів.

Розглянемо три випадки:

1) знаменник дробу $Q_m(x)$ має тільки дійсні прості корені.

Приклад 4.9 Знайти $\int \frac{2x^2+2x-6}{x(x-2)(x+1)}dx$.

Розв'язання. Запишемо розкладання підінтегрального правильного раціонального дробу на суму елементарних дробів з невідомими коефіцієнтами (4.12):

$$\frac{2x^2+2x-6}{x(x-2)(x-1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x+1}.$$

$$2x^2+2x-6=A(x-2)(x+1)+Bx(x+1)+Cx(x-2).$$

Знайдемо коефіцієнти A, B, C методом часткових значень аргументу:

якщо $x=0$: $-6=-2A$, тоді $A=3$;

якщо $x=2$: $6=6B$, тоді $B=1$;

якщо $x=-1$: $-6=3C$, тоді $C=-2$.

Отже:

$$\frac{2x^2+2x-6}{x(x-2)(x+1)}=\frac{3}{x}+\frac{1}{x-2}-\frac{2}{x+1}.$$

$$\int \frac{2x^2+2x-6}{x(x-2)(x+1)}dx=\int\left(\frac{3}{x}+\frac{1}{x-2}-\frac{2}{x+1}\right)dx=$$

$$=3\ln|x|+\ln|x-2|-2\ln|x+1|+C;$$

2) знаменник дробу $Q_m(x)$ має тільки дійсні корені, серед яких є кратні.

Приклад 4.10 Знайти інтеграли:

1) $\int \frac{x^2+1}{x^3-x^2}dx$;   2) $\int \frac{3x^2+1}{(x-1)(x^2-1)}$.

Розв'язання

1) розкладемо знаменник підінтегрального дробу на лінійні множники. Потім запишемо процес розкладання підінтегрального правильного раціонального дробу $\frac{x^2+1}{x^3-x^2}$ на суму елементарних дробів з невідомим коефіцієнтами (4.12):

$$\frac{x^2+1}{x^2(x-1)} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \frac{B}{x-1};$$

$$x^2+1 = A_1x(x-1) + A_2(x-1) + Bx^2; \qquad (4.16)$$

Для знаходження коефіцієнтів A_1, A_2 і B застосуємо комбінований метод (п. 4.2.3):

якщо $x=0$: $1 = A_2(0-1) \Rightarrow A_2 = -1$;

якщо $x=1$: $2 = B\cdot 1^2 \Rightarrow B = 2$.

Для знаходження A_1 прирівнюємо коефіцієнти при x^2 в лівій і правій частинах рівності (4.16):

$x^2\big|\ 1 = A_1 + B \Rightarrow A_1 = 1 - B = 1 - 2 = -1$.

Маємо

$$\frac{x^2+1}{x^2(x-1)} = -\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x-1}.$$

Отже:

$$\int \frac{x^2+1}{x^2(x-1)}dx = \int\left(-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x-1}\right)dx = -\ln|x|+\frac{1}{x}+2\ln|x-1|+C;$$

2) запишемо розкладання знаменника $(x-1)(x^2-1)$ на лінійні множники:

$$(x-1)(x^2-1)=(x-1)(x-1)(x+1)=(x-1)^2(x+1).$$

Корені знаменника: $x=1$ (двократний), $x=-1$ (простий).
За розкладанням (4.12)

$$\frac{3x^2+1}{(x-1)^2(x+1)}=\frac{A_1}{x-1}+\frac{A_2}{(x-1)^2}+\frac{B}{x+1}.$$

$$3x^2+1=A_1(x-1)(x+1)+A_2(x+1)+B(x-1)^2.$$

Скористуємось комбінованим методом знаходження A_1, A_2, B:

якщо $x=1$: $\quad 3\cdot 1^2+1=A_2(1+1)\Rightarrow 2A_2=4,\ A_2=2$;

якщо $x=-1$: $\quad 3(-1)^2+1=B(-1-1)^2\Rightarrow 4B=4,\ B=1.$

Знайдемо A_1:

$x^2\big|\ 3=A_1+B\Rightarrow 3=A_1+1;\quad A_1=2.$

Отже:

$$\frac{3x^2+1}{(x-1)^2(x+1)}=\frac{2}{x-1}+\frac{2}{(x-1)^2}+\frac{1}{x+1}.$$

$$\int\frac{3x^2+1}{(x-1)^2(x+1)}dx=\int\left(\frac{2}{x-1}+\frac{2}{(x-1)^2}+\frac{1}{x+1}\right)dx=2\ln|x-1|-\frac{2}{x-1}+$$

$$+\ln|x+1|+C;$$

3) знаменник дробу $Q_m(x)$ має комплексно-спряжені корені, серед яких немає кратних.

Приклад 4.11 Знайти інтеграли:

1) $\int \frac{x^2+2}{x^3-1}dx$; 2) $\int \frac{7x^2+18x-14}{(x+6)\left(2x^2+2x+5\right)}dx$.

Розв'язання

1) розкладемо на множники з дійсними коефіцієнтами знаменник x^3-1 підінтегрального дробу $\frac{x^2+2}{x^3-1}$:

$$x^3-1=(x-1)\left(x^2+x+1\right).$$

Дискримінант квадратного тричлена x^2+x+1
є від'ємним$(D=1-4=-3)$,
тому відповідно до (4.12):

$$\frac{x^2+2}{(x-1)\left(x^2+x+1\right)}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+x+1}.$$

$$x^2+2=A\left(x^2+x+1\right)+(Bx+C)(x-1).$$

Скористуємось комбінованим методом знаходження A, B, C:

якщо $x=1$: $1^2+2=A(1+1+1)$; $3A=3$, $A=1$:

$$\begin{array}{c|l} x^2 & 1=A+B, \\ x & 0=A-B+C \end{array} \qquad \begin{cases} 1=1+B \\ 0=1-B+C \end{cases}; \quad \begin{cases} B=0 \\ 0=1-0+C \end{cases}; \quad \begin{cases} B=0 \\ C=-1 \end{cases}.$$

Маємо

$$\frac{x^2+2}{(x-1)\left(x^2+x+1\right)}=\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x^2+x+1}.$$

Отже:

$$\int \frac{x^2+2}{(x-1)\left(x^2+x+1\right)}dx = \int\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x^2+x+1}\right)dx =$$

$$= \int \frac{dx}{x-1} - \int \frac{dx}{x^2+2\cdot\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}+1-\frac{1}{4}} = \ln|x-1| - \int \frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} =$$

$$= \ln|x-1| - \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{3}} + C =$$

$$= \ln|x-1| - \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C;$$

2) розглянемо $\int \frac{7x^2+18x-14}{(x+6)\left(2x^2+2x+5\right)}dx$.

Квадратний тричлен $2x^2+2x+5$ в знаменнику підінтегрального дробу має від’ємний дискримінант $(D=4-40=-36)$. Тому відповідно до (4.12) розкладання підінтегрального дробу має такий вигляд:

$$\frac{7x^2+18x-14}{(x+6)\left(2x^2+2x+5\right)} = \frac{A}{x+6} + \frac{Bx+C}{2x^2+2x+5}.$$

$$7x^2+18x-14 = A\left(2x^2+2x+5\right) + (Bx+C)(x+6);$$

Якщо $x=-6$: $\quad 7\cdot 36+18\cdot 6-14 = A\left(2\cdot 36-2\cdot 6+5\right)$,

$130 = 65A \;\Rightarrow\; A = 2$.

$$\begin{array}{c|l} x^2 & 7 = 2A+B \\ x^0 & -14 = 5A+6C \end{array}; \qquad \begin{cases} 7 = 4+B \\ -14 = 10+6C \end{cases}; \qquad \begin{cases} B = 3 \\ C = -4 \end{cases}.$$

Таким чином:

$$\frac{7x^2+18x-14}{(x+6)\left(2x^2+2x+5\right)}=\frac{2}{x+6}+\frac{3x-4}{2x^2+2x+5}.$$

$$\int\frac{7x^2+18x-14}{(x+6)\left(2x^2+2x+5\right)}dx=2\int\frac{dx}{x+6}+\int\frac{3x-4}{2x^2+2x+5}dx=$$

$$=2\ln|x+6|+\int\frac{\frac{3}{4}(4x+2)-\frac{11}{2}}{2x^2+2x+5}dx=2\ln|x+6|+$$

$$+\frac{3}{4}\int\frac{d\left(2x^2+2x+5\right)}{2x^2+2x+5}-\frac{11}{2}\int\frac{dx}{2\left(x^2+2\cdot\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}+\frac{5}{2}-\frac{1}{4}\right)}=$$

$$=2\ln|x+6|+\frac{3}{4}\ln\left(2x^2+2x+5\right)-\frac{11}{4}\int\frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2}=$$

$$=2\ln|x+6|+\frac{3}{4}\ln\left(2x^2+2x+5\right)-\frac{11}{6}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{3}+C.$$

4.4.3 Інтегрування неправильних раціональних дробів

Правило. Для того, щоб проінтегрувати неправильний раціональний дріб $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, потрібно:

1) виділити цілу частину з неправильного раціонального дробу (п. 4.1.2);

2) знайти $\int\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}dx$ як суму інтегралів від цілої раціональної функції (п. 4.3) і правильного раціонального дробу (п 4.4.2).

Приклад 4.12 Знайти інтеграл:

$$\int \frac{5x^4 - x^3 + 4x^2 + 8}{x^3 - 8} dx .$$

Розв'язання

Підінтегральна функція – неправильний раціональний дріб (ступінь чисельника вищий за ступінь знаменника). Виділимо цілу частину:

$$\begin{array}{r|l} -\,5x^4 - x^3 + 4x^2 + 8 & x^3 - 8 \\ \cline{2-2} 5x^4 - 40x \qquad\qquad & 5x - 1 \\ \cline{1-1} -\,-x^3 + 4x^2 + 40x + 8 & \\ -x^3 + 8 \qquad\qquad & \\ \cline{1-1} 4x^2 + 40x \qquad & \end{array}$$

Отже:

$$\int \frac{5x^4 - x^3 + 4x^2 + 8}{x^3 - 8} dx = \int (5x - 1) dx + \int \frac{4x^2 + 40x}{x^3 - 8} dx =$$

$$= \frac{5}{2} x^2 - x + \int \frac{4x^2 + 40x}{x^3 - 8} dx .$$

Перейдемо до інтегрування правильного раціонального дробу:

$$\frac{4x^2 + 40x}{x^3 - 8} .$$

Розкладемо знаменник дробу на множники:

$$x^3 - 8 = (x - 2)\left(x^2 + 2x + 4\right).$$

Квадратичний множник $x^2 + 2x + 4$ має від'ємний дискримінант. Відповідно до (4.12):

$$\frac{4x^2 + 40x}{(x - 2)\left(x^2 + 2x + 4\right)} = \frac{A}{x - 2} + \frac{Bx + C}{x^2 + 2x + 4} .$$

$$4x^2+40x=A\left(x^2+2x+4\right)+\left(Bx+C\right)\left(x-2\right).$$

Якщо $x=2$: $\quad 96=A\left(4+4+4\right) \quad \Rightarrow \quad A=8.$

$$\begin{array}{c|l} x^2 & 4=A+B \\ x^0 & 0=4A-2C \end{array}; \qquad \begin{cases} 4=8+B \\ 0=32-2C \end{cases}; \qquad \begin{cases} B=-4 \\ C=16 \end{cases}.$$

Таким чином:

$$\frac{4x^2+40x}{\left(x-2\right)\left(x^2+2x+4\right)}=\frac{8}{x-2}+\frac{-4x+16}{x^2+2x+4}.$$

$$\int\frac{4x^2+40x}{\left(x-2\right)\left(x^2+2x+4\right)}dx=8\int\frac{dx}{x-2}+\int\frac{-4x+16}{x^2+2x+4}dx=$$

$$=8\ln\left|x-2\right|+\int\frac{-\frac{4}{2}\left(2x+2\right)+16+4}{x^2+2x+4}dx=$$

$$=8\ln\left|x-2\right|-2\int\frac{d\left(x^2+2x+4\right)}{x^2+2x+4}dx+20\int\frac{dx}{x^2+2x+4}=$$

$$=8\ln\left|x-2\right|-2\ln\left(x^2+2x+4\right)+20\int\frac{dx}{\left(x+1\right)^2+3}=$$

$$=8\ln\left|x-2\right|-2\ln\left(x^2+2x+4\right)+\frac{20}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{3}}+C.$$

Кінцевий результат:

$$\int\frac{5x^4-x^3+4x^2+8}{x^3-8}dx=\frac{5}{2}x^2-x+$$

$$+8\ln\left|x-2\right|-2\ln\left(x^2+2x+4\right)+\frac{20}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{3}}+C.$$

5 ІНТЕГРУВАННЯ ДЕЯКИХ ТРАНСЦЕНДЕНТНИХ ФУНКЦІЙ

Інтеграли від трансцендентних функцій не завжди виражаються в елементарних функціях. Розглянемо деякі типи інтегралів, які за допомогою певних підставлянь можна звести до інтегралів від раціональних функцій (п. 4) або до табличних інтегралів (п. 1).

5.1 Раціональна функція двох змінних

Визначення. Раціональною функцією двох змінних $R(u,v)$ називається функція, що залежить від двох змінних u,v і деяких сталих, над якими здійснюється тільки скінченна кількість чотирьох арифметичних дій: додавання, віднімання, множення і ділення.

Приклад 5.1

$R(u,v)=\dfrac{3u^2v+u^5v^4}{u^3+4v^2}$ є раціональною функцією від u і v.

Якщо змінні u і v є функціями незалежної змінної x:

$$u=\varphi(x);\quad v=\psi(x),$$

то функція $R(\varphi(x),\psi(x))$ є раціональною функцією від $\varphi(x)$ і $\psi(x)$.

Приклад 5.2

Нехай $R(u,v)=\dfrac{u+v}{u^2-5v}$.

1) Якщо $u=x$, $v=\sqrt{x^2+1}$, то

$$f(x)=\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{x^2-5\sqrt{x^2+1}}=R\left(x,\sqrt{x^2+1}\right);$$

2) якщо $u=\sin x$, $v=\cos x$, то

$$f(x)=\frac{\sin x+\cos x}{\sin^2 x-5\cos x}=R(\sin x,\cos x).$$

5.2 Інтегрування тригонометричних функцій

Розглянемо інтеграл

$$\int R(\sin x, \cos x)\,dx. \qquad (5.1)$$

Підінтегральну функцію, що раціонально залежить від будь-яких тригонометричних функцій, завжди можна вважати $R(\sin x, \cos x)$, оскільки всі тригонометричні функції раціонально виражаються через $\sin x$ і $\cos x$:

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}, \quad \sec x = \frac{1}{\cos x}, \quad \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}. \qquad (5.2)$$

I Універсальне тригонометричне підставляння

Інтеграли виду (5.1) завжди зводяться до інтегралів від раціональних функцій (раціоналізуються) за допомогою універсального тригонометричного підставляння:

$$t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}, \quad -\pi < x < \pi. \qquad (5.3)$$

За тригонометричними формулами

$$\sin x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}; \quad \cos x = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}. \qquad (5.4)$$

З (5.3) випливає, що

$x = 2\operatorname{arctg} t$,

$$\text{тоді } dx = \frac{2dt}{1+t^2}, \qquad (5.5)$$

отже:

$$\int R(\sin x, \cos x)\,dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}; \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\cdot\frac{2dt}{1+t^2} = \int R_1(t)\,dt,$$

де $R_1(t)$ – раціональна функція від t.

За допомогою універсального тригонометричного підставляння можна знайти інтеграли виду

$$\int \frac{dx}{a\cos x + b\sin x + c} \qquad \left(a^2 + b^2 \neq 0\right).$$

Приклад 5.3 Знайти інтеграли:

1) $\int \frac{dx}{2+\sin x}$; 2) $\int \frac{dx}{3+5\cos x}$; 3) $\int \frac{5+6\sin x}{\sin x(4+3\cos x)}dx$.

Розв'язання

1)

$$\int \frac{dx}{2+\sin x} = \left| \begin{array}{l} t = \operatorname{tg}\frac{x}{2} \\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \\ dx = \frac{2dt}{1+t^2} \end{array} \right| = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{2+\frac{2t}{1+t^2}} = \int \frac{2dt}{\left(1+t^2\right)\cdot\frac{2\left(t^2+t+1\right)}{1+t^2}} = \int \frac{dt}{t^2+t+1} =$$

$$= \int \frac{dt}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} = \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{t+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2tg\frac{x}{2}+1}{\sqrt{3}} + C;$$

$$2)\ \int \frac{dx}{3+5\cos x} = \left| \begin{array}{l} t = \operatorname{tg}\frac{x}{2} \\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ dx = \frac{2dt}{1+t^2} \end{array} \right| = \int \frac{2dt}{\left(1+t^2\right)\left(3+5\cdot\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)} =$$

$$= \int \frac{2dt}{8-2t^2} = \int \frac{dt}{4-t^2} = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{t+2}{t-2}\right| + C = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+2}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-2}\right| + C;$$

3)

$$\int \frac{5+6\sin x}{\sin x\left(4+3\cos x\right)}dx = \left| \begin{array}{l} t = \mathrm{tg}\dfrac{x}{2} \\ dx = \dfrac{2dt}{1+t^2} \\ \sin x = \dfrac{2t}{1+t^2} \\ \cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2} \\ x = 2arctgt \end{array} \right| = 2\int \frac{5+6\cdot\dfrac{2t}{1+t^2}}{\dfrac{2t}{1+t^2}\left(4+3\cdot\dfrac{1-t^2}{1+t^2}\right)}\frac{dt}{1+t^2} =$$

$$= \int \frac{5+5t^2+12t}{t\left(4+4t^2+3-3t^2\right)}dt = \int \frac{5t^2+12t+5}{t\left(t^2+7\right)}dt.$$

Розкладання підінтегральної функції на елементарні дроби має такий вигляд (4.12):

$$\frac{5t^2+12t+5}{t\left(t^2+7\right)} = \frac{A}{t} + \frac{Bt+C}{t^2+7},$$

отже:

$$5t^2+12t+5 = A\left(t^2+7\right)+\left(Bt+C\right)t.$$

$$5t^2+12t+5 = \left(A+B\right)t^2+Ct+7A.$$

Невідомі коефіцієнти A, B, C знайдемо за комбінованим методом (п. 4.2.3):

$$\begin{array}{r|c} t=0 & A=\dfrac{5}{7} \\ t^2 & A+B=5 \\ t & C=12 \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} A=\dfrac{5}{7} \\ B=\dfrac{30}{7}, \\ C=12 \end{cases}$$

таким чином:

$$\int \frac{5t^2+12t+5}{t\left(t^2+7\right)}dt=\int\left(\frac{5}{7t}+\frac{\frac{30}{7}t+12}{t^2+7}\right)dt=\frac{5}{7}\ln|t|+\frac{15}{7}\int\frac{2t+12\cdot\frac{7}{15}}{t^2+7}dt=$$

$$=\frac{5}{7}\ln|t|+\frac{15}{7}\int\frac{2t}{t^2+7}dt+12\int\frac{dt}{t^2+7}=\left|\begin{array}{l} c.23:\int\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}dx=\ln\left|\varphi(x)\right|+C \\ \text{тому}\int\frac{2t}{t^2+7}dt=\ln(t^2+7)+C \end{array}\right|=$$

$$=\frac{5}{7}\ln|t|+\frac{15}{7}\ln\left(t^2+7\right)+\frac{12}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{7}}+C.$$

Повертаючись до змінної x, маємо

$$\int\frac{5+6\sin x}{\sin x\left(4+3\cos x\right)}dx=\frac{5}{7}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+\frac{15}{7}\ln\left(\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}+7\right)+$$
$$+\frac{12}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{7}}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)+C.$$

Звертаємо увагу, що підставляння $t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ називається *універсальним*, оскільки воно завжди раціоналізує інтеграл (5.1), але воно часто призводить до надто громіздких обчислень. Тому необхідно знати також інші прийоми інтегрування, застосування яких до інтегралів певного виду є ефективним.

II Інтеграли виду

$$\int \boldsymbol{R}(\sin x)\cos x\,dx, \quad \int \boldsymbol{R}(\cos x)\sin x\,dx, \quad \int \boldsymbol{R}(\mathrm{tg}\,x)\,dx \quad (5.6)$$

Для знаходження інтегралів (5.6) рекомендуємо використовувати такі замінення:

$\int R(\sin x)\cos x\,dx$: заміна $t=\sin x$;

$\int R(\cos x)\sin x\,dx$: заміна $t=\cos x$;

$\int R(\mathrm{tg}x)dx$: заміна $t=\mathrm{tg}\ x$.

Приклад 5.4 Знайти інтеграли:

1) $\displaystyle\int\frac{\cos x\ dx}{(1-\sin x)^2}$; 2) $\displaystyle\int\left(1-\cos^2 x\right)^2\sin x\ dx$; 3) $\displaystyle\int\frac{\mathrm{tg}\,x\,dx}{1-\mathrm{ctg}^2 x}$.

Розв'язання

1) $$\int\frac{\cos x\ dx}{(1-\sin x)^2}=\begin{vmatrix} t=\sin x \\ dt=\cos x\,dx\end{vmatrix}=\int\frac{dt}{(1-t)^2}=\int\frac{dt}{(t-1)^2}=$$

$$=-\frac{1}{t-1}+C=-\frac{1}{\sin x-1}+C;$$

2) $$\int\left(1-\cos^2 x\right)^2\sin x\ dx=\begin{vmatrix} t=\cos x \\ dt=-\sin x\ dx\end{vmatrix}=-\int\left(1-t^2\right)^2 dt=$$

$$=-\int\left(1-2t^2+t^4\right)dt=-t+\frac{2t^3}{3}-\frac{t^5}{5}+C=$$

$$=-\frac{1}{5}\cos^5 x+\frac{2}{3}\cos^3 x-\cos x+C;$$

$$3)\ \int \frac{\operatorname{tg} x\,dx}{1-\operatorname{ctg}^2 x} = \int \frac{\operatorname{tg} x}{1-\dfrac{1}{\operatorname{tg}^2 x}}dx = \int \frac{tg^3 x\,dx}{\operatorname{tg}^2 x - 1} = \int \left| \begin{array}{l} R(\operatorname{tg} x) = \dfrac{\operatorname{tg}^3 x}{\operatorname{tg}^2 x - 1} \\ t = \operatorname{tg}\ x \\ x = \operatorname{arctg}\ t \\ dx = \dfrac{dt}{1+t^2} \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{t^3 dt}{\left(1+t^2\right)\left(t^2-1\right)} = \int \frac{t^3 dt}{t^4-1} = \frac{1}{4}\int \frac{d\left(t^4-1\right)}{t^4-1} =$$

$$= \frac{1}{4}\ln\left|t^4-1\right| + C = \frac{1}{4}\ln\left|tg^4 x - 1\right| + C\,.$$

Зокрема, під час обчислення інтегралів виду

$$\int \operatorname{tg}^m x\ dx; \qquad \int \operatorname{ctg}^m x\ dx \tag{5.7}$$

($m \geq 2$ – натуральне число)

Доцільно використовувати такі формули:

$$1+\operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad \text{звідки} \quad \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1; \tag{5.8}$$

$$1+\operatorname{ctg}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}, \quad \text{звідки} \quad \operatorname{ctg}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} - 1. \tag{5.9}$$

Формули (5.8) та (5.9) дозволяють послідовно знизити ступінь тангенса або котангенса.

Приклад 5.5 Знайти інтеграли:

1) $\int \operatorname{tg}^4 x\ dx$; 2) $\int \operatorname{ctg}^5 x\ dx$.

Розв'язання

$$1)\ \int \operatorname{tg}^4 x\ dx = \int \operatorname{tg}^2 x \cdot \operatorname{tg}^2 x\ dx = \int \operatorname{tg}^2 x \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right) dx = \int \frac{\operatorname{tg}^2 x}{\cos^2 x} dx -$$

$$-\int \mathrm{tg}^2 dx = \int \mathrm{tg}^2 x\, d(\mathrm{tg}\ x) - \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right) dx = \frac{tg^3 x}{3} - \int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int dx =$$

$$= \frac{\mathrm{tg}^3 x}{3} - \mathrm{tg}\, x + x + C;$$

2) $\int \mathrm{ctg}^5 x\ dx = \int \mathrm{ctg}^3 x\, \mathrm{ctg}^2 x\, dx = \int \mathrm{ctg}^3 x \left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1\right) dx =$

$$= \int \frac{\mathrm{ctg}^3 x}{\sin^2 x} dx - \int \mathrm{ctg}^3 x\ dx = -\int \mathrm{ctg}^3 x\ d(\mathrm{ctg}\ x) - \int \mathrm{ctg}\ x \left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1\right) dx =$$

$$= -\frac{\mathrm{ctg}^4 x}{4} - \int \frac{\mathrm{ctg}\, x}{\sin^2 x} dx + \int \mathrm{ctg}\, x\ dx = -\frac{\mathrm{ctg}^4 x}{4} + \int \mathrm{ctg}\, x\ d(\mathrm{ctg}\, x) + \int \frac{\cos x}{\sin x} dx =$$

$$= -\frac{\mathrm{ctg}^4 x}{4} + \frac{\mathrm{ctg}^2 x}{2} + \ln|\sin x| + C.$$

III Інтеграли виду

$$\int \boldsymbol{R}(\sin \boldsymbol{x}, \cos \boldsymbol{x}) \boldsymbol{dx} \tag{5.10}$$

III.1) $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$; (5.11)

III.2) $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$; (5.12)

III.3) $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$. (5.13)

III.1) $\int \boldsymbol{R}(\sin \boldsymbol{x}, \cos \boldsymbol{x}) \boldsymbol{dx}$, де $\boldsymbol{R}(-\sin \boldsymbol{x}, \cos \boldsymbol{x}) = -\boldsymbol{R}(\sin \boldsymbol{x}, \cos \boldsymbol{x})$

Підінтегральна функція змінює знак у випадку замінення $\sin x$ на $-\sin x$ (тобто є непарною щодо $\sin x$).

Рекомендоване замінення: $t = \cos x$. Зокрема це стосується інтегралів виду

$$\int \sin^{2n+1} x \cdot \cos^{2m} x\, dx, \ (n,\ m \text{ – цілі числа, } n \ge 0).$$

Приклад 5.6 Знайти інтеграли:

1) $\int \sin^3 x\,dx$; 2) $\int \frac{\sin^5 x}{\cos^4 x}dx$; 3) $\int \frac{dx}{\sin^3 x}$.

Розв'язання

1) підінтегральна функція містить $\sin x$ у непарному ступені (тобто є непарною щодо $\sin x$), тому застосуємо замінення $t=\cos x$, звідки $dt=-\sin x\,dx$.

Спочатку змінемо підінтегральний вираз так, щоб виділити $\cos x$ і диференціал нової змінної $-\sin x\,dx$:

$$\int \sin^3 xdx = \int \sin^2 x\cdot\sin x\,dx = \int\left(1-\cos^2 x\right)\sin x\,dx = \begin{vmatrix} t=\cos x \\ dt=-\sin x\,dx \end{vmatrix} =$$

$$= -\int\left(1-t^2\right)dt = -t+\frac{t^3}{3}+C = -\cos x+\frac{\cos^3 x}{3}+C;$$

2) підінтегральна функція є непарною щодо $\sin x$:

$$\sin^5 x = \sin^4 x\cdot\sin x = \left(\sin^2 x\right)^2\sin x = \left(1-\cos^2 x\right)^2\sin x.$$

$$\int\frac{\sin^5 x}{\cos^4 x}dx = \int\frac{\left(1-\cos^2 x\right)^2\sin x\,dx}{\cos^4 x} = \begin{vmatrix} t=\cos x \\ dt=-\sin x\,dx \end{vmatrix} = -\int\frac{\left(1-t^2\right)^2dt}{t^4} =$$

$$= -\int\frac{1-2t^2+t^4}{t^4}dt = -\int\left(\frac{1}{t^4}-\frac{2}{t^2}+1\right)dt = \frac{1}{3t^3}-\frac{2}{t}-t+C =$$

$$= \frac{1}{3\cos^3 x}-\frac{2}{\cos x}-\cos x+C;$$

3) $\int\frac{dx}{\sin^3 x} = \int\frac{\sin x\,dx}{\sin^4 x} = \int\frac{\sin x\,dx}{\left(1-\cos^2 x\right)^2} = \begin{vmatrix} t=\cos x \\ dt=-\sin x\,dx \end{vmatrix} =$

$$= -\int\frac{dt}{\left(1-t^2\right)^2} = -\int\frac{dt}{\left(t^2-1\right)^2} = -\int\frac{dt}{(t-1)^2(t+1)^2}.$$

Розкладення підінтегральної функції на елементарні дроби має такий вид:

$$\frac{1}{(t-1)^2(t+1)^2}=\frac{A_1}{t-1}+\frac{A_2}{(t-1)^2}+\frac{B_1}{t+1}+\frac{B_2}{(t+1)^2}.$$

$$1=A_1(t-1)(t+1)^2+A_2(t+1)^2+B_1(t+1)(t-1)^2+B_2(t-1)^2.$$

$t=1$: $\quad 1=4A_2$, $\quad$ звідки $A_2=\frac{1}{4}$.

$t=-1$: $\quad 1=4B_2$, $\quad$ звідки $B_2=\frac{1}{4}$.

$$\begin{array}{l|l} t^3 & \quad 0=A_1+B_1 \\ t^0 & 1=-A_1+A_2+B_1+B_2 \end{array};\qquad \begin{cases} 0=A_1+B_1 \\ 1=-A_1+\frac{1}{4}+B_1+\frac{1}{4} \end{cases};$$

$$\begin{cases} A_1+B_1=0 \\ -A_1+B_1=\frac{1}{2} \end{cases};\qquad \begin{cases} 2B_1=\frac{1}{2} \\ A_1+B_1=0 \end{cases};\qquad \begin{cases} B_1=\frac{1}{4} \\ A_1=-\frac{1}{4} \end{cases}.$$

Отже:

$$\frac{1}{(t-1)^2(t+1)^2}=-\frac{1}{4(t-1)}+\frac{1}{4(t-1)^2}+\frac{1}{4(t+1)}+\frac{1}{4(t+1)^2}.$$

$$-\int\frac{dt}{(t-1)^2(t+1)^2}=-\frac{1}{4}\int\left(-\frac{1}{t-1}+\frac{1}{(t-1)^2}+\frac{1}{t+1}+\frac{1}{(t+1)^2}\right)dt=$$

$$=-\frac{1}{4}\left(-\ln|t-1|-\frac{1}{t-1}+\ln|t+1|-\frac{1}{t+1}\right)+C=$$

$$=-\frac{1}{4}\ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right|+\frac{1}{2}\frac{t}{t^2-1}+C,$$

таким чином:

$$\int\frac{dx}{\sin^3 x}=-\frac{1}{4}\ln\left|\frac{\cos x+1}{\cos x-1}\right|+\frac{1}{2}\cdot\frac{\cos x}{\cos^2 x-1}+C=-\frac{1}{4}\ln\left|\frac{\cos x+1}{\cos x-1}\right|-\frac{1}{2}\cdot\frac{\cos x}{\sin^2 x}+C.$$

III.2) $\boldsymbol{\int R(\sin x,\cos x)dx}$**, де** $\boldsymbol{R(\sin x,-\cos x)=-R(\sin x,\cos x)}$

Підінтегральна функція змінює знак у випадку замінення $\cos x$ на $-\cos x$ (тобто є непарною щодо $\cos x$).

Рекомендоване замінення: $t=\sin x$. Зокрема це стосується інтегралів виду

$$\int\cos^{2n+1}x\sin^{2m}x\,dx,\text{ де }(n,\ m-\text{цілі числа } n\geq 0).$$

Приклад 5.7 Знайти інтеграли:

1) $\int\sin^4 x\cdot\cos^3 x\,dx$;   2) $\int\frac{\cos^5 x\,dx}{\sin^4 x}$.

Розв'язання

1. Підінтегральна функція є непарною щодо $\cos x$.

$$\int\sin^4 x\cos^3 x\,dx=\int\sin^4 x\cos^2 x\cdot\cos x\,dx=\left|\begin{matrix}t=\sin x\\ dt=\cos x\,dx\end{matrix}\right|=$$

$$=\int t^4\left(1-t^2\right)dt=\int\left(t^4-t^6\right)dt=\frac{t^5}{5}-\frac{t^7}{7}+C=\frac{\sin^5 x}{5}-\frac{\sin^7 x}{7}+C;$$

2) $$\int\frac{\cos^5 x\,dx}{\sin^4 x}=\int\frac{\cos^4 x\cos x\,dx}{\sin^4 x}=\int\frac{\left(1-\sin^2 x\right)^2\cos x\,dx}{\sin^4 x}=$$

$$=\left|\begin{matrix}t=\sin x\\ dt=\cos x\,dx\end{matrix}\right|=\int\frac{\left(1-t^2\right)^2dt}{t^4}=\int\frac{1-2t^2+t^4}{t^4}dt=$$

$$=\int\left(\frac{1}{t^4}-\frac{2}{t^2}+1\right)dt=-\frac{1}{3t^3}+\frac{2}{t}+t+C=-\frac{1}{3\sin^3 x}+\frac{2}{\sin x}+\sin x+C.$$

III.3) $\int R(\sin x, \cos x)dx$, де $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$

Підінтегральна функція не змінюється у випадку замінення знаків у $\sin x$ і $\cos x$ одночасно (тобто є парною щодо $\sin x$ і $\cos x$ одночасно).

Рекомендоване замінення: $t = \operatorname{tg} x$. Зокрема це стосується інтегралів виду

$$\int \frac{\sin^n x}{\cos^m x}dx \quad \text{і} \quad \int \frac{\cos^n x}{\sin^m x}dx, \quad \text{де } m - n = 2k \geq 0 \ (k \text{ – ціле}).$$

Зауважимо, що умова $m - n = 2k$ означає, що ступені чисельника і знаменника є одночасно парними або непарними числами. Для інтегралів

$$\int \frac{\cos^n x}{\sin^m x}dx$$

більш ефективним є підставляння

$$t = \operatorname{ctg} x.$$

Для підставляння $t = \operatorname{tg} x$ з тригонометричних формул

$$1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}, \qquad 1 + \operatorname{ctg}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$$

випливає, що $\cos^2 x = \dfrac{1}{1+t^2}$, $\sin^2 x = \dfrac{t^2}{1+t^2}$.

Аналогічно для підставляння $t = \operatorname{ctg} x$

$$\sin^2 x = \frac{1}{1+t^2}, \qquad \cos^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}.$$

Отже:

$$\begin{cases} t = \operatorname{tg} x \\ \sin^2 x = \dfrac{t^2}{1+t^2} \\ \cos^2 x = \dfrac{1}{1+t^2} \\ dx = \dfrac{dt}{1+t^2} \end{cases} \tag{5.14}$$

$$\begin{cases} t = \operatorname{ctg} x \\ \sin^2 x = \dfrac{1}{1+t^2} \\ \cos^2 x = \dfrac{t^2}{1+t^2} \\ dx = -\dfrac{dt}{1+t^2} \end{cases} \tag{5.15}$$

Приклад 5.8 Знайти інтеграли:

1) $\int \dfrac{\sin^2 x}{\cos^6 x} dx$; 2) $\int \dfrac{\sin^3 x}{\cos^7 x} dx$;

3) $\int \dfrac{\cos^4 x}{\sin^6 x} dx$; 4) $\int \dfrac{\sin x \cos x}{\sin^4 x + 4\cos^4 x} dx$.

Розв'язання

1) підінтегральна функція є парною щодо $\sin x$ і $\cos x$ одночасно:

$$\frac{(-\sin x)^2}{(-\cos x)^6} = \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x}.$$

Застосуємо підставляння $t = \operatorname{tg} x$:

$$\int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x} dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \cdot \frac{dx}{\cos^4 x} = \left| \begin{array}{l} t = \operatorname{tg} x \\ \cos^2 x = \dfrac{1}{1+t^2} \\ dx = \dfrac{dt}{1+t^2} \end{array} \right| = \int t^2 \left(1+t^2\right)^2 \frac{dt}{1+t^2} =$$

$$= \int t^2 \left(1+t^2\right) dt = \int \left(t^2 + t^4\right) dt = \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} + C = \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} + \frac{\operatorname{tg}^5 x}{5} + C;$$

2) підінтегральна функція є парною щодо $\sin x$ і $\cos x$ одночасно

$$\frac{(-\sin x)^3}{(-\cos x)^7} = \frac{-\sin^3 x}{-\cos^7 x} = \frac{\sin^3 x}{\cos^7 x}.$$

Застосуємо підставляння $t = \operatorname{tg} x$:

$$\int \frac{\sin^3 x}{\cos^7 x} dx = \int \frac{\sin^3 x}{\cos^3 x} \frac{dx}{\cos^4 x} = \int \operatorname{tg}^3 x \frac{dx}{\cos^4 x} = \left| \begin{array}{l} t = \operatorname{tg} x \\ \cos^2 x = \dfrac{1}{1+t^2} \\ dx = \dfrac{dt}{1+t^2} \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{t^3 \left(1+t^2\right)^2 dt}{1+t^2} = \int t^3 \left(1+t^2\right) dt = \int \left(t^3 + t^5\right) dt =$$

$$= \frac{t^4}{4} + \frac{t^6}{6} + C = \frac{\operatorname{tg}^4 x}{4} + \frac{\operatorname{tg}^6 x}{6} + C;$$

3) підінтегральна функція є парною щодо $\sin x$ і $\cos x$ одночасно. Застосуємо підставляння $t = \operatorname{ctg} x$:

$$\int \frac{\cos^4 x}{\sin^6 x}dx = \int \frac{\cos^4 x}{\sin^4 x} \cdot \frac{dx}{\sin^2 x} = \int \operatorname{ctg}^4 x \frac{dx}{\sin^2 x} = \left| \begin{array}{l} t = \operatorname{ctg} x \\ \sin^2 x = \dfrac{1}{1+t^2} \\ dx = -\dfrac{dt}{1+t^2} \end{array} \right| =$$

$$= -\int t^4 dt = -\frac{t^5}{5} + C = -\frac{\operatorname{ctg}^5 x}{5} + C;$$

4) підінтегральна функція не змінюється у разі одночасної заміни $\sin x$ на $-\sin x$ та $\cos x$ на $-\cos x$. Застосуємо підставляння $t = \operatorname{tg} x$ (5.14):

$$\sin x \cdot \cos x = \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \cos^2 x = \operatorname{tg} x \left(\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x} \right) = \frac{t}{1+t^2};$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}; \qquad \sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}; \quad dx = \frac{dt}{1+t^2}$$

Отже:

$$\int \frac{\sin x \cos x}{\sin^4 x + 4\cos^4 x}dx = \int \frac{\dfrac{t}{1+t^2}}{\dfrac{t^4}{\left(1+t^2\right)^2} + \dfrac{4}{\left(1+t^2\right)^2}} \cdot \frac{dt}{1+t^2} =$$

$$= \int \frac{tdt}{t^4+4} = \frac{1}{2}\int \frac{d\left(t^2\right)}{t^4+4} = \frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{t^2}{2} + C = \frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} + C.$$

У випадку, коли n – парне число, для інтегралів виду $\int \frac{dx}{\cos^n x}$ застосовують заміну (5.14), а для інтегралів виду $\int \frac{dx}{\sin^n x}$ – заміну (5.15).

Приклад 5.9 Знайти інтеграли:

1) $\int \frac{dx}{\cos^6 x}$; 2) $\int \frac{dx}{\sin^4 x}$.

Розв'язання

$$\int \frac{dx}{\cos^6 x} = \int \frac{dx}{\left(\cos^2 x\right)^3} = \left| \begin{array}{l} t = \mathrm{tg}\, x \\ \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2} \\ dx = \frac{dt}{1+t^2} \end{array} \right| = \int \frac{\left(1+t^2\right)^3 dt}{1+t^2} = \int \left(1+t^2\right)^2 dt =$$

$$= \int \left(1 + 2t^2 + t^4\right) dt = t + \frac{2t^3}{3} + \frac{t^5}{5} + C = \mathrm{tg}\, x + \frac{2}{3} \mathrm{tg}^3\, x + \frac{\mathrm{tg}^5 x}{5} + C;$$

$$2)\ \int \frac{dx}{\sin^4 x} = \int \frac{dx}{\left(\sin^2 x\right)^2} = \left| \begin{array}{l} t = \mathrm{ctg}\, x \\ \sin^2 x = \frac{1}{1+t^2} \\ dx = -\frac{dt}{1+t^2} \end{array} \right| = -\int \frac{\left(1+t^2\right)^2 dt}{1+t^2} =$$

$$= -\int \left(1+t^2\right) dt = -t - \frac{t^3}{3} + C = -\mathrm{ctg}\, x - \frac{\mathrm{ctg}^3 x}{3} + C.$$

IV Інтеграли виду

$$\int \sin^{2m} x \cdot \cos^{2n} x\, dx \qquad (5.16)$$

де m, n – цілі невід'ємні числа.

Підінтегральна функція має вид добутку парних невід'ємних ступенів синуса і косинуса. У цьому випадку застосовують формули зниження ступеня:

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}, \qquad (5.17)$$

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}, \tag{5.18}$$

$$\sin x \cdot \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x. \tag{5.19}$$

Приклад 5.10 Знайти інтеграли

1) $\int \sin^4 x\,dx$; 2) $\int \sin^2 x \cdot \cos^4 x\,dx$; 3) $\int \sin^4 x \cdot \cos^2 x\,dx$.

Розв'язання

1) $\int \sin^4 x\,dx = \int \left(\sin^2 x\right)^2 dx = \frac{1}{4}\int \left(1-\cos 2x\right)^2 dx =$

$= \frac{1}{4}\int \left(1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x\right)dx = \frac{1}{4}\int \left(1 - 2\cos 2x + \frac{1}{2}\left(1+\cos 4x\right)\right)dx =$

$= \frac{1}{8}\int \left(3 - 4\cos 2x + \cos 4x\right)dx = \frac{1}{8}\left(3x - 2\sin 2x + \frac{1}{4}\sin 4x\right) + C$;

2) використовуючи тригонометричні формули зниження ступеня (5.17)–(5.19), будемо послідовно зводити заданий інтеграл до табличного:

$\int \sin^2 x \cdot \cos^4 x\,dx = \int \left(\sin^2 x \cdot \cos^2 x\right)\cos^2 x\,dx =$

$= \int \left(\frac{\sin 2x}{2}\right)^2 \cdot \frac{1+\cos 2x}{2}dx = \frac{1}{8}\left(\int \sin^2 2x\,dx + \int \sin^2 2x \cdot \cos 2x\,dx\right) =$

$= \frac{1}{8}\left(\int \frac{1-\cos 4x}{2}dx + \frac{1}{2}\int \sin^2 2x\,d\left(\sin 2x\right)\right) = \frac{1}{8}\left(\frac{1}{2}\left(x - \frac{\sin 4x}{4}\right) + \frac{1}{2}\frac{\sin^3 2x}{3}\right) + C =$

$= \frac{x}{16} - \frac{\sin 4x}{64} + \frac{\sin^3 2x}{48} + C$;

3) $\int \sin^4 x \cdot \cos^2 x\,dx = \int \sin^2 x\left(\sin^2 x \cdot \cos^2 x\right)dx =$

$$= \int \frac{1-\cos 2x}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)^2 dx = \frac{1}{8}\int (1-\cos 2x)\sin^2 2x\,dx =$$

$$= \frac{1}{8}\int \sin^2 2x\,dx - \frac{1}{8}\int \sin^2 2x \cdot \cos 2x\,dx =$$

$$= \frac{1}{8}\int \frac{1-\cos 4x}{2}dx - \frac{1}{16}\int \sin^2 2x\,d\left(\sin 2x\right) =$$

$$= \frac{1}{16}\left(\int dx - \int \cos 4x\,dx - \frac{1}{16} \cdot \frac{\sin^3 2x}{3}\right) =$$

$$= \frac{1}{16}\left(x - \frac{\sin 4x}{4} - \frac{\sin^3 2x}{3}\right) + C.$$

V Інтеграли виду $\int \sin nx \cos mx\,dx$, $\int \cos nx \cos mx\,dx$, $\int \sin nx \sin mx\,dx$, де *m*і*n* – *дійсні числа*

Для обчислення інтегралів цього виду використовуються такі тригонометричні формули:

$$\sin nx \cos mx = \frac{1}{2}\left(\sin\left(n-m\right)x + \sin\left(n+m\right)x\right), \tag{5.20}$$

$$\cos nx \cos mx = \frac{1}{2}\left(\cos\left(n-m\right)x + \cos\left(n+m\right)x\right), \tag{5.21}$$

$$\sin nx \sin mx = \frac{1}{2}\left(\cos\left(n-m\right)x - \cos\left(n+m\right)x\right). \tag{5.22}$$

Приклад 5.11
Знайти інтеграли

1) $\int \sin 6x \cos 7x\,dx$; 2) $\int \sin 2x \cos 5x \sin 9x\,dx$.

Розв'язання

1) $\int \sin 6x \cos 7x\, dx = \frac{1}{2}\int(-\sin x + \sin 13x)\, dx = \frac{1}{2}\left(\cos x - \frac{1}{13}\cos 13x\right) + C$

за формулою (5.20);

2) розглянемо $\int \sin 2x \cos 5x \sin 9x\, dx$.

Підінтегральний вираз перетворюємо таким чином:

$$\sin 2x \cos 5x \sin 9x = \frac{1}{2}(-\sin 3x + \sin 7x)\sin 9x =$$

за формулою (5.20)

$$= \frac{1}{2}(-\sin 3x \sin 9x + \sin 7x \sin 9x) = \frac{1}{4}(-\cos 6x + \cos 12x + \cos 2x - \cos 16x).$$

за формулою (5.22),

отже:

$$\frac{1}{2}\int \sin 2x \cos 5x \sin 9x\, dx = \frac{1}{4}\int(-\cos 6x + \cos 12x + \cos 2x - \cos 16x)\, dx =$$

$$= \frac{1}{4}\left(-\frac{\sin 6x}{6} + \frac{\sin 12x}{12} + \frac{\sin 2x}{2} - \frac{\sin 16x}{16}\right) + C.$$

5.3 Інтеграл виду $\int R(e^x)\,dx$

Цей інтеграл раціоналізується заміною $t = e^x$. Дійсно,

$$\int R(e^x)\,dx = \left|\begin{array}{l} t = e^x \\ dt = e^x dx \\ dx = \dfrac{dt}{t} \end{array}\right| = \int R(t)\frac{dt}{t} = \int R_1(t)\,dt,$$

де $R_1(t)$ – раціональна функція від t.

Приклад 5.12 Знайти інтеграли

1) $\int \frac{e^x - 1}{e^x + 1} dx$; 2) $\int \frac{dx}{e^{2x} + e^x - 2}$.

Розв'язання

$$1)\ \int \frac{e^x - 1}{e^x + 1} dx = \left| \begin{matrix} t = e^x \\ dt = e^x dx \\ dx = \dfrac{dt}{t} \end{matrix} \right| = \int \frac{t-1}{t+1} \cdot \frac{dt}{t} = \int \frac{t-1}{(t+1)t} dt = \int \left(\frac{1}{t+1} - \frac{1}{(t+1)t} \right) dt =$$

$$= \int \left(\frac{1}{t+1} - \frac{t+1-t}{(t+1)t} \right) dt = \int \left(\frac{1}{t+1} - \frac{1}{t} + \frac{1}{t+1} \right) dt = 2\int \frac{dt}{t+1} - \int \frac{dt}{t} =$$

$$= 2\ln|t+1| - \ln|t| + C = 2\ln\left(e^x + 1\right) - \ln e^x + C = 2\ln\left(e^x + 1\right) - x + C;$$

$$2)\ \int \frac{dx}{e^{2x} + e^x - 2} = \left| \begin{matrix} t = e^x \\ dt = e^x dx \end{matrix} \right| = \int \frac{dt}{t\left(t^2 + t - 2\right)} = \int \frac{dt}{t(t-1)(t+2)}.$$

$$\frac{1}{t(t-1)(t+2)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t-1} + \frac{C}{t+2}.$$

$$1 = A(t-1)(t+2) + Bt(t+2) + Ct(t-1).$$

$t = 0$: $1 = A(-1)\cdot 2$, звідки $A = -\dfrac{1}{2}$;

$t = 1$: $1 = B \cdot 1 \cdot 3$, звідки $B = \dfrac{1}{3}$;

$t = -2$: $1 = C(-2)\cdot(-3)$, звідки $C = \dfrac{1}{6}$.

Таким чином:

$$\frac{1}{t(t-1)(t+2)} = -\frac{1}{2t} + \frac{1}{3(t-1)} + \frac{1}{6(t+2)}.$$

Отже:

$$\int \frac{dx}{e^{2x}+e^{x}-2}=\int\left(-\frac{1}{2t}+\frac{1}{3(t-1)}+\frac{1}{6(t+2)}\right)dt=$$

$$=-\frac{1}{2}\ln|t|+\frac{1}{3}\ln|t-1|+\frac{1}{6}\ln|t+2|+C=$$

$$=-\frac{1}{2}\ln e^{x}+\frac{1}{3}\ln\left|e^{x}-1\right|+\frac{1}{6}\ln\left(e^{x}+2\right)+C=$$

$$=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}\ln\left|e^{x}-1\right|+\frac{1}{6}\ln\left(e^{x}+2\right)+C.$$

6 ІНТЕГРУВАННЯ ІРРАЦІОНАЛЬНИХ ФУНКЦІЙ

Розглянемо інтеграли від деяких простіших ірраціональних функцій, які за допомогою певних підставлянь можна звести до інтегралів від раціональних функцій.

6.1 Інтеграли виду

$$\int \boldsymbol{R}\left(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}^{\frac{m_1}{n_1}}, \boldsymbol{x}^{\frac{m_2}{n_2}}, \ldots, \boldsymbol{x}^{\frac{m_k}{n_k}}\right) \boldsymbol{dx}, \qquad (6.1)$$

де $m_1, n_1, \ldots, m_k, n_k$ – натуральні числа;

R – раціональна функція аргументів x, $x^{\frac{m_1}{n_1}}$, $x^{\frac{m_2}{n_2}}$, ... , $x^{\frac{m_k}{n_k}}$.

Такі інтеграли раціоналізуються підставлянням

$$x = t^n, \qquad (6.2)$$

де n – найменше спільне кратне знаменників дробів $\frac{m_1}{n_1}, \frac{m_2}{n_2}, \ldots, \frac{m_k}{n_k}$:

$$n = \text{НСК}\left(n_1, n_2, \ldots, n_k\right).$$

Дійсно,

$$\int R\left(x, x^{\frac{m_1}{n_1}}, x^{\frac{m_2}{n_2}}, \ldots, x^{\frac{m_k}{n_k}}\right) dx = \left| \begin{array}{c} x = t^n \\ dx = nt^{n-1}dt \\ t = \sqrt[n]{x} \end{array} \right| =$$

$$= \int R\left(t^n, t^{\frac{n}{n_1}m_1}, t^{\frac{n}{n_2}m_2}, \ldots, t^{\frac{n}{n_k}m_k}\right) n \cdot t^{n-1}dt = \int R_1(t)\, dt,$$

де $R_1(t)$ – раціональна функція від t (оскільки $\frac{n}{n_1} \cdot m_1, \frac{n}{n_2} \cdot m_2, \ldots, \frac{n}{n_k} \cdot m_k$ – цілі числа).

Приклад 6.1 Знайти інтеграли

1) $\int \frac{dx}{\left(1+x^{\frac{1}{3}}\right)x^{\frac{1}{2}}}$; 2) $\int \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt[4]{x^3}+1}$;

3) $\int \frac{\sqrt[6]{x}dx}{x\left(\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}\right)}$; 4) $\int \frac{\sqrt{x}-2}{x\left(\sqrt[3]{x}+1\right)}dx$.

Розв'язання

1) Найменшим спільним кратним знаменників дробів $\frac{1}{3}$ та $\frac{1}{2}$ є 6:

НСК(2,3) = 6, тому застосуємо підставляння $x = t^6$:

$$\int \frac{dx}{\left(1+x^{\frac{1}{3}}\right)x^{\frac{1}{2}}} = \left| \begin{array}{l} x = t^6 \\ dx = 6t^5dt \\ t = \sqrt[6]{x} \end{array} \right| =$$

$$\int \frac{6t^5dt}{\left(1+t^2\right)t^3} = 6\int \frac{t^2dt}{1+t^2} = 6\int \frac{t^2+1-1}{1+t^2}dt =$$

$$= 6\int \left(1-\frac{1}{1+t^2}\right)dt = 6t - 6\mathrm{arctg}\, t + C =$$

$$\underset{t=\sqrt[6]{x}}{=} 6\sqrt[6]{x} - 6\mathrm{arctg}\sqrt[6]{x} + C.$$

2) запишемо цей інтеграл як

$$\int \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt[4]{x^3}+1} = \int \frac{x^{\frac{1}{2}}dx}{x^{\frac{3}{4}}+1}.$$

Найменшим спільним кратним знаменників дробів $\frac{1}{2}$ та $\frac{3}{4}$ є 4, тому застосуємо підставляння $x = t^4$:

$$\int \frac{x^{\frac{1}{2}}dx}{x^{\frac{3}{4}}+1} = \left| \begin{aligned} x &= t^4 \\ dx &= 4t^3dt \\ t &= \sqrt[4]{x} \end{aligned} \right| = \int \frac{t^2 \cdot 4t^3 dt}{t^3+1} = 4\int \frac{t^5 dt}{t^3+1}.$$

Виділяємо цілу частину:

$$\begin{array}{r|l} -\;\; t^5 & t^3+1 \\ \cline{2-2} \underline{t^5+t^2} & t^2 \\ -t^2 & \end{array}$$

$$4\int \frac{t^5 dt}{t^3+1} = 4\int \left(t^2 - \frac{t^2}{t^3+1} \right) dt = 4\left(\frac{t^3}{3} - \frac{1}{3}\int \frac{d\left(t^3+1\right)}{t^3+1} \right) =$$

$$= 4\left(\frac{t^3}{3} - \frac{1}{3}\ln\left|t^3+1\right| \right) + C \underset{t=\sqrt[4]{x}}{=} \frac{4}{3}\left(\sqrt[4]{x^3} - \ln\left|\sqrt[4]{x^3}+1\right| \right) + C;$$

$$3)\ \int \frac{\sqrt[6]{x}dx}{x\left(\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}\right)} = \int \frac{x^{\frac{1}{6}}dx}{x(x^{\frac{1}{3}}+x^{\frac{1}{4}})} = \left| \begin{aligned} \text{НСК}(3,4,6) &= 12 \\ x &= t^{12} \\ dx &= 12t^{11}dt \\ t &= \sqrt[12]{x} \end{aligned} \right| =$$

$$= \int \frac{t^2}{t^{12}\left(t^4+t^3\right)} 12t^{11}dt = 12\int \frac{dt}{t^2\left(t+1\right)}.$$

Запишемо розкладання підінтегральної функції на елементарні дроби:

$$\frac{1}{t^2(t+1)}=\frac{A_1}{t}+\frac{A_2}{t^2}+\frac{B}{t+1}.$$

$$1=A_1t(t+1)+A_2(t+1)+Bt^2.$$

$$\begin{array}{l|l} t=0 & \qquad A_2=1 \\ t=-1 & \qquad B=1 \\ t^2 & A_1+B=0\Rightarrow A_1=-B=-1 \end{array}.$$

Таким чином:

$$12\int\frac{dt}{t^2(t+1)}=12\int\left[-\frac{1}{t}+\frac{1}{t^2}+\frac{1}{t+1}\right]dt=-12\left(\ln|t|+\frac{1}{t}-\ln|t+1|\right)+C.$$

Повернемося до змінної x $(t=\sqrt[12]{x})$:

$$\int\frac{\sqrt[6]{x}dx}{x\left(\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}\right)}=-12\left(\ln\sqrt[12]{x}+\frac{1}{\sqrt[12]{x}}-\ln\left|\sqrt[12]{x}+1\right|\right)+C=$$

$$=\ln\frac{\left(\sqrt[12]{x}+1\right)^{12}}{x}-\frac{12}{\sqrt[12]{x}}+C;$$

$$4)\ \int\frac{\sqrt{x}-2}{x\left(\sqrt[3]{x}+1\right)}dx=\left|\begin{array}{c} \text{НСК}(2,3)=6 \\ x=t^6 \\ dx=6t^5dt \\ t=\sqrt[6]{x} \end{array}\right|=\int\frac{t^3-2}{t^6\left(t^2+1\right)}6t^5dt=6\int\frac{t^3-2}{t\left(t^2+1\right)}dt.$$

Одержано інтеграл від неправильного раціонального дробу. Виділяючи цілу частину, маємо

$$I=6\int\frac{t^3-2}{t\left(t^2+1\right)}dt=6\int\left(1-\frac{t+2}{t^3+t}\right)dt=6\left(t-\int\frac{t+2}{t\left(t^2+1\right)}dt\right).$$

Щоб знайти останній інтеграл, запишемо розкладання підінтегральної функції на елементарні дроби:

$$\frac{t+2}{t\left(t^2+1\right)}=\frac{A}{t}+\frac{Bt+C}{t^2+1},$$

звідки

$$t+2=A\left(t^2+1\right)+\left(Bt+C\right)t.$$

$$\begin{array}{c|l} t^2 & 0=A+B \\ t^1 & \quad 1=C \\ t^0 & \quad 2=A \end{array}\ ; \qquad \begin{cases} A=2 \\ B=-2 \\ C=1 \end{cases}$$

Таким чином:

$$I=6\left(t-\int\left(\frac{2}{t}+\frac{1-2t}{t^2+1}\right)dt\right)=6\left(t-2\ln|t|+\ln\left(t^2+1\right)-\operatorname{arctg}t\right)+C.$$

Повертаючись до змінної x ($t=\sqrt[6]{x}$), одержимо такий результат:

$$\int\frac{\sqrt{x}-2}{x\left(\sqrt[3]{x}+1\right)}dx=6\left(\sqrt[6]{x}-2\ln\sqrt[6]{x}+\ln\left(\sqrt[3]{x}+1\right)-\operatorname{arctg}\sqrt[6]{x}\right)+C.$$

6.2 Інтеграли виду

$$\int R\left(\boldsymbol{x},\left(\frac{\boldsymbol{ax+b}}{\boldsymbol{cx+d}}\right)^{\frac{m_1}{n_1}},\left(\frac{\boldsymbol{ax+b}}{\boldsymbol{cx+d}}\right)^{\frac{m_2}{n_2}},\ldots,\left(\frac{\boldsymbol{ax+b}}{\boldsymbol{cx+d}}\right)^{\frac{m_k}{n_k}}\right)dx, \qquad (6.3)$$

де $m_1, n_1, \ldots, m_k n_k$ – натуральні числа;

R – раціональна функція своїх аргументів.

Такі інтеграли раціоналізуються підставлянням

$$\frac{ax+b}{cx+d}=t^n, \qquad (6.4)$$

де n – найменше спільне кратне знаменників дробів $\frac{m_1}{n_1},\ \frac{m_2}{n_2},\ ...,\ \frac{m_k}{n_k}$:

$$n = \text{НСК}\left(n_1,\ n_2,\ ...,\ n_k\right).$$

Приклад 6.2 Знайти інтеграли

1) $\int\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\cdot\frac{dx}{1-x}$; 2) $\int\frac{1}{\left(x-1\right)^2}\cdot\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}dx$; 3) $\int\sqrt{\frac{x-2}{x+2}}\cdot\frac{dx}{x}$.

Розв'язання

1) $\int\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\cdot\frac{dx}{1-x}$.

Введемо підставляння $\frac{1+x}{1-x}=t^2$ $\left(t=\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right)$.

Виражаємо x через t:

$1+x=t^2-xt^2$;

$x\left(1+t^2\right)=t^2-1$;

$x=\frac{t^2-1}{t^2+1}$.

$$dx=\frac{2t\left(t^2+1\right)-2t\left(t^2-1\right)}{\left(t^2+1\right)^2}dt=\frac{4t}{\left(t^2+1\right)^2}dt.$$

$$1-x=1-\frac{t^2-1}{t^2+1}=\frac{t^2+1-t^2+1}{t^2+1}=\frac{2}{t^2+1}.$$

Таким чином:

$$\int\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\cdot\frac{dx}{1-x}=\int t\cdot\frac{4t}{\left(t^2+1\right)^2}\cdot\frac{t^2+1}{2}dt=2\int\frac{t^2}{t^2+1}dt=2\int\frac{t^2+1-1}{t^2+1}dt=$$

$$=2\int\left(1-\frac{1}{t^2+1}\right)dt=2t-2\operatorname{arctg}t+C=2\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}-2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}+C;$$

2) $\int\frac{1}{(x-1)^2}\cdot\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}dx$.

Застосуємо підставляння:

$$\frac{x+1}{x-1}=t^3\left(t=\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\right),$$

звідки $x+1=t^3(x-1)$; $\quad x=\frac{t^3+1}{t^3-1}$.

$$dx=\frac{3t^2\left(t^3-1\right)-\left(t^3+1\right)3t^2}{\left(t^3-1\right)^2}dt=\frac{-6t^2dt}{\left(t^3-1\right)^2}.$$

$$x-1=\frac{t^3+1}{t^3-1}-1=\frac{2}{t^3-1}.$$

Отже;

$$\int\frac{1}{(x-1)^2}\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}dx=\int\frac{\cancel{\left(t^3-1\right)^2}}{4}\cdot t\,\frac{\left(-6t^2\right)dt}{\cancel{\left(t^3-1\right)^2}}=-\frac{3}{2}\int t^3dt=-\frac{3}{2}\cdot\frac{t^4}{4}+C=$$

$$=-\frac{3}{8}t^4+C=-\frac{3}{8}\sqrt[3]{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^4}+C;$$

$$t=\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}$$

3) $\int\sqrt{\dfrac{x-2}{x+2}}\cdot\dfrac{dx}{x}$.

Застосуємо підставляння

$$\frac{x-2}{x+2}=t^2\left(t=\sqrt{\frac{x-2}{x+2}}\right),$$

звідки $x=\dfrac{2\left(1+t^2\right)}{1-t^2}$, $dx=\dfrac{8t}{\left(1-t^2\right)^2}dt$.

Тому

$$\int\sqrt{\frac{x-2}{x+2}}\cdot\frac{dx}{x}=\int\frac{8t^2}{\left(1-t^2\right)^2}\cdot\frac{1-t^2}{2\left(1+t^2\right)}dt=4\int\frac{t^2dt}{\left(1-t^2\right)\left(1+t^2\right)}.$$

Запишемо підінтегральну функцію як

$$\frac{t^2}{\left(1-t^2\right)\left(1+t^2\right)}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\left(1+t^2\right)-\left(1-t^2\right)}{\left(1-t^2\right)\left(1+t^2\right)}.$$

Після почленного ділення чисельника дробу на знаменник одержуємо:

$$4\int\frac{t^2dt}{\left(1-t^2\right)\left(1+t^2\right)}=4\cdot\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{1-t^2}-\frac{1}{1+t^2}\right)dt=$$

$$=\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|-2\operatorname{arctg}t+C,\text{ де } t=\sqrt{\frac{x-2}{x+2}}.$$

Зауважимо, що інтеграли виду

$$\int R\left(x,\left(ax+b\right)^{\frac{m_1}{n_1}},\left(ax+b\right)^{\frac{m_2}{n_2}},\ldots,\left(ax+b\right)^{\frac{m_k}{n_k}}\right)dx \qquad (6.5)$$

є окремим типом інтегралів (6.3), коли ($c=0$, $d=1$).

Інтеграли (6.5) раціоналізуються підставлянням

$$ax+b=t^n. \qquad (6.6)$$

Приклад 6.3 Знайти інтеграл

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2x-1}-\sqrt[4]{2x-1}}.$$

Розв'язання

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2x-1}-\sqrt[4]{2x-1}} = \left| \begin{array}{l} 2x-1=t^4 \\ dx=2t^3dt \\ t=\sqrt[4]{2x-1} \end{array} \right| = \int \frac{2t^3dt}{t^2-t} = 2\int \frac{t^2dt}{t-1} = 2\int \frac{t^2-1+1}{t-1} =$$

$$=2\int\left(t+1+\frac{1}{t-1}\right)dt = 2\cdot\frac{(t+1)^2}{2}+2\ln|t-1|+C=$$

$$=\left(1+\sqrt[4]{2x-1}\right)^2+\ln\left(\sqrt[4]{2x-1}-1\right)^2+C.$$

6.3. Інтеграли виду

$$\int \boldsymbol{R}\left(\boldsymbol{x}, \sqrt{\boldsymbol{a}^2-\boldsymbol{x}^2}\right)\boldsymbol{dx} \qquad (6.7)$$

$$\int \boldsymbol{R}\left(\boldsymbol{x}, \sqrt{\boldsymbol{x}^2+\boldsymbol{a}^2}\right)\boldsymbol{dx} \qquad (6.8)$$

$$\int \boldsymbol{R}\left(\boldsymbol{x}, \sqrt{\boldsymbol{x}^2-\boldsymbol{a}^2}\right)\boldsymbol{dx}, \qquad (6.9)$$

a – дійсне число.

Кожний з інтегралів (6.7)–(6.9) можна звести до інтеграла від раціональної функції за допомогою таких тригонометричних підставлянь:

I) $\int R\left(x, \sqrt{a^2-x^2}\right)dx$: $\quad x=a\sin t$ або $x=a\cos t$; (6.10)

II) $\int R\left(x, \sqrt{x^2+a^2}\right)dx: \quad x = a\,\mathrm{tg}\,t \quad$ або $\quad x = a\,\mathrm{ctg}\,t$; (6.11)

III) $\int R\left(x, \sqrt{x^2-a^2}\right)dx: \quad x = \dfrac{a}{\cos t} \quad$ або $\quad x = \dfrac{a}{\sin t}$. (6.12)

Приклад 6.4 Знайти інтеграли

1) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{\left(5-x^2\right)^3}}$; 2) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2}dx$; 3) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2-4}}{x^3}dx$.

Розв'язання

1) $$\int \frac{dx}{\sqrt{\left(5-x^2\right)^3}} = \left| \begin{array}{c} x = \sqrt{5}\sin t \\ dx = \sqrt{5}\cos t\,dt \\ 5-x^2 = 5-5\sin^2 t = 5\cos^2 t \\ t = \arcsin\dfrac{x}{\sqrt{5}} \end{array} \right| = \int \frac{\sqrt{5}\cos t\,dt}{5\sqrt{5}\cos^3 t} =$$

$$= \frac{1}{5}\int \frac{dt}{\cos^2 t} = \frac{1}{5}\mathrm{tg}\,t + C = \frac{1}{5}\mathrm{tg}\left(\arcsin\frac{x}{\sqrt{5}}\right) + C =$$

$$= \frac{1}{5}\frac{\sin\left(\arcsin\dfrac{x}{\sqrt{5}}\right)}{\cos\left(\arcsin\dfrac{x}{\sqrt{5}}\right)} + C = \frac{1}{5}\frac{\dfrac{x}{\sqrt{5}}}{\sqrt{1-\dfrac{x^2}{5}}} + C = \frac{1}{5}\frac{x}{\sqrt{5-x^2}} + C;$$

2) $$\int \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2}dx = \left| \begin{array}{c} x = \mathrm{tg}\,t \\ dx = \dfrac{dt}{\cos^2 t} \\ x^2+1 = \mathrm{tg}^2 t + 1 = \dfrac{1}{\cos^2 t} \\ t = \mathrm{arctg}\,x \end{array} \right| = \int \frac{1}{\cos t \cdot \mathrm{tg}^2 t}\cdot\frac{dt}{\cos^2 t} =$$

$$=\int\frac{dt}{\cos^3 t\cdot \mathrm{tg}^2 t}=\int\frac{dt}{\cos t\cdot\sin^2 t}=\int\frac{\cos t\,dt}{\cos^2 t\cdot\sin^2 t}=\int\frac{\cos t\,dt}{\left(1-\sin^2 t\right)\sin^2 t}=$$

$$=\left|\begin{array}{l}\text{Інтеграл є інтегралом}\\ \text{виду }\int R\left(\sin t\right)\cos t\,dt,\\ \text{тому зробимо заміну}\\ u=\sin t\end{array}\right|=\left|\begin{array}{c}u=\sin t\\ du=\cos t\,dt\\ t=\arcsin u\end{array}\right|=\int\frac{du}{\left(1-u^2\right)u^2}=$$

$$=\int\frac{1-u^2+u^2}{\left(1-u^2\right)u^2}du=\int\frac{1-u^2}{\left(1-u^2\right)u^2}du+\int\frac{u^2}{\left(1-u^2\right)u^2}du=\int\frac{du}{u^2}+\int\frac{du}{1-u^2}=$$

$$=-\frac{1}{u}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{u+1}{u-1}\right|+C=-\frac{1}{\sin t}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sin t+1}{\sin t-1}\right|+C=$$

$$=-\frac{1}{\sin\left(\mathrm{arctg}\,x\right)}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sin\left(\mathrm{arctg}\,x\right)+1}{\sin\left(\mathrm{arctg}\,x\right)-1}\right|+C;$$

3) $$\int\frac{\sqrt{x^2-4}}{x^3}dx=\left|\begin{array}{c}x=\dfrac{2}{\cos t}\\ dx=\dfrac{2\sin t}{\cos^2 t}dt\\ x^2-4=\dfrac{4}{\cos^2 t}-4=\dfrac{4-4\cos^2 t}{\cos^2 t}=4\dfrac{\sin^2 t}{\cos^2 t}\\ t=\arccos\dfrac{2}{x}\end{array}\right|=$$

$$=\int\frac{2\dfrac{\sin t}{\cos t}\cdot 2\dfrac{\sin t}{\cos^2 t}}{\dfrac{8}{\cos^3 t}}dt=\frac{1}{2}\int\sin^2 t\,dt=\frac{1}{2}\int\frac{1-\cos 2t}{2}dt=\frac{1}{4}\left(t-\frac{\sin 2t}{2}\right)+C=$$

$$=\frac{1}{4}\left(\arccos\frac{2}{x}-\sin\left(\arccos\frac{2}{x}\right)\cos\left(\arccos\frac{2}{x}\right)\right)+C=$$

$$=\frac{1}{4}\left(\arccos\frac{2}{x}-\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}\cdot\frac{2}{x}\right)+C=\frac{1}{4}\left(\arccos\frac{2}{x}-\frac{2\sqrt{x^2-4}}{x^2}\right)+C.$$

6.4 Інтеграли виду

$$\int \boldsymbol{R}\left(\boldsymbol{x}, \sqrt{\boldsymbol{ax^2+bx+c}}\right)\boldsymbol{dx} \qquad (6.13)$$

$$\left(\boldsymbol{a \neq 0,\;\; c-\frac{b^2}{4a} \neq 0}\right).$$

Цей інтеграл за допомогою підставляння

$$x = t-\frac{b}{2a} \qquad (6.14)$$

зводиться до одного з інтегралів виду (6.7)–(6.9).
Дійсно,

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\left(c-\frac{b^2}{4a}\right)} = \left|x = t-\frac{b}{2a}\right| = \sqrt{at^2+\left(c-\frac{b^2}{4a}\right)}.$$

Наведемо всі можливі випадки, коли підкорінний вираз існує:

1) нехай $a>0$, $c-\dfrac{b^2}{4a}>0$.

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a}\cdot\sqrt{t^2+\frac{1}{a}\left(c-\frac{b^2}{4a}\right)} = \left|\begin{array}{l} \dfrac{1}{a}\left(c-\dfrac{b^2}{4a}\right)>0 \\ \dfrac{1}{a}\left(c-\dfrac{b^2}{4a}\right)=k^2 \end{array}\right| = \sqrt{a}\cdot\sqrt{t^2+k^2}$$

2) нехай $a>0$, $c-\dfrac{b^2}{4a}<0$.

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a}\cdot\sqrt{t^2+\frac{1}{a}\left(c-\frac{b^2}{4a}\right)} = \left|\begin{array}{l} \dfrac{1}{a}\left(c-\dfrac{b^2}{4a}\right)<0 \\ \dfrac{1}{a}\left(c-\dfrac{b^2}{4a}\right)=-k^2 \end{array}\right| = \sqrt{a}\cdot\sqrt{t^2-k^2}$$

3. Нехай $a<0,\ c-\dfrac{b^2}{4a}>0$.

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{-a\left(-t^2-\frac{1}{a}\left(c-\frac{b^2}{4a}\right)\right)}=\sqrt{|a|}\cdot\sqrt{-t^2-\frac{1}{a}\left(c-\frac{b^2}{4a}\right)}=$$

$$=\left|\begin{array}{l} -\dfrac{1}{a}\left(c-\dfrac{b^2}{4a}\right)>0 \\ -\dfrac{1}{a}\left(c-\dfrac{b^2}{4a}\right)=k^2 \end{array}\right|=\sqrt{|a|}\cdot\sqrt{k^2-t^2}\ .$$

Відповідні приклади рекомендуємо розв'язати самостійно під час виконання завдань п. 7.6 (інтегрування ірраціональних функцій).

7 ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

7.1 Варіанти завдання I
Метод безпосереднього інтегрування

Варіант 1

1. $\int \left(2 + x\sqrt{x}\right) dx$.

2. $\int \left(\frac{1}{u} + \sqrt{5u}\right)^3 du$.

3. $\int \frac{4^x - 2^x}{3^x} dx$.

4. $\int \mathrm{tg}^2 x \, dx$.

5. $\int \frac{dx}{x^2\left(1 + x^2\right)}$.

6. $\int \frac{dx}{4x^2 + 7}$.

7. $\int \sin 3x \, dx$.

8. $\int \frac{dx}{\sqrt{5x^2 - 13}}$.

Варіант 2

1. $\int \left(5x - \frac{1}{\sqrt{3x}}\right) dx$.

2. $\int \left(t - \sqrt{2t}\right)^3 dt$.

3. $\int \frac{2^z - 3^z}{3^z} dz$.

4. $\int \sin^2 \frac{x}{2} dx$.

5. $\int \frac{x^2 dx}{1 + x^2}$.

6. $\int \frac{2dx}{9x^2 + 5}$.

7. $\int \cos 5x \, dx$.

8. $\int \frac{dx}{\sqrt{8 - 13x^2}}$.

Варіант 3

1. $\int\left(\frac{1}{2x}+x\sqrt[3]{x}\right)dx$.

2. $\int\frac{1-u}{1+\sqrt{u}}du$.

3. $\int\frac{2^z+1-3^{2z}}{3^z}dz$.

4. $\int\frac{1+2x^2}{x^2\left(1+x^2\right)}dx$.

5. $\int\frac{dx}{5x^2+3}$.

6. $\int e^{2x}dx$.

7. $\int\frac{dx}{\sqrt{15x^2-19}}$.

8. $\int\frac{dx}{\sin^2 11x}$.

Варіант 4

1. $\int\frac{1+x}{\sqrt{3x}}dx$.

2. $\int\left(\frac{1-t}{1+\sqrt{t}}\right)^2 dt$.

3. $\int\frac{3\cdot 5^x-5\cdot 3^x+1}{5^x\cdot 3^x}dx$.

4. $\int\frac{1+3x^2}{x^2\left(1+x^2\right)}dx$.

5. $\int\frac{2dx}{7x^2+5}$.

6. $\int\frac{dx}{\cos^2 4x}$.

7. $\int e^{-9x}dx$.

8. $\int\frac{dx}{\sqrt{8-15x^2}}$.

Варіант 5

1. $\int \frac{x-1}{\sqrt{2x}} dx$.

2. $\int \left(\frac{2}{\sqrt{u}} - 3u \right)^2 du$.

3. $\int e^{2x} dx$.

4. $\int \frac{2+x^2}{x^2\left(1+x^2\right)} dx$.

5. $\int \frac{dx}{3x^2+4}$.

6. $\int \frac{dx}{\sin^2 3x}$.

7. $\int \cos 4x\, dx$.

8. $\int \frac{dx}{\sqrt{15x^2+4}}$.

Варіант 6

1. $\int \left(\sqrt{3x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx$.

2. $\int \left(\frac{1-u}{\sqrt{u}} \right)^3 du$.

3. $\int \frac{4^z - 5^z + 1}{5^z} dz$.

4. $\int \sin^2 \frac{\pi - x}{2} dx$.

5. $\int \frac{2-x^2}{x^2\left(1+x^2\right)} dx$.

6. $\int \frac{dx}{4x^2+7}$.

7. $\int e^{-8x} dx$.

8. $\int \frac{dx}{\sqrt{8-11x}}$.

Варіант 7

1. $\int \left(2+\frac{5}{\sqrt{3x}} \right) dx$.

2. $\int \left(\frac{1-u}{1-\sqrt[3]{u}} + u \right) du$.

3. $\int \frac{5^x - 3^x}{2^x} dx$.

4. $\int \mathrm{tg}^2 (\pi - x) dx$.

5. $\int \frac{1-3x^2}{x^2 (1+x^2)} dx$.

6. $\int \frac{dx}{8x^2+7}$.

7. $\int \sin 8x \, dx$.

8. $\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2+14}}$.

Варіант 8

1. $\int \left(\frac{2}{\sqrt{x}} - 3x \right) dx$.

2. $\int \left(\frac{1-x}{1+\sqrt{x}} \right)^3 dx$.

3. $\int (2^x - 3^x) 4^x dx$.

4. $\int \mathrm{ctg}^2 (\pi - x) dx$.

5. $\int \frac{x^4 dx}{1+x^2}$.

6. $\int \frac{dx}{10x^2+3}$.

7. $\int \cos 5x \, dx$.

8. $\int \frac{dx}{\sqrt{9-14x^2}}$.

Варіант 9

1. $\int\left(2x^2+\frac{1}{\sqrt{2x}}\right)dx$.

2. $\int\left(\frac{1-x}{\sqrt{x}}\right)^2 dx$.

3. $\int\left(2^x e^x+1\right)dx$.

4. $\int\frac{1+\cos^2 x}{\sin^2 x}dx$.

5. $\int\frac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^4}}dx$.

6. $\int\frac{dx}{11x^2+5}$.

7. $\int\cos 5x\,dx$.

8. $\int\frac{dx}{\sqrt{7x^2+8}}$.

Варіант 10

1. $\int\left(2+3x^2\sqrt{x}\right)dx$.

2. $\int\frac{1+u}{1+\sqrt[3]{u}}du$.

3. $\int\frac{2^u+3^u-1}{2^u\cdot 3^u}du$.

4. $\int\frac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^4-1}}dx$.

5. $\int\frac{dx}{12x^2+7}$.

6. $\int 2^{4x}dx$.

7.. $\int\frac{dx}{\sin^2 5x}$

8. $\int\frac{dx}{\sqrt{6-5x^2}}$.

Варіант 11

1. $\int\left(x^3\sqrt{x}-5\right)dx$.

2. $\int\left(2u+\frac{3}{u}\right)^3 du$.

3. $\int\frac{5^x-3^x+1}{2^x}dx$.

4. $\int\frac{\sqrt{x^2+4}-\sqrt{x^2-4}}{\sqrt{x^4-16}}dx$.

5. $\int\frac{dx}{8x^2+3}$.

6. $\int\frac{dx}{\cos^2 3x}$.

7. $\int 7^{-2x}dx$.

8. $\int\frac{dx}{\sqrt{5x^2+6}}$.

Варіант 12

1. $\int\frac{1+\sqrt{5x}}{x^2}dx$.

2. $\int\left(\sqrt{x-1}\right)\cdot x\,dx$.

3. $\int e^{3x}dx$.

4. $\int\frac{\cos 2x\,dx}{\sin^2 x\cos^2 x}$.

5. $\int\frac{x^4-1}{1+x^2}dx$.

6. $\int\frac{dx}{16x^2+5}$.

7. $\int\frac{dx}{\sin^2 4x}$.

8. $\int\frac{dx}{\sqrt{5-19x^2}}$.

Варіант 13

1. $\int \frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt{2x}}{x}dx$.

2. $\int \left(2-\sqrt{3z}\right)^3 dz$.

3. $\int \frac{2^u-3^u+1}{5^u}du$.

4. $\int \frac{\left(1+x\right)^2}{1+x^2}dx$.

5. $\int \frac{dx}{9x^2+2}$

6. $\int \left(2+\mathrm{tg}^2 x\right)dx$.

7. $\int 3^{-2x}dx$.

8. $\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2-5}}$.

Варіант 14

1. $\int \frac{\sqrt[4]{x}-\sqrt[3]{2x}}{\sqrt{x}}dx$.

2. $\int \left(1-\sqrt{u}\right)\left(u+\sqrt{u}+1\right)du$.

3. $\int \frac{2^x-3^x+3}{6^x}dx$.

4. $\int \frac{(1-x)^2}{x(1+x^2)}dx$.

5. $\int \frac{dx}{14x^2+5}$.

6. $\int \frac{dx}{\sqrt{4-3x^2}}$.

7. $\int e^{-5x}dx$

8. $\int \frac{dx}{\sin^2 8x}$.

Варіант 15

1. $\int\left(x^2+\frac{1}{3x^2}\right)dx$.

2. $\int\left(\frac{1+\sqrt{z}}{z^2}\right)^2 dz$.

3. $\int\frac{2^x-3^x}{e^x}dx$.

4. $\int\frac{2\cos^2 x+3\sin^2 x}{\cos^2 x}dx$.

5. $\int\frac{(1+x)^2}{x(1+x^2)}dx$.

6. $\int\frac{dx}{7x^2+9}$.

7. $\int\cos 6x\,dx$.

8. $\int\frac{dx}{\sqrt{8-9x^2}}$.

Варіант 16

1. $\int\left(\frac{2}{x}+\frac{3}{\sqrt{x}}\right)dx$.

2. $\int\left(\sqrt{t}+\frac{1}{\sqrt{t}}\right)^3 dt$.

3. $\int\frac{2^x-3^x}{6^x}dx$.

4. $\int\frac{3\left(1+\sqrt{x}+x^2\right)}{\sqrt{x}\left(1+x^2\right)}dx$.

5. $\int\frac{dx}{15x^2+4}$.

6. $\int\sin 4x\,dx$.

7. $\int\frac{dx}{\sqrt{2x^2+7}}$.

8. $\int\frac{dx}{\cos^2 10x}$.

Варіант 17

1. $\int \frac{2+5x}{x\sqrt{x}}dx$.

2. $\int \frac{1-z}{2-2\sqrt{z}}dz$.

3. $\int \frac{2^z \cdot 3^z - 2}{2^z}dz$.

4. $\int \left(4+\mathrm{tg}^2 x\right)dx$.

5. $\int \frac{1+x^3+x^2}{x^3\left(1+x^2\right)}dx$.

6. $\int \frac{dx}{6x^2+11}$.

7. $\int e^{-3x}dx$.

8. $\int \frac{dx}{\sqrt{5-3x^2}}$.

Варіант 18

1. $\int \left(\left(2x\right)^2 - \frac{1}{\sqrt{3x}}\right)dx$.

2. $\int \left(1-\frac{1}{\sqrt{2t}}\right)^3 dt$.

3. $\int \frac{6^z-1}{3^z}dz$.

4. $\int \frac{1+3x+x^2dx}{x\left(1+x^2\right)}$.

5. $\int \frac{2dx}{8x^2+9}$.

6. $\int \frac{dx}{\cos^2 3x}$.

7. $\int e^{-11x}dx$.

8. $\int \frac{dx}{\sqrt{8x^2-1}}$.

Варіант 19

1. $\int\left(2\sqrt{x}+\frac{1}{2x}\right)dx$.

2. $\int\left(\sqrt{4x}-\frac{1}{x}\right)^3 dx$.

3. $\int\frac{3\cdot 5^x-2\cdot 3^x}{6^x}dx$.

4. $\int\frac{2-3x+2x^2}{\left(1+x^2\right)x}dx$.

5. $\int\frac{dx}{\sin^2 7x}$.

6. $\int e^{-5x}dx$.

7. $\int\frac{dx}{5x^2+7}$.

8. $\int\frac{dx}{\sqrt{11-3x^2}}$.

Варіант 20

1. $\int\frac{x-1}{x^3\sqrt{x}}dx$.

2. $\int\left(\frac{1-u}{1+\sqrt{u}}\right)^3 du$.

3. $\int e^{x/2}dx$.

4. $\int\frac{dx}{\operatorname{tg}^2(\pi-x)}$.

5. $\int\frac{3x^2+1}{1+x^2}dx$.

6. $\int\frac{2dx}{13x^2+2}$.

7. $\int\sin 7x\,dx$

8. $\int\frac{dx}{\sqrt{5x^2+8}}$.

Варіант 21

1. $\int\left(\sqrt{2x}+\sqrt[3]{x}\right)dx$.

2. $\int\left(z+\frac{1}{2\sqrt{z}}\right)^2 dz$.

3. $\int\frac{2^z-3^z-3}{2^z}dz$.

4. $\int\sin^2\frac{3\pi-x}{2}dx$.

5. $\int\frac{1+x^2+x^4}{x^2\left(1+x^2\right)}dx$.

6. $\int\frac{dx}{7x^2+3}$.

7. $\int\frac{dx}{\sqrt{16-5x^2}}$.

8. $\int e^{-3x}dx$.

Варіант 22

1. $\int\left(2x+\frac{5}{\sqrt{3x}}\right)dx$.

2. $\int\left(\frac{1+u}{2\sqrt{u}}\right)^2 du$.

3. $\int\frac{2^u-5^u}{10^u}du$.

4. $\int\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{2}-x\right)dx$.

5. $\int\frac{4+4x^4}{(1+x^2)x^2}dx$.

6. $\int\frac{dx}{8x^2+11}$.

7. $\int\sin 10x\,dx$.

8. $\int\frac{dx}{\sqrt{7-2x^2}}$.

Варіант 23

1. $\int \frac{2+3\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}dx$.

2. $\int \left(\sqrt{u}-\frac{3}{u}\right)^3 du$.

3. $\int 5^x\left(3^{-x}+e^{x/2}\right)dx$.

4. $\int \mathrm{ctg}^2(2\pi - x)dx$.

5. $\int \frac{1+4x^2}{x^2\left(1+x^2\right)}dx$.

6. $\int \frac{dx}{5x^2+3}$.

7. $\int \cos 9x\,dx$.

8. $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2-5}}$.

Варіант 24

1. $\int \left(\frac{1}{\sqrt{2x}}-\frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}\right)dx$.

2. $\int \frac{5^x-2^{-x}}{3^{2x}}dx.$

3. $\int \sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)dx$.

4. $\int \frac{3\sqrt{3+x^2}-2\sqrt{x^2-3}}{5\sqrt{x^4-9}}dx$.

5. $\int \frac{dx}{19x^2+7}$.

6. $\int 3^{5x}dx$.

7. $\int \frac{dx}{\sin^2 7x}$.

8. $\int \frac{dx}{\sqrt{9-5x^2}}$.

Варіант 25

1. $\int \frac{10x^2+3x}{x^4}dx$.

2. $\int \left(3^x+2^{-x}\right)e^x dx$.

3. $\int \frac{3+\cos^2 x}{\sin^2 x}dx$.

4. $\int \frac{1+x^4}{x^2(1+x^2)}dx$.

5. $\int \frac{dx}{4x^2+11}$.

6. $\int \frac{dx}{\cos^2 5x}$.

7. $\int \sin 13x\, dx$.

8. $\int \frac{dx}{\sqrt{15-6x^2}}$.

Варіант 26

1. $\int \left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)dx$.

2. $\int \left(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right)^2 dx$.

3. $\int 2^{-x}\left(1+\frac{2^x}{3^x}\right)dx$.

4. $\int \left(3+\mathrm{ctg}^2 x\right)dx$.

5. $\int \frac{2-3x^2dx}{x^2\left(1+x^2\right)}$.

6. $\int \frac{dx}{3x^2+13}$.

7. $\int e^{8x}dx$.

8. $\int \frac{dx}{\sqrt{8x^2-4}}$.

Варіант 27

1. $\int\left(2x+\frac{1}{3x}+\frac{1}{2x^2}\right)dx$.

2. $\int\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)^2 dx$.

3. $\int\left(1-\operatorname{tg}^2 x\right)dx$.

4. $\int\frac{5+x^2+x^4}{x^2\left(1+x^2\right)}dx$.

5. $\int\frac{dx}{2x^2+3}$.

6. $\int\frac{dx}{\sin^2 7x}$.

7. $\int e^{-3x}dx$

8. $\int\frac{dx}{\sqrt{5-4x^2}}$.

Варіант 28

1. $\int\left(x^2-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)dx$.

2. $\int\left(1-\sqrt{2u}\right)^3 du$.

3. $\int 4^{-x}\left(3^x+2^{3x}\right)dx$.

4. $\int\frac{2\sin^2 x+3\cos^2 x}{\sin^2 x\cdot\cos^2 x}dx$.

5. $\int\frac{2x^4+5x^2+5}{1+x^2}dx$.

6. $\int\frac{2dx}{6x^2+1}$.

7. $\int 3^{15x}dx$.

8. $\int\frac{dx}{\sqrt{10+3x^2}}$.

Варіант 29

1. $\int\left(\sqrt{5x}-\frac{1}{\sqrt{3x}}\right)dx$.

2. $\int\left(\frac{2}{z}+z\sqrt{z}\right)^2 dz$.

3. $\int\frac{3^x-2^x+2}{6^x}dx$.

4. $\int\left(2+\mathrm{ctg}^2 x\right)dx$.

5. $\int\frac{1+x^4}{x^2+x^4}dx$.

6. $\int\frac{dx}{9x^2+8}$.

7. $\int\sin 8x\,dx$.

8. $\int\frac{dx}{\sqrt{5-13x^2}}$.

Варіант 30

1. $\int\left(x^2+x+2+\frac{1}{x}\right)dx$.

2. $\int\frac{1-\sqrt{z}}{1+\sqrt[4]{z}}dz$.

3. $\int\frac{3^x-2^x}{e^{2x}}dx$.

4. $\int\left(2-\mathrm{ctg}^2 x\right)dx$.

5. $\int\frac{2x^4+5x^2+7}{1+x^2}dx$.

6. $\int\frac{dx}{19x^2+3}$.

7. $\int\cos 11x\,dx$.

8. $\int\frac{dx}{\sqrt{9+2x^2}}$.

7.2 Варіанти завдання II
Метод заміни змінної

Варіант 1

1. $\int \sqrt[3]{5+2x}\,dx$.

2. $\int \cos x\left(4-7\sin x\right)^5 dx$.

3. $\int \frac{5^x}{\sqrt{3\cdot 5^{2x}-4}}dx$.

4. $\int \frac{\cos\sqrt[4]{x}\,dx}{\sqrt[4]{x^3}}$.

5. $\int \frac{dx}{x^2+4x+5}$.

Варіант 2

1. $\int 7\sin 4x\,dx$.

2. $\int 3^x\left(5-4\cdot 3^x\right)^{5/2} dx$.

3. $\int \frac{\sin 5x\,dx}{\sqrt{3-5\cos^2 5x}}$.

4. $\int \frac{\arcsin^3 x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

5. $\int \frac{\cos x\,dx}{\sin^3 x}$.

Варіант 3

1. $\int 4e^{7x}dx$.

2. $\int 2\sin 6x\left(5-4\cos 6x\right)^3 dx$.

3. $\int \frac{x^3}{\sqrt{7x^8+3}}dx$.

4. $\int \sin\left(\frac{3}{x^2}\right)\cdot\frac{dx}{x^3}$.

5. $\int \frac{\cos x\,dx}{\sqrt{1-2\sin^2 x}}$.

Варіант 4

1. $\int 3\cos 9x\,dx$.

2. $\int \frac{x^5 dx}{\sqrt[5]{4-3x^6}}$.

3. $\int \frac{7\cos 8x\,dx}{\sqrt{3\sin^2 8x-4}}$.

4. $\int 7^{\operatorname{ctg} x}\frac{dx}{\sin^2 x}$.

5. $\int \frac{dx}{x\ln^2 x}$.

Варіант 5

1. $\int \frac{3\,dx}{(5x-3)\sqrt{5x-3}}$.

2. $\int \cos 15x \cdot \sqrt[4]{1-\sin 15x}\,dx$.

3. $\int \frac{4^x\,dx}{\sqrt{2\cdot 16^x+13}}$.

4. $\int x^4 \cos\left(x^5\right) dx$.

5. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}\arccos 2x}$.

Варіант 6

1. $\int \sin 31x\,dx$.

2. $\int \frac{7^x\,dx}{\left(5-4\cdot 7^x\right)^2}$.

3. $\int \frac{\sin 15x\,dx}{\sqrt{3-5\cos^2 15x}}$.

4. $\int \sqrt[4]{tg^2 x}\cdot \frac{dx}{\cos^2 x}$.

5. $\int \sin x\, e^{-\cos x} dx$.

Варіант 7

1. $\int 4e^{-5x} dx$.

2. $\int 12\sin 9x \sqrt[5]{3+2\cos 9x}\;dx$.

3. $\int \frac{x\sqrt{x}}{\sqrt{2x^5-7}}dx$.

4. $\int \sin\left(\cos x\right)\cdot \sin x\,dx$.

5. $\int \frac{(x-2)dx}{\sqrt{x^2-4x+5}}$.

Варіант 8

1. $\int 10\cos 13x\,dx$.

2. $\int \frac{2x^5 dx}{\left(3+4x^6\right)^3}$.

3. $\int \frac{\cos 1{,}5x\,dx}{\sqrt{4-9\sin^2 1{,}5x}}$.

4. $\int 3^{\sqrt[3]{x}} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$.

5. $\int e^{-x^3} x^2\,dx$.

Варіант 9

1. $\int \frac{5dx}{(7-12x)^5}$.

2. $\int \cos 4x (3-10\sin 4x)^{1,5}\, dx$.

3. $\int \frac{6^x\, dx}{\sqrt{4\cdot 36^x - 5}} dx$.

4. $\int \cos\left(x^5\right) x^4 dx$.

5. $\int \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$.

Варіант 10

1. $\int \sin 18x\, dx$.

2. $\int \frac{7^x\, dx}{\sqrt[3]{\left(3-5\cdot 7^x\right)^2}}$.

3. $\int \frac{\sin 16x\, dx}{\sqrt{3\cos^2 16x + 10}}$.

4. $\int \left(x\sqrt[10]{x}+1\right)^5 \sqrt[10]{x} dx$.

3) $\int \frac{\arccos^2 x\, dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

Варіант 11

1. $\int 3e^{-7x} dx$.

2. $\int \frac{\sin 11x\, dx}{\sqrt[7]{(3+6\cos 11x)^5}}$.

3. $\int \frac{x^4 dx}{\sqrt{5-8x^{10}}}$.

4. $\int \sin \operatorname{ctg} x \frac{dx}{\sin^2 x}$.

5. $\int \frac{\sqrt{1-\arcsin\left(x^2\right)}\; x\, dx}{\sqrt{1-x^4}}$.

Варіант 12

1. $\int \cos(-8x) dx$.

2. $\int \frac{x^8 dx}{\sqrt[3]{\left(2-11x^9\right)^5}}$.

3. $\int \frac{\cos 13x\, dx}{\sqrt{10\sin^2 13x - 4}}$.

4. $\int e^{4x^4} x^3 dx$.

5. $\int e^{2\cos 3x} \sin 3x dx$

Варіант 13

1. $\int \frac{dx}{(7x-15)^3}$.

2. $\int \cos 4x \sqrt[5]{2-3\sin 4x}\,dx$.

3. $\int \frac{7^x}{\sqrt{5-12\cdot 49^x}}\,dx$.

4. $\int 10\cos\sqrt[5]{x^4}\,\frac{dx}{\sqrt[5]{x}}$.

5. $\int e^{-x}\cos e^{-x}\,dx$.

Варіант 14

1. $\int 11\sin 16x\,dx$.

2. $\int \frac{3^{-5x}\,dx}{7+8\cdot 3^{-5x}}$.

3. $\int \frac{\sin 7x\,dx}{\sqrt{12\cos^2 7x+3}}$.

4. $\int \sqrt{3+\cos^2 x}\,\sin 2x\,dx$.

5. $\int \frac{\cos^2\left(e^{-x}\right)dx}{e^x}$.

Варіант 15

1. $\int e^{12x}dx$.

2. $\int 4\sin 8x(5\cos 8x-10)^4\,dx$.

3. $\int \frac{x^2\sqrt{x}dx}{\sqrt{8x^7+5}}$.

4. $\int x^5\sin\left(1+x^6\right)dx$.

5. $\int \frac{\sin x\,dx}{\cos^4 x}$.

Варіант 16

1. $\int \cos 20x\,dx$.

2. $\int x^7\sqrt[9]{4+12x^8}\,dx$.

3. $\int \frac{\cos 17x\,dx}{\sqrt{3-8\sin^2 17x}}$.

4. $\int 5^{\cos 3x}\sin 3x\,dx$.

5. $\int \frac{\cos 2x\,dx}{\sin^4 2x}$.

Варіант 17

1. $\int (10-3x)^7\,dx$.

2. $\int \cos 6x \sqrt[7]{10-8\sin 6x}\,dx$.

3. $\int \frac{10^x}{\sqrt{10-3\cdot 100^x}}\,dx$.

4. $\int \cos\left(x^3+5x\right)\left(3x^2+5\right)dx$.

5. $\int \frac{dx}{x\sqrt[3]{\ln x}}$.

Варіант 18

1. $\int \sin 17x\,dx$.

2. $\int 8^{-x}\left(1-5\cdot 8^{-x}\right)^4 dx$.

3. $\int \frac{\sin 10x\,dx}{\sqrt{6+5\cos^2 10x}}$.

4. $\int \frac{(5-2\operatorname{arctg} x)^2\,dx}{1+x^2}$.

5. $\int 2^x \cos 2^x\,dx$.

Варіант 19

1. $\int 7^{3x}\,dx$.

2. $\int \sin 9x\,(8-3\cos 9x)^{3/2}\,dx$.

3. $\int \frac{x^{11}}{\sqrt{5x^{24}-10}}\,dx$.

4. $\int \sin(5\sin 3x)\cos 3x\,dx$.

5. $\int \sin 5x\cdot\cos^3 5x\,dx$.

Варіант 20

1. $\int \cos 23x\,dx$.

2. $\int \frac{x^7\,dx}{\left(3x^8-14\right)^4}$.

3. $\int \frac{\cos 18x\,dx}{\sqrt{5-14\sin^2 18x}}$.

4. $\int 4^{\cos 3x}\cdot\sin 3x\,dx$.

5. $\int \frac{dx}{\left(1+x^2\right)\operatorname{arctg} x}$.

Варіант 21

1. $\int \frac{2dx}{(5-17x)^4}$.

2. $\int \frac{\cos 4x\,dx}{\sqrt{(3+5\sin 4x)^3}}$.

3. $\int \frac{9^x}{\sqrt{2\cdot 81^x-5}}dx$.

4. $\int 7^x \cdot \cos 7^x dx$.

5. $\int \frac{\sqrt[3]{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2}dx$.

Варіант 22

1. $\int \sin 14x\,dx$.

2. $\int \frac{9^x dx}{\left(5+4\cdot 9^x\right)^5}$.

3. $\int \frac{\sin 18x\,dx}{\sqrt{3\cos^2 18x+19}}$.

4. $\int \sqrt{\frac{7+2\arcsin x}{1-x^2}}dx$.

5. $\int x\operatorname{ctg}\left(3x^2\right)dx$.

Варіант 23

1. $\int 4^{3x}dx$.

2. $\int \sin 5x(3+10\cos 5x)^{-5}\,dx$.

3. $\int \frac{x^9}{\sqrt{12-7\cdot x^{20}}}dx$.

4. $\int \frac{\sin \operatorname{arctg} x}{1+x^2}dx$.

5. $\int \frac{x\cos\left(x^2\right)dx}{\sqrt{\sin\left(x^2\right)}}$.

Варіант 24

1. $\int \cos 19x\,dx$.

2. $\int \frac{4x^{13}dx}{\sqrt[9]{\left(5x^{14}-18\right)^{10}}}$.

3. $\int \frac{\cos 21x\,dx}{\sqrt{10\sin^2 21x-2}}$.

4. $\int 8^{\sqrt[3]{x^4}} \cdot \sqrt[3]{x}dx$.

4) $\int \frac{x^2\sin\left(x^3\right)dx}{\sqrt[4]{\cos\left(x^3\right)}}$.

Варіант 25

1. $\int \sqrt[7]{(3+4x)^2}\,dx$.

2. $\int \cos 13x(5+8\sin 13x)^{-3}\,dx$.

3. $\int \frac{15^x\,dx}{\sqrt{7\cdot 225^x+16}}$.

4. $\int \frac{\cos\sqrt[6]{x^5}\,dx}{\sqrt[6]{x}}$.

5. $\int \frac{x^2dx}{2^{x^3}}$

Варіант 26

1. $\int 5\sin 14x\,dx$.

2. $\int 6^x\left(6-5\cdot 6^x\right)^{-5/2}dx$.

3. $\int \frac{\sin 12x\,dx}{\sqrt{4-6\cos^2 12x}}$.

4. $\int \frac{\arcsin^4 x}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

5. $\int (x-1)\sqrt{2-2x+x^2}\,dx$

Варіант 27

1. $\int 5e^{-8x}dx$.

2. $\int 3\sin 7x(6-5\cos 7x)^4\,dx$.

3. $\int \frac{x^4}{\sqrt{8x^{10}+4}}dx$.

4. $\int \sin\left(4x^{-3}\right)\cdot\frac{dx}{x^4}$.

5. $\int \frac{\sin 2x\,dx}{2+\cos^2 x}$

Варіант 28

1. $\int 4\cos 10x\,dx$.

2. $\int \frac{x^6dx}{\sqrt[6]{5-4x^7}}$.

3. $\int \frac{8\cos 9x\,dx}{\sqrt{4\sin^2 9x+5}}$.

4. $\int 8^{\operatorname{ctg} x}\frac{dx}{\sin^2 x}$.

5. $\int \frac{\cos\sqrt[4]{x}}{\sqrt[4]{x^3}}dx$

Варіант 29

1. $\int \frac{4dx}{(6x-4)\sqrt{6x-4}}$.

2. $\int \cos 16x \sqrt[5]{1-\sin 16} dx$.

3. $\int \frac{5^x dx}{\sqrt{3 \cdot 25^x - 14}}$.

4. $\int x^5 \cos\left(x^6\right) dx$.

5. $\int (x+1) \operatorname{tg}\left(x^2 + 2x + 5\right) dx$

Варіант 30

1. $\int \sin 32x \, dx$.

2. $\int \frac{8^x dx}{\left(6 - 5 \cdot 8^x\right)^3}$.

3. $\int \frac{\sin 16x \, dx}{\sqrt{4 - 6\cos^2 16x}}$.

4. $\int \sqrt[8]{\operatorname{tg}^3 x} \cdot \frac{dx}{\cos^2 x}$.

5. $\int \frac{2^{\cos x} - 3^{\cos x}}{5^{\cos x}} \cdot \sin x \, dx$

7.3 Варіанти завдання III
Метод інтегрування частинами

Варіант 1

1. $\int e^{3x} \cdot x^2\, dx$.

2. $\int x^2 \arccos 2x$.

3. $\int x \sin 2x\, dx$.

4. $\int \frac{x\,dx}{\sin^2 x}$.

5. $\int 2^x \sin x\, dx$.

Варіант2

1. $\int x^2 \sin 2x\, dx$.

2. $\int x \operatorname{arctg} x dx$.

3. $\int x \cdot e^{2x} dx$.

4. $\int \frac{x\,dx}{\cos^2 x}$.

5. $\int \frac{\sin x\, dx}{e^x}$.

Варіант 3

1. $\int x \cos 4x\, dx$.

2. $\int x^3 \ln x dx$.

3. $\int x e^{-2x} dx$.

4. $\int \ln\left(1 + x^2\right) dx$.

5. $\int e^x \sin 3x\, dx$.

Варіант 4

1. $\int x \cdot e^{-5x} dx$.

2. $\int x^2 \arcsin x\, dx$.

3. $\int x \cos \frac{x}{2} dx$.

4. $\int \frac{\ln x}{x^3} dx$.

5. $\int 3^x \cos x\, dx$.

Варіант 5

1. $\int x\sin 6x\,dx$.

2. $\int x^2 \operatorname{arcctg} x\,dx$.

3. $\int x\cdot 2^x\,dx$.

4. $\int \frac{\ln\cos x}{\cos^2 x}dx$.

5. $\int 3^{-x}\cos x\,dx$.

Варіант 6

1. $\int x^2\cos 5x\,dx$.

2. $\int x\arccos 3x\,dx$.

3. $\int x\cdot 2^{-x}\,dx$.

4. $\int x^2\sin^2 x\,dx$.

5. $\int 2^{-x}\cos x\,dx$.

Варіант 7

1. $\int x^2 e^{4x}dx$.

2. $\int x^4\ln x\,dx$.

3. $\int x\operatorname{arcctg} 2x\,dx$.

4. $\int \frac{\arcsin\frac{x}{2}}{\sqrt{2+x}}dx$.

5. $\int e^{-2x}\sin 3x\,dx$.

Варіант 8

1. $\int x\sin 3x\,dx$.

2. $\int x^2\arcsin 9x\,dx$.

3. $\int \ln x\,dx$.

4. $\int \frac{\arccos\frac{x}{2}}{\sqrt{3-x}}dx$.

5. $\int 2^x\sin\frac{x}{2}dx$.

Варіант 9

1. $\int x\cos 7x\,dx$.

2. $\int x^2 \text{arctg}\, 3x\,dx$.

3. $\int e^{\sqrt{x}}dx$.

4. $\int \frac{\arccos x}{\sqrt{1-x}}dx$.

5. $\int e^{-x}\sin 2x\,dx$.

Варіант 10

1. $\int x^2 e^{-4x}dx$.

2. $\int x^2 \arccos 5x$.

3. $\int \ln^2 2x\,dx$.

4. $\int \frac{\ln\sin x}{\sin^2 x}dx$.

5. $\int e^x \cos\frac{x}{2}dx$.

Варіант 11

1. $\int x^2 \sin 7x\,dx$.

2. $\int x\,\text{arcctg}\, 2x\,dx$.

3. $\int x\ln\frac{x}{2}dx$.

4. $\int \frac{\arcsin\frac{x}{3}}{\sqrt{3+x}}dx$.

5. $\int e^x \sin 3x\,dx$.

Варіант 12

1. $\int x^2 \cos 6x\,dx$.

2. $\int x\arcsin 6x\,dx$.

3. $\int x\cdot 2^{-x}dx$.

4. $\int \frac{\arccos\frac{x}{2}}{\sqrt{2+x}}dx$.

5. $\int e^{-x}\cos 3x\,dx$.

Варіант 13

1. $\int xe^{-7x}dx$.

2. $\int x^8 \ln x\, dx$.

3. $\int \operatorname{arctg} 2x\, dx$.

4. $\int \left(x^2+x+1\right)\sin x\, dx$.

5. $\int e^x \sin^2 x\, dx$.

Варіант 14

1. $\int x \sin 10x\, dx$.

2. $\int x^2 \operatorname{arctg} 7x\, dx$.

3. $\int x \ln 2x\, dx$.

4. $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x}}dx$.

5. $\int e^x \cos^2 x\, dx$.

Варіант 15

1. $\int x \cos 9x\, dx$.

2. $\int x^2 \arccos x\, dx$.

3. $\int x \operatorname{tg}^2 x\, dx$.

4. $\int \left(x^2-x+1\right)\ln x\, dx$.

5. $\int e^{2x} \sin 2x\, dx$.

Варіант 16

1. $\int x^2 e^{-7x}dx$.

2. $\int x \operatorname{arcctg} 16x\, dx$.

3. $\int x \operatorname{ctg}^2 x\, dx$.

4. $\int \sqrt{x} \ln x\, dx$.

5. $\int e^{2x} \cos 2x\, dx$.

Варіант 17

1. $\int x^2 \sin 8x\, dx$.

2. $\int x^2 \arcsin 5x$.

3. $\int \frac{x\, dx}{\mathrm{ctg}^2 x}$.

4. $\int \frac{\ln x\, dx}{x^3}$.

5. $\int e^{-3x} \sin x\, dx$.

Варіант 18

1. $\int x^2 \cos 7x\, dx$.

2. $\int x^9 \ln x\, dx$.

3. $\int \frac{x\, dx}{\mathrm{tg}^2 x}$.

4. $\int \mathrm{arctg} \frac{x}{3} dx$.

5. $\int e^{3x} \cos x\, dx$.

Варіант 19

1. $\int x e^{-10x} dx$.

2. $\int x^2 \arcsin 10x\, dx$.

3. $\int \frac{\ln x}{x^2} dx$.

4. $\int x \cos 2x\, dx$.

5. $\int e^{-3x} \cos 2x\, dx$.

Варіант 20

1. $\int x \sin 12x\, dx$.

2. $\int x^2 \mathrm{arctg}\, 8x\, dx$.

3. $\int \ln \frac{x}{5} dx$.

4. $\int x \sin^2 x\, dx$.

5. $\int e^{-x} \cos 3x\, dx$.

Варіант 21

1. $\int x\cos 13x\,dx$.

2. $\int x^2 \arccos 5x\,dx$.

3. $\int \frac{x\,dx}{2^x}$.

4. $\int x\cos^2 x\,dx$.

5. $\int e^{-x}\sin 2x\,dx$.

Варіант 22

1. $\int e^{-3x}x^2\,dx$.

2. $\int x^2 \arcsin 12x\,dx$.

3. $\int \ln\left(1+x^2\right)dx$.

4. $\int x\cos\frac{x}{3}dx$.

5. $\int e^{x}\sin 5x\,dx$.

Варіант 23

1. $\int x^2\sin 12x\,dx$.

2. $\int x\,\mathrm{arctg}\,8x\,dx$.

3. $\int x^2\ln\left(1+x\right)dx$.

4. $\int e^{\sqrt{\cos x}}\cdot\sin x\,dx$.

5. $\int e^{-x}\cos\frac{x}{3}dx$.

Варіант 24

1. $\int x\cos 14x\,dx$.

2. $\int x^4\ln x\,dx$.

3. $\int \frac{\arcsin 5x}{\sqrt{5+x}}dx$.

4. $\int e^{\sqrt{\sin x}}\cos x\,dx$.

5. $\int e^{3x}\sin\frac{x}{2}dx$.

Варіант 25

1. $\int xe^{-15x}dx$.

2. $\int x^2 \arcsin 6x\,dx$.

3. $\int \ln^2 3x\,dx$.

4. $\int x^2 \cos x\,dx$

5. $\int e^{2x} \cos x\,dx$

Варіант 26

1. $\int x \sin 16x\,dx$.

2. $\int x^2 \operatorname{arctg} 3x\,dx$.

3. $\int x3^{-x}\,dx$.

4. $\int \ln^3 x\,dx$.

5. $\int e^{-x} \cos 2x\,dx$

Варіант 27

1. $\int x \cdot e^{-2x}dx$.

2. $\int x \arccos 13x\,dx$.

3. $\int \frac{x \sin x\,dx}{\cos^3 x}$.

4. $\int x^2 \cos 15x\,dx$.

5. $\int e^{-2x} \sin x\,dx$

Варіант 28

1. $\int x \sin 3x\,dx$.

2. $\int x^5 \ln x\,dx$.

3. $\int \frac{\arccos x}{\sqrt{1+x}}dx$.

4. $\int x^2 e^{-11x}\,dx$.

5. $\int e^{3x} \sin 2x\,dx$

Варіант 29

1. $\int x \sin 15x\, dx$.

2. $\int x^2 \arcsin 4x\, dx$.

3. $\int \frac{x \cos x\, dx}{\sin^3 x}$.

4. $\int x 5^x dx$.

5. $\int e^{-3x} \sin 5x\, dx$.

Варіант 30

1. $\int x \cos 7x\, dx$.

2. $\int x^2 \operatorname{arctg} 9x\, dx$.

3. $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{1+x^2}}$.

4. $\int x^2 \cos^2 x\, dx$.

5. $\int e^{-5x} \sin 2x\, dx$.

7.4 Варіанти завдання IV
Метод інтегрування раціональних дробів

Варіант 1

1. $\int \frac{x^3+3x+4}{x^2-2x-3}dx.$

2. $\int \frac{(2x+2)dx}{(x^2+7x+12)(x+2)}.$

3. $\int \frac{(x^2+7x+4)dx}{(x+1)^2(x+3)}.$

4. $\int \frac{(x^2+2x-19)dx}{(x+3)(x^2+2x+5)}.$

5. $\int \frac{2x^3-5x^2-x-2}{(x-2)^2(x^2+x+2)}dx.$

Варіант 2

1. $\int \frac{3x^3+x^2+5}{x^2-x-6}dx.$

2. $\int \frac{3x^2-9x+16}{(x^2+x-6)(x-4)}dx.$

3. $\int \frac{x^2+11}{(x-3)^2(x-1)}dx\cdot$

4. $\int \frac{x^2-5x+8}{(x+2)(x^2-x+5)}dx.$

5. $\int \frac{4x^2-22x-6}{(x-3)^2(x^2+2x+3)}dx.$

Варіант 3

1. $\int \frac{x^3-x^2+x+4}{x^2-2x-3}dx.$

2. $\int \frac{6x^2+11x-14}{(x^2+5x+6)(x-4)}dx.$

3. $\int \frac{16dx}{(x-3)^2(x+1)}.$

4. $\int \frac{x^2+9x+8}{(x-1)(x^2+x+4)}dx.$

5. $\int \frac{x^3+x^2+5x+1}{(x+1)^2(x^2+x+2)}dx.$

Варіант 4

1. $\int \frac{3x^3+4x-2}{x^2-3x+2}dx.$

2. $\int \frac{2x^2-5x-10}{(x^2+2x-8)(x-3)}dx.$

3. $\int \frac{x^2+12x+19}{(x+3)^2(x-1)}dx\cdot$

4. $\int \frac{(8+3x-x^2)dx}{(x-3)(x^2-2x+5)}.$

5. $\int \frac{4x^2+5x+4}{(x+2)^2(x^2+x+3)}dx.$

Варіант 5

1. $\int \frac{4x^3 + x + 4}{x^2 + 3x + 2} dx.$

2. $\int \frac{(5x+46)dx}{(x^2+7x+12)(x-2)}.$

3. $\int \frac{4dx}{(x+3)^2(x-1)}.$

4. $\int \frac{(x^2+8x+4)dx}{(x-2)(x^2+2x+4)}.$

5. $\int \frac{3x^3+14x^2+31x+20}{(x+3)^2(x^2-x+2)} dx.$

Варіант 6

1. $\int \frac{2x^3-4x^2+x+10}{x^2+x-2} dx.$

2. $\int \frac{(x^2+6x-34)dx}{(x^2-5x+6)(x+4)}.$

3. $\int \frac{2x^2-5x-2}{(x-2)^2(x-3)} dx.$

4. $\int \frac{3x^2+2x+5}{(x+1)(x^2-x+4)} dx.$

5. $\int \frac{3x^3-4x^2+4x-10}{(x-1)^2(x^2+x+3)} dx.$

Варіант 7

1. $\int \frac{4x^3 + x + 7}{x^2 + x - 6} dx.$

2. $\int \frac{(2x^2+4x+6)dx}{(x^2+7x+10)(x+1)}.$

3. $\int \frac{70-10x}{(x-2)^2(x+3)} dx.$

4. $\int \frac{(x^2-22x+3)dx}{(x+3)(x^2-4x+5)}.$

5. $\int \frac{3x^2-11x+22}{(x-2)^2(x^2-x+2)} dx.$

Варіант 8

1. $\int \frac{x^3 + 3x^2 + 6}{x^2 - 4x + 3} dx.$

2. $\int \frac{(2x^2+7x+9)dx}{(x^2+6x+5)(x+2)}.$

3. $\int \frac{(7x+22)dx}{(x+1)^2(x+4)}.$

4. $\int \frac{(19-2x)dx}{(x-3)(x^2-2x+10)}.$

5. $\int \frac{2x^3+4x^2+6x+7}{(x+2)^2(x^2+2x+3)} dx.$

Варіант 9

1. $\int \frac{2x^3+4x+5}{x^2-x-2}dx$.

2. $\int \frac{(14-5x)dx}{(x^2-6x+8)(x-3)}$.

3. $\int \frac{(19-14x)dx}{(x-1)^2(x+4)}$.

4. $\int \frac{3x^2-x+7}{(x-1)(x^2-x+4)}dx$.

5. $\int \frac{(6x^2-x+5)dx}{(x+1)^2(x^2-x+2)}$.

Варіант 10

1. $\int \frac{x^3+x-5}{x^2-x-12}dx.$

2. $\int \frac{(2x^2+7x+9)dx}{(x^2+6x+5)(x+2)}$.

3. $\int \frac{(7x+22)dx}{(x+1)^2(x-4)}$.

4. $\int \frac{(19-2x)dx}{(x-3)(x^2-2x+7)}$.

5. $\int \frac{2x^3+4x^2+6x+7}{(x+2)^2(x^2+2x+3)}dx$.

Варіант 11

1. $\int \frac{3x^3+4x^2+9}{x^2-5x+4}dx$.

2. $\int \frac{3x^2-12x+21}{(x^2-x-2)(x-5)}dx$.

3. $\int \frac{6-7x-x^2}{(x+1)^2(x+4)}dx$.

4. $\int \frac{x^2-11x+4}{(x-2)(x^2+3x+4)}dx$.

5. $\int \frac{8x^2+16x+9}{(x+3)^2(x^2-x+1)}dx$.

Варіант 12

1. $\int \frac{x^3+2x+5}{x^2-2x-8}dx$.

2. $\int \frac{(17x+29)dx}{(x^2-x-2)(x+5)}$.

3. $\int \frac{7+3x-x^2}{(x-4)^2(x-1)}dx$.

4. $\int \frac{(6-8x)dx}{(x+1)(x^2-2x+4)}$.

5. $\int \frac{x^3+2x^2-12x+12}{(x-1)^2(x^2-x+13)}dx$.

Варіант 13

1. $\int \frac{2x^3+x^2+4x}{x^2+2x-8}dx$.

2. $\int \frac{2x^2-7x+7}{\left(x^2-7x+10\right)(x-1)}dx$.

3. $\int \frac{(43-7x)dx}{(x-4)^2(x+1)}$.

4. $\int \frac{\left(x^2+10x+8\right)dx}{(x+3)\left(x^2-2x+2\right)}$.

5. $\int \frac{20dx}{(x-2)^2\left(x^2+x+4\right)}$.

Варіант 14

1. $\int \frac{3x^3+x+2}{x^2-6x+5}dx$.

2. $\int \frac{\left(x^2-x+34\right)dx}{\left(x^2-6x+5\right)(x+2)}$.

3. $\int \frac{x^2-4x-22}{(x+4)^2(x-1)}dx$.

4. $\int \frac{6-10x-x^2}{(x+2)\left(x^2-2x+3\right)}dx$.

5. $\int \frac{x^3+6x^2-7x-96}{(x-3)^2\left(x^2+2x+3\right)}dx$.

Варіант 15

1. $\int \frac{2x^3-x+3}{x^2+3x-4}dx$.

2. $\int \frac{2x^2-19x-20}{\left(x^2+3x-4\right)(x+2)}dx$.

3. $\int \frac{9dx}{(x+4)^2(x+1)}$.

4. $\int \frac{\left(2x^2+5\right)dx}{(x-1)\left(x^2+2x+4\right)}$.

5. $\int \frac{x^3-5x^2+13x+7}{(x+1)^2\left(x^2-2x+3\right)}dx$.

Варіант 16

1. $\int \frac{x^3+x^2+4x}{x^2+4x+3}dx$.

2. $\int \frac{(8x+2)dx}{\left(x^2+3x-4\right)(x-2)}$.

3. $\int \frac{(x-7)dx}{(x-1)^2(x+2)}$.

4. $\int \frac{\left(x^2+6x+18\right)dx}{(x-3)\left(x^2+2x+3\right)}$.

5. $\int \frac{13x^2+12x+5}{(x+2)^2\left(x^2-2x+3\right)}dx$.

Варіант 17

1. $\int \frac{2x^3+5x^2-3}{x^2-3x-4}dx$.

2. $\int \frac{3x^2+2x-17}{\left(x^2+6x+5\right)\left(x-1\right)}dx$.

3. $\int \frac{x^2-5x+18}{\left(x+2\right)\left(x-2\right)^2}dx$.

4. $\int \frac{14+5x-x^2}{\left(x-2\right)\left(x^2+x+4\right)}dx$.

5. $\int \frac{5x^3+18x^2+23x+8}{\left(x+3\right)^2\left(x^2-2x+2\right)}dx$.

Варіант 18

1. $\int \frac{3x^3+4x^2+2}{x^2+5x+4}dx$.

2. $\int \frac{\left(x^2-14x+3\right)dx}{\left(x^2-6x+5\right)\left(x+1\right)}$.

3. $\int \frac{\left(7x+1\right)dx}{\left(x^2-1\right)\left(x+1\right)}$.

4. $\int \frac{\left(5-7x\right)dx}{\left(x+1\right)\left(x^2-2x+3\right)}$.

5. $\int \frac{\left(3x^2+9x+2\right)dx}{\left(x-1\right)^2\left(x^2+2x+4\right)}$.

Варіант 19

1. $\int \frac{2x^3-x^2+4}{x^2-4x-5}dx$.

2. $\int \frac{5x^2+x-10}{\left(x^2-x-2\right)\left(x+2\right)}dx$.

3. $\int \frac{9-x-x^2}{\left(x-2\right)^2\left(x+1\right)}dx$.

4. $\int \frac{\left(5x-2\right)dx}{\left(x+3\right)\left(x^2-x+1\right)}$.

5. $\int \frac{2x^3+4x^2-12x-36}{\left(x-2\right)^2\left(x^2+3x+4\right)}dx$.

Варіант 20

1. $\int \frac{x^3+3x^2+x+4}{x^2-5x+6}dx$.

2. $\int \frac{2x^2+7x+11}{\left(x^2+3x-4\right)\left(x+1\right)}dx$.

3. $\int \frac{\left(5x^2+x-2\right)dx}{\left(x+2\right)^2\left(x-3\right)}$.

4. $\int \frac{\left(5-x-x^2\right)dx}{\left(x+2\right)\left(x^2+2x+3\right)}$.

5. $\int \frac{\left(5x^2+8x-30\right)dx}{\left(x-3\right)^2\left(x^2-2x+10\right)}$.

Варіант 21

1. $\int \frac{4x^3 - x^2 + 2}{x^2 + x - 6} dx$.

2. $\int \frac{(2-8x)dx}{(x^2 - 5x + 4)(x+1)}$.

3. $\int \frac{(x^2 + x - 3)dx}{(x-1)^2 (x-2)}$.

4. $\int \frac{(2x+1)dx}{(x-1)(x^2 - x + 3)}$.

5. $\int \frac{x^3 - 12x^2 - 3x + 17}{(x+1)^2 (x^2 - 2x + 4)} dx$.

Варіант 22

1. $\int \frac{x^3 + x + 14}{x^2 - 6x + 8} dx$.

2. $\int \frac{(x^2 - 7)dx}{(x^2 - 3x + 2)(x+1)}$.

3. $\int \frac{9x\,dx}{(x+1)^2 (x-2)}$.

4. $\int \frac{(x^2 + 2x + 11)dx}{(x-3)^2 (x^2 + x + 1)}$.

5. $\int \frac{6x^3 + 15x^2 + 37x + 20}{(x+2)^2 (x^2 - 3x + 4)} dx$.

Варіант 23

1. $\int \frac{x^3 + 4x^2 + x + 5}{x^2 - 7x + 10} dx$.

2. $\int \frac{(13x - 23)dx}{(x^2 - 2x - 3)(x-2)}$.

3. $\int \frac{(x^2 + x - 3)dx}{(x+1)^2 (x+2)}$.

4. $\int \frac{(x^2 - 3x + 10)dx}{(x-2)(x^2 - x + 2)}$.

5. $\int \frac{(26x^2 + 58x - 8)dx}{(x+3)^2 (x^2 - 4x + 5)}$.

Варіант 24

1. $\int \frac{x^3 + x^2 + x + 2}{x^2 - 2x - 15} dx$.

2. $\int \frac{(2x + 14)dx}{(x^2 + 4x + 3)(x-1)}$.

3. $\int \frac{x\,dx}{(x-2)^2 (x-1)}$.

4. $\int \frac{x^2 - 7x + 4}{(x+1)(x^2 - x + 2)} dx$.

5. $\int \frac{x^3 + x^2 - 3x + 9}{(x-1)^2 (x^2 - x + 4)} dx$.

Варіант 25

1. $\int \frac{4x^3+x^2+3x}{x^2+5x+6}dx$.

2. $\int \frac{4x^2+5x+11}{\left(x^2+4x+3\right)\left(x-2\right)}dx$.

3. $\int \frac{x^2+9x+17}{(x+2)^2(x-1)}dx$.

4. $\int \frac{\left(x^2-6x+1\right)dx}{\left(x+3\right)\left(x^2-x+2\right)}$.

5. $\int \frac{12+10x-3x^2}{\left(x-2\right)^2\left(x^2+2x+4\right)}dx$.

Варіант 26

1. $\int \frac{x^3+x^2+3}{x^2-2x-8}dx$.

2. $\int \frac{\left(6x-1\right)dx}{\left(x^2-4x+3\right)\left(x+2\right)}$.

3. $\int \frac{\left(3-x^2\right)dx}{\left(x+2\right)^2\left(x+1\right)}$.

4. $\int \frac{2x\,dx}{\left(x+2\right)\left(x^2+x+2\right)}$.

5. $\int \frac{-2x^3+15x^2-24x+15}{\left(x-3\right)^2\left(x^2-2x+5\right)}dx$.

Варіант 27

1. $\int \frac{\left(x^3+1\right)dx}{x^2+6x+8}$.

2. $\int \frac{2x^2-10x-10}{\left(x^2-2x-8\right)\left(x-1\right)}dx$.

3. $\int \frac{\left(x+14\right)dx}{\left(x+2\right)^2\left(x-2\right)}$.

4. $\int \frac{\left(x^2+x+8\right)dx}{\left(x-1\right)\left(x^2+x+3\right)}$.

5. $\int \frac{5x^3+6x^2+18x-1}{\left(x+1\right)^2\left(x^2-x+4\right)}dx$.

Варіант 28

1. $\int \frac{x^3+3x+2}{x^2+7x+12}dx$.

2. $\int \frac{\left(3x-7\right)dx}{\left(x-1\right)\left(x^2-5x+6\right)}$.

3. $\int \frac{x^2-2x+17}{\left(x-1\right)^2\left(x+3\right)}dx$.

4. $\int \frac{\left(x^2+5x+12\right)dx}{\left(x-3\right)\left(x^2+2x+3\right)}$.

5. $\int \frac{14x^2+14x+16}{\left(x+2\right)^2\left(x^2-x+5\right)}dx$.

Варіант 29

1. $\int \frac{2x^3 + x + 6}{x^2 - 3x - 10} dx$.

2. $\int \frac{(2x+11)dx}{(x^2 - 2x - 3)(x-1)}$.

3. $\int \frac{8dx}{(x-1)^2 (x-3)}$.

4. $\int \frac{(x+7)dx}{(x-2)(x^2 + x + 3)}$.

5. $\int \frac{x^3 + 4x^2 + 5x - 10}{(x+3)^2 (x^2 + 2x + 5)} dx$.

Варіант 30

1. $\int \frac{x^3 + 3}{x^2 - x - 20} dx$.

2. $\int \frac{x^2 + 9x - 6}{(x^2 - 1)(x+2)} dx$.

3. $\int \frac{x^2 + 14x - 3}{(x+1)^2 (x-3)} dx$.

4. $\int \frac{(3x^2 + 2x + 3)dx}{(x+1)(x^2 + x + 2)}$.

5. $\int \frac{x^3 - 2x^2 + 4x}{(x-1)^2 (x^2 + x + 4)} dx$.

7.5 Варіанти завдання V
Інтегрування тригонометричних функцій

Варіант 1

1. $\int \sin^3 x\, dx$.

2. $\int \frac{dx}{1+2\cos x}$.

3. $\int \frac{\mathrm{tg}\, x\, dx}{1-\mathrm{tg}^2 x}$.

4. $\int \sin^2 x\, dx$.

5. $\int \sin x \cdot \cos 3x\, dx$.

Варіант 2

1. $\int \sin^5 x\, dx$.

2. $\int \frac{dx}{1-3\cos x}$.

3. $\int \mathrm{tg}^4 x\, dx$.

4. $\int \cos^2 x\, dx$.

5. $\int \sin 3x \cdot \sin 5x\, dx$.

Варіант 3

1. $\int \cos^3 x\, dx$.

2. $\int \frac{dx}{2-3\sin x}$.

3. $\int \frac{\mathrm{ctg}\, x\, dx}{\mathrm{ctg}^2 x-1}$.

4. $\int (1+\cos x)^2\, dx$.

5. $\int \sin 9x \cdot \sin x\, dx$.

Варіант 4

1. $\int \cos^5 x\, dx$.

2. $\int \frac{\sin x\, dx}{1+\sin x}$.

3. $\int \mathrm{tg}^3 x\, dx$.

4. $\int (1+2\sin x)^2\, dx$.

5. $\int \sin 10x \cdot \sin 15x\, dx$.

Варіант 5

1. $\int \frac{\sin x\,dx}{\cos x\left(1+\cos^2 x\right)}$.

2. $\int \frac{\cos x\,dx}{1+\cos x}$.

3. $\int \mathrm{ctg}^5 x\,dx$.

4. $\int \sin^3 x \cdot \cos^3 x\,dx$.

5. $\int \sin x \cdot \cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)dx$.

Варіант 6

1. $\int \frac{\sin^3 x\,dx}{\cos x}$.

2. $\int \frac{dx}{1+\cos x}$.

3. $\int \mathrm{ctg}^3 x\,dx$.

4. $\int \frac{dx}{\sin^4 x}$.

5. $\int \sin x \cdot \cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)dx$.

Варіант 7

1. $\int \frac{\sin^3 x\,dx}{\cos^4 x-\cos^2 x}$.

2. $\int \frac{dx}{5-4\sin x}$.

3. $\int \frac{dx}{1+\cos^2 x}$.

4. $\int \frac{dx}{\cos^4 x}$.

5. $\int \sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\cdot \cos x\,dx$.

Варіант 8

1. $\int \frac{\sin x\,dx}{\cos 2x}$.

2. $\int \frac{dx}{2\sin x-\cos x+5}$.

3. $\int \frac{dx}{1+\sin^2 x}$.

4. $\int \frac{dx}{\sin x}$.

5. $\int \sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\cdot \cos x\,dx$.

Варіант 9

1. $\int \frac{\cos x\,dx}{\cos 2x}$.

2. $\int \frac{dx}{(3-5\cos x)^2}$.

3. $\int \frac{dx}{3\sin^2 x+\cos^2 x}$.

4. $\int \frac{dx}{\cos x}$.

5. $\int \sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\cdot\cos x\,dx$.

Варіант 10

1. $\int \frac{\sin 2x\,dx}{\cos^4 x-3\cos^2 x+2}$.

2. $\int \frac{dx}{5+4\sin x}$.

3. $\int \frac{dx}{\sin^2 x+\mathrm{tg}^2 x}$.

4. $\int \frac{dx}{\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)}$.

5. $\int \sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\cdot\cos x\,dx$.

Варіант 11

1. $\int \frac{\sin x\,dx}{1+\cos^2 x}$.

2. $\int \frac{dx}{5-3\cos x}$.

3. $\int \frac{\cos^2 x\,dx}{\sin^2 x\left(\cos^2 x+1\right)}$.

4. $\int \frac{dx}{\cos\left(\frac{\pi}{3}-x\right)}$.

5. $\int \sin^2 x\cdot\cos 3x\,dx$.

Варіант 12

1. $\int \frac{\sin 2x\,dx}{1+\cos^3 x}$.

2. $\int \frac{dx}{5-4\sin x+3\cos x}$.

3. $\int \frac{dx}{2+\cos^2 x}$.

4. $\int \frac{dx}{\sin^3 x}$.

5. $\int \cos^2 x\sin 3x\,dx$.

Варіант 13

1. $\int \frac{\sin^3 x \cos x\,dx}{\left(1+\cos^2 x\right)\left(\cos x-1\right)}$.

2. $\int \frac{dx}{\sin x+1}$.

3. $\int \frac{dx}{4\sin^2 x+\cos^2 x}$.

4. $\int \frac{dx}{\cos^3 x}$.

5. $\int \sin^2 x\cdot\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)dx$.

Варіант 14

1. $\int \cos 2x\cdot\sin x\,dx$.

2. $\int \frac{dx}{\cos x+1}$.

3. $\int \frac{\cos^2 x\,dx}{\sin^2 x\left(\cos^2 x+2\right)}$.

4. $\int \frac{dx}{\sin^3\left(\frac{\pi}{3}-x\right)}$.

5. $\int \sin^2 x\cdot\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)dx$.

Варіант 15

1. $\int \frac{\cos^2 x\cdot\sin x\,dx}{\left(1+\cos^2 x\right)\left(\cos x-1\right)}$.

2. $\int \frac{dx}{\left(3-4\cos x\right)^2}$.

3. $\int \frac{dx}{2+\sin^2 x}$.

4. $\int \frac{dx}{\cos^3\left(\frac{\pi}{3}-x\right)}$.

5. $\int \sin^2 x\cdot\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)dx$.

Варіант 16

1. $\int \frac{\sin^2 x\cos x}{\left(2-\cos^2 x\right)\left(\sin x+1\right)}dx$.

2. $\int \frac{dx}{4-3\cos x}$.

3. $\int \frac{dx}{2\sin^2 x+\mathrm{tg}^2 x}$.

4. $\int \sin^4 x\,dx$.

5. $\int \sin^2 x\cdot\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)dx$.

Варіант 17

1. $\int \frac{\sin x\,dx}{\cos x \ln \cos x}$.

2. $\int \frac{dx}{3\sin x + 4\cos x}$.

3. $\int \frac{dx}{1+2\cos^2 x}$.

4. $\int \cos^4 x\,dx$.

5. $\int \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\cos^2 x\,dx$.

Варіант 18

1. $\int \frac{\sin 2x\,dx}{(1+\cos x)^2}$.

2. $\int \frac{dx}{3+4\cos x}$.

3. $\int \frac{dx}{\sin^2 x + 4\cos^2 x}$.

4. $\int \sin^2 x \cos^2 x\,dx$.

5. $\int \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\cos^2 x\,dx$.

Варіант 19

1. $\int \frac{\sin x\,dx}{\cos^2 x - 4}$.

2. $\int \frac{\cos x\,dx}{1+\cos x}$.

3. $\int \frac{dx}{1+2\sin^2 x}$.

4. $\int \sin^4 x \cdot \cos^4 x\,dx$.

5. $\int \sin^2 x \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)dx$.

Варіант 20

1. $\int \frac{\cos^2 x \cdot \sin x\,dx}{\left(2-\sin^2 x\right)\left(\cos x + 1\right)}$.

2. $\int \frac{dx}{5+4\cos x}$.

3. $\int \frac{dx}{\sin^2 x + 2\operatorname{tg}^2 x}$.

4. $\int \sin^2 x \cdot \cos 2x\,dx$.

5. $\int \sin^2 x \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right)dx$.

Варіант 21

1. $\int \frac{\sin x\,dx}{9-\cos^2 x}$.

2. $\int \frac{\sin x\,dx}{1+\sin x}$.

3. $\int \frac{\cos^2 x\,dx}{\sin^2 x\left(2\cos^2 x+1\right)}$.

4. $\int \sin^2 x \cdot \cos^3 x\,dx$.

5. $\int \sin^2 x \cdot \cos^4 x\,dx$.

Варіант 22

1. $\int \frac{\sin 2x\,dx}{1-\cos^3 x}$.

2. $\int \frac{dx}{\sin x-4\cos x}$.

3. $\int \frac{dx}{2+3\sin^2 x}$.

4. $\int \cos^2 x \cdot \sin^3 x\,dx$.

5. $\int \cos^2 x \cdot \sin^4 x\,dx$.

Варіант 23

1. $\int \frac{\cos^2 x+1}{\sin 2x}dx$.

2. $\int \frac{dx}{1-4\sin x}$.

3. $\int \frac{dx}{3+2\cos^2 x}$.

4. $\int \left(1+3\cos x\right)^2 dx$.

5. $\int \sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\cdot \cos^2 x\,dx$.

Варіант 24

1. $\int \frac{\cos x}{\sin x}\ln \sin x\,dx$.

2. $\int \frac{dx}{1-4\cos x}$.

3. $\int \frac{dx}{\sin^2 x+9\cos^2 x}$.

4. $\int \left(1-3\cos x\right)^2 dx$.

5. $\int \sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\cdot \cos^2 x\,dx$.

Варіант 25

1. $\int \frac{\cos x\, dx}{\sin^2 x - 9}$.

2. $\int \frac{dx}{(4 - 5\cos x)^2}$.

3. $\int \frac{dx}{2\sin^2 x + 3\operatorname{tg}^2 x}$.

4. $\int (1 - \cos x)^2\, dx$.

5. $\int \sin x \cdot \cos\left(x - \frac{\pi}{6} \right) dx$.

Варіант 26

1. $\int \frac{\sin 2x\, dx}{(1 + \sin x)^2}$.

2. $\int \frac{dx}{2\sin x - \cos x}$.

3. $\int \frac{\cos^2 x\, dx}{\sin^2 x\left(2\cos^2 x + 3\right)}$.

4. $\int (1 - \sin x)^2\, dx$.

5. $\int \sin x \cdot \cos\left(x + \frac{\pi}{6} \right) dx$.

Варіант 27

1. $\int \frac{\left(\cos^3 x + 1\right)\sin x\, dx}{\cos^2 x(\cos x - 1)}$.

2. $\int \frac{dx}{2 - \cos x}$.

3. $\int \frac{dx}{1 + 3\cos^2 x}$.

4. $\int \frac{dx}{\sin^4\left(\frac{\pi}{3} - x \right)}$.

5. $\int \sin\left(x - \frac{3\pi}{4} \right)\cos x\, dx$.

Варіант 28

1. $\int \frac{\sin x\, dx}{\cos 2x + 2}$.

2. $\int \frac{dx}{\sin x - 2\cos x}$.

3. $\int \frac{dx}{\sin^2 x + 3\operatorname{tg}^2 x}$.

4. $\int \frac{dx}{\cos^4\left(\frac{\pi}{3} - x \right)}$.

5. $\int \sin\left(x + \frac{3\pi}{4} \right)\cos x\, dx$.

Варіант 29

1. $\int \frac{\left(2\cos^2 x - 5\right)\sin x\,dx}{\cos^4 x + 5\sin^2 x - 1}$.

2. $\int \frac{dx}{1-2\sin x}$.

3. $\int \frac{dx}{4\sin^2 x + 9\cos^2 x}$.

4. $\int (1-2\sin x)^3\,dx$.

5. $\int \sin x \cdot \cos\left(x - \frac{3\pi}{4}\right)dx$.

Варіант 30

1. $\int \frac{\cos x\,dx}{9+\sin^2 x}$.

2. $\int \frac{dx}{(1-2\cos x)^2}$.

3. $\int \frac{dx}{1+5\sin^2 x}$.

4. $\int (1-2\cos x)^3\,dx$.

5. $\int \sin x \cdot \cos\left(x + \frac{3\pi}{4}\right)dx$.

7.6 Варіанти завдання VI
Інтегрування ірраціональних функцій

Варіант 1

1. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\left(\sqrt[4]{x}+2\sqrt[3]{x}\right)}$.

2. $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{1-4x^2}}$.

3. $\int \frac{\sqrt{1+x^2}dx}{x^2}$.

4. $\int \frac{2x\,dx}{\sqrt{x^2+3x+2}}$.

5. $\int (x+1)\sqrt{x^2+4x+8}dx$.

Варіант 2

1. $\int \frac{\sqrt[3]{x^2}dx}{\left(\sqrt{x}-\sqrt[6]{x}\right)x}$.

2. $\int \frac{\sqrt{1-4x^2}dx}{x^2}$.

3. $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{1+x^2}}$.

4. $\int \frac{(x+7)dx}{\sqrt{x^2+4x+3}}$.

5. $\int (x+3)\sqrt{x^2-6x+13}dx$.

Варіант 3

1. $\int \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt[4]{x^3}-\sqrt{x}}$.

2. $\int \frac{\sqrt{x^2-4}dx}{x}$.

3. $\int \frac{dx}{\left(\sqrt{4-x^2}\right)^3}$.

4. $\int \frac{(x+1)dx}{\sqrt{x^2+x+2}}$.

5. $\int (x+2)\sqrt{x^2+6x+13}dx$.

Варіант 4

1. $\int \frac{\sqrt{x^3}-\sqrt[3]{x}}{6\sqrt[4]{x}}dx$.

2. $\int \frac{\sqrt{9-4x^2}}{x^2}dx$.

3. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}}$.

4. $\int \frac{(x+2)dx}{\sqrt{x^2-x-2}}$.

5. $\int (x-2)\sqrt{x^2+6x+13}dx$.

Варіант 5

1. $\int \frac{\sqrt[6]{x}+1}{\sqrt[6]{x^7}+\sqrt[4]{x^5}}dx$.

2. $\int \frac{\sqrt{4+9x^2}}{x^2}dx$.

3. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4x^2-1}}$.

4. $\int \frac{(2x+1)dx}{\sqrt{x^2+2x-3}}$.

5. $\int (x+2)\sqrt{x^2-6x+10}dx$.

Варіант 6

1. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}\left(\sqrt{x}+\sqrt[6]{x}\right)}$.

2. $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{4-9x^2}}$.

3. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1+9x^2}}$.

4. $\int \frac{(2x+3)dx}{\sqrt{x^2-3x+2}}$.

5. $\int (x-1)\sqrt{x^2+6x+10}dx$.

Варіант 7

1. $\int \frac{\sqrt[6]{x}dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$.

2. $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{9-25x^2}}$.

3. $\int \frac{x^3dx}{\left(\sqrt{16x^2+9}\right)^3}$.

4. $\int \frac{(3x-1)dx}{\sqrt{x^2-4x+3}}$.

5. $\int (x+2)\sqrt{x^2-4x+5}dx$.

Варіант 8

1. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\left(\sqrt[4]{x}+\sqrt[3]{x}\right)}$.

2. $\int x^3\sqrt{4-25x^2}dx$.

3. $\int \frac{x^2dx}{\left(1+16x^2\right)^{3/2}}$.

4. $\int \frac{(3x+1)dx}{\sqrt{x^2-5x+6}}$.

5) $\int (x+1)\sqrt{x^2+4x+5}dx$.

Варіант 9

1. $\int \frac{\sqrt[3]{x^2}\,dx}{\left(\sqrt{x}-\sqrt[6]{x}\right)x}$.

2. $\int \frac{\sqrt{25-4x^2}\,dx}{x^2}$.

3. $\int \frac{x^3\,dx}{\left(\sqrt{16x^2+9}\right)^3}$.

4. $\int \frac{(x+3)\,dx}{\sqrt{x^2-5x+6}}$.

5. $\int (x+1)\sqrt{x^2-2x+5}\,dx$.

Варіант 10

1. $\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{\sqrt[4]{x^3}+\sqrt{x}}$.

2. $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{25-x^2}}$.

3. $\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{x^2+16}}$.

4. $\int \frac{(x+3)\,dx}{\sqrt{x^2-2x-3}}$.

5. $\int (x+1)\sqrt{x^2-2x+2}\,dx$.

Варіант 11

1. $\int \frac{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}{\sqrt[4]{x^5}}$.

2. $\int \frac{x^2\,dx}{\left(4-x^2\right)^{3/2}}$.

3. $\int \frac{\sqrt{9+x^2}}{x^3}\,dx$.

4. $\int \frac{(x+1)\,dx}{\sqrt{2-x-x^2}}$.

5. $\int (x+2)\sqrt{x^2+2x+2}\,dx$.

Варіант 12

1. $\int \frac{\sqrt[6]{x}\,dx}{\sqrt{x}+3\sqrt[3]{x}}$.

2. $\int \frac{\left(9-4x^2\right)^{3/2}}{x}\,dx$.

3. $\int \frac{\sqrt{x^2-4}}{x}\,dx$.

4. $\int \frac{(x+2)\,dx}{\sqrt{2+x-x^2}}$.

5. $\int (x-2)\sqrt{5+4x-x^2}\,dx$.

Варіант 13

1. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\left(\sqrt[4]{x}+3\sqrt[3]{x}\right)}$.

2. $\int \frac{x^3dx}{\left(\sqrt{9-x^2}\right)^3}$.

3. $\int \frac{\left(\sqrt{x^2-1}\right)^3}{x^2}dx$.

4. $\int \frac{(x-3)dx}{\sqrt{3-2x-x^2}}$.

5. $\int (x-1)\sqrt{4+3x-x^2}\,dx$.

Варіант 14

1. $\int \frac{\sqrt[3]{x^2}\,dx}{\sqrt{x}-2\sqrt[6]{x}}$.

2. $\int \frac{\sqrt{4-9x^2}}{x^3}dx$.

3. $\int \frac{\sqrt{x^2+16}}{x^2}dx$.

4. $\int \frac{(x+1)dx}{\sqrt{6+x-x^2}}$.

5. $\int (x-3)\sqrt{8+2x-x^2}\,dx$.

Варіант 15

1. $\int \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt[4]{x^3}+3\sqrt{x}}$.

2. $\int \frac{dx}{\left(\sqrt{9-4x^2}\right)^3}$.

3. $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{1+25x^2}}$.

4. $\int \frac{(x+2)dx}{\sqrt{3+2x-x^2}}$.

5. $\int (x+2)\sqrt{8-2x-x^2}\,dx$.

Варіант 16

1. $\int \frac{3\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}{\sqrt[4]{x^5}}dx$.

2. $\int \frac{\left(\sqrt{9x^2-1}\right)^3}{x^2}dx$.

3. $\int \frac{x^3dx}{\sqrt{4-x^2}}$.

4. $\int \frac{(x+1)dx}{\sqrt{4-3x-x^2}}$.

5. $\int (x+1)\sqrt{4-3x-x^2}\,dx$.

Варіант 17

1. $\int \frac{\sqrt[5]{x}dx}{\sqrt[3]{x^4}+\sqrt[5]{x^6}}$.

2. $\int x^3\sqrt{9-x^2}\,dx$.

3. $\int \frac{\sqrt{25x^2-4}}{x^2}dx$.

4. $\int \frac{(x+3)dx}{\sqrt{4+3x-x^2}}$.

5. $\int (x+2)\sqrt{3+2x-x^2}\,dx$.

Варіант 18

1. $\int \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt{x^3}+\sqrt[7]{x^8}}$.

2. $\int \frac{\sqrt{4-9x^2}dx}{x}$.

3. $\int \frac{x^2dx}{\left(\sqrt{x^2-4}\right)^3}$.

4. $\int \frac{(x+4)dx}{\sqrt{8-2x-x^2}}$.

5. $\int (x+1)\sqrt{6+x-x^2}\,dx$.

Варіант 19

1. $\int \frac{\sqrt[6]{x}dx}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}$.

2. $\int \frac{\sqrt{9-4x^2}}{x^2}dx$.

3. $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{x^2-25}}$.

4. $\int \frac{(x+1)dx}{\sqrt{8+2x-x^2}}$.

5. $\int (x+1)\sqrt{x^2+x-2}\,dx$.

Варіант 20

1. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\left(\sqrt[4]{x}-\sqrt[3]{x}\right)}$.

2. $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{4-9x^2}}$.

3. $\int \frac{\sqrt{25x^2-1}}{x^2}dx$.

4. $\int \frac{(x-2)dx}{\sqrt{x^2+4x+5}}$.

5. $\int (x+2)\sqrt{3-2x-x^2}\,dx$.

Варіант 21

1. $\int \frac{\sqrt[3]{x^2}\,dx}{\left(\sqrt{x}+\sqrt[6]{x}\right)x}$.

2. $\int \frac{\sqrt{x^2+4}dx}{x}$.

3. $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{x^2-1}}$.

4. $\int \frac{(x+2)dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}$.

5. $\int (x+2)\sqrt{x^2-2x-3}dx$.

Варіант 22

1. $\int \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt[4]{x^3}-\sqrt{x}}$.

2. $\int \frac{\left(\sqrt{x^2-9}\right)^3}{x^2}dx$.

3. $\int \frac{x^2dx}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^3}$.

4. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2-2x+2}}$.

5. $\int (x-2)\sqrt{x^2-x-6}dx$.

Варіант 23

1. $\int \frac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}{\sqrt[4]{x^5}}dx$.

2. $\int \frac{x^2dx}{\left(\sqrt{x^2+4}\right)^3}$.

3. $\int \frac{\sqrt{x^2-1}dx}{x^2}$.

4. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2-2x+5}}$.

5. $\int (x+2)\sqrt{x^2-4x+3}dx$.

Варіант 24

1. $\int \frac{\sqrt[5]{x}dx}{\sqrt[3]{x^4}-\sqrt[5]{x^6}}$.

2. $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{x^2-9}}$.

3. $\int \frac{\sqrt{9+x^2}dx}{x}$.

4. $\int \frac{(x+1)dx}{\sqrt{x^2+4x+5}}$.

5. $\int (x+2)\sqrt{x^2-5x+6}dx$.

Варіант 25

1. $\int \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt{x^3}-\sqrt[7]{x^8}}$.

2. $\int \frac{\sqrt{x^2-4}dx}{x^2}$.

3. $\int \frac{x^3dx}{\left(\sqrt{1+x^2}\right)^3}$.

4. $\int \frac{(x+1)dx}{\sqrt{x^2-4x+5}}$.

5. $\int (x+2)\sqrt{x^2+2x-3}dx$.

Варіант 26

1. $\int \frac{\sqrt[6]{x}dx}{\sqrt[3]{x}-\sqrt{x}}$.

2. $\int \frac{\sqrt{4+x^2}dx}{x}$.

3. $\int \frac{x^2dx}{\left(\sqrt{4-x^2}\right)^3}$.

4. $\int \frac{(x-1)dx}{\sqrt{x^2-4x+5}}$.

5. $\int (x+2)\sqrt{x^2-3x+2}dx$.

Варіант 27

1. $\int \frac{\sqrt[3]{x}dx}{\sqrt[3]{x^4}+\sqrt[7]{x^8}}$.

2. $\int \frac{x^3dx}{\left(\sqrt{9+x^2}\right)^3}$.

3. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1-x^2}}$.

4. $\int \frac{(x+2)dx}{\sqrt{x^2+6x+10}}$.

5. $\int (x+1)\sqrt{x^2+x-2}dx$.

Варіант 28

1. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\left(\sqrt[4]{x}-3\sqrt[3]{x}\right)}$.

2. $\int \frac{x^2dx}{\left(\sqrt{4-x^2}\right)^3}$.

3. $\int \frac{x^3dx}{\sqrt{1+x^2}}$.

4. $\int \frac{(2x+1)dx}{\sqrt{x^2-6x+10}}$.

5. $\int (x-1)\sqrt{x^2-x-2}dx$.

Варіант 29

1. $\int \frac{\sqrt[3]{x^2}\,dx}{\left(3\sqrt{x}-\sqrt[6]{x}\right)\sqrt{x}}$.

2. $\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{9+x^2}}$.

3. $\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}dx$.

4. $\int \frac{(x+1)\,dx}{\sqrt{x^2+6x+13}}$.

5. $\int x\sqrt{x^2+3x+2}\,dx$.

Варіант 30

1. $\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{\sqrt{x}-\sqrt[4]{x^3}}$.

2. $\int \frac{\sqrt{x^2-4}\,dx}{x^3}$.

3. $\int \frac{\sqrt{25-x^2}}{x^2}dx$.

4. $\int \frac{(x-1)\,dx}{\sqrt{x^2+4x+8}}$.

5. $\int (x+4)\sqrt{x^2+4x+3}\,dx$.

7.7 Варіанти завдання VII
за всіма темами

Варіант 1

1. $\int\left(3x^2+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx$.

2. $\int\frac{(2\ln x+3)^3}{x}dx$.

3. $\int\operatorname{arctg}x\,dx$.

4. $\int\frac{x+1}{5x^2+2x+1}dx$.

5. $\int\frac{dx}{\sqrt{1-2x}-\sqrt[4]{1-2x}}$.

6. $\int\sqrt{1+\sin x}\,dx$.

7. $\int\frac{dx}{\sqrt{2-3x^2}}$.

8. $\int\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$.

9. $\int\frac{dx}{x^4+x}$.

10. $\int\frac{\cos^2 x}{e^x}dx$.

11. $\int\frac{\sqrt{2-x}}{x}dx$.

12. $\int x^4\arcsin\frac{x}{3}dx$.

Варіант 2

1. $\int\left(2x+\frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)dx$.

2. $\int\frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)}$.

3. $\int x\ln^2\left(x^2+4\right)dx$.

4. $\int\frac{x+2}{x\left(x^2+x-6\right)}dx$.

5. $\int\frac{\sqrt[6]{x}\,dx}{1+\sqrt[3]{x}}$.

6. $\int\frac{dx}{\operatorname{tg}x\cos 2x}$.

7. $\int\frac{dx}{\sqrt{2+3x^2}}$.

8. $\int\frac{x\,dx}{\sqrt{x^2-1}}$.

9. $\int\frac{dx}{x^4-1}$.

10. $\int x\operatorname{ctg}^2 x\,dx$.

11. $\int\frac{\sqrt{3-x^2}}{x^2}dx$.

12. $\int e^{4x}\sin^2 x\,dx$.

Варіант 3

1. $\int\left(x+\frac{1}{\sqrt[5]{x}}\right)^2 dx$.

2. $\int \sin^2 x\cos x\,dx$.

3. $\int x^3\cdot 3^x\,dx$.

4. $\int\frac{dx}{(x+1)^2(x^2+4)}$.

5. $\int\frac{(x+1)\,dx}{\sqrt{x^2+4x+13}}$.

6. $\int\frac{\sqrt{\operatorname{tg}x}}{\sin x\cos x}dx$.

7. $\int\frac{x\,dx}{\sqrt{2-8x^2}}$.

8. $\int\frac{x\,dx}{4x^2+7}$.

9. $\int\frac{\arcsin x}{x^2}dx$.

10. $\int\sqrt{1-\sin x}\,dx$.

11. $\int\frac{\sqrt{4-x^2}\,dx}{x^5}$.

12. $\int e^{5x}\cos^2 x\,dx$.

Варіант 4

1. $\int\left(\frac{1}{x^2}-3\sqrt[3]{x}\right)^2 dx$.

2. $\int\frac{dx}{x\sqrt{1-\ln x}}$.

3. $\int x\cos^2 x\,dx$.

4. $\int\frac{x^4\,dx}{x^3-x^2+x-1}$.

5. $\int\frac{1-3x}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx$.

6. $\int\frac{dx}{\sin^2 x+\operatorname{tg}^2 x}$.

7. $\int\frac{dx}{2+3x^2}$.

8. $\int\frac{\sin x\,dx}{\sqrt{\cos^2 x+4}}$.

9. $\int\frac{x^2}{(x^2+5)^2}dx$.

10. $\int\frac{dx}{\cos x\sqrt{\sin x}}$.

11. $\int\frac{\sqrt{(4-x^2)^3}}{x^5}dx$.

12. $\int e^{3x}\cdot\sin^2 x\,dx$.

Варіант 5

1. $\int\left(x\sqrt{x}-\sqrt[4]{x}\right)^2 dx$.

2. $\int x\cdot 5^{-x^2}dx$.

3. $\int\cos(\ln x)dx$.

4. $\int\frac{x^4+1}{x^3-2x^2}dx$.

5. $\int\frac{dx}{x\sqrt{2+x-x^2}}$.

6. $\int\frac{dx}{\sin^3 x}$.

7. $\int\sqrt{1-x}(1-2x)dx$.

8. $\int\frac{dx}{x+\sqrt{x}}$.

9. $\int\frac{x-1}{\sin^2 x}dx$.

10. $\int\sqrt{\operatorname{ctg} x}\,dx$.

11. $\int x^2\cos^2 x\,dx$.

12. $\int\frac{\sqrt{x^2-3}}{x^2}dx$.

Варіант 6

1. $\int\left(\frac{5}{\sin^2 x}-\frac{3}{2\sqrt{x}}\right)dx$.

2. $\int\frac{\ln^3 x}{x^2}dx$.

3. $\int\frac{dx}{(x+3)\sqrt{x}}$.

4. $\int\frac{\left(x^3+8x+9\right)dx}{(x-1)\left(x^2+4x+5\right)}$.

5. $\int\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx$.

6. $\int\frac{1-\operatorname{ctg} x}{1+\operatorname{ctg} x}dx$.

7. $\int(1-2x)\sqrt{1-3x}\,dx$.

8. $\int\frac{x+2}{\sqrt{x+1}+1}dx$.

9. $\int x\ln\left(x^2+3\right)dx$.

10. $\int\frac{\sqrt{1+\cos x}}{\sin x}dx$.

11. $\int x^2\cos^2 x\,dx$.

12. $\int\frac{\sqrt{\left(x^2-6\right)^3}}{x^3}dx$.

Варіант 7

1. $\int\left(\frac{1}{3\sqrt{x}-x}\right)^2 dx$.

2. $\int\frac{dx}{x\ln x}$.

3. $\int x^2\ln(1+x)dx$.

4. $\int\frac{x^3+1}{x^3-x^2}dx$.

5. $\int\frac{x\,dx}{\sqrt{4+3x-2x^2}}$.

6. $\int\frac{dx}{\sqrt{1-\sin^4 x}}$.

7. $\int(2-3x)\sqrt{3-2x}dx$.

8. $\int\frac{dx}{\sqrt{3+e^x}}$.

9. $\int x\,\mathrm{arctg}^2 x\,dx$.

10. $\int\frac{\sqrt{x^2+9}}{x^2}dx$.

11. $\int x^4\cos x\,dx$.

12. $\int x^4\sqrt{\left(4-x^2\right)^3}dx$.

Варіант 8

1. $\int\left(\frac{5}{\cos^2 x}-\frac{3}{\sqrt{x}}\right)dx$.

2. $\int\frac{dx}{x\ln^3 x}$.

3. $\int x^2\sin x\,dx$.

4. $\int\frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}dx$.

5. $\int\frac{\sqrt{x^2+4x}}{x^2}dx$.

6. $\int\frac{dx}{\sin x\cos^5 x}$.

7. $\int(1-3x)\sqrt{x+2}dx$.

8. $\int\frac{dx}{x\sqrt{1-4\ln x}}$.

9. $\int\sin(\ln x)dx$.

10. $\int\frac{\sqrt{x^2-16}}{x^2}dx$.

11. $\int x^2 e^{2x}dx$.

12. $\int x^4\sqrt{6-x^2}dx$.

Варіант 9

1. $\int\left(\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{x}-x\sqrt{x}\right)dx$.

2. $\int\frac{x\,dx}{\sqrt{2x^2+3}}$.

3. $\int\frac{\ln^5 x}{x}dx$.

4. $\int\frac{x^4+1}{x^2+5x-8}dx$.

5. $\int\sin^6 x\,dx$.

6. $\int\frac{x^2+x-1}{\left(x^2+1\right)\sqrt{x^2+1}}$.

7. $\int\sqrt{\frac{1-x}{x}}dx$.

8. $\int\frac{dx}{x\sqrt{1-4\ln x}}$.

9. $\int x\cos^2 x\,dx$.

10. $\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-x+3}}$.

11. $\int x^5\ln\left(x^2+6\right)dx$.

12. $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{\left(x^2+8\right)^3}}$.

Варіант 10

1. $\int\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-5\sqrt{x}\right)dx$.

2. $\int\frac{\sin x\,dx}{\cos^5 x}$.

3. $\int\frac{2x^2}{\left(1+x^2\right)^2}dx$.

4. $\int\frac{x\,dx}{(x+1)\left(x^2+x+1\right)}$.

5. $\int\frac{(x+1)\,dx}{\left(x^2-4x+1\right)}$.

6. $\int\frac{dx}{\sqrt{1-\cos^4 x}}$.

7. $\int\left(2^x+3^x\right)\cdot 5^x\,dx$.

8. $\int\frac{dx}{x\sqrt{1+4\ln^2 x}}$.

9. $\int\frac{x\,dx}{\cos^2 x}$.

10. $\int\frac{dx}{x-\sqrt{x^2-1}}$.

11. $\int x^4\ln\left(x^2+3\right)dx$.

12. $\int\frac{x^4dx}{\sqrt{x^2+9}}$.

Варіант 11

1. $\int\left(6e^{x}-5\sqrt{x}+\frac{1}{\sin^{2}x}\right)dx$.

2. $\int\sqrt{6-x^{2}}\,dx$.

3. $\int x^{2}e^{-x}dx$.

4. $\int\frac{x^{3}-1}{x^{3}-2x^{2}}dx$.

5. $\int\frac{x+\sqrt{1+\bar{x}}}{\sqrt[3]{1+x}}dx$.

6. $\int\frac{dx}{\cos^{4}x}$.

7. $\int\left(\frac{1+2x}{x}\right)^{2}dx$.

8. $\int\sin\ln x\cdot\frac{dx}{x}$.

9. $\int\sqrt{1+x^{2}}\,dx$.

10. $\int\frac{\sqrt{x^{2}+5}}{x^{2}}dx$.

11. $\int\frac{dx}{x\left(2x^{2}-x+1\right)}$.

12. $\int x^{3}\ln\left(x^{2}+3\right)dx$.

Варіант 12

1. $\int\frac{\sqrt{x}-xe^{x}+x^{5/3}}{x}dx$.

2. $\int\frac{x\,dx}{5x^{2}+8}$.

3. $\int\frac{x\sin x}{\cos^{2}x}dx$.

4. $\int\frac{\left(x^{4}+1\right)dx}{x^{3}-x^{2}+x-1}$.

5. $\int\frac{\sqrt{x^{2}-2x}}{x^{2}}dx$.

6. $\int\frac{\cos x\,dx}{\sqrt{2\sin x+1}}$.

7. $\int\frac{\sqrt{x}-2\sqrt[3]{x}+1}{\sqrt[4]{x}}$.

8. $\int\frac{x\,dx}{\sqrt{3-x}}$.

9. $\int x\,\mathrm{tg}^{2}x\,dx$.

10. $\int\frac{\sqrt{2x-1}}{x}dx$.

11. $\int\frac{dx}{x\left(3x^{2}-x+2\right)}$.

12. $\int x^{2}\cos^{2}x\,dx$

Варіант 13

1. $\int\left(3\sqrt{x}+\frac{1}{x}\right)dx$.

2. $\int\frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$.

3. $\int\frac{3x-2}{\sin^2 x}dx$.

4. $\int\frac{x^2-3x+2}{x\left(x^2+2x+1\right)}dx$.

5. $\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-x+3}}$.

6. $\int\frac{dx}{\sin^3 x}$.

7. $\int(3+x)\sqrt{2x-1}dx$.

8. $\int\sqrt{2-x^2}dx$.

9. $\int x\cdot 3^{x^2}dx$.

10. $\int\cos\ln x\cdot\frac{dx}{x}$.

11. $\int\frac{dx}{x\left(5x^2-2x+1\right)}$.

12. $\int x\cos^3 x\,dx$.

Варіант 14

1. $\int\left(2\operatorname{ctg}x-\sqrt[4]{x}\right)dx$.

2. $\int\frac{x-\operatorname{arctg}x}{1+x^2}dx$.

3. $\int\sqrt{x}\ln x\,dx$.

4. $\int\frac{\left(7x^3-9\right)dx}{x^4-5x^3+6x^2}$.

5. $\int\frac{(1-x)dx}{\sqrt{1+x+x^2}}$.

6. $\int\cos^4 x\,dx$.

7. $\int\left(\frac{5}{\sin x}-x^5\sqrt{x}\right)dx$.

8. $\int\frac{x^2dx}{5-x^6}$.

9. $\int\frac{x\cos x}{\sin^3 x}dx$.

10. $\int x\ln\left(2x^2+1\right)dx$.

11. $\int\frac{dx}{x^2\left(4x^2-x+1\right)}$.

12. $\int e^{2x}\cos^2 x\,dx$.

Варіант 15

1. $\int\left(\frac{2}{\sqrt{9-x^2}}+\frac{3}{\sin^2 x}\right)dx$.

2. $\int x\left(x^2+3\right)^{5/2}dx$.

3. $\int x^2 e^x\,dx$.

4. $\int\frac{\left(2x^2+6x+6\right)dx}{(x+3)\left(x^2+4x+5\right)}$.

5. $\int\frac{\sqrt{2x+3}}{x^2}dx$.

6. $\int\frac{dx}{3-2\sin x+\cos x}$.

7. $\int\frac{dx}{x\ln^2 x}$.

8. $\int\left(\frac{1}{\sqrt{7-x^2}}\right)$.

9. $\int\frac{2x-3}{\cos^2 x}dx$.

10. $\int\frac{x\,dx}{(x+1)\left(x^2+x+1\right)}$.

11. $\int\frac{\cos x\,dx}{3+2\sin x}$.

12. $\int e^{3x}\sin x\,dx$.

Варіант 16

1. $\int\left(2\operatorname{ctg} x-\sqrt[4]{x}\right)dx$.

2. $\int\frac{x^2dx}{8-x^6}$.

3. $\int x^4\ln x\,dx$.

4. $\int\frac{\left(x^3+1\right)dx}{4x^3-x}$.

5. $\int\frac{dx}{x^2\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}$.

6. $\int\left(\frac{1}{\sqrt{3-x^2}}+\frac{1}{7x-2}\right)dx$.

7. $\int\frac{\sin x\,dx}{\cos^2 x}$.

8. $\int\operatorname{tg}^5 x\,dx$.

9. $\int\sqrt{x}\ln x\,dx$.

10. $\int\frac{x\,dx}{x^3-1}$.

11. $\int\frac{dx}{x\sqrt{7x^2-x+1}}$.

12. $\int e^{-2x}\sin^2 x\,dx$.

Варіант 17

1. $\int \left(\frac{5}{\sqrt{1+x^2}} + 3\sqrt{x} + \frac{9}{x} \right) dx$.

2. $\int 3\mathrm{tg}\sqrt{x}\,\frac{dx}{\sqrt{x}}$.

3. $\int \frac{\ln^2 x}{x^3} dx$.

4. $\int \frac{x\,dx}{(x+1)^2 \left(x^2+1\right)}$.

5. $\int \sqrt{\frac{2+3x}{x-3}} dx$.

6. $\int \frac{1+\cos^2 x}{1+\cos 2x} dx$.

7. $\int \frac{5dx}{\sqrt{3-x^2}}$.

8. $\int \frac{x^3+x^7}{x^8+1} dx$.

9. $\int x\,\mathrm{arctg}^2 x\,dx$.

10. $\int \frac{dx}{x^4-x^2}$.

11. $\int \frac{dx}{x\sqrt{8x^2-2x+1}}$.

12. $\int x^2 \ln^2 x\,dx$.

Варіант 18

1. $\int \left(x + \frac{5}{\sqrt{x}} \right) dx$.

2. $\int \frac{\cos^5 x}{\sin^2 x} dx$.

3. $\int x^4 \ln x\,dx$.

4. $\int \frac{5x-13}{x^2-5x+6} dx$.

5. $\int \frac{\sqrt{x^2+9}}{x^2} dx$.

6. $\int \left(2\,\mathrm{ctg}\,x - \sqrt[4]{x} \right) dx$.

7. $\int \frac{\cos x\,dx}{\sqrt[3]{\sin x}}$.

8. $\int \frac{3\ln^2 x}{x^2} dx$.

9. $\int \frac{(2\ln x+3)^3}{x} dx$.

10. $\int \frac{dx}{\left(x^2+1\right)\left(x^x+x\right)}$.

11. $\int \frac{dx}{x\sqrt{9x^2-x+2}}$.

12. $\int x^4 \ln\left(x^2+6\right) dx$.

Варіант 19

1. $\int\left(\frac{\sqrt{x}}{2}-x\right)^2 dx$.

2. $\int x\cdot 2^{-x^2}dx$.

3. $\int\sqrt{4-x^2}dx$.

4. $\int\frac{\left(2x^2+6x+8\right)dx}{(x+3)\left(x^2+4x+5\right)}$.

5. $\int\frac{\sqrt{x^2+5}dx}{x^2}$.

6. $\int\sin^4 x\,dx$.

7. $\int(8^x+x^2)x\,dx.$

8. $\int\frac{dx}{\sin x\cdot\cos x}$.

9. $\int x\cos 3x\,dx$.

10. $\int\frac{\sqrt{x^2-4}}{x^2}dx$.

11. $\int\frac{dx}{x\sqrt{10x^2-x+3}}$.

12. $\int x^3\ln\left(x+\sqrt{x^2+3}\right)dx$.

Варіант 20

1. $\int\left(\frac{28}{\sqrt{4-x^2}}-\frac{1}{x}\right)dx$.

2. $\int\sqrt{18-x^2}dx$.

3. $\int\ln^3 x\,dx$.

4. $\int\frac{(2x+2)dx}{(x+2)\left(x^2+2x+2\right)}$.

5. $\int\frac{x\,dx}{x-\sqrt{x^2-1}}$.

6. $\int\frac{\cos x\,dx}{1+\cos x}$.

7. $\int x^2e^{-2x}dx$.

8. $\int x\left(x^2+1\right)^{7/2}dx$.

9. $\int\frac{0{,}5x+2}{\sin^2 x}dx$.

10. $\int\frac{\sqrt{x^2+9}}{x^2}dx$.

11. $\int\frac{dx}{x\sqrt{11x^2-x+4}}$.

12. $\int x^4\ln\left(x+\sqrt{x^2+4}\right)dx$.

Варіант 21

1. $\int\left(\frac{7}{\sin^2 x}-\frac{1}{\sqrt{3-x^2}}\right)dx$.

2. $\int xe^{x^2+1}dx$.

3. $\int x\ln\left(x^2+3\right)dx$.

4. $\int\frac{x^6+1}{x^7+7x-2}dx$.

5. $\int\frac{1-x}{\sqrt{1+x-x^2}}dx$.

6. $\int\sqrt{1-\sin^4 x}dx$.

7. $\int x\sin 5x\,dx$.

8. $\int\frac{\cos^2\sqrt{3x-2}}{\sqrt{3x-2}}dx$.

9. $\int\frac{x\cos x\,dx}{\sin^2 x}$.

10. $\int\frac{\sqrt{x^2+4}dx}{x^2}$.

11. $\int\frac{x\,dx}{\sqrt{\left(x^2+2\right)^3}}$.

12. $\int\frac{1}{x^3}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}dx$.

Варіант 22

1. $\int\left(\frac{11}{x}-\frac{x}{11}+11e^x\right)dx$.

2. $\int\frac{\sin x\,dx}{\cos^4 x}$.

3. $\int\frac{3\ln^3 x}{x^2}dx$.

4. $\int\frac{x^4dx}{x^5-7}$.

5. $\int\frac{\left(x-1\right)dx}{\sqrt{2x^2-2x+1}}$.

6. $\int\frac{\cos x\,dx}{\sin x-\cos x}$.

7. $\int\left(\frac{5}{\sin^2 3x}-\sqrt{x}\right)dx$.

8. $\int x^2 3^{2x}\,dx$.

9. $\int x^2\ln^2 x\,dx$.

10. $\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-x+1}}$.

11. $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{\left(x^2+3\right)^3}}$.

12. $\int x^3\operatorname{arctg}\frac{x}{2}dx$.

Варіант 23

1. $\int\left(\frac{5}{\cos x}-\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx$.

2. $\int\frac{dx}{\sqrt{x}\left(x+5\right)}$.

3. $\int\frac{2x\,dx}{\cos^2 x}$.

4. $\int\frac{x\,dx}{x-\sqrt{x^2-1}}$.

5. $\int\frac{x^3-1}{x^3-2x^2}dx$.

6. $\int\frac{dx}{\sin x\sqrt{\cos x}}$.

7. $\int\frac{5\cos x\,dx}{\sqrt{8-\sin^2 x}}$.

8. $\int\sin^2 2x\cdot\cos 2x\,dx$.

9. $\int x^2 e^{-5x}dx$.

10. $\int\sqrt{4x-x^2}\,dx$.

11. $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{\left(x^2+4\right)^3}}$.

12. $\int\frac{1}{x^5}\operatorname{arctg} x\,dx$.

Варіант 24

1. $\int\left(\sqrt{x}+\frac{3}{\sqrt{x}}\right)dx$.

2. $\int x\cdot 5^{-x^2}dx$.

3. $\int 2x\cos^2 x\,dx$.

4. $\int\frac{x^2}{1-x^4}dx$.

5. $\int\frac{dx}{\left(x+2\right)\sqrt{x^2+2x}}$.

6. $\int\sqrt{\operatorname{tg} x}\,dx$.

7. $\int\frac{\sin^2 x\,dx}{1-\operatorname{tg} x}$.

8. $\int 3^x\operatorname{arctg} 3^x\,dx$.

9. $\int\left(x+5\right)\sqrt{x-3}\,dx$.

10. $\int\frac{dx}{x-\sqrt{x^2-4}}$.

11. $\int\frac{\sqrt{\left(x^2+4\right)^3}}{x^3}dx$.

12. $\int 5^x\cos 2x\,dx$.

Варіант 25

1. $\int\left(\frac{7}{\sin^2 x}+\sqrt[3]{x}\right)dx$.

2. $\int\frac{dx}{\sqrt{5x^2+1}}$.

3. $\int\sqrt{5+x^2}\,dx$.

4. $\int\frac{(2x+7)dx}{(x-2)\left(x^2+2x+7\right)}$.

5. $\int\frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt[4]{x^3}+1}$.

6. $\int\frac{\sqrt{1-\cos x}}{\sin x}dx$.

7. $\int\frac{\sqrt{x^3}}{1+x^5}dx$.

8. $\int x\left(x^2+3\right)^{1/8}dx$.

9. $\int(x+3)e^{2x}dx$.

10. $\int\frac{x+1}{5x^2+x+1}dx$.

11. $\int x^2\ln\left(x^2+2\right)dx$.

12. $\int\frac{\sqrt{\left(3-x^2\right)^3}}{x^5}dx$.

Варіант 26

1. $\int\left(\frac{2}{\cos^2 x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx$.

2. $\int\sin^4 2x\cdot\cos 2x\,dx$.

3. $\int x^2\ln(x-2)dx$.

4. $\int\frac{\left(x^3+1\right)dx}{\left(x^3-5x^2+6\right)}$.

5. $\int\sqrt{\frac{2-x}{2x}}dx$.

6. $\int\left(\frac{1}{\sqrt{6-3x^2}}-\frac{x}{\sqrt{x^2-2}}\right)dx$.

7. $\int\frac{dx}{1+\sin^2 x}$.

8. $\int\frac{dx}{\sqrt{x}(x+3)}$.

9. $\int\frac{2x\,dx}{\cos^2 2x}$.

10. $\int\frac{\left(x^2+1\right)dx}{(x+1)^2(x+2)^2}$.

11. $\int x^2\ln\left(x^2+3\right)dx$.

12. $\int\frac{\sqrt{5-x^2}}{x^4}dx$.

Варіант 27

1. $\int\left(\frac{3}{\sqrt{8-x}}+\frac{5}{x}+\frac{x}{5}\right)dx$.

2. $\int\frac{dx}{\sqrt{x}\,(x+6)}$.

3. $\int\frac{3x-1}{\sin^2 3x}dx$.

4. $\int\frac{x^5dx}{(x-1)^2\left(x^2-1\right)}$.

5. $\int\frac{x\,dx}{(x-1)^2\left(x^2-1\right)}$.

6. $\int\frac{\cos^4 x+\sin^4 x}{\cos^2 x-\sin^2 x}dx$.

7. $\int\left(x^2+x\right)e^{-3x}dx$.

8. $\int\frac{\sin 2x\,dx}{\cos^6 2x}$.

9. $\int\operatorname{arctg}3x\,dx$.

10. $\int\frac{x^3+x^2}{x^2-6x+5}dx$.

11. $\int x^2\ln\left(x^2-5\right)dx$.

12. $\int x^4\sqrt{\left(3-x^2\right)^3}dx$.

Варіант 28

1. $\int\left(3^x+x\sqrt{x}-\frac{2}{x}\right)dx$.

2. $\int\sqrt{4-x^2}\,dx$.

3. $\int x\ln\left(x^2-8\right)dx$.

4. $\int\frac{x\,dx}{x^4-1}$.

5. $\int\frac{\sqrt{x^2-1}}{x^2}dx$.

6. $\int\frac{dx}{1+\sin x+\cos x}$.

7. $\int\frac{dx}{4+e^x}$.

8. $\int\left(2\ln x+\sqrt[3]{x}\right)dx$.

9. $\int\frac{\ln(x+1)}{x^3}dx$.

10. $\int x\cdot 4^x dx$.

11. $\int x^2\ln\left(x^2+5\right)dx$.

12. $\int x^4\sqrt{4-x^2}\,dx$.

Варіант 29

1. $\int\left(\frac{3}{9+x^2}-\frac{3}{x}+\sqrt{3x}\right)dx$.

2. $\int\frac{dx}{(x+10)\sqrt{x}}$.

3. $\int\frac{3x-5}{\cos^2 4x}dx$.

4. $\int\frac{x^2+8x+9}{x-1}dx$.

5. $\int\frac{x\,dx}{x-\sqrt{x^2-3}}$.

6. $\int\operatorname{ctg}^4 x\,dx$.

7. $\int(x+5)2^{-x}dx$.

8. $\int\frac{x\,dx}{\left(4+x^2\right)^2}$.

9. $\int\arcsin x\,dx$.

10. $\int\frac{(x+1)dx}{\left(x^2+1\right)\left(x^2+9\right)}$.

11. $\int x^2\cos^2 2x\,dx$.

12. $\int x^5\sqrt{\left(9-x^2\right)^3}dx$.

Варіант 30

1. $\int\left(\frac{5}{\sqrt{9-2x^2}}+x\sqrt{x}\right)dx$.

2. $\int\frac{\ln^3(x+1)dx}{x+1}$.

3. $\int x\ln(x+1)dx$.

4. $\int\frac{(x+1)dx}{\left(x^2+1\right)\left(x^2+9\right)}$.

5. $\int\frac{dx}{(x-2)\sqrt{x^2+2}}$.

6. $\int\frac{\sqrt{\operatorname{tg} x}}{\sin x\cos x}dx$.

7. $\int x^2 2^{-3x}dx$.

8. $\int\frac{dx}{\sqrt{4-e^{2x}}}$.

9. $\int\ln^3 x\,dx$.

10. $\int\frac{(x+4)dx}{x^3+x^2+x+1}$.

11. $\int\frac{x\,dx}{\cos^2 4x}$.

12. $\int\sqrt{\left(x^2-4\right)^3}dx$.

ЛІТЕРАТУРА

1. Герасимчук В.С. Вища математика. Повний курс у прикладах і задачах. Визначений, невизначений та невласні інтеграли. Звичайні диференціальні рівняння. Прикладні задачі:навч. посіб. / В.С. Герасимчук, Г.С Васильченко, В.І. Кравцов – К: Книги України ЛТД, 2010. – 470 с.

2. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика. / В.П. Дубовик, І.І. Юрик. – К: А.С.К., 2006. – 648 с.

3. Задачи и упражнения по математическому анализу для втузов. / Под ред. Б.П. Демидовича. – М.: Наука, – 1966. – 472 с.

4. Лунгу Г.Н. Сборник задач по высшей математике. 1 курс. / Г.Н Лунгу, Д.Т. Письменный, С.Н. Федин, Ю.А. Шевченк – Москва, Айрис-Пресс, 2008. – 575 с.

5. Нацик Л. Д. Курс высшей математики для иностранных студентов. Математический анализ: учебное пособие / Л.Д. Нацик, Е.И. Тарапова, А.Л. Вишневецкий. – Х.: ХНАДУ, 2016. – 200 с.

6. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления : в 2 т. / Н.С. Пискунов – М: Интеграл-Пресс, 2004. – Т 1. – 416 с.; Т 2. – 529 с. 2003.

7. Подольский В.А. Сборник задач по математике. / В.А Подольский, А.М Суходский, Е.С. Мироненко – М.: Высшая школа, 1999. – 495 с.

8. Щипачев В.С. Высшая математика. / В.С. Щипачев – М: Высшая школа, 1990. – 480 с.

9. Ярхо Т. О. Практикум з вищої математики. Невизначений інтеграл: навчально-методичний порадник / Т.О. Ярхо, Т.В. Ємельянова, О.В. Небратенко і др. – Х.: ХНАДУ, 2011. – 192 с.

10. Ярхо Т.О. Фундаменталізація математичної підготовки майбутніх фахівців технічного профілю у вищих навчальних закладах: монографія. / Т.О. Ярхо. – Харків: ФОП Гончаренко В.Ю., 2016. – 283 с.

ЗМІСТ

ДЛЯ НОТАТОК

ДЛЯ НОТАТОК

Навчальне видання

ЯРХО Тетяна Олександрівна
ЄМЕЛ'ЯНОВА Тетяна Вікторівна
ПТАШНИЙ Олег Дмитрович
ФАСТОВСЬКА Тамара Борисівна

НЕВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ:

ТЕОРЕТИЧНІ ТА ПРАКТИЧНІ АСПЕКТИ ФОРМУВАННЯ ОПЕРАЦІЙНО-ТЕХНОЛОГІЧНИХ МАТЕМАТИЧНИХ КОМПЕТЕНЦІЙ

(для практичних занять і самостійної роботи)

Навчальний посібник

Відповідальний за випуск *І. І. Мороз*

Редактор І. Кривушкіна

Комп'ютерна верстка *Н. А. Купіної*

Дизайн обкладинки *Д. Нерівня*

План 2019 р. Поз. 12
Підписано до друку 24.05.2019 р. Формат 60×84 1/16. Папір офсетний.
Гарнітура TimesNewRomanCyr . Віддруковано на різографі.
Ум. друк. арк. 10,8. Обл.-вид. арк. 12,4.
Зам. № 166/19. Наклад 50 пр. Ціна договірна.

ВИДАВНИЦТВО
Харківського національного автомобільно-дорожнього університету

Видавництво ХНАДУ, 61002, Харків-МСП, вул. Я. Мудрого, 25.
Тел. /факс: (057)700-38-72; 707-37-03, e-mail: rio@khadi.kharkov.ua

Свідоцтво Державного комітету інформаційної політики, телебачення та радіомовлення України про внесення суб'єкта видавничої справи до Державного реєстру видавців, виготівників і розповсюджувачів видавничої продукції, серія ДК №897 від 17.04 2002 р.