Міністерство освіти і науки України

ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ
АВТОМОБІЛЬНО-ДОРОЖНІЙ УНІВЕРСИТЕТ

Т.О. Ярхо

ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ ДЛЯ ПРОФЕСІЙНО-МАТЕМАТИЧНОЇ ПІДГОТОВКИ БАКАЛАВРІВ ТЕХНІЧНОГО ПРОФІЛЮ

Частина 1. Випадкові події

Навчально-методичний посібник

Харків
ХНАДУ
2017

УДК 519.2:378

Рецензенти: *Нечуйвітер Олеся Петрівна*, д-р фіз.-мат. наук, професор кафедри вищої та прикладної математики
(Українська інженерно-педагогічна академія);
Стрельнікова Олена Олександрівна, д-р техн. наук, професор кафедри вищої математики
(Український державний університет залізничного транспорту).

Я 71 Ярхо Т.О. Теорія ймовірностей для професійно-математичної підготовки бакалаврів технічного профілю : навчально-методичний посібник / Т.О. Ярхо – Х. : ХНАДУ, 2017. –. –
Ч.1: Випадкові події – 2017. – 84с.

Викладено частину «Випадкові події на ймовірності подій» розділу «Теорія ймовірностей» курсу ВНЗ «Теорія ймовірностей та математична статистика».

Наведено теоретичні положення з обговоренням сенсу основних понять і тверджень та доведенням справедливості останніх.

Докладно розібрано розв'язання 58 задач, переважно професійної спрямованості, призначених для підготовки бакалаврів технічних і, в значній мірі, транспортних спеціальностей.

Рекомендовано студентам 2-го курсу всіх форм навчання. Може бути корисним у підготовці лекцій та практичних занять викладачами, які активно впроваджують в навчальний процес принципи компетентнісного підходу.

УДК 519.2:378

ПЕРЕДМОВА

Нині практично не існує жодної області знань, в якій, в тому або іншому ступені, не застосовувалися б ймовірнісні методи. Ці методи знаходять широке впровадження в різних галузях природознавства і техніки. Вони також потрібні для обґрунтування математичної і прикладної статистики, яка, в свою чергу, використовується при плануванні та організації виробництва. Отже, курс «Теорія ймовірностей і математична статистика» відіграє важливу роль у базовій математичній освіті майбутніх фахівців технічного профілю у ВНЗ.

Пропонований навчально-методичний посібник з вказаного курсу, за викладеним матеріалом, покриває частину «Випадкові події та ймовірності подій» розділу «Теорія ймовірностей».

Відома значимість впровадження професійної спрямованості в сучасну фундаментальну підготовку майбутніх фахівців в умовах компетентнісного підходу в освіті. Проте проблема професійно спрямованої наповненості математичних дисциплін доки ще залишається невирішеною. Зокрема, у рекомендованій навчально-методичній літературі з курсу «Теорія ймовірностей і математична статистика» для студентів технічних, у тому числі – транспортних спеціальностей, як правило, розглядається традиційний набір задач. Зміст значної частини цього набору відповідає потребам і проблемам азартних ігор і лотереї, які історично обумовили виникнення «математики випадкового». Вказані задачі збереглися в сучасних підручниках і посібниках як ті, що наочно роз'яснюють сутність ймовірнісних підходів. Проте традиційний набір ймовірнісних задач недостатньо відображає характер професійної підготовки майбутніх фахівців технічного профілю.

Відмітною особливістю пропонованого навчально-методичного посібника є докладно розібраний набір задач професійної спрямованості, призначений для підготовки бакалаврів технічних і, в значній мірі, транспортних спеціальностей. Вказана суттєва особливість посібника сприяє формуванню професійного мислення майбутніх фахівців, основа якого має створюватися на загальноосвітньому рівні як важливий компонент професійно-математичної підготовки.

Теоретичний матеріал посібника викладений досить строго, доступно і наочно, з обговорення сенсу основних понять і тверджень.

Навчально-методичний посібник може бути корисним у самостійній підготовці бакалаврів технічних, зокрема, транспортних спеціальностей, а також у підготовці лекцій і практичних занять викладачами, які активно впроваджують у навчальний процес принципи компетентнісного підходу.

ВСТУП

При вивченні навколишнього середовища ми зустрічаємось з особливого типу явищами – випадковими, такими, що при багаторазовому відновленні одного й того самого випробування відбуваються кожного разу неоднаково. Наприклад, неможливо завбачити зарані, яка сторона випаде при підкиданні монети, скільки років проживе дитина, яка народилася сьогодні, скільки несправностей виявиться під час діагностики двигуна автомобіля і таке інше.

В ряді практичних задач випадковими факторами знехтують, виділяючи основні, головні фактори, що визначають явище. В цьому разі використовують детерміністську схему дослідження явища, а саме: від умови випробування до однозначного результату. Детерміністська схема застосовується в більшості математичних та інших дисциплінах.

Однак, для розв’язання великої кількості задач (технічних, економічних, з проблем транспорту) необхідно досліджувати і враховувати випадкові фактори, що придають результату випробування невизначеність. Виявлені в таких задачах закономірності називаються статистичними (або ймовірнісними). Статистичні закономірності досліджуються методами дисциплін теорії ймовірностей і математичної статистики.

Теорія ймовірностей є наукою, що вивчає кількісні закономірності, які спостерігаються у масових однорідних випадкових явищах.

Передбачається, що є принципова можливість багаторазового повторення експерименту (або спостереження) в рамках одного й того самого комплексу умов. Таку ситуацію прийнято називати умовами збереження статистичної однорідності сукупності, що досліджується. Теорія ймовірності, яка вивчає математичні моделі випадкових явищ, є теоретичною базою для математичної статистики.

Математична статистика вивчає методи збору, систематизації і обробки спостережень масових випадкових явищ з метою встановлення закономірностей.

Математична статистика застосовує відомі теоретичні результати для одержання статистичних висновків з експериментальних даних. Засоби математичної статистики дозволяють вибрати серед множини теоретико-ймовірнісних моделей ту, що в певному смислі найкращим чином відповідає тим статистичним даним, які характеризують реальну поведінку конкретної системи, що досліджується.

Виклад розділу «Випадкові події та ймовірності подій» частини «Теорія ймовірностей» курсу «Теорія ймовірностей і математична статистика» розпочинається з елементів комбінаторики, яка є підґрунтям розв'язання ймовірнісних задач у класичній моделі подій.

1. ЕЛЕМЕНТИ КОМБІНАТОРИКИ

Комбінаторикою називається один із розділів математики, в якому вивчаються питання про те, скільки різних сукупностей, що підпорядковані певним умовам, можна скласти із заданих об'єктів.

В теорії ймовірностей основні відомості комбінаторики застосовуються, перш за все, при обчисленні ймовірностей випадкових подій за так званим класичним означенням.

Наведемо коротку інформацію про основні поняття і факти комбінаторики.

1.1. Правило множення (основний принцип комбінаторики)

Правило. Нехай необхідно послідовно виконати які-небудь k дій. Якщо першу з дій можна виконати n_1 способами, після чого другу дію – n_2 способами, і так далі до k-ої дії, яку можна виконати n_k способами, то усі k дій разом можна виконати

$$n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k \quad \text{способами.}$$

Приклад 1. Скільки всього існує можливих результатів випробування з двома підкиданнями грального кубика?

Розв'язання. Гральний кубик – це кубик, грані якого занумеровано цифрами 1, 2, 3, 4, 5, 6. Випробування являє собою послідовне виконання двох дій, кожна з яких має 6 можливих результатів

6	6
1 дія	2 дія

За правилом множення кількість можливих результатів випробування складає

$$6 \cdot 6 = 6^2 = 36.$$

Відповідь: 36 результатів.

Приклад 2. Скільки чотирьохзначних чисел можна скласти, використовуючи цифри 1, 2, 3, 4, 5, якщо

а) повторення цифр допускається;

б) ніяка з цифр не повторюється більше одного разу?

Розв'язання.

а) Розглянемо випадок, коли повторення цифр допускається. Тоді на місце кожної з 4-х цифр у 4-х значному числі можна поставити одну (будь-яку) з 5-ти цифр. Кількість можливих способів запису кожної з 4-х цифр числа зобразимо на схемі

5	5	5	5
1 ц	2 ц	3 ц	4 ц

За правилом множення в цьому випадку можна скласти

$$5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^4 = 625 \text{ (чисел).}$$

Відповідь: 625 чисел.

б) Розглянемо випадок, коли ніяка з цифр не повторюється більше одного разу. Кількість можливих способів запису кожної з 4-х цифр числа зобразимо на схемі

5	4	3	2
1ц	2 ц	3 ц	4 ц

За правилом множення, в цьому випадку можна скласти

$$5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120 \text{ (чисел).}$$

Відповідь: 120 чисел.

За допомогою правила множення можна розв'язувати велику кількість комбінаторних задач. Однак для числа сукупностей, що найбільш часто зустрічаються на практиці, існують готові формули, які виведено із застосуванням цього правила. Цими формулами зручно зразу ж користуватися при розв'язанні задач. Сукупності, про які йдеться, називаються сполуками. Будемо розглядати лише сполуки без повторень (розміщення, переставлення, комбінації, розбиття), передбачаючи, що в кожній сукупності елементи існують в «єдиному екземплярі».

1.2. Розміщення

Означення. Скінченна множина, що містить n елементів, називається впорядкованою, якщо її елементи певним чином занумеровано числами 1, 2, 3, ..., *n*.

Упорядковані множини вважаються рівними, якщо їх укладено з одних і тих самих елементів і занумеровано однаково.

Означення. Нехай дано скінченну множину, що містить *n* елементів.

Розміщенням з *n* елементів по *k* елементів називається його довільна впорядкована підмножина, що містить *k* елементів ($k \leq n$).

Приклад 3. Записати всі можливі розміщення по два елементи даної множини {1, 2, 3, 4}.

Розв'язання. Розміщення по 2 елементи – це наступні підмножини: (1, 2); (2,1); (1, 3); (3, 1); (1, 4); (4, 1); (2, 3); (3, 2); (2, 4); (4, 2); (3, 4); (4, 3).

Всього 12 різних розміщень.

З означення випливає, що два різних розміщення з *n* елементів по *k* елементів відрізняються одне від іншого складом елементів або порядком їх розташування.

Число різних розміщень з *n* елементів по *k* елементів прийнято позначати символом A_n^k.

Теорема. Число різних розміщень з *n* елементів по *k* елементів ($k \leq n$) дорівнює добутку *k* послідовних натуральних чисел від *n* до ($n - k + 1$) включно, тобто

$$A_n^k = n(n-1)\cdot\left(n-2\right)...(n-k+1). \qquad (1)$$

Доведення. Число розміщень з *n* елементів по *k* елементів дорівнює кількості всіх *k*-елементних упорядкованих підмножин множини, що містить n елементів. Перший елемент підмножини можна, очевидно, вибрати *n* способами. Другий елемент можна вибрати ($n - 1$) способом, оскільки в якості другого елемента можна взяти довільний елемент множини, крім вже вибраного першим (розглядаються розміщення без повторень). Після вибору перших двох елементів залишаються ($n - 2$) можливості для вибору третього елемента, і так далі. Останній *k*-ий елемент підмножини можна вибрати ($n - k + 1$) способом (к моменту вибору цього елемента в множині залишається $n - (k - 1)$ елементів). Покажемо на схемі число можливих способів вибору кожного елемента підмножини

n	$n-1$	$n-2$	...	$n-k+1$
1	2	3	...	k

За правилом множення, число різних розміщень з n елементів по k елементів виражається формулою:

$$A_n^k = \underbrace{n(n-1)(n-2)...(n-k+1)}_{k\ \text{множників}}.$$

Приклад 4. Скільки різних квитків із зазначенням станції відправлення і станції призначення можна надрукувати для залізничної дороги, яка об'єднує 50 станцій?

Розв'язання. Необхідно знайти число різних упорядкованих підмножин, що містять по 2 елементи (назви станцій відправлення і призначення), які можна скласти з елементів множини в 50 елементів, тобто

$$A_{50}^2 = 50 \cdot 49 = 2450\,.$$

Відповідь: 2450 квитків.

Підкреслимо, що розглядаються впорядковані множини по 2 елементи, оскільки довільні 2 квитки, в яких зазначено одні й ті самі назви станцій у різному порядку, є різними.

Приклад 5. На автовокзалі – п'ять стоянок з номерами терміналів 1, 2, 3, 4, 5. Прибувають чотири автобуси. Скількома способами можна розставити автобуси на стоянки?

Розв'язання. Число способів, якими можна розставити чотири різних автобуси на п'ять різних стоянок, дорівнює числу способів вибору впорядкованих підмножин, що містять 4 елементи, із множини в 5 елементів, тобто

$$A_5^4 = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120.$$

Відповідь: 120 способів.

1.3. Переставлення

Означення. Переставленням даної множини називається довільна впорядкована множина, що складена з усіх її елементів.

Приклад 6. Записати усі можливі переставлення множини $\{1, 2, 3\}$.

Розв'язання. Запишемо послідовно всі впорядковані множини, складені з елементів 1, 2, 3, коли на першому місці стоїть спочатку 1, потім 2, і нарешті – 3: $\{1, 2, 3\}$; $\{1, 3, 2\}$; $\{2, 1, 3\}$; $\{2, 3, 1\}$; $\{3, 1, 2\}$; $\{3, 2, 1\}$.

Всього 6 різних переставлень.

З означення випливає, що два різних переставлення даної множини відрізняються одне від іншого тільки порядком розташування елементів.

Число різних переставлень множини з n елементів позначають символом P_n.

Теорема. Число різних переставлень множини з n елементів дорівнює добутку всіх послідовних натуральних чисел від 1 до n включно

$$P_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n = n! \tag{2}$$

Доведення. Переставлення є окремим випадком розміщень при $k = n$

$$P_n = A_n^n.$$

Тому за формулою (1)

$$P_n = A_n^n = n(n-1)(n-2)\ldots 2 \cdot 1 = n!$$

Нагадаємо, що $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$ $(n \geq 2)$; $0! = 1$; $1! = 1$.

Виразимо тепер кількість розміщень через кількість переставлень

$$A_n^k = n(n-1)(n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = n(n-1)(n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) \cdot \frac{(n-k)!}{(n-k)!} =$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)(n-k)(n-k-1) \cdot \ldots \cdot 1}{(n-k)!} =$$

$$= \frac{n!}{(n-k)!} = \frac{P_n}{P_{n-k}}.$$

Отже,

$$A_n^k = \frac{P_n}{P_{n-k}}. \tag{3}$$

Приклад 7. Скількома способами можна розставити на книжковій полиці п'ять різних посібників з теорії ймовірностей і математичної статистики?

Розв'язання. Шукане число способів дорівнює числу переставлень множини з 5 елементів (книг), тобто

$$P_n = 5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120 .$$

Відповідь: 120 способів.

Приклад 8. Скількома способами 7 осіб можуть розміститися в черзі в залізничну касу?

Розв'язання. Шукане число способів дорівнює числу переставлень множини з 7 елементів (осіб):

$$P_n = 7! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 5040 .$$

Відповідь: 5040 способів.

1.4. Комбінації

Означення. Нехай дано скінченну множину, що містить n елементів. Комбінацією з n елементів по k елементів називається його довільна невпорядкована підмножина, що містить k елементів ($k \leq n$).

Приклад 9. Записати усі можливі комбінації по два елементи для множини $\{1, 2, 3, 4\}$.

Розв'язання. Комбінації по 2 елементи – це наступні підмножини: [1, 2]; [1, 3]; [1, 4]; [2, 3]; [2, 4]; [3, 4].

Всього 6 різних комбінацій.

З означення випливає, що дві різні комбінації з n елементів по k елементів відрізняються одна від іншої тільки складом елементів.

Число різних комбінацій з n елементів по k елементів прийнято позначати символом C_n^k.

Теорема. Число різних комбінацій з n елементів по k елементів дорівнює

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \tag{4}$$

Доведення. Кожна комбінація породжує стільки відповідних розміщень, скільки існує різних переставлень її елементів. Тому $A_n^k = C_n^k \cdot P_k$, звідки

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k}. \qquad (5)$$

Підставляючи формулу (3) в вираз (5), одержимо

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k} = \frac{P_n}{P_{n-k} \cdot P_k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}.$$

З (4) випливає справедливість співвідношення

$$C_n^k = C_n^{n-k}. \qquad (6)$$

Дійсно,

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!};$$

$$C_n^{n-k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot (n-(n-k))!} = \frac{n!}{(n-k)!k!}.$$

Приклад 10. В гаражі знаходяться десять легкових автомобілів для перевезення дрібнопартіонних вантажів і чотири вантажних автомобілі для перевезення негабаритних вантажів. Скількома способами можна вибрати 2 легкових автомобілі і 3 вантажних автомобілі для перевезення відповідних вантажів?

Розв'язання. Оскільки порядок вибору автомобілів не має значення, то вибрати два легкових автомобілі з десяти, що стоять в гаражі, можна числом способів

$$C_{10}^2 = \frac{10!}{2!8!} = \frac{8! \cdot 9 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 8!} = 45.$$

Три вантажних автомобілі з чотирьох можна вибрати числом способів

$$C_4^3 = \frac{4!}{3!1!} = \frac{3! \cdot 4}{3!} = 4.$$

За правилом множення, кількість способів, якими можна вибрати 2 легкових автомобілі і 3 вантажних автомобілі для перевезення вантажів складає

$$C_{10}^{2} \cdot C_{4}^{3} = 45 \cdot 4 = 180.$$

Відповідь: 180 способів.

Зауваження. Класична задача про число комбінацій формулюється наступним чином: скількома способами можна вибрати k із n різних предметів.

Цю ж класичну задачу можна сформулювати в наступній еквівалентній формі: скількома способами можна розбити n предметів на дві групи так, щоб в першій групі було k предметів, а в другій групі $(n - k)$ предметів $(n + (n - k) = n)$.

Узагальнимо постановку цієї задачі на випадок кількох груп.

1.5. Розбиття

Наведемо зміст класичної задачі про число способів розбиття на кілька груп: скількома способами можна розбити n різних предметів на k груп по $n_1, n_2, \dots, n_k$ предметів в кожній групі $(n_1 + n_2 + \dots + n_k = n)$?

Число різних способів розбиття будемо позначати символом $C_n^{n_1, n_2, \dots, n_k}$.

Теорема. Нехай дано множину А, що містить n елементів. Нехай $n_1, n_2, \dots, n_k$ – цілі невід'ємні числа, причому $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$.

Число способів, за допомогою яких можна представити множину А у вигляді об'єднання $A = B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_k$ підмножин, що містять, відповідно, $n_1, n_2, \dots, n_k$ елементів, дорівнює

$$C_n^{n_1, n_2, \dots, n_k} = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}. \quad (7)$$

Доведення. Нехай множину A, що складається з n елементів, розбито на k підмножин $B_1, B_2, \dots, B_k$, які містять, відповідно, $n_1, n_2, \dots, n_k$ елементів.

Довільне переставлення елементів всередині кожної підмножини B_i $(i = 1, 2, \dots, k)$ не змінює суті розбиття. Всього таких переставлень $n_i!$. Застосовуючи правило множення, одержимо, що $n_1! \cdot n_2! \cdot ... \cdot n_k!$ переставлень не змінюють суті розбиття. Отже, кожне вказане розбиття множини A на підмножини $B_1, B_2, ..., B_k$ породжує $n_1! \cdot n_2! \cdot ... \cdot n_k!$ його переставлень. Тому загальна кількість переставлень множини з n елементів дорівнює

$$P_n = C_n^{n_1,\, n_2,\, ...,\, n_k} \,.\, n_1!n_2!...n_k!,$$

звідки

$$C_n^{n_1, n_2, ..., n_k} = \frac{n!}{n_1!n_2!...n_k!}.$$

Приклад 11. Скількома способами можна поселити вісім співробітників фірми, що знаходяться у відрядженні, по трьох кімнатах готелю: одномісній, трьохмісній і чотирьохмісній?

Розв'язання. Треба знайти число способів розбиття множини, що містить 8 елементів (співробітників), на 3 групи: по одному, трьом і чотирьом елементам в кожній групі. Таким чином, необхідно знайти $C_n^{n_1, n_2, n_3}$, де $n = 8$; $n_1 = 1$; $n_2 = 3$; $n_3 = 4$. Отже,

$$C_8^{1,3,4} = \frac{8!}{1!\,3!4!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} = 280.$$

Відповідь: 280 способів.

2. КЛАСИФІКАЦІЯ ВИПАДКОВИХ ПОДІЙ

2.1. Початкові поняття і означення

Кожна наука має свої первісні (початкові) поняття, що роз’яснюються, а всі інші поняття – визначаються через них. Визначимо початкові поняття теорії ймовірностей.

Під **експериментом** (**спробою**, **випробуванням**) будемо розуміти деяку відтворну сукупність умов, в яких спостерігається те чи інше явище.

Будемо розглядати **випадкові** (**стохастичні**) експерименти, результати яких не можна передбачити наперед. При цьому розглядаються тільки такі експерименти, які можна повторювати (хоча б теоретично) при незмінному комплексі умов довільне число разів.

Припускається, що з розглядуваним експериментом можна пов’язати поняття сукупності всіх його можливих взаємно виключних елементарних результатів (таких, що обов’язково відбуваються внаслідок випадкового експерименту). Кожен з цих результатів будемо називати **елементарною подією** (ω), а сукупність усіх можливих елементарних подій – **простором елементарних подій** (Ω): $\omega \in \Omega$.

Наведемо приклади випадкових експериментів і просторів елементарних подій.

Приклад 12. Експеримент: однократне підкидання монети. Наслідками цього експерименту можуть бути дві елементарні випадкові події:

$\omega_1 =$ Г (випадання гербу); $\omega_2 =$ Ц (випадання цифри).

Отже, простором елементарних подій є множина $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$ або $\Omega = \{\text{Г, Ц}\}$.

Приклад 13. Експеримент: однократне підкидання грального кубика. Наслідком цього експерименту можуть бути шість елементарних подій:

$\omega_i = i$ (випадання i очок на верхній грані кубика); $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

Отже, $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$ або $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

В прикладах 12, 13 простір елементарних подій Ω є скінченною множиною.

Приклади нескінченних множин Ω дістанемо, розглянувши наступні експерименти.

Приклад 14. Експеримент: визначення кількості пострілів при стрільбі в ціль до першого влучання. Наслідком цього експерименту можуть бути наступні елементарні події:

$\omega_1 = 1$ (зроблено 1 постріл: влучання);

$\omega_2 = 2$ (зроблено 2 постріли: 1-й раз – промах; 2-й раз – влучання);

- -

$\omega_i = i$ (зроблено i пострілів: (i-1) разів – промах, i-ий раз – влучання);

- -

Тут $\Omega = \{1, 2, 3, ..., n, ...\}$ – нескінченна (зліченна) множина.

Приклад 15. Експеримент: спостереження за часом безвідмовної роботи комп'ютеру.

Наслідком цього експерименту може бути довільне число $t \geq 0$. Оскільки час змінюється неперервно, то $\Omega = \{t,\ 0 \leq t < \infty\}$ – нескінченна (незліченна) множина.

У реальному випробуванні, крім елементарних взаємно виключних результатів, може бути багато інших наслідків.

Означення. Випадковою подією (подією) називається всякий факт, що може відбутися або не відбутися у випадковому експерименті.

Події позначаються, як правило, заголовними буквами латинського алфавіту: *A, B, C, ...* .

Наведемо приклади випадкових подій.

Приклад 16. Експеримент: однократне підкидання грального кубика.

Елементарні події: $\omega_i = i$ (випадання i очок на верхній грані кубика); i=1, 2, 3, 4, 5, 6.

Введемо у розгляд події:

A = {випала парна кількість очок};

B = {випала непарна кількість очок};

C = {випала кількість очок, що перевищує або дорівнює п'яти}.

Події *A, B* і *C* складено, відповідно, з трьох та двох елементарних подій

$$A = \{\omega_2, \omega_4, \omega_6\};\ B = \{\omega_1, \omega_3, \omega_5\};\ C = \{\omega_5, \omega_6\}.$$

Події А*,* В і С є так званими **складеними подіями**.

Означення. Елементарні події, які належать відповідним складеним випадковим подіям A, B, C, ... , називаються **подіями, що сприяють** кожній із зазначених подій.

Таким чином, випадкова подія A – це деяка підмножина простору Ω, що є складеною з усіх елементарних подій ω, які **сприяють** події A.

2.2. Види випадкових подій

Вірогідною називається подія, яка в результаті даного експерименту обов'язково відбудеться.

За означенням, вірогідна подія – це подія, що складена з усіх можливих елементарних подій ω, тобто це подія Ω.

Неможливою називається подія, яка в результаті даного експерименту не може відбутися.

Очевидно, що неможливій події відповідає порожня множина елементарних подій. Тому неможливу подію позначають символом $\emptyset$.

Протилежною подією до даної події називається подія, яка відбувається тоді і лише тоді, коли не відбувається дана подія.

Позначення: якщо A – дана подія, то $\overline{A}$ – протилежна подія.

Приклад 17. Експеримент: однократне підкидання грального кубика.

A = {кількість очок парна}; $\overline{A}$ = {кількість очок непарна}.

Дві події у даному експерименті називаються **несумісними**, якщо поява однієї з них виключає появу іншої. У протилежному випадку події називаються **сумісними.**

У прикладі 16 події A і B є несумісними; події A і C, B і C – є сумісними.

Події A_1, A_2, ..., A_n називаються **попарно несумісними** якщо довільні дві події з них є несумісними.

Декілька подій в даному експерименті утворюють **повну групу подій**, якщо в результаті експерименту принаймні одна з цих подій обов'язково відбудеться.

Надалі найчастіше будуть зустрічатись повні групи **несумісних** подій. Такою, наприклад, є сукупність усіх елементарних подій ω_i (i=1, 2, 3, 4, 5, 6) у прикладі 12. Зокрема, повну групу несумісних подій завжди утворюють будь-яка подія A і протилежна до неї $\overline{A}$.

3. ОПЕРАЦІЇ НАД ПОДІЯМИ

В теорії ймовірностей важливо вміти виражати одні події через інші. Для цього вводяться операції над подіями: поняття суми, добутку, різниці подій, а також правила дій з подіями.

Будемо розглядати деяку систему подій A, B, C, ... в даному експерименті (A, B, C, ... – підмножини простору елементарних подій Ω).

Означення. Подія A називається **окремим випадком** події B, якщо множина A є підмножиною В: $A \subset B$.

Відношення $A \subset B$ означає, що кожного разу, коли відбувається подія А, також відбувається подія B.

Приклад 18. Експеримент: однократне підкидання грального кубика.

A = {випало 3 очки};

B = {випала проста кількість очок}.

Очевидно що, $A \subset B$.

Означення. Події A і B називаються **рівносильними**, якщо $A \subset B$ і $B \subset A$.

Рівносильність подій A і B позначають так: $A = B$.

Події і операції над ними проілюструємо за допомогою діаграм Ейлера-Венна, які схематично відображають відношення між множинами.

На цих діаграмах простір елементарних подій Ω зобразимо точками квадрата, подію A – точками круга, подію B – точками трикутника (рис. 1).

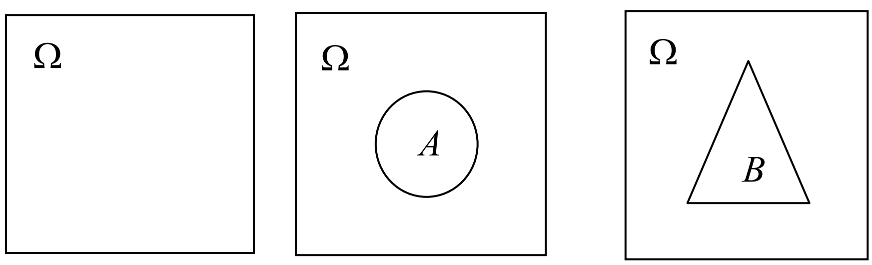


Рис. 1

Означення. Сумою (об'єднанням) подій A і B називається подія, яка складається з елементарних подій, що входять до складу хоча б однієї з подій A, B.

Інакше кажучи: сума подій – це подія, яка полягає в тому, що відбувається принаймні одна з подій A, B (рис. 2).

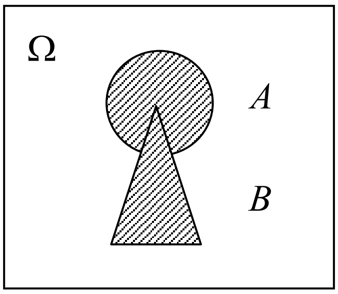


Рис. 2. Сума подій A і B

Позначення: $A+B$ або $A \cup B$.

З означення суми випливає:

1) $A+A=A$; 2) $A+\Omega=\Omega$; 3) $A+\emptyset=A$.

Означення. Добутком (перетином) подій A і B називається подія, яка складається з елементарних подій, що входять в обидві події A і B.

Інакше кажучи добуток подій – це подія, яка полягає у тому, що відбуваються обидві події A і B (рис. 3).

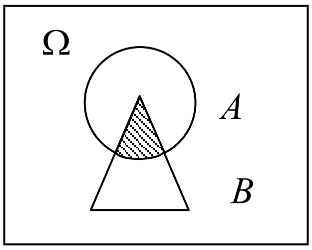


Рис. 3. Добуток подій A і B

Позначення: $A \cdot B$ або $A \cap B$.

З означення добутку випливає:

1) $A \cdot A = A$; 2) $A \cdot \Omega = A$; 3) $A \cdot \emptyset = \emptyset$.

Операції суми і добутку подій мають наступні властивості:

1. $A+B=B+A$; $A \cdot B = B \cdot A$ (комутативна властивість);

2. $(A+B)+C=A+(B+C)$; $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$ (асоціативна властивість);

3. $(A+B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$ (дистрибутивна властивість).

Зауваження. Поняття суми і добутку подій поширюються на випадок будь-якого скінченного числа подій, а також нескінченного, зліченного числа подій.

Означення. Різницею двох подій A і B називається подія, яка складається з елементарних подій, що входять до A і не входять до B.

Інакше кажучи: різниця двох подій – це подія, яка полягає у тому, що відбулася подія A, але не відбулася подія B (рис. 4).

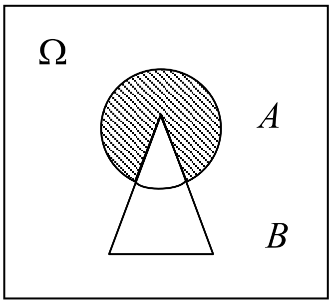


Рис. 4. Різниця подій A і B

Позначення: $A - B$ або $A \setminus B$.

Зауваження. З означення протилежної події випливає: $\overline{A} = \Omega - A$.

$\overline{A}$ складається з усіх елементарних подій, що не входять до A (рис. 5).

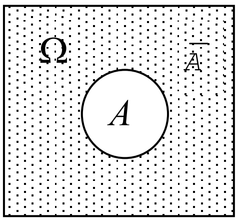


Рис. 5. Події $A, \overline{A}$

Справедливо:

1) $A + \overline{A} = \Omega$;   2) $A \cdot \overline{A} = \emptyset$;   3) $\overline{\left(\overline{A}\right)} = A$;

4) $\overline{\emptyset} = \Omega$;   5) $\overline{\Omega} = \emptyset$;   6) $\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$;   7) $\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$.

Зауваження.

1. Якщо A і B є несумісними подіями, то $A \cdot B = \emptyset$.
2. Якщо $A_1, A_2, ..., A_n$ утворюють повну групу подій, то

$$A_1 + A_2 + ... + A_n = \Omega.$$

Приклад 19. Нехай A, B, C – довільні події. Знайти вираз через A, B, C для наступних подій:

1) Відбулася тільки подія A. Події B і C не відбулися.

Відповідь: $A \cdot \overline{B} \cdot \overline{C}$.

2) Відбулася одна і тільки одна з трьох подій A, B і C.

Відповідь: $A \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} + B \cdot \overline{A} \cdot \overline{C} + C \cdot \overline{A} \cdot \overline{B}$.

3) Відбулися тільки події A і B. Подія С не відбулася.

Відповідь: $A \cdot B \cdot \overline{C}$.

4) Відбулися дві і тільки дві з трьох подій A, B і C.

Відповідь: $A \cdot B \cdot \overline{C} + A \cdot C \cdot \overline{B} + B \cdot C \cdot \overline{A}$.

5) Відбулися всі три події A, B і C.

Відповідь: $A \cdot B \cdot C$.

6) Жодна з подій A, B, C не відбулася.

Відповідь: $\overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C}$.

4. КЛАСИЧНЕ ОЗНАЧЕННЯ ЙМОВІРНОСТІ

Коли розглядається стохастичний експеримент, то на інтуїтивному рівні зрозуміло, що різні випадкові події, які є можливими наслідками експерименту, мають різні міри об’єктивної змоги для їх появи або непояви. Наприклад, якщо в ящику міститься 10 однотипних деталей, серед яких є одна бракована, а решта – стандартні, і дехто, не глядячи, навмання бере одну деталь, то більше шансів бути вибраною має стандартна деталь. Чисельною оцінкою міри об’єктивної змоги щодо появи випадкової події у даному експерименті є **ймовірність** цієї події.

Існують декілька математичних означень ймовірності подій. Вони доповнюють або узагальнюють одне одного. Спочатку введемо поняття ймовірності події в так званій класичній моделі подій.

4.1. Класична модель подій

Нехай простір елементарних подій Ω є скінченною множиною

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n\}.$$

Оскільки, за означенням, Ω являє собою сукупність усіх можливих взаємовиключних елементарних результатів експерименту, то елементарні події $\omega_i (i = 1, 2, ..., n)$ є попарно несумісними подіями, що утворюють повну групу подій.

Будемо додатково вважати всі елементарні події ω_i **рівноможливими.**

Зауваження. Поняття **рівноможливості** подій є одним з первісних понять теорії ймовірностей. Воно означає, що нема об’єктивних причин вважати одну з елементарних подій більш можливою, ніж іншу (тобто всі елементарні події мають рівні «шанси»).

На практиці рівноможливість подій встановлюється з розумінь симетрії, або забезпечується спеціальними мірами (наприклад, ретельним перемішуванням однакових предметів, що надає кожному з них при виборі навмання рівну з іншими можливість бути вибраними).

Наведемо приклади скінченної кількості рівноможливих елементарних подій ω_i.

Приклад 20.

1) Експеримент: однократне підкидання однорідного, правильного за формою грального кубика.

ω_i ={поява i очок на верхній грані кубика}; $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

Рівноможливість подій ω_i випливає з умови однорідності та правильності за формою грального кубика.

2) Експеримент: діставання навмання однієї кулі з урни, що містить 10 однакових, ретельно перемішаних куль з номерами від 1 до 10.

ω_i ={поява кулі з номером i}; $i = 1,2,...,10$.

Рівноможливість подій ω_i забезпечується умовою ретельного перемішування однакових куль.

3) Експеримент: двократне підкидання однорідної, правильної за формою (циліндричної) монети.

$\omega_1 = \{Г,Г\}, \omega_2 = \{Г, Ц\}, \omega_3 = \{Ц, Г\}, \omega_4 = \{Ц, Ц\}$.

(тут букви *Г* і *Ц* позначають герб і цифру, відповідно).

Рівноможливість подій ω_i випливає з умови однорідності та правильності за формою монети.

Означення. Множину всіх підмножин скінченного простору Ω, в якому елементарні події ω_i є рівноможливими, будемо називати **класичною моделлю подій**.

Означення. В класичній моделі подій ймовірність будь-якої події А визначається як відношення числа m сприятливих для події A елементарних подій до загальної кількості n всіх елементарних подій

$$P(A) = \frac{m}{n}. \tag{8}$$

Наведене означення називають **класичним означенням ймовірності**.

Приклад 21. Експеримент: однократне підкидання грального кубика.

Знайти ймовірності подій:

а) A ={випала парна кількість очок};

б) B = {випала непарна кількість очок};

в) C = {випала кількість очок, що перевищує або дорівнює п’яти}.

Розв'язання. В цьому експерименті загальна кількість елементарних подій $n = 6$.

а) $A = \{\omega_2, \omega_4, \omega_6\}$, тобто події A сприяють три елементарні події (приклад 16). Тому $m = 3$.

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

б) $B = \{\omega_1, \omega_3, \omega_5\}$, тобто події B сприяють три елементарні події. Тому $m = 3$.

$$P(B) = \frac{m}{n} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

в) $C = \{\omega_5, \omega_6\}$, тобто події C сприяють дві елементарні події. Тому $m = 2$.

$$P(C) = \frac{m}{n} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

Відповідь: $P(A) = \frac{1}{2}$; $P(B) = \frac{1}{2}$; $P(C) = \frac{1}{3}$.

Приклад 22. Експеримент: вибір навмання однієї кулі з урни, що містить a білих і b чорних куль.

Знайти ймовірність події A = {винута біла куля}.

Розв'язання. Загальна кількість елементарних подій $n = a + b$ (кількість способів вибору однієї кулі з урни). Події А сприяють a елементарних подій (кількість способів вибору білої кулі), тобто $m = a$. Отже,

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{a}{a+b}.$$

Відповідь: $P(A) = \frac{a}{a+b}$.

Приклад 23. В регіоні є 40 приватних автотранспортних підприємств (АТП), 10 з яких стали банкрутами. Яка ймовірність того, що навмання вибране приватне АТП не є банкрутом?

Розв'язання. Введемо у розгляд подію

A = {навмання вибране приватне АТП не є банкрутом}.

Загальна кількість елементарних подій n = 40 (кількість всіх можливих способів вибору навмання одного АТП).

Число сприятливих для події A елементарних подій m = 30 (число способів вибору приватного АТП, що не є банкрутом, дорівнює 40–10 = 30). Отже,

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{30}{40} = 0,75.$$

Відповідь: $P(A) = 0,75.$

4.2. Властивості ймовірності

1. Для будь-якої події $A \subset \Omega$ справедливо:

$$0 \le P(A) \le 1. \tag{9}$$

Доведення. За класичним означенням $P(A) = \frac{m}{n}$. Очевидно, що $n > 0$, $m \ge 0$ і $m \le n$. Тому $0 \le \frac{m}{n} \le 1$. Отже, $0 \le P(A) \le 1$.

2. Ймовірність вірогідної події дорівнює 1:

$$P(\Omega) = 1 \tag{10}$$

Доведення. За формулою (8): $P(\Omega) = \frac{m}{n} = \frac{n}{n} = 1$ (оскільки вірогідній події сприяють всі елементарні події простору Ω).

3. Ймовірність неможливої події дорівнює 0:

$$P(\varnothing) = 0. \tag{11}$$

Доведення. За формулою (8): $P(\varnothing) = \frac{m}{n} = \frac{0}{n} = 0$ (оскільки неможливій події не сприяє жодна з елементарних подій).

4. Якщо A і B – несумісні події ($A \cdot B = \varnothing$), то

$$P(A + B) = P(A) + P(B) \tag{12}$$

(ймовірність суми несумісних подій дорівнює сумі їх ймовірностей).

Доведення. Нехай n – кількість усіх елементарних подій, m_A – кількість елементарних подій, що сприяють події A, m_B – кількість елементарних подій, що сприяють події В. За умовою, події A і B є несумісними. Тому кількість елементарних подій, що сприяють $A+B$, дорівнює $m_A + m_B$. Таким чином,

$$P(A+B) = \frac{m_A + m_B}{n} = \frac{m_A}{n} + \frac{m_B}{n} = P(A) + P(B).$$

4.3. Комбінаторний метод обчислення ймовірностей в класичній моделі подій

При обчисленні ймовірностей подій за класичним означенням (8) для визначення чисел m і n часто використовують елементи комбінаторики (п. 1). Наведемо відповідні приклади розв'язання задач.

Приклад 24. Номер телефону складається з семи цифр. Яка ймовірність того, що всі цифри в номері є різними, якщо номер може починатися з нуля?

Розв'язання. Введемо в розгляд подію

A = {всі цифри в номері, що складається з семи цифр, є різними}.

За класичним означенням ймовірності (8): $P(A) = \dfrac{m}{n}$.

Знайдемо загальну кількість n всіх елементарних подій, що дорівнює загальній кількості усіх можливих номерів. Зобразимо на схемі номер телефону у вигляді семи позицій, кожну з яких можна заповнити 10-ю способами(в кожній позиції може стояти одна з десяти цифр від 0 до 9)

10	10	10	10	10	10	10
1	2	3	4	5	6	7

За комбінаторним правилом множення, загальна кількість усіх можливих номерів складає 10^7. Отже, $n = 10^7$.

Знайдемо кількість m сприятливих для події A елементарних подій. За умовою, всі цифри в номері є різними. Треба визначити кількість способів вибору семи різних цифр з десяти, причому порядок цифр у номері важливий. Отже, шукане значення m дорівнює кількості способів здобуття упорядкованих підмножин, що містять 7 елементів, із загальної кількості 10-ти елементів, тобто

$$m = A_{10}^{7} = \frac{10!}{3!}$$

Маємо

$$P(A) = \frac{A_{10}^{7}}{10^{7}} = \frac{10!}{3!10^{7}} = \frac{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{10^{7}} \approx 0{,}0605.$$

Відповідь: 0,0605.

Приклад 25. В деякому районі за сім днів тижня, незалежно одне від одного, відбувається сім дорожньо-транспортних пригод (ДТП). Яка ймовірність того, що кожного дня тижня буде відбуватися по одному ДТП?

Розв'язання. Введемо у розгляд подію

A ={кожного дня тижня відбувається по одному ДТП}.

За формулою (8): $P(A) = \dfrac{m}{n}$.

Знайдемо загальну кількість елементарних подій n. Зобразимо на схемі кількість днів тижня, в які можуть відбуватися, незалежно одне від одного, кожне з семи ДТП

	7	7	7	7	7	7	7
ДТП:	1	2	3	4	5	6	7

Застосовуючи комбінаторне правило множення, одержимо $n = 7^7$.

Знайдемо кількість елементарних подій m, що сприяють A. Нехай кожного дня тижня здійснюється по одному ДТП. Розподіл семи ДТП по днях тижня рівносильний розкладанню семи куль по семи ящиках. Покладемо як-небудь в кожний ящик по одній кулі, а потім будемо міняти кулі місцями. Одержимо $m = 7!$

Маємо

$$P(A) = \frac{7!}{7^7} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}{7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7} \approx 0{,}006.$$

Відповідь: 0,006.

Приклад 26. Дев'ять пасажирів навмання розсаджуються в три вагони. Знайти ймовірність того, що в один вагон сядуть чотири, в другий три, а в третій два пасажири.

Розв'язання. Нехай подія

$A =\{$в один вагон сядуть 4, в другий 3, а в третій 2 пасажири$\}$.

За формулою (8): $P(A) = \frac{m}{n}$.

Знайдемо n. Оскільки кожний з 9 пасажирів, незалежно від других, має можливість вибрати один з трьох вагонів, то загальна кількість елементарних подій n, що дорівнює кількості різних способів вибору вагонів 9-ю пасажирами, визначиться як

$$n = 3^9.$$

Кількість сприятливих для події А елементарних подій дорівнює числу способів розбиття множини з 9 елементів (9 пасажирів) на 3 групи (3 вагони) по 4, 3 і 2 елементи в кожній групі

$$m = C_9^{4,3,2} = \frac{9!}{4!3!2!}.$$

В результаті

$$P(A) = \frac{9!}{4!3!2!\cdot 3^9} = \frac{5\cdot 7\cdot 4}{3^7} \approx 0{,}064.$$

Відповідь: 0,064.

Приклад 27. На фірмі працюють 10 спеціалістів з технології вантажних перевезень і 5 спеціалістів з комерційної роботи на автомобільному транспорті. Керівник фірми вирішив для виконання спеціального завдання сформувати робочу групу з 5-ти осіб. Яка ймовірність події:

$A =\{$вибрана навмання група з 5-ти осіб включає 3-х спеціалістів з технології вантажних перевезень і 2-х спеціалістів з комерційної роботи на автотранспорті$\}$.

Розв'язання. Загальна кількість працівників фірми складає 15 осіб. Робоча група з 5-ти осіб, що формується для виконання спеціального завдання, уявляє собою вибірку із загальної кількості.

Зобразимо схематично склад загальної кількості спеціалістів і склад виборки (рис.6).

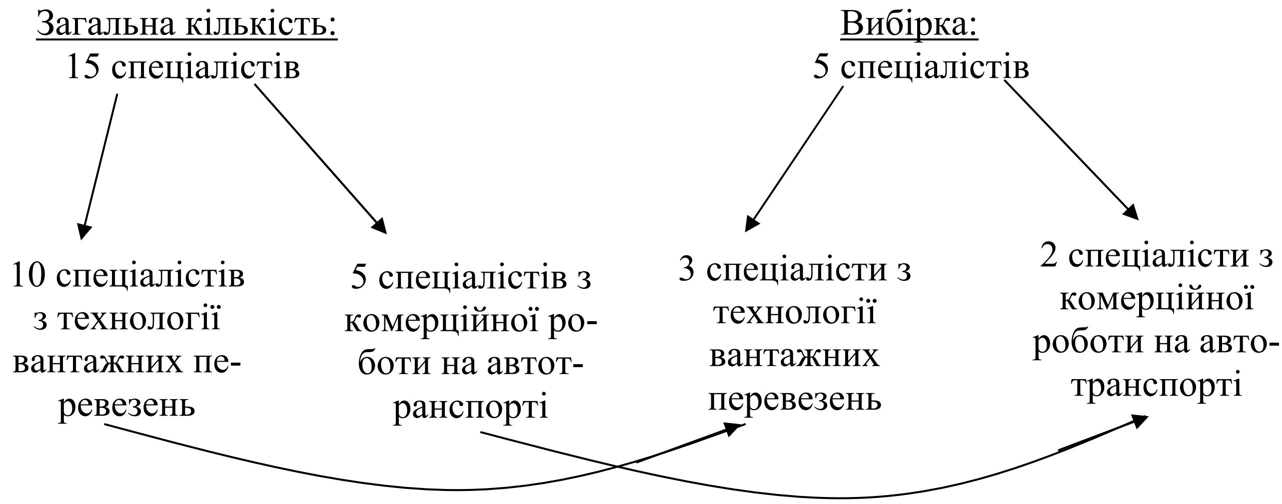


Рис. 6

Знайдемо n – число всіх елементарних подій. Воно дорівнює числу всіх, різних за складом, груп по 5 осіб, які можна сформувати з 15 спеціалістів фірми, тобто

$$n = C_{15}^{5} = \frac{15!}{5!10!} = \frac{10! \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14 \cdot 15}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 10!} = 3003.$$

Знайдемо m – кількість елементарних подій, що сприяють події A.

Для формування робочої групи 3-х спеціалістів з технології вантажних перевезень можна вибрати з 10-ти таких спеціалістів фірми кількістю способів C_{10}^{3}.

2-х спеціалістів з комерційної роботи на автомобільному транспорті можна вибрати з 5-ти таких спеціалістів фірми кількістю способів C_{5}^{2}. За комбінаторним правилом множення

$$m = C_{10}^{3} \cdot C_{5}^{2} = \frac{10!}{3!7!} \cdot \frac{5!}{2!3!} = \frac{7! \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{6 \cdot 7!} = \frac{3! \cdot 4 \cdot 5}{2 \cdot 3!} = 1200.$$

Отже, $P(A) = \dfrac{m}{n} = \dfrac{1200}{3003} \approx 0,4.$

Відповідь: 0,4.

Звертаємо увагу на обставини, що обумовлюють обмеженість класичного означення ймовірності.

1. Простір елементарних подій Ω є **скінченною** множиною.

Однак на практиці часто зустрічаються випробування, де кількість можливих результатів є нескінченною.

2. Елементарні події ω_i вважаються **рівноможливими**.

Однак на практиці досить рідко зустрічаються ситуації, в яких можна виходити з міркувань симетрії.

Отже, необхідно узагальнення класичного означення ймовірності.

Перший недолік класичного означення (неможливість застосування його до випробувань з нескінченною множиною можливих результатів) усуває геометричне означення ймовірності. Його застосовують тоді, коли простір елементарних подій Ω є нескінченною, незліченною множиною, а елементарні події – є рівноможливими.

5. ГЕОМЕТРИЧНЕ ОЗНАЧЕННЯ ЙМОВІРНОСТІ

Нехай простір елементарних подій Ω − це деякий проміжок на прямій, або область на площині чи в тривимірному просторі. Елементарні події ω – окремі точки в межах проміжку або указаної області. Припустимо, що Ω має скінченну міру mes Ω (на прямій – довжину, на площині – площу, у просторі – об'єм).

Нехай в області Ω навмання вибирається точка. Цей вибір можна інтерпретувати як кидання точки в область Ω. Передбачається, що всі точки області Ω є рівноправними (всі елементарні події ω простору Ω є рівноможливими). Тому кидана точка може суміститися з довільною точкою області Ω.

Нехай $D \subset \Omega$ – підмножина області Ω, яка має міру mes D. З рівноможливості елементарних подій ω випливає природне припущення, що ймовірність попадання киданої точки в підмножину D не залежить від її форми і розташування, а є пропорційною mes D. Нехай подія

$A = \{$кидана в область Ω точка попаде в область $D\}$.

Означення. Геометричною ймовірністю події A називається число

$$P(A) = \frac{\text{mes}\, D}{\text{mes}\, \Omega} \tag{13}$$

Можна показати, що для геометричної ймовірності залишаються справедливими властивості (9) – (12) класичного означення ймовірності події.

Приклад 28. На перехресті встановлено автоматичний світлофор, в якому одну хвилину горить зелений світ і півхвилини – червоний. Потім знов одну хвилину – зелений і півхвилини червоний і т. д. У випадковий момент часу до перехрестя під'їжджає автомобіль. Яка ймовірність того, що він проїде перехрестя без зупинки?

Розв'язання. Зобразимо на числовій осі проміжки часу $L_i (i = 1, 2, 3, ...)$ довжиною 1,5 хвилини. Протягом кожного з них 1 хвилину горить зелений світ світлофору $\left(L_{i1}\right)$, а потім 0,5 хвилини горить червоний світ $\left(L_{i2}\right)$ (рис. 7), або навпаки: спочатку 0,5 хвилини горить червоний світ, а потім 1 хвилину горить зелений світ.

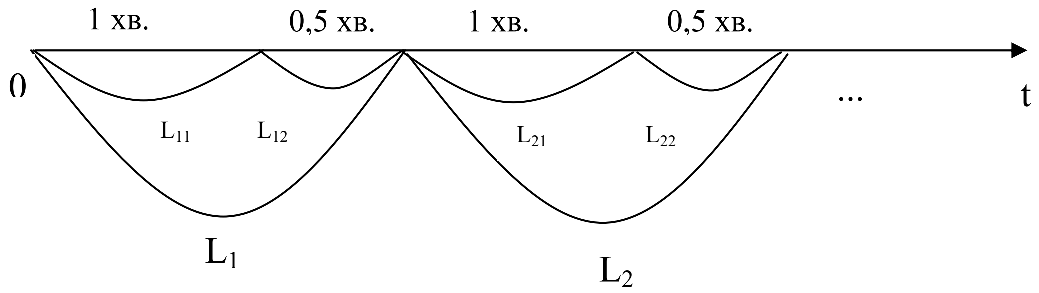


Рис. 7. Проміжки часу на числовій осі (приклад 28)

Умова задачі: «у випадковий момент часу до перехрестя під'їжджає автомобіль» математично означає, що точка (автомобіль) навмання ставиться на один із проміжків $L_i (i = 1,2,3,...)$. Введемо у розгляд подію

$A =\{$автомобіль проїде перехрестя без зупинки$\}$.

Еквівалентним формулюванням змісту події A є:

$A =\{$точка попаде на проміжок часу $L_{i1} \subset L_i$, протягом якого горить зелений світ$\}$.

За геометричним означенням ймовірності

$$P(A) = \frac{\operatorname{mes} L_{i1}}{\operatorname{mes} L_i} = \frac{1}{1,5} = \frac{2}{3}.$$

Відповідь: $\frac{2}{3}$.

Приклад 29. Два суховантажних судна мають підійти до одного й того самого причалу. Прибуття кожного судна здійснюється незалежно одне від одного і рівноможливо протягом доби. Знайти ймовірність того, що одному з судів треба буде очікувати розвантаження іншого, якщо час розвантаження першого судна – одна година, а другого – дві години.

Розв'язання. Нехай x – час прибуття першого судна, y – час прибуття другого судна. За умовою, можливі значення x і y такі: $0 \le x \le 24; 0 \le y \le 24$.

Отже, простір елементарних подій Ω описується нерівностями

$$\Omega=\left\{\left(x,y\right):0\le x\le 24;\, 0\le y\le 24\right\}.$$

Оскільки перше судно розвантажується протягом однієї години, то друге судно буде очікувати розвантаження першого судна, якщо часи їх прибуття до причалу зв'язані співвідношенням

$$0\le y-x\le 1.$$

Аналогічно перше судно буде очікувати розвантаження другого, якщо

$$0\le x-y\le 2.$$

Введемо у розгляд подію A:

A = {одному із суховантажних судів треба буде очікувати розвантаження іншого}.

$$A=\left\{\left(x,y\right):0\le x\le 24;\ 0\le y\le 24;\ 0\le y-x\le 1;\ 0\le x-y\le 2\right\}=$$

$$=\left\{\left(x,y\right):0\le x\le 24;\ 0\le y\le 24;\ x\le y\le x+1;\ x-2\le y\le x\right\}.$$

Простір Ω і подію A зобразимо на рис. 8.

Ω – квадрат OABC зі стороною 24, A – виділена фігура DOEFBK.

За формулою (13) шукана ймовірність дорівнює

$$P(A)=\frac{\text{mes}\left(\text{DOEFBK}\right)}{\text{mes}\left(\text{OABC}\right)}=\frac{S_{\text{DOEFBK}}}{S_{\text{OABC}}}=\frac{S_{\text{OABC}}-S_{\text{ECF}}-S_{\text{DAK}}}{S_{\text{OABC}}}=$$

$$=\frac{24\cdot 24-\dfrac{1}{2}\cdot 22\cdot 22-\dfrac{1}{2}\cdot 23\cdot 23}{24\cdot 24}=\frac{576-242-\dfrac{1}{2}\cdot 529}{576}=\frac{69,5}{576}\approx 0,121.$$

Відповідь: 0,121.

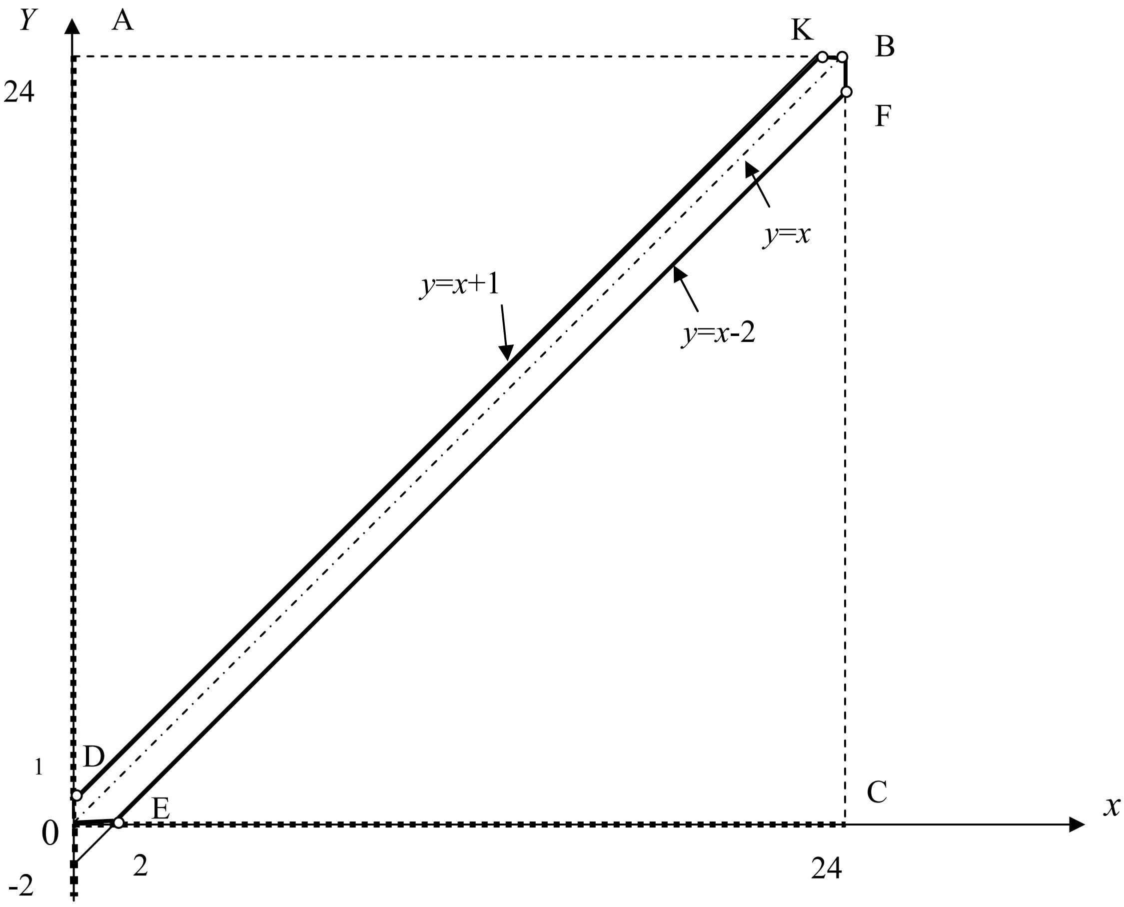


Рис. 8

6. СТАТИСТИЧНЕ ОЗНАЧЕННЯ ЙМОВІРНОСТІ

В більшості практичних задач неможливо обчислити ймовірність випадкової події, користуючись класичним або геометричним означенням, оскільки виникає проблема подання результатів випадкового експерименту як сукупності рівноможливих елементарних подій. Отже, якщо гральний кубик виготовлено з неоднорідного матеріалу, то випадання різних граней вже не можна вважати рівноможливими подіями (центр ваги кубика не збігається з геометричним центром кубика).

Також виникає проблема визначення ймовірності, наприклад, наступних подій:

$A =${влучання в ціль при одному пострілі};

$B =${безвідмовна робота приладу протягом однієї години} тощо.

Природно припустити, що ці події мають певну ступінь об'єктивної можливості відбування.

Принципові труднощі цих ситуацій усуває **статистичне означення** ймовірності.

Нагадаємо, що в теорії ймовірностей розглядаються лише такі випадкові експерименти, які можна повторювати будь-яке число разів при незмінному комплексі умов. Надалі будемо припускати, що, за багатократного повторення, події, що відбулися у попередніх експериментах, не впливають на події даного експерименту.

6.1. Відносна частота події

Нехай проводиться серія із N експериментів, в кожному з яких може з'явитися або не з'явитися подія A.

Означення. Відносною частотою (частотою) події A називається відношення числа M експериментів, в яких подія A відбулася, до загальної кількості N усіх експериментів

$$P^*(A)=\frac{M}{N} . \qquad (14)$$

Зауважимо, що $0 \le P^*(A) \le 1$.

Приклад 30. У партії однотипних деталей, кількість яких дорівнює 400, контролер виявив 25 бракованих. Чому дорівнює відносна частота появи стандартної деталі?

Розв'язання. Нехай подія

$A =${поява стандартної деталі}.

Контролер перевірив 400 деталей і виявив 25 бракованих (отже, 400 – 25 = 375 стандартних). Тому

$N = 400$; $M = 375$.

$$P^*(A) = \frac{M}{N} = \frac{375}{400} = 0,9375 .$$

Відповідь: 0,9375.

Приклад 31. Національний банк проаналізував стан погашення кредитів, виданих автотранспортним фірмам. Для перевірки було навмання вибрано 100 фірм і з'ясовано, що 80 з них погашають кредити своєчасно. Знайти відносну частоту події

$A =${автотранспортна фірма погашає кредит своєчасно}.

Розв'язання. Тут $N = 100$; $M = 80$. Тому

$$P^*(A) = \frac{M}{N} = \frac{80}{100} = 0,8.$$

Відповідь: 0,8.

Зауваження.

1. При малому числі експериментів N відносна частота події є непередбаченою.

2. Зі збільшенням значення N в серіях експериментів частота $P^*(A)$ проявляє тенденцію стабілізуватися, наближаючись до деякої сталої величини $P(A)$ (рис. 9).

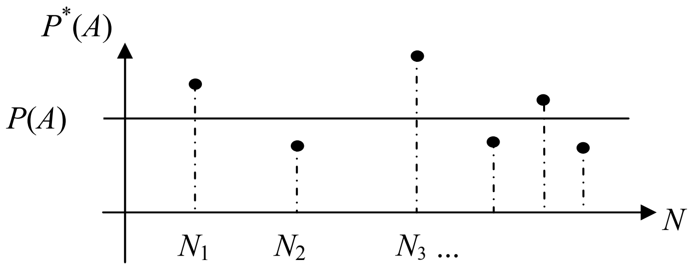


Рис. 9

Природно вважати, що число $P(A)$ характеризує міру можливості події A.

6.2. Статистична ймовірність

Статистичною ймовірністю події A називається число $P(A)$, навколо якого групуються відносні частоти цієї події зі збільшенням кількості експериментів N в серії.

На практиці за чисельне значення статистичної ймовірності приймають відносну частоту $P^*(A)$ в разі великого числа експериментів.

Зауваження. Статистичне означення ймовірності є узагальненням класичного означення. В класичній моделі подій з ростом N відносна частота подій $P^*(A)$ наближається до ймовірності події $P(A)$.

7. АКСІОМИ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ ТА ЇХ НАСЛІДКИ

Розвиток науки і природознавства в началі XX століття привели до різкого розширення області застосування теорії ймовірностей. У зв'язку з цим виникла необхідність у систематизованому вивченні основних понять теорії ймовірностей і подальшому з'ясуванні можливостей використання її результатів.

В началі 30-х років XX століття академік А.М. Колмогоров запропонував аксіоматичну побудову теорії ймовірностей, зв'язав цю науку з теорією множин і теорією функцій.

Нехай задано довільний простір елементарних подій Ω і S – деяку систему випадкових подій у цьому просторі.

Означення. Система подій S називається **алгеброю подій**, якщо

1. $\Omega \in S$.

2. Із того, що $A \in S$, $B \in S$ випливає, що $A + B \in S$, $A \cdot B \in S$, $A / B \in$ S.

Зауваження. З тверджень 1 і 2 дістаємо, що $\emptyset \in S$, оскільки $\emptyset = \Omega / \Omega$.

Отже, найменшою системою, яка буде алгеброю подій, є $S = (\emptyset, \Omega)$.

7.1 Аксіоми

Аксіома 1. Кожній випадковій події $A \in S$ поставлено у відповідність певне число *P(A),* що задовольняє умову

$$0 \le P(A) \le 1. \tag{15}$$

Аксіома 2. Ймовірність вірогідної події дорівнює одиниці

$$P(\Omega) = 1. \tag{16}$$

Аксіома 3 (аксіома додавання).

Ймовірність суми двох несумісних подій дорівнює сумі їх ймовірностей

$$P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2), \tag{17}$$
$$A_1 \in S; \quad A_2 \in S; \quad A_1 \cdot A_2 = \emptyset.$$

Зауваження.

1. Властивості, сформульовані в аксіомах 2 і 3, у випадку класичного означення ймовірності можуть бути доведеними ((10), (12)).

2. Аксіома 3 узагальнюється на випадок довільної скінченної кількості попарно несумісних подій

$$P(A_1 + A_2 + ... + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_n) \tag{18}$$
$$A_i \in S \ (i = 1, 2, ..., n), \ \ A_i \cdot A_j = \emptyset \ (i \neq j).$$

3. У багатьох випадках вимагається розширений варіант аксіоми 3.

Аксіома 3' (розширена аксіома додавання).

Ймовірність суми зліченної множини попарно несумісних подій дорівнює сумі їх ймовірностей:

$$P(A_1 + A_2 + ... + A_n + ...) = P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_n) + ... \tag{19}$$
$$A_i \in S \ (i = 1, 2, ..., n...); \ \ A_1 + A_2 + ... + A_n + ... \in S; \quad A_i \cdot A_j = \emptyset \ (i \neq j).$$

4. Введена система аксіом не визначає принципу вибору числового значення ймовірності події. За ймовірність події може бути прийнятою статистична ймовірність.

7.2. Наслідки з аксіом

Наслідок 1. Ймовірність неможливої події дорівнює нулю

$$P(\emptyset) = 0. \tag{20}$$

Доведення. Представимо $\Omega = \emptyset + \Omega$. Тоді $P(\Omega) = P(\emptyset + \Omega)$. За аксіомою 3: $P(\emptyset + \Omega) = P(\emptyset) + P(\Omega)$. Маємо: $P(\Omega) = P(\emptyset) + P(\Omega)$, звідки $P(\emptyset) = 0$.

Наслідок 2. Сума ймовірностей повної групи несумісних подій дорівнює 1

$$P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_n) = 1, \tag{21}$$

якщо $A_1 + A_2 + ... + A_n = \Omega; \quad A_i \cdot A_j = \emptyset \ (i \neq j)$.

Доведення.

$$P(A_1 + A_2 + ... + A_n) = P(\Omega) = 1 \text{ (аксіома 2).} \tag{22}$$

З іншого боку

$$P(A_1 + A_2 + ... + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_n) \text{ (аксіома 3).} \qquad (23)$$

У співвідношеннях (22) і (23) ліві частини є рівними. Отже, праві частини теж є рівними. Тому

$$P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_n) = 1.$$

Зокрема, сума ймовірностей протилежних подій дорівнює 1

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1. \qquad (24)$$

Зауваження. З (24) випливає, що

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}). \qquad (25)$$

Ця рівність часто застосовується при розв'язанні задач. Знаходження $P(A)$ за формулою (25) називають переходом до протилежної події.

Приклад 32. Вісім осіб приймають участь у розіграші трьох виграшів. Яка ймовірність того, що певній особі випаде хоча б один виграш?

Розв'язання. Нехай подія

A = {певній особі випаде хоча б один виграш в указаному розіграшу}.

Введемо у розгляд протилежну до А подію

$\overline{A}$ = {певній особі не випаде жодного виграшу в указаному розіграшу}.

За формулою (25) $P(A) = 1 - P(\overline{A})$. За класичним означенням $P(\overline{A}) = \dfrac{m}{n}$.

n дорівнює кількості способів розподілу трьох виграшів серед восьми осіб, тобто $n = 8^3 = 512$.

Знайдемо m. Певній особі не випаде жодного виграшу, якщо кожного разу виграш буде припадати на інших сім осіб. Це може здійснитися $7^3 = 343$ способами. Отже, $m = 343$.

$$P(\overline{A}) = \frac{343}{512}; \qquad P(A) = 1 - \frac{343}{512} = \frac{169}{512}.$$

Відповідь: $\dfrac{169}{512}$.

Наслідок 3 (правило додавання ймовірностей сумісних подій). Ймовірність появи хоча б одної з двох сумісних подій дорівнює сумі ймовірностей цих подій без ймовірності їх сумісної появи

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB). \tag{26}$$

Доведення. Представимо подію $A+B$ і подію B як суми несумісних подій (рис. 10):

$A + B = A + \overline{A}B$ $\qquad\qquad$ $B = AB + \overline{A}B$

Рис. 10

За аксіомою 3

$$P(A+B)=P(A)+P(\overline{A}B); \quad P(B)=P(AB)+P(\overline{A}B).$$

З останньої рівності випливає $P(\overline{A}B) = P(B)-P(AB)$.
Тому $P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$, що і треба було довести.

8. УМОВНА ЙМОВІРНІСТЬ ПОДІЇ

Означення ймовірності події ґрунтується на припущенні, що розглядаються тільки такі випадкові експерименти, які можна повторювати при незмінному комплексі умов довільне число разів. Якщо при обчисленні ймовірності $P(A)$ інших обмежень не накладається, то ймовірність $P(A)$ називають **безумовною**.

Часто доводиться обчислювати ймовірність $P(A)$ при наявності додаткової умови, що відбулася подія B, яка має певну ймовірність. В цьому випадку обчислюється так звана **умовна ймовірність** події A.

Розглянемо класичну модель подій. Нехай проводиться випробування, в результаті якого можуть відбутися події A і B (рис. 11).

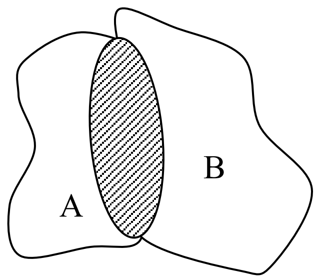


Рис. 11

Нехай

n – загальна кількість елементарних подій;

m_A – кількість елементарних подій, що сприяють A;

m_B – кількість елементарних подій, що сприяють B;

m_{AB} – кількість елементарних подій, що сприяють $A \cdot B$.

Позначимо $P(A|B)$ – ймовірність події A за умови, що подія B відбулася.

За класичним означенням

$$P(A \mid B) = \frac{m_{AB}}{m_B} = \frac{m_{AB} / n}{m_B / n} = \frac{P(A \cdot B)}{P(B)}.$$

Маємо

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cdot B)}{P(B)} \qquad (P(B) \neq 0). \tag{27}$$

У загальному випадку рівність (27) приймається за означення умовної ймовірності події.

8.1 Означення умовної ймовірності

Означення. Нехай Ω – простір елементарних подій; $A \subset \Omega$, $B \subset \Omega$ – події.

Умовною ймовірністю події A за умови, що подія B відбулася, називається відношення

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cdot B)}{P(B)} \qquad (P(B) \neq 0) \qquad (28)$$

Аналогічно визначається

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cdot B)}{P(A)} \qquad (P(A) \neq 0) \qquad (29)$$

Приклад 33. В урні дві білих и дев'ять чорних куль. З урни послідовно виймають дві кулі. Яка ймовірність того, що друга куля буде білою за умови, що перша куля була чорна?

Розв'язання. Введемо у розгляд події

A ={перша винута куля чорна};

B ={друга винута куля біла}.

Оскільки подія А відбулася, то в урні залишилося десять куль, з яких дві білі. Тому

$$P(B \mid A) = \frac{2}{10} = 0,2.$$

Відповідь: 0,2.

Приклад 34. Ймовірність того, що автомобілем, який працює в автотранспортному комплексі, не порушуються умови своєчасної доставки вантажу до споживачів протягом першого робочого дня тижня, дорівнює 0,8. Ймовірність того, що ці умови не порушуються протягом перших двох робочих днів тижня, дорівнює 0,6. Знайти ймовірність того, що автомобіль, який не порушив умови своєчасної доставки вантажу протягом першого дня, не порушив ці умови й протягом другого дня.

Розв'язання. Введемо у розгляд події

A = {автомобіль не порушив умови своєчасної доставки вантажу протягом першого робочого дня тижня};

B = { автомобіль не порушив умови своєчасної доставки вантажу протягом другого робочого дня тижня }.

Тоді

$A \cdot B$ ={автомобіль не порушив умови своєчасної доставки вантажу протягом перших двох робочих днів тижня}.

За умовою задачі $P(A) = 0{,}8$; $P(A \cdot B) = 0{,}6$. Треба знайти $P(B \mid A)$.

За означенням (29)

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cdot B)}{P(A)} = \frac{0{,}6}{0{,}8} = \frac{3}{4}.$$

Відповідь: $\frac{3}{4}$.

З формул (28) і (29) безпосередньо випливає теорема множення ймовірностей.

8.2. Теорема множення ймовірностей

Теорема. Ймовірність добутку двох подій дорівнює добуткові ймовірності однієї з них на умовну ймовірність другої, за умови, що перша подія відбулася:

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B \mid A) = P(B) \cdot P(A \mid B), \quad (P(B) \neq 0;\ P(A) \neq 0) \quad (30)$$

Зауваження. Теорема множення ймовірностей допускає узагальнення на випадок довільної скінченної кількості подій

$$\begin{aligned} P(A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2 \mid A_1) \cdot P(A_3 \mid A_1 \cdot A_2) \cdot \ldots \cdot \\ \cdot P(A_n \mid A_1 A_2 \ldots A_{n-1}) \end{aligned} \quad (31)$$

(ймовірність сумісної появи декількох подій дорівнює добуткові ймовірності однієї з них на умовні ймовірності всіх інших подій, причому ймовірність кожної наступної події обчислюється за припущенням, що всі попередні події вже відбулися).

Зокрема, для трьох подій маємо

$$P(A_1 A_2 A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2 \mid A_1) \cdot P(A_3 \mid A_1 \cdot A_2) \cdot P(A_3 \mid A_1 \cdot A_2). \quad (32)$$

Приклад 35. Студент знає відповіді на 20 з 25 питань тесту. Знайти ймовірність того, що студент знає відповіді на запропоновані йому викладачем 3 тестових питання.

Розв'язання. Введемо у розгляд події:

A={студент знає відповіді на всі 3 запропонованих тестових питання};

$\underset{i=1,2,3}{A_i}$ = {студент знає відповідь на i-е запропоноване викладачем тестове питання}.

$$A = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 .$$

За теоремою множення ймовірностей (32)

$$P(A) = P(A_1 A_2 A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2 \mid A_1) \cdot P(A_3 \mid A_1 \cdot A_2) =$$
$$= \frac{20}{25} \cdot \frac{19}{24} \cdot \frac{18}{23} = \frac{57}{115}.$$

Відповідь: $\frac{57}{115}$.

Приклад 36. З 20 видів вантажу, що доставлено до споживача, чотири види мають ушкодження. Вантажі відбираються навмання для перевірки, яка припиняється у випадку виявлення ушкодженого виду вантажу. Яка ймовірність того, що буде перевірено рівно три види вантажу?

Розв'язання. Введемо у розгляд події

A={буде перевірено три види вантажу};

$\underset{i=1,2,3}{B_i}$ ={під час i-ої перевірки вантаж виявився неушкодженим}.

Подія А відбудеться тоді і тільки тоді, коли перший і другий перевірені види вантажу будуть неушкодженими, а третій за рахунком вид вантажу виявиться ушкодженим. Це означає, що

$$A = B_1 \cdot B_2 \cdot \overline{B}_3.$$

За теоремою множення ймовірностей (32)

$$P(A) = P(B_1 \cdot B_2 \cdot \overline{B}_3) = P(B_1) \cdot P(B_2 \mid B_1) \cdot P(\overline{B}_3 \mid B_1 \cdot B_2) = \frac{16}{20} \cdot \frac{15}{19} \cdot \frac{4}{18} = \frac{8}{57}.$$

Відповідь: $\frac{8}{57}$.

9. НЕЗАЛЕЖНІ ВИПАДКОВІ ПОДІЇ

Означення. Подія B називається **незалежною** від події A, якщо $P(B|A)=P(B)$.

Інакше кажучи, подія B називається **незалежною** від події A, якщо поява події A не впливає на ймовірність події B.

У противному разі подія B називається **залежною** від події A. Незалежність є взаємною властивістю, тобто, якщо справедливо $P(B|A)=P(B)$, то вірно і $P(A|B)=P(A)$.

Дійсно, $P(B\mid A)=\dfrac{P(A\cdot B)}{P(A)}$.

Якщо $P(B|A)=P(B)$, то $\dfrac{P(A\cdot B)}{P(A)}=P(B)$, звідки $P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B)$.

Тоді $P(A\mid B)=\dfrac{P(A\cdot B)}{P(B)}=\dfrac{P(A)\cdot P(B)}{P(B)}=P(A)$.

Якщо A і B є незалежними подіями, то можна довести наступні твердження:

1. $\overline{A}$ і B є незалежними подіями.
2. A і $\overline{B}$ є незалежними подіями.
3. $\overline{A}$ і $\overline{B}$ є незалежними подіями.

9.1. Теорема (множення ймовірностей для незалежних подій)

Ймовірність добутку двох незалежних подій дорівнює добуткові їх ймовірностей

$$P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B) \tag{33}$$

Доведення. За теоремою множення ймовірностей (30)

$$P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B\mid A).$$

Оскільки A і B – незалежні події, то $P(B|A) = P(B)$.

Тому $P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B)$.

На практиці про незалежність подій висновують з міркувань, пов'язаних із характером випробувань: події вважають незалежними, якщо між ними нема причинного зв'язку. Переконавшись таким чином у незалежності подій, використовують формулу (33) для обчислення ймовірності їх добутку.

Приклад 37. Ймовірність своєчасного завершення технічного обслуговування автомобілю для першого робітника складає 0,9, а для другого 0,8. Визначити ймовірність несвоєчасного завершення технічного обслуговування двома робітниками.

Розв'язання. Введемо у розгляд події:

A = {своєчасне завершення технічного обслуговування першим робітником}

B = {своєчасне завершення технічного обслуговування другим робітником}

C = {несвоєчасне завершення технічного обслуговування двома робітниками}.

Тоді

$$C = \overline{A} \cdot \overline{B}.$$

Оскільки робітники – це різні особи, то події A і B є незалежними.

Отже незалежними є події $\overline{A}$ і $\overline{B}$.

За формулою (33) маємо

$$P(C) = P(\overline{A} \cdot \overline{B}) = P(\overline{A}) \cdot P(\overline{B}) = (1-0,9) \cdot (1-0,8) = 0,1 \cdot 0,2 = 0,02.$$

Відповідь: 0,02.

Звертаємо увагу, що незалежність більш, ніж двох подій, може мати різний характер.

Означення. Події A_1, A_2, ..., A_n називаються **попарно незалежними**, якщо довільна пара з них є незалежними подіями.

Означення. Події A_1, A_2, ..., A_n називаються **незалежними у сукупності**, якщо ймовірність кожної з них не змінюється при відбуванні інших подій (довільної кількості і комбінації).

Зауваження.

1. Незалежність подій у сукупності є більш сильною властивістю, ніж попарна незалежність. Виявляється, що попарно незалежні події можуть не бути незалежними у сукупності.

2. Теорема множення ймовірностей для двох незалежних подій допускає узагальнення на випадок довільної скінченної кількості подій A_1, A_2, ..., A_n, незалежних у сукупності. Ймовірність їх добутку дорівнює добуткові ймовірностей цих подій, тобто

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_n) \qquad (34)$$

Наведемо приклад сумісного застосування правил додавання і множення у загальному вигляді.

Приклад 38. Ймовірність появи кожної з 3-х незалежних у сукупності подій A_1, A_2, A_3 дорівнює, відповідно, p_1, p_2, p_3. Знайти ймовірності відбування:

1) тільки однієї з подій A_1, A_2, A_3;

2) тільки двох з подій A_1, A_2, A_3;

3) всіх трьох подій A_1, A_2, A_3;

4) знайти ймовірність не відбування жодної з трьох подій A_1, A_2, A_3.

Розв'язання.

1) Введемо у розгляд подію

***B* ={відбулася тільки одна з подій A_1, A_2, A_3}.**

Представимо B у вигляді суми трьох доданків (приклад 19, 2)), які є попарно несумісними подіями:

$$B = A_1\overline{A}_2\overline{A}_3 + A_2\overline{A}_1\overline{A}_3 + A_3\overline{A}_1\overline{A}_2.$$

За аксіомою 3 (18)

$$P(B) = P(A_1\overline{A}_2\overline{A}_3) + P(A_2\overline{A}_1\overline{A}_3) + P(A_3\overline{A}_1\overline{A}_2).$$

За теоремою множення для незалежних у сукупності подій (34):

$$P(B) = P(A_1) \cdot P(\overline{A}_2) \cdot P(\overline{A}_3) + P(A_2) \cdot P(\overline{A}_1) \cdot P(\overline{A}_3) + P(A_3) \cdot P(\overline{A}_1) \cdot P(\overline{A}_2).$$

Позначимо $P(\overline{A_i}) = q_i (i = 1,2,3)$.

За формулою (25) $P\left(\overline{A}_i\right) = 1 - P\left(A_i\right) = 1 - p_i \; (i = 1,2,3)$.

Отже, $q_i = 1 - p_i \; (i = 1,2,3)$.

Маємо

$$P(B) = p_1 q_2 q_3 + p_2 q_1 q_3 + p_3 q_1 q_2. \qquad (35)$$

2) Введемо у розгляд подію

***C*={відбулися тільки дві з подій A_1, A_2, A_3}.**

$C = A_1 A_2 \overline{A_3} + A_1 A_3 \overline{A_2} + A_2 A_3 \overline{A_1}$ (приклад 19, 4)).

Аналогічно до розглянутого вище, за аксіомою 3 для скінченної кількості попарно несумісних подій (18), а також за теоремою множення для незалежних (у сукупності) подій, одержимо

$$P\,(C) = p_1 p_2 q_3 + p_1 p_3 q_2 + p_2 p_3 q_1. \qquad (36)$$

3) Нехай

***D* = {відбулися всі три події A_1, A_2, A_3}.**

$D = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3.$

$$P(D) = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3. \qquad (37)$$

4) Нехай

***E* ={не відбулася жодна з трьох подій A_1, A_2, A_3}.**

$E = \overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}$

$$P\left(E\right) = q_1 \cdot q_2 \cdot q_3. \qquad (38)$$

Приклад 39 (для самостійного розв'язання).

Три вантажних автомобілі, що доставляють вантажі до трьох споживачів, потрапили на вантажно-розвантажувальні пункти (ВРП). Ймовірність того, що автомобілям буде необхідно очікувати розвантаження у черзі складає 0,7; 0,8 і 0,9 для першого, другого і третього ВРП, відповідно. Знайти ймовірності наступних подій:

1) тільки один з трьох автомобілів буде очікувати розвантаження у черзі. (Відповідь: 0,092).

2) тільки два з трьох автомобілів будуть очікувати розвантаження у черзі. (Відповідь: 0,398).

3) всі три автомобілі будуть очікувати розвантаження у черзі. (Відповідь: 0,504).

4) жоден з трьох автомобілів не буде очікувати розвантаження у черзі. (Відповідь: 0,006).

Приклад 40. Нехай певний технічний пристрій складається з n послідовно (рис. 12, а) або паралельно (рис. 12, б) сполучених елементів, які утворюють ланцюг з одним входом і одним виходом. Передбачається, що відмови елементів є незалежними у сукупності подіями. Вважається відомою надійність (тобто ймовірність безвідмовної роботи протягом певного часу) $p_i (i = \overline{1,n})$ кожного елемента (відповідно, $q_i = 1 - p_i (i = \overline{1,n})$ – ймовірність відмови елемента). Відмова будь-якого з елементів приводить до переривання сигналу в тому ланцюгу, де знаходиться даний елемент. Знайти надійність кожної із схем (рис. 12):

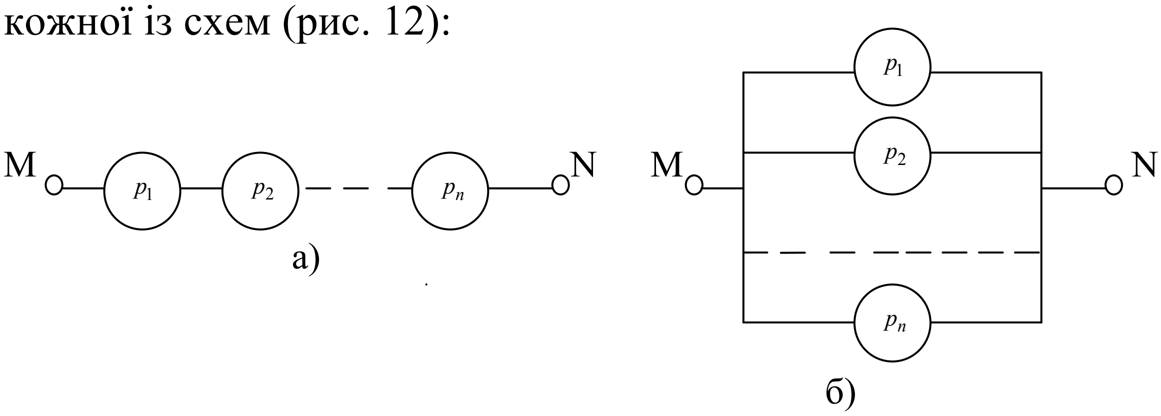


Рис. 12

Розв'язання. Введемо у розгляд події:

A = {безвідмовна робота протягом певного часу всієї схеми}

$\underset{i=\overline{1,n}}{A_i}$ = {безвідмовна робота протягом певного часу i-го елемента}.

а) При послідовному сполученні елементів відмова будь-якого елемента спричиняє за собою відмову всього пристрою. У цьому випадку подія А може бути представленою у вигляді

$$A = A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n.$$

За умовою задачі, відмови елементів пристрою є незалежними у сукупності подіями. Отже, події $A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n$ також є незалежними у сукупності. За теоремою множення ймовірностей для незалежних у сукупності подій маємо:

$$P(A) = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n.$$

Таким чином, одержано ймовірність безвідмовної роботи протягом певного часу схеми 12а), тобто її надійність.

Відповідь. $P(A) = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n.$

б) При паралельному сполученні елементів відмова пристрою відбувається тільки при відмові всіх його елементів. У цьому випадку подія $\overline{A}$ може бути представленою у вигляді

$$\overline{A}=\overline{A_1}\cdot\overline{A_2}\cdot\ldots\cdot\overline{A_n}.$$

Отже,

$$P(\overline{A})=P(\overline{A_1})\cdot P(\overline{A_2})\cdot\ldots\cdot P(\overline{A_n})=q_1\cdot q_2\cdot\ldots\cdot q_n.$$

Таким чином, ймовірність безвідмовної роботи протягом часу всієї схеми 12б) (тобто її надійність) має вигляд

$$P(A)=1-q_1\cdot q_2\cdot\ldots\cdot q_n.$$

Відповідь. $P(A)=1-q_1\cdot q_2\cdot\ldots\cdot q_n$.

Приклад 41. Ланцюг технічного пристрою між точками M і N складено за схемою (рис. 13). Різні елементи ланцюга працюють незалежно один від одного з надійностями $p_i\,(i=\overline{1,4})$. Знайти надійність усієї схеми.

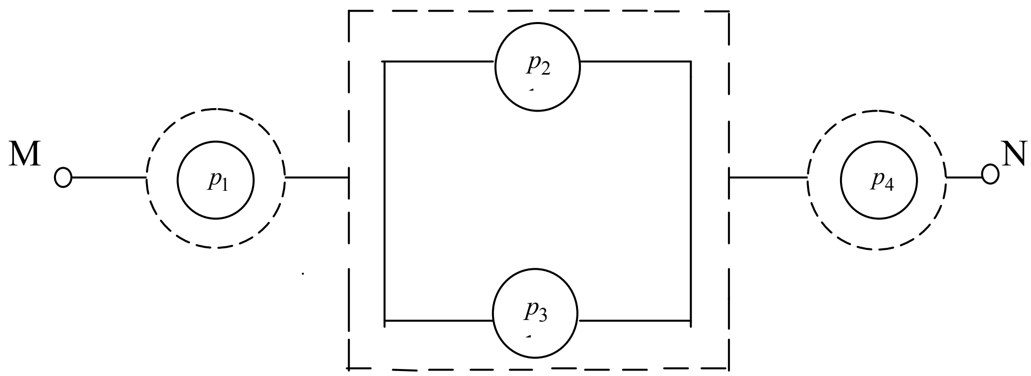


Рис. 13

Розв'язання. Введемо у розгляд події:

A = {безвідмовна робота протягом певного часу всієї схеми};

$\underset{i=\overline{1,4}}{A_i}$ = {безвідмовна робота протягом певного часу i-го елемента}.

Дану схему можна розглядати як результат послідовного сполучення трьох блоків (на рис. 13 блоки обведено пунктирними лініями).

Якщо ввести подію

B = {безвідмовна робота протягом певного часу другого блоку}, то за результатом прикладу 40(а):

$$A = A_1 \cdot B \cdot A_4, \qquad P(A) = P(A_1) \cdot P(B) \cdot P(A_4).$$

За результатом прикладу 40(б):

$$P(B) = 1 - q_2 \cdot q_3, \text{ тобто}$$
$$P(B) = 1 - (1 - p_2) \cdot (1 - p_3).$$

Остаточно маємо:

$$P(A) = p_1 \cdot (1 - (1 - p_2) \cdot (1 - p_3)) \cdot p_4.$$

Відповідь. $P(A) = p_1 \cdot (1 - (1 - p_2) \cdot (1 - p_3)) \cdot p_4$.

9.2. Ймовірність появи хоча б однієї з незалежних подій

Теорема. Ймовірність появи хоча б однієї з подій A_1, A_2, ..., A_n, незалежних у сукупності, дорівнює різниці між одиницею і добутком ймовірностей протилежних подій:

$$P(A) = 1 - q_1 q_2 ... q_n \tag{39}$$

Доведення. Нехай

А={поява хоча б однієї з подій A_1, A_2, ..., A_n}.

Тоді протилежною до А подією буде

$\overline{A}$={не поява жодної з подій A_1, A_2, ..., A_n}.

Нехай $P(A_i) = p_i$; $P(\overline{A}_i) = 1 - P(A_i) = 1 - p_i = q_i$ $(i = \overline{1, n})$.

Знайдемо ймовірність $P(A)$ переходом до протилежної події (25):

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - P(\overline{A}_1 \cdot \overline{A}_2 \cdot ... \cdot \overline{A}_n)$$

Оскільки події A_1, A_2, ..., A_n є незалежними у сукупності, то події $\overline{A}_1, \overline{A}_2, ..., \overline{A}_n$ також є незалежні у сукупності.

За теоремою множення (34) для незалежних у сукупності подій

$$P(\overline{A}_1 \cdot \overline{A}_2 \cdot ... \cdot \overline{A}_n) = P(\overline{A}_1) \cdot P(\overline{A}_2) \cdot ... \cdot P(\overline{A}_n) = q_1 \cdot q_2 \cdot ... \cdot q_n.$$

Отже, $P(A) = 1 - q_1 \cdot q_2 \cdot ... \cdot q_n$.

Приклад 42. За умовою прикладу 39 знайти ймовірність події

A = {хоча б один з трьох автомобілів буде очікувати розвантаження у черзі}.

Розв'язання. Нехай

$\underset{i=1,2,3}{A_i}$ ={i-ий автомобіль буде очікувати розвантаження у черзі}.

За умовою задачі

$$P(A_1) = 0{,}7;\ P(A_2) = 0{,}8;\ P(A_3) = 0{,}9.$$

Знайдемо ймовірності відповідних протилежних подій.

$$q_1 = 1 - P(A_i) = 1 - 0{,}7 = 0{,}3;\quad q_2 = 1 - P(A_2) = 1 - 0{,}8 = 0{,}2;$$

$$q_3 = 1 - P(A_3) = 1 - 0{,}9 = 0{,}1.$$

За формулою (39) при $n = 3$ маємо:

$$P(A) = 1 - q_1 \cdot q_2 \cdot \ldots \cdot q_3 = 1 - 0{,}3 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}1 = 0{,}994.$$

Відповідь: 0,994.

10. ФОРМУЛА ПОВНОЇ ЙМОВІРНОСТІ

Ця формула є наслідком сумісного застосування правил додавання та множення ймовірностей.

Обсудімо суть проблеми. Нехай передбачається проведення деякого випробування, про умови якого можна зробити n припущень, що виключають одне одного

$$H_1, H_2, ..., H_n \quad (H_i \cdot H_j \neq \emptyset, \ \ i \neq j).$$

Припущення будемо називати **гіпотезами**. Отже, гіпотези – це попарно несумісні події. Відомі ймовірності гіпотез

$$P(H_1),\, P(H_2), ...,\, P(H_n)\ .$$

Розглядається деяка подія A, яка може відбутися тільки разом з однією з гіпотез. Відомі умовні ймовірності події A при відбуванні кожної з гіпотез

$$P(A \mid H_1),\, P(A \mid H_2), ...,\ P(A \mid H_n)\ .$$

Як знайти ймовірність події A у даній ситуації?

Теорема. Ймовірність події A, що може відбутися лише за умови появи однієї з попарно несумісних подій $H_1, H_2, ..., H_n$ виражається формулою

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P(A \mid H_i)\,. \tag{40}$$

(формула повної ймовірності)

Доведення. За умови теореми подія A може відбутися лише у випадку появи однієї з подій $H_1, H_2, ..., H_n$, тому

$$A = H_1 \cdot A + H_2 \cdot A + ... + H_n \cdot A.$$

Оскільки події $H_i (i = 1,\, 2, ..., n)$ є попарно несумісними подіями, то добутки $H_i \cdot A (i = 1,\, 2, ...,\, n)$ також попарно несумісні події.

Застосуємо спочатку правило додавання (18) для скінченної кількості попарно несумісних подій, а потім теорему множення (30).

$$P(A) = P\left(H_1 \cdot A + H_2 \cdot A + ... + H_n \cdot A\right) = P\left(H_1 \cdot A\right) +$$
$$+P\left(H_2 \cdot A\right) + ... \ + P\left(H_n \cdot A\right) = P\left(H_1\right) \cdot P\left(A \mid H_1\right) + P\left(H_2\right) \cdot P\left(A \mid H_2\right) + ... \ +$$
$$+P\left(H_n\right) \cdot P\left(A \mid H_n\right) = \sum_{i=1}^{n} P\left(H_i\right) \cdot P\left(A \mid H_i\right),$$

що й потрібно було довести.

Зауваження. Зокрема, якщо події $H_1, H_2, ..., H_n$ утворюють повну групу несумісних подій, то для довільної події A, що спостерігається в випробуванні, має місце формула повної ймовірності (40).

Приклад 43. Ймовірність того, що приватне АТП не буде спроможним повернути позик банкові в період економічного спаду складає 0,13; а в період економічного зростання – 0,04. У припущенні, що ймовірність наставання періоду економічного зростання становить 0,65, обчислити ймовірність події

$$A = \left\{ \begin{array}{l} \text{навмання вибране приватне АТП не буде} \\ \text{спроможним повернути позик банкові} \end{array} \right\}.$$

Розв'язання. Подія

$$A = \left\{ \begin{array}{l} \text{навмання вибране приватне АТП не буде} \\ \text{спроможним повернути позик банкові} \end{array} \right\}.$$

може відбутися сумісно з однією із двох гіпотез:

$$H_1 = \left\{ \text{настав період економічного зростання} \right\};$$
$$H_2 = \left\{ \text{настав період економічного спаду} \right\}.$$

Відомо, що $P(H_1) = 0,65$. Оскільки гіпотези H_1 і H_2 утворюють повну групу подій, то $P(H_2) = 1 - P(H_1) = 0,35.$ За умовою задачі відомі умовні ймовірності події A

$$P(A \mid H_1) = 0,04; \qquad P(A \mid H_2) = 0,13.$$

Застосовуємо формулу повної ймовірності (40)

$$P(A)=P(H_1)\cdot P(A\,|\,H_1)+P(H_2)\cdot P(A\,|\,H_2)=$$
$$=0,65\cdot 0,04+0,35\cdot 0,13=0,0715.$$

Відповідь: 0,0715.

Приклад 44. Для розшуку вантажного літака, що потрапив в аварію, виділено 10 вертольотів. Літак може знаходитися в одному з двох можливих районів з ймовірностями 0,8 і 0,2, відповідно. Кожний вертоліт виявляє літак, що знаходиться в районі розшуку, з ймовірністю 0,2. Розшуки вертольотів здійснюються незалежно один від одного. Знайти ймовірність виявлення літака, якщо 8 вертольотів відправлено в перший район.

Розв'язання. Введемо у розгляд гіпотези:

$$H_2=\{\text{вантажний літак знаходиться в першому районі}\};$$
$$H_2=\{\text{вантажний літак знаходиться в другому районі}\}.$$

За умовою задачі

$$P(H_1)=0,8;\ P(H_2)=0,2.$$

Нехай
$A=\{$ виявлення літака $\}$.

Умовні ймовірності події A, за умови відбування кожної з гіпотез H_1 і H_2, обчислюються як ймовірності виявлення літака хоча б одним з відправлених у даний район вертольотів, а саме

$$P(A\,|\,H_1)=1-(1-0,2)^8=1-0,8^8.$$
$$P(A\,|\,H_2)=1-(1-0,2)^2=1-0,8^2.$$

Застосовуємо формулу повної ймовірності (40):

$$P(A)=P(H_1)\cdot P(A\,|\,H_1)+P(H_2)\cdot P(A\,|\,H_2)=$$
$$=0,8\cdot(1-0,8^8)+0,2\cdot(1-0,8^2)=1-0,8^2(0,8^7+0,2)=$$
$$=1-0,64(0,21+0,2)=1-0,64\cdot 0,41\approx 0,74.$$

Відповідь: 0,74.

11. ФОРМУЛА БЕЙЕСА
(формула ймовірності гіпотез)

Ця формула, як і формула повної ймовірності, є наслідком правил додавання і множення ймовірностей.

Обсудимо суть проблеми. Нехай до проведення випробування про його умови можна зробити n припущень, що виключають одне одного (попарно несумісних гіпотез)

$$H_1, H_2, ..., H_n \quad (H_i \cdot H_j \neq 0,\ i \neq j) .$$

Ймовірності гіпотез до випробування (так звані **апріорні ймовірності**) відомі

$$P(H_1), P(H_2), ..., P(H_n) .$$

Нехай випробування проведено, і в результаті відбулася подія A. Відомі умовні ймовірності події A при відбуванні кожної з гіпотез

$$P(A \mid H_1),\ P(A \mid H_2), ...,\ P(A \mid H_n) .$$

Як можна переоцінити апріорні ймовірності гіпотез з врахуванням відбування події A? Інакше кажучи, треба знайти ймовірності гіпотез після випробування (так звані **апостеріорні ймовірності**) за умови, що результатом випробування є подія A.

Теорема. Нехай подія A може відбутися лише за умови появи однієї з попарно несумісних подій

$$H_1, H_2, ..., H_n .$$

Ймовірність події H_i за умови, що подія A вже відбулася, виражається формулою:

$$P(H_i \mid A) = \frac{P(H_i) \cdot P(A \mid H_i)}{\sum\limits_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P(A \mid H_i)} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \qquad (41)$$

(формула Бейеса).

Thomas Bayes (Томас Бейес, перекладають також Томас Байес) – англійський математик XVIII століття.

Доведення. Застосуємо формулу множення ймовірностей для обчислення ймовірності добутку

$$P(A\cdot H_i)=P(A)\cdot P(H_i\,|\,A)=P(H_i)\cdot P(A\,|\,H_i).$$

Оскільки $P(A)\neq 0$, з рівності

$$P(A)P(H_i\,|\,A)=P(H_i)\cdot P(A\,|\,H_i)$$

одержуємо

$$P(H_i\,|\,A)=\frac{P(H_i)\cdot P(A\,|\,H_i)}{P(A)}. \tag{42}$$

Підставимо в (42) вираз $P(A)$ за формулою повної ймовірності

$$P(H_i\,|\,A)=\frac{P(H_i)\cdot P(A\,|\,H_i)}{\sum\limits_{i=1}^{n}P(H_i)\cdot P(A\,|\,H_i)}, \tag{43}$$

що й треба було довести.

Приклад 45. В монтажному цеху на міні автобуси встановлюють електродвигуни. Електродвигуни поставляються трьома заводами-виробниками. На складі є 19 двигунів першого заводу, 6 двигунів другого заводу і 11 двигунів третього заводу, які можуть безвідмовно працювати до кінця гарантійного терміну з ймовірностями 0,85, 0,76 і 0,71, відповідно. Робітник взяв навмання один двигун встановив його на міні автобус. Електродвигун працював безвідмовно до кінця гарантійного терміну. Знайти ймовірність того, що електродвигун поставлений першим заводом-виробником.

Розв'язання. Оскільки електродвигуни поставляються трьома заводами-виробниками, то до проведення випробування про його умови можна зробити 3 припущення:

$$\underset{i=1,2,3}{H_i}=\left\{\text{електродвигун поставлений } i\text{-им заводом-виробником}\right\}.$$

Отже $H_i\,(i=1,2,3)$ – гіпотези, апріорні ймовірності яких знаходяться за класичним означенням ймовірності (8). Загальна кількість двигунів, що є на складі

$$19+6+11=36.$$

Серед них 19 поставлені першим заводом-виробником, 6 – другим і 11 – третім. Тому

$$P(H_1)=\frac{19}{36};\qquad P(H_2)=\frac{6}{36};\qquad P(H_3)=\frac{11}{36}.$$

Подія

$A=\{$електродвигун працював безвідмовно до кінця гарантійного теріну$\}$ може відбутися лише сумісно з однією з попарно несумісних гіпотез $H_i(i=1,2,3)$. Відомі умовні ймовірності події *A* за умови відбування кожної з гіпотез

$$P(A\,|\,H_1)=0{,}85;\qquad P(A\,|\,H_2)=0{,}76;\qquad P(A\,|\,H_3)=0{,}71.$$

Знайдемо апостеріорну ймовірність першої гіпотези, за умови, що результатом випробування є подія *A*. За формулою Бейеса (41):

$$P(H_1\,|\,A)=\frac{P(H_1)\cdot P(A\,|\,H_1)}{\sum\limits_{i=1}^{3}P(H_i)\cdot P(A\,|\,H_i)}.$$

Обчислимо знаменник в формулі (42)

$$\sum_{i=1}^{3}P(H_i)P(A\,|\,H_i)=\frac{19}{36}\cdot 0{,}85+\frac{16}{36}\cdot 0{,}76+\frac{11}{36}\cdot 0{,}71=$$

$$=\frac{1}{36}\left(19\cdot 0{,}85+6\cdot 0{,}76+11\cdot 0{,}71\right)=\frac{1}{36}\cdot 28{,}52$$

$$P(H_1\,|\,A)=\frac{\frac{19}{36}\cdot 0{,}85}{\frac{1}{36}\cdot 28{,}52}=\frac{16{,}15}{28{,}52}\approx 0{,}57.$$

Відповідь: 0,57.

Приклад 46. Вулично-дорожня мережа (ВДМ), за якою здійснюється рух міського пасажирського транспорту, містить три конкурентних шляхи пересування між парою транспортних районів міста. Протягом доби, у середньому, пасажиропотік за першим шляхом пересування в 1,5 рази більший, ніж за другим шляхом, а за другим – в 1,8 рази менше, ніж за третім. Пересування без пересадки за першим, другим і третім шляхом здійснюють, відповідно, 96%, 99% і 92%

пасажирів. Навмання обраний пасажир здійснив пересування із пересадкою. Яка ймовірність того, що він пересувався за другим шляхом?

Розв'язання. Введемо у розгляд три гіпотези:

$$\underset{i=1,2,3}{H_i} = \left\{ \begin{array}{l} \text{пасажир обрав } i-\text{й шлях пересування між} \\ \text{парою транспортних районів} \end{array} \right\}.$$

Визначимо апріорні ймовірності гіпотез. Позначимо x – потік пасажирів, які обрали другий шлях пересування. Тоді, за умовою, $1,5x$ і $1,8x$ – це потоки пасажирів, які обрали, відповідно, перший і третій шляхи. За класичним означенням ймовірності (8)

$$P(H_1) = \frac{1,5x}{1,5x + x + 1,8x} = \frac{15}{43}; \qquad P(H_2) = \frac{x}{4,3x} = \frac{10}{43};$$

$$P(H_3) = \frac{1,8x}{4,3x} = \frac{18}{43}.$$

Нехай подія

$$A = \left\{ \begin{array}{l} \text{навмання обраний пасажир здійснив} \\ \text{пересування з пересадкою} \end{array} \right\}.$$

Визначимо умовні ймовірності події A за умовою відбування кожної з гіпотез:

$$P(A \mid H_1) = 1 - 0,96 = 0,04; \qquad P(A \mid H_2) = 1 - 0,99 = 0,01;$$
$$P(A \mid H_3) = 1 - 0,92 = 0,08.$$

За формулою Бейеса (41)

$$P(H_2 \mid A) = \frac{P(H_2) \cdot P(A \mid H_2)}{\sum\limits_{i=1}^{3} P(H_i) \cdot P(A \mid H_i)} = \frac{\frac{10}{43} \cdot 0,01}{\frac{1}{43}(15 \cdot 0,04 + 10 \cdot 0,01 + 18 \cdot 0,08)} =$$

$$= \frac{0,1}{2,14} = \frac{5}{107}.$$

Відповідь: $\frac{5}{107}$.

12. ПОВТОРНІ НЕЗАЛЕЖНІ ВИПРОБУВАННЯ. СХЕМА БЕРНУЛЛІ

Вивчимо основні закономірності, що відносяться до однієї з важливіших схем теорії ймовірностей – схеми повторних незалежних випробувань Бернуллі (Якоб Бернуллі – швейцарський математик XVII–XVIII століття). Нехай проводиться певна кількість однакових експериментів (випробувань).

Означення. Випробування називаються **незалежними**, якщо наслідки кожного з них не впливають на ймовірність того чи іншого результату в інших випробуваннях.

Нехай у кожному з незалежних випробувань можливі тільки два несумісних наслідки: подія A може відбутися або не відбутися. В останньому випадку з'являється протилежна до A подія ($\overline{A}$).

Приклади.

1. Кілька послідовних підкидань монети (відбувається подія A – герб або $\overline{A}$ – цифра).
2. Кілька послідовних перевірок виробів у партії (відбувається подія A – виріб є якісним або подія $\overline{A}$ – виріб є бракованим).

Означення. Серія повторних незалежних випробувань з одним із можливих результатів A або $\overline{A}$, в кожному з яких подія A має одну й ту саму ймовірність появи $P(A)=p$, називається **схемою Бернуллі**.

Відповідно

$$P(\overline{A})=1-P(A)=1-p=q.$$

Зауваження. Відбування події A називають «успіхом», невідбування події A (тобто появу $\bar{A}$) називають «невдачею». Назви «успіх» і «невдача» є умовними.

Стосовно схеми Бернуллі ставиться наступна основна задача: знайти ймовірність $P_n(k)$ того, що в n незалежних випробуваннях подія A відбувається рівно k разів (відповідно, не відбудеться $n-k$ разів).

Зауваження. Не вимагається, щоб подія A з'являлася в певній послідовності. Наприклад, якщо A відбувається тричі в чотирьох випробуваннях, то можливі наступні наслідки

$$A\,A\,A\,\overline{A};\quad A\,A\,\overline{A}\,A;\quad A\,\overline{A}\,A\,A;\quad \overline{A}\,A\,A\,A.$$

12.1. Формула Бернуллі

Теорема. Ймовірність $P_n(k)$ того, що в результаті n випробувань за схемою Бернуллі подія A з'явиться рівно k разів ($0 \le k \le n$) обчислюється за формулою

$$P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}, \quad q=1-p. \tag{44}$$

Доведення. Нехай подія

B = {в n випробуваннях подія A відбувається рівно k разів}.

1. Події B сприяють наступні елементарні події:
{у послідовності випробувань з номерами від 1 до n подія A з'являється k разів, займаючи певні порядкові номери}.

Загальна кількість елементарних подій дорівнює C_n^k (кількість способів вибору k порядкових номерів у послідовності 1, 2, …, n).

2. Знайдемо ймовірність кожної елементарної події (за теоремою множення ймовірностей незалежних подій)

$$p^k(1-p)^{n-k} = p^k \cdot q^{n-k}.$$

3. Елементарні події є несумісними подіями, що мають однакову ймовірність $p^k \cdot q^{n-k}$. Їх загальна кількість дорівнює C_n^k. Отже, за аксіомою 3 (додавання)

$$P(B) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k},$$

що й треба було довести.

Приклад 47. Ймовірність того, що протягом години верстат, внаслідок неполадки, вимагатиме уваги робітника складає 0,6. Передбачається, що неполадки на верстатах є незалежними. Знайти ймовірність того, що протягом години уваги робітника вимагатиме який-небудь один верстат з чотирьох, що він обслуговує.

Розв'язання. Випробування: спостереження за роботою верстатів протягом години, $n = 4$.

Введемо у розгляд подію

А = {протягом години верстат, внаслідок неполадки, вимагатиме уваги робітника} – «успіх».

За умовою, $p = P(A) = 0{,}6$; $q = 1 - p = 0{,}4$.

Знайдемо ймовірність того, що в чотирьох випробуваннях «успіх» з'явиться рівно один раз

$$P_4(1) = C_4^1 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}4^{4-1} = 4 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}4^3 = 0{,}1536.$$

Відповідь: 0,1536.

Приклад 48. Вироби деякого виробництва містять 5 % браку. Знайти ймовірність того, що серед семи взятих навмання виробів виявляться два бракованих.

Розв'язання. Випробування: перевірка якості виробів, $n = 7$.

Введемо у розгляд подію

$$A = \{\text{виріб є бракованим}\} - \text{«успіх»}.$$

За умовою задачі, вироби містять 5 % браку. Отже, за класичним означенням ймовірності, $p = P(A) = \frac{5}{100} = 0{,}05.$

$$q = 1 - p = 0{,}95.$$

У семи випробуваннях «успіх» А має з'явитися два рази, тому $k = 2$.

Знайдемо

$$P_7(2) = C_7^2 \cdot 0{,}05^2 \cdot 0{,}95^{7-2} = \frac{7!}{5!2!} \cdot 0{,}0025 \cdot 0{,}774 = 21 \cdot 0{,}0025 \cdot 0{,}774 = 0{,}04.$$

Відповідь: 0,04.

Виразимо ймовірності наступних подій: в n незалежних випробуваннях подія A відбудеться

1. Менше r разів

$$P_n(0 \le k < r) = P_n(0) + P_n(1) + \ldots + P_n(r-1). \qquad (45)$$

2. Не більше r разів

$$P_n(0 \le k \le r) = P_n(0) + P_n(1) + \ldots + P_n(r-1) + P_n(r). \qquad (46)$$

3. Більше r разів

$$P_n(r < k \le n) = P_n(r+1) + P_n(r+2) + \ldots + P_n(n). \qquad (47)$$

4. Не менше r разів

$$P_n(r \le k \le n) = P_n(r) + P_n(r+1) + \ldots + P_n(n). \qquad (48)$$

Приклад 49. По каналу зв'язку передається 6 повідомлень. Кожне повідомлення, незалежно від інших, може бути спотворене завадами з ймовірністю 0,2. Знайти ймовірність того, що не більш двох з шести повідомлень будуть спотвореними.

Розв'язання. Випробування: прийом повідомлення, $n = 6$.

Введемо у розгляд подію:

A = {повідомлення є спотвореним} – «успіх».

$$p = P(A) = 0{,}2; \;\; q = 1 - p = 0{,}8.$$

За умовою задачі, в шести випробуваннях «успіх» з'являється не більше двох разів. Скористуємося виразом (46) при $n = 6$, $r = 2$:

$$P_6(0 \le k \le 2) = P_6(0) + P_6(1) + P_6(2)$$

$$P_6(0 \le k \le 2) = C_6^0 \cdot 0{,}2^0 \cdot 0{,}8^6 + C_6^1 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8^5 + C_6^2 \cdot 0{,}2^2 \cdot 0{,}8^4 =$$

$$= \frac{8^6}{10^6} + 6 \cdot \frac{2}{10} \cdot \frac{8^5}{10^5} + \frac{6!}{4!2!} \cdot \frac{2^2}{10^2} \cdot \frac{8^4}{10^4} = \frac{1}{10^6}(8^6 + 12 \cdot 8^5 + 15 \cdot 4 \cdot 8^4) =$$

$$= \frac{8^4}{10^6}(64 + 96 + 60) = 0{,}901$$

Відповідь: 0,901.

Приклад 50. На автобазі десять вантажних автомашин. Для нормальної роботи автобази на лінії має бути не менш восьми автомашин. Ймовірність невиходу кожної з автомашин на лінію дорівнює 0,1. Знайти ймовірність нормальної роботи автобази в найближчий день.

Розв'язання. Розглянемо подію:

B = {нормальна робота автобази}.

За умовою задачі, еквівалентним формулюванням змісту події B буде

B = {на лінію вийдуть не менше 8 автомашин}.

Нехай випробування: спостереження за виходом автомашини на лінію, $n = 10$.

Введемо у розгляд подію

A = {автомашина вийшла на лінію} – «успіх».

$$p = P(A) = 0{,}9; \quad q = 1 - p = 0{,}1.$$

$$P(B)=P_{10}(8\le k\le 10)=P_{10}(8)+P_{10}(9)+P_{10}(10)=$$
$$=C_{10}^{8}\cdot 0{,}9^{8}\cdot 0{,}1^{2}+C_{10}^{9}\cdot 0{,}9^{9}\cdot 0{,}1+C_{10}^{10}\cdot 0{,}9^{10}\cdot 0{,}1^{0}=$$
$$=0{,}9^{8}\left(0{,}45+0{,}9+0{,}81\right)\approx 0{,}43046\cdot 2{,}16\approx 0{,}9298.$$

Зауважимо, що при обчисленні $P_{10}\left(8\le k\le 10\right)$ ми скористувалися виразом (48) при $r = 8$, $n = 10$.

Відповідь: 0,9298.

Приклад 51. Партія виробів містить 1 % браку. Яким має бути об'єм випадкової вибірки n, щоб ймовірність зустріти в ній хоча б один бракований виріб була не меншою 0,95?

Розв'язання. Випробування: перевірка виробів, кількість випробувань n. Нехай подія

$A=\{$виріб є бракованим$\}$.

$$p = P(A) = 0{,}01; \qquad q = 1 - 0{,}01 = 0{,}99.$$

Введемо у розгляд подію

$B=\{$в n випробуваннях хоча б один виріб виявиться бракованим$\}$.

$\overline{B}=\{$в n випробуваннях не виявиться жодного бракованого виробу$\}$.

За формулою Бернуллі (44):

$$P(\overline{B})=C_n^0\cdot p^0\cdot q^n=1\cdot 0{,}01^0\cdot 0{,}99^n,$$

$$P(B)=1-P(\overline{B})=1-0{,}99^n.$$

За умовою, $P(B)\ge 0{,}95$. Отже,

$$1-0{,}99^n\ge 0{,}95;\ 0{,}99^n\le 1-0{,}95;\ n\ln 0{,}99\le \ln 0{,}05;\ n\ge\frac{\ln 0{,}05}{\ln 0{,}99}$$

(зауважимо, що $\ln 0{,}99 < 0$).

Оскільки $\dfrac{\ln 0{,}05}{\ln 0{,}99}\approx\dfrac{-2{,}99573}{-0{,}01005}\approx 298{,}08$, то $n\ge 298{,}08$. Але n – ціле, тому $n\ge 299$.

Відповідь: $n\ge 299$.

12.2. Найімовірніше число появ випадкової події

У формулі

$$P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}$$

зафіксуємо n і будемо надавати значення $k = 0, 1, 2, \ldots\ n$. Одержимо відповідну послідовність ймовірностей

$$P_n(0),\ P_n(1),\ \ldots,\ P_n(n\text{-}1),\ P_n(n). \tag{49}$$

У ряді задач представляє інтерес знаходження такого значення аргументу k_0, при якому ймовірність $P_n(k_0)$ є найбільшою серед значень (49). k_0 називається найбільш ймовірним або найімовірнішим числом появ події A в серії з n випробувань.

Означення. Число k_0 появ події A в n незалежних випробуваннях за схемою Бернуллі називається **найімовірнішим**, якщо ймовірність того, що подія A відбувається в цих випробуваннях k_0 разів є не меншою ймовірностей інших можливих наслідків випробувань.

У випадках невеликих значень n можна k_0 відшукати простим перебором значень $P_n(k)$ у послідовності (49).

Розглянемо загальний випадок. Переконаємося, що при фіксованому n із зростанням k ймовірність $P_n(k)$ спочатку зростає, а після цього, досягнувши найбільшого значення при $k = k_0$, $P_n(k)$ спадає (рис. 14 а)). Зауважимо, що k_0 може повторитися двічі ($k_0^{(1)}$ і $k_0^{(2)}$, рис. 14 б)).

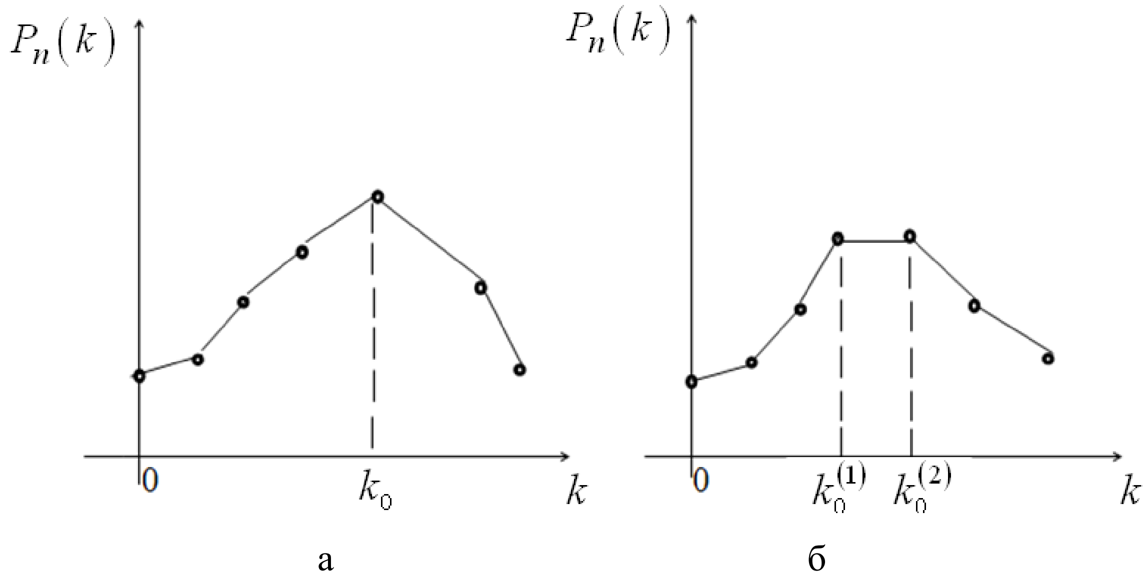


Рис. 14

Розглянемо відношення

$$
\begin{aligned}
&\frac{P_n(k)}{P_n(k-1)} = \frac{C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}}{C_n^{k-1} \cdot p^{k-1} \cdot q^{n-k+1}} = \frac{n!(k-1)!(n-k+1)!\,p}{k!(n-k)!n!\,q} = \\
&= \frac{n-k+1}{k} \cdot \frac{p}{q} = \frac{(n+1)p-kp}{kq} = \frac{(n+1)p-k(1-q)}{kq} = \qquad (50)\\
&= \frac{kq+(n+1)p-k}{kq} = 1 + \frac{(n+1)p-k}{kq}.
\end{aligned}
$$

Оскільки $kq > 0$, то з виразу (50) випливає:

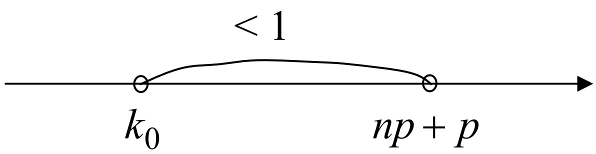
1) $P_n(k) > P_n(k-1)$, якщо $(n+1) \cdot p > k$.
2) $P_n(k) < P_n(k-1)$, якщо $(n+1) \cdot p < k$.
3) $P_n(k) = P_n(k-1)$, якщо $(n+1) \cdot p = k$.

Якщо $k \le (n+1)p$, то справедливо

$$P_n(k) \ge P_n(k-1).$$

Отже, $k_0 \le (n+1)p$ або $k_0 \le np + p$.

Зауважимо, що k_0 знаходиться ліворуч від $np + p$ не далі, чим на 1:



Дійсно, інакше між k_0 і $np + p$ помістилося б ціле $k_0 + 1$, яке й було найімовірнішим числом. Тому $k_0 \ge np + p - 1$.

Таким чином, маємо: k_0 – ціле число, яке задовольняє подвійну нерівність

$$np + p - 1 \le k_0 \le np + p$$

або

$$np - q \le k_0 \le np + p.$$

Висновок. **Найімовірніше число k_0** визначається подвійною нерівністю

$$np - q \le k_0 \le np + p \quad . \tag{51}$$

Зауваження.

1. Якщо $np - q$ – неціле число, то $np - q + 1$ також є нецілим числом. Але $np - q + 1 = np + (1 - q) = np + p$. Отже, $np + p$ є нецілим числом.

Проміжок $[np - q,\ np + p]$ має довжину 1. Дійсно,

$$np + p - \left(np - q\right) = p + q = 1.$$

Тому існує єдине ціле число k_0, яке задовольняє нерівність (51).

2. Якщо $np - q$ – ціле число, то $np - q + 1$ також є цілим числом. Але $np - q + 1 = np + (1 - q) = np + p$. Отже, $np + p$ є цілим числом. У цьому випадку проміжок $[np - q,\ np + p]$ містить в собі два значення найімовірнішого числа появ випадкової події: $k_0^{(1)} = np - q$ і $k_0^{(2)} = np + p$.

Приклад 52. Пристрій складений з 10 блоків. Надійність кожного блоку дорівнює 0,8. Блоки можуть виходити з ладу незалежно один від одного. Знайти найімовірніше число блоків, які вийдуть з ладу та обчислити відповідну ймовірність $P_n(k_0)$.

Розв'язання. Випробування: перевірка функціювання блоків, $n = 10$. Нехай подія

А ={вихід з ладу блоку}.

$$p = P(A) = 1 - 0{,}8 = 0{,}2;\ \ q = 0{,}8.$$

1) Найімовірніше число блоків k_0, які вийдуть з ладу, знайдемо з подвійної нерівності (51):

$$np - q \le\ k_0 \le np + p\,.$$

$10 \cdot 0{,}2 - 0{,}8 \le\ k_0 \le\ 10 \cdot 0{,}2 + 0{,}2$; $1{,}2 \le\ k_0 \le 2{,}2$; звідки $k_0 = 2$.

2) Обчислимо ймовірність $P_{10}(2)$:

$$P_{10}(2) = C_{10}^{2} \cdot 0,2^{2} \cdot 0,8^{8} = \frac{10!}{2!8!} \cdot \frac{4}{10^{2}} \cdot \frac{8^{8}}{10^{8}} = \frac{45 \cdot 4 \cdot 64^{4}}{10^{10}} \approx 0,302.$$

Відповідь: $k_0 = 2$; $P_{10}(2) = 0{,}302$.

Приклад 53. За наявними даними, в середньому 90 % кількості вироблених цехом автогрейдерів не мають дефектів. Яке найімовірніше число автогрейдерів з дефектами виявиться серед випадково відібраних 19 зразків?

Розв'язання. Випробування: перевірка автогрейдерів щодо наявності дефектів, $n = 19$.

Нехай подія

А=$\{$виробленийцехомавтогрейдермаєдефекти$\}$.

$$p = P(A) = 0{,}1;\ q = 1 - p = 0{,}9.$$

Скористуємося подвійною нерівністю (51) для найімовірнішого числа появ події k_0

$$np - q \le k_0 \le np + p.$$

$$19 \cdot 0{,}1 - 0{,}9 \le k_0 \le 19 \cdot 0{,}1 + 0{,}1;$$

$$1 \le k_0 \le 2.$$

Отже, $k_0^{(1)} = 1$ і $k_0^{(2)} = 2$.

Відповідь: ; $k_0^{(1)} = 1;\ k_0^{(2)} = 2$.

13. ГРАНИЧНІ ТЕОРЕМИ В СХЕМІ БЕРНУЛЛІ

При великих значеннях n і k практичне застосування формули Бернуллі утрудняє необхідність обчислення $n!$ і $k!$ (факторіали великих чисел) у коефіцієнті C_n^k.

У таких випадках користуються наближеними формулами для обчислення $P_n(k)$, що виходять з відповідних граничних теорем.

13.1. Локальна теорема Муавра-Лапласа

Наведемо без доведення локальну теорему Муавра-Лапласа (Лаплас, Пьєр-Симон – французький математик 18–19 століття; Муавр, Абрахам – англійський математик французького походження 17–18 століття).

Теорема. Якщо $0 < p < 1$ – ймовірність появи випадкової події в кожному з n незалежних випробувань, то ймовірність $P_n(k)$ задовольняє наступній граничній рівності

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{npq}\cdot P_n(k)}{\varphi(x)} = 1, \qquad (52)$$

де $\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$ – функція Гаусса, $x = \dfrac{k-np}{\sqrt{npq}}$ (53)

Вираз (52) називається **асимптотичною формулою Муавра-Лапласа.**

Зауважимо, що для достатньо великих n з граничної рівності (52) випливає **наближена формула Муавра-Лапласа**

$$P_n(k) \approx \frac{\varphi(x)}{\sqrt{npq}}, \text{ де } x = \frac{k-np}{\sqrt{npq}} \qquad (54)$$

Дійсно, граничне співвідношення (52) еквівалентне наступному

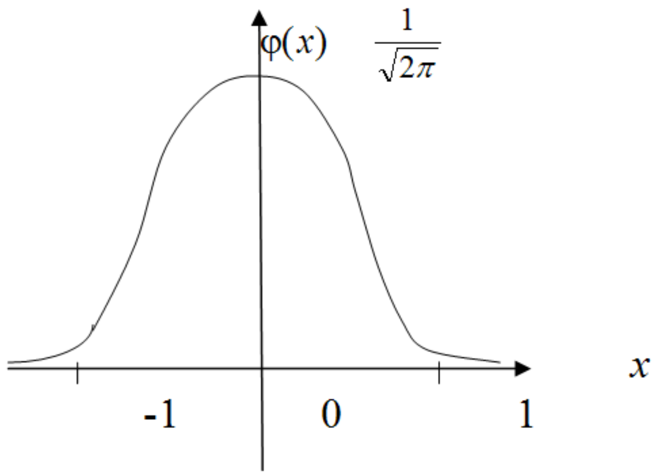
$$\lim_{n\to\infty} \frac{P_n(k)}{\dfrac{\varphi(x)}{\sqrt{npq}}} = 1. \qquad (55)$$

Отже, для достатньо великих n

$$P_n(k) \approx \frac{\varphi(x)}{\sqrt{npq}}, \text{ де } \quad x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}.$$

Для спрощення розрахунків складено таблиці значень $\varphi(x)$. При користуванні таблицями необхідно враховувати властивості функції $\varphi(x)$.

Властивості функції Гаусса $\varphi(x)$



1. Область визначення: $(-\infty, \infty)$.
2. Множина значень: $(0, +\infty)$.
3. $\varphi(x)$ – парна функція: $\varphi(-x) = \varphi(x)$, $x \in (-\infty, \infty)$.

Тому в таблиці $\varphi(x)$ наведено значення тільки для $x > 0$.

4. При $x > 0$ є монотонно спадною функцією,

$$\lim_{x \to +\infty} \varphi(x) = 0.$$

5. $\varphi(5) = 15 \cdot 10^{-7}$. При $x > 5$ вважають $\varphi(x) \approx 0$.

Отже, таблицю, як правило, не продовжено для значень $x > 5$.

Приклад 54. Ймовірність виготовлення виробу вищого ґатунку на даному верстаті складає 0,4. Знайти наближено ймовірність того, що серед узятих навмання 26 виробів половина виявиться вищого ґатунку.

Розв'язання. Випробування: перевірка ґатунку виробів, виготовлених на даному верстаті, $n = 26$.

Нехай подія
А = {виріб вищого ґатунку}.

За умовою, $p = P(A) = 0,4;\ q = 1 - p = 0,6.\ k = \dfrac{26}{2} = 13.$ Знайдемо $P_{26}(13)$ за наближеною формулою (54)

$$P_{26}(13) \approx \frac{\varphi(x)}{\sqrt{npq}}, \quad x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}.$$

Тут

$np = 26 \cdot 0,4 = 10,4;\ k - np = 13 - 10,4 = 2,6.\ npq = 10,4 \cdot 0,6 = 6,24;$

$$\sqrt{npq} = \sqrt{6,24} \approx 2,5; \ x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}} \approx \frac{2,6}{2,5} = 1,04.$$

За таблицею значень функції $\varphi(x)$: $\varphi(2,6) \approx 0,2323.$

Отже, $P_{26}(13) = \dfrac{0,2323}{2,5} = 0,093.$

Відповідь: 0,093.

13.2. Інтегральна теорема Муавра-Лапласа

Нехай необхідно знайти значення $P_n(k_1 \le k \le k_2)$ - ймовірності того, що в n незалежних випробуваннях подія A з'явиться від k_1 до k_2 разів включно. При великих значеннях n і k, користуючись локальною теоремою Муавра-Лапласа, знайдемо

$$P_n(k_1 \le k \le k_2) = \sum_{k=k_1}^{k_2} P_n(k). \tag{56}$$

Інтегральна теорема Муавра-Лапласа надає можливість уникнути трудомісткі обчислення за формулою (56), представляючи наближену формулу для $P_n(k_1 \le k \le k_2)$.

Теорема. Якщо $0 < p < 1$ – ймовірність появи випадкової події в кожному з n незалежних випробувань, то ймовірність

$P_n(k_1 \le k \le k_2)$ при достатньо великих n виражається наближеною формулою

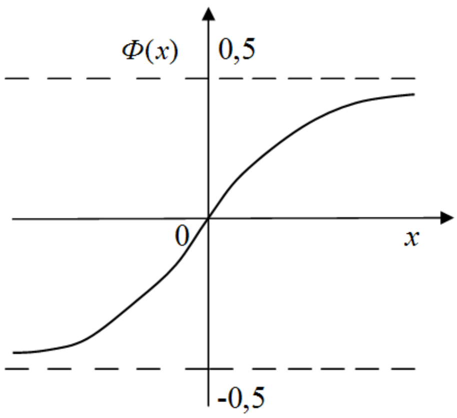
$$P_n(k_1 \le k \le k_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1), \tag{57}$$

де $\Phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^x e^{-t^2/2} dt$ – функція Лапласа,

$x_1 = \dfrac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}$, $x_2 = \dfrac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}$.

Зауваження. Оскільки $\int\limits_0^x e^{-t^2/2} dt$ не виражається в елементарних функціях, то для обчислення $\Phi(x)$ складено спеціальні таблиці. При користуванні таблицями необхідно враховувати властивості функції $\Phi(x)$.

Властивості функції Лапласа $\Phi(x)$.



1. Область визначення: $(-\infty, \infty)$.
2. Множина значень: $(-0{,}5; 0{,}5)$.
3. $\Phi(x)$ – непарна функція:

$$\Phi(-x) = -\Phi(x), \; x \in (-\infty, \infty).$$

Тому в таблиці $\Phi(x)$ наведено значення тільки для $x > 0$.

4. $\Phi(x)$ є монотонно зростаючою функцією,

$$\lim_{x \to +\infty} \varphi(x) = 0{,}5.$$

5. $\Phi(5) = 0,4999997$. При $x > 5$ вважають $\varphi(x) \approx 0,5$.

Отже, таблицю, як правило, не продовжено для значень $x > 5$.

Приклад 55. Відомо, що 0,2 всього числа електродвигунів, які виготовляються заводом, є виробами другого ґатунку. З партії виготовлених електродвигунів контролер навмання вибирає 400 штук.

Знайти ймовірність того, що серед них виявиться виробів другого ґатунку від 70 до 100 штук включно.

Розв'язання. Випробування: перевірка ґатунку вироблених електродвигунів, $n = 400$.

Нехай подія

A = {електродвигун другого ґатунку}.

За умовою,

$$p = P(A) = 0,2; \qquad q = 1 - p = 0,8.$$

Знайдемо $P_{400}(70 \le k \le 100)$ за наближеною формулою (57):

$$P_{400}(70 \le k \le 100) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1),$$

$$x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{70 - 400 \cdot 0,2}{\sqrt{400 \cdot 0,2 \cdot 0,8}} = \frac{70 - 80}{\sqrt{64}} = -\frac{10}{8} = -1,25,$$

$$x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{100 - 400 \cdot 0,2}{\sqrt{400 \cdot 0,2 \cdot 0,8}} = \frac{20}{8} = 2,5.$$

$$P_{400}(70 \le k \le 100) \approx \Phi(2,5) - \Phi(-1,25) =$$
$$= \Phi(2,5) + \Phi(1,25) = 0,4938 + 0,3944 = 0,8882.$$

Відповідь: 0,8882.

Зауваження. Наближені формули Муавра-Лапласа доцільно застосовувати при $p \approx 0,5$ (одержані за формулами наближені значення є близькими до істинних). У випадках малих p більш точною виявляється формула Пуассона, яка випливає з відповідної граничної теореми.

13.3. Теорема Пуассона

Теорема. Нехай проводиться серія n незалежних випробувань, у кожному з яких подія А з'являється з ймовірністю p. Якщо кількість випробувань необмежено зростає, а $p \to 0$, причому $np = \lambda$ – стала величина, то

$$\lim_{n\to\infty} P_n(k) = \frac{\lambda^k \cdot e^{-\lambda}}{k!} \qquad (58)$$

Вираз (58) називається **асимптотичною формулою Пуассона.**

З граничної рівності (58), для досить великих значень n і досить малих значень p, випливає наближена формула Пуассона:

$$P_n(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda} \ . \qquad (59)$$

Приклад 56. На деякому виробництві ймовірність того, що виріб, який зійшов з конвеєра, є бракованим, складає 0,015. Знайти ймовірність того, що серед 100 виробів нема бракованих.

Розв'язання. Випробування: перевірка якості виробів, що сходять з конвеєра, n = 100.

Нехай подія

А = {виріб є бракованим}.

За умовою,

$$p = P(A) = 0{,}15; \qquad q = 1 - p = 0{,}985.$$

1 спосіб. Знайдемо ймовірність $P_{100}(0)$ того, що серед 100 перевірених виробів нема бракованих за теоремою множення ймовірностей незалежних подій.

$$P_{100}(0) = q^{100} = 0{,}985^{100} = 0{,}221.$$

2 спосіб. Скористуємося наближеною формулою Пуассона (59) з врахуванням, що

$$k = 0;\ \lambda = n \cdot p = 100 \cdot 0{,}15 = 1{,}5.$$

$$P_{100}(0) \approx \frac{(1{,}5)^0 \cdot e^{-1{,}5}}{0!} = e^{-1{,}5} = 0{,}223.$$

Отже, наближене значення ймовірності 0,223, одержане за формулою Пуассона, є близьким до істинного значення 0,221.

Відповідь: 0,223 (за формулою Пуассона).

Приклад 57. Ймовірність виготовлення нестандартної деталі складає 0,004. Знайти ймовірність того, що серед 1000 деталей є рівно 5 нестандартних.

Розв'язання. Випробування: перевірка виготовлених деталей щодо вимог стандарту, $n = 1000$.

Нехай подія

А = {виготовлена деталь є нестандартною}.

За умовою

$$p = P(A) = 0{,}004;\ k = 5.$$

Скористуємося формулою Пуассона (59): $\lambda = np = 1000 \cdot 0{,}004 = 4$.

$$P_{100}(5) \approx \frac{4^5 \cdot e^{-1,5}}{5!} = e^{-4} = 0{,}15633.$$

Відповідь: 0,1563.

Зауваження. У разі досить великих значень n і досить малих значень p ймовірність $P_n(k_1 \le k \le k_2)$ можна знайти як суму відповідних ймовірностей, обчислених за наближеною формулою Пуассона

$$P_n(k_1 \le k \le k_2) = \sum_{k = k_1}^{k_2} P_n(k) \approx \sum_{k = k_1}^{k_2} \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda} \qquad (60)$$

$$\lambda = np.$$

Приклад 58. Із заводу виробника відправлено на базу 4000 ретельно запакованих якісних виробів. Ймовірність того, що один виріб пошкодиться в дорозі, рівна 0,0005. Знайти ймовірність того, що на базу найдуть від 3 до 5 пошкоджених виробів.

Розв'язання. Випробування: перевірка відправлених на базу виробів стосовно пошкодження в дорозі, $n = 4000$.

Нехай подія

А = {виріб пошкоджений}.

За умовою, $k_1 = 3,\ k_2 = 5$; $p = P(A) = 0{,}0005$; $\lambda = np = 4000 \cdot 0{,}0005 = 2$.

Застосуємо наближену формулу (60):

$$P_{4000}(3 \le k \le 5) = \sum_{k=3}^{5} P_{4000}(k) \approx \sum_{k=3}^{5} e^{-2} \cdot \left(\frac{2^3}{3!} + \frac{2^4}{4!} + \frac{2^5}{5!} \right) \approx 0{,}3068.$$

Відповідь: 0,3068.

ЗАПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Що вивчає теорія ймовірностей?
2. Які питання досліджуються комбінаторикою?
3. Сформулюйте правило множення (основний принцип комбінаторики).
4. Дайте означення розміщення, переставлення, комбінації без повторень.
5. Наведіть формули для обчислення A_n^k, P_n, C_n^k.
6. Сформулюйте зміст класичної задачі про число способів розбиття на кілька груп.
7. За якою формулою обчислюється $C_n^{n_1, n_2, \ldots, n_k}$?
8. Які поняття є початковими поняттями теорії ймовірностей?
9. Що розуміють під експериментом (спробою, випробуванням), випадковим (стохастичним) експериментом? Наведіть приклади.
10. Дайте означення елементарної події (ω), простору елементарних подій (Ω). Наведіть приклади.
11. Що називається випадковою подією?
12. Наведіть приклади експериментів просторів елементарних подій, складених випадкових подій з вказанням елементарних подій, що їм сприяють.
13. Дайте означення вірогідної, неможливої події, протилежної до даної події. Наведіть приклади.
14. Які події називають несумісними? Наведіть приклади.
15. Які події утворюють повну групу подій? Наведіть приклади.
16. Дайте означення суми, добутку, різниці двох подій.
17. Які властивості мають операції суми і добутку?
18. Знайдіть вираз через A_1, A_2, A_3 для наступних подій:

– відбулася одна і тільки одна з трьох подій;
– відбулися дві й тільки дві з трьох подій;
– відбулися всі три події;
– жодна з трьох подій не відбулася.

19. Яку модель подій називають класичною?
20. Сформулюйте класичне означення ймовірності.
21. Які властивості ймовірності випливають з класичного означення? Наведіть відповідні доведення.

22. Які обставини обумовлюють обмеженість класичного означення ймовірності?

23. Наведіть означення геометричної ймовірності події *A*.

24. Який недолік класичного означення усуває геометричне означення ймовірності?

25. Що називають відносною частотою події *A*, статистичною ймовірністю події *A*?

26. Сформулюйте аксіоми теорії ймовірностей.

27. Сформулюйте і доведіть справедливість основних наслідків з аксіом.

28. Дайте означення умовної ймовірності події. Поясніть смисл формули у випадку класичного означення подій.

29. Сформулюйте теорему множення у випадку двох подій, скінченної множини подій.

30. Які дві події називають незалежними? Сформулюйте теорему множення ймовірностей для двох незалежних подій.

31. Які n подій ($n > 2$) називають попарно незалежними, незалежними у сукупності?

32. Як формулюється теорема множення ймовірностей у випадку довільної скінченної кількості незалежних подій?

33. Запишіть формулу для ймовірності появи хоча б однієї з незалежних у сукупності подій $A_1, A_2, ..., A_n$.

34. Запишіть формулу повної ймовірності події *A*. Наведіть формулювання відповідної теореми.

35. Яка теорема надає можливість уточнення апріорної ймовірності події на основі експериментальних даних? Сформулюйте теорему, запишіть формулу та поясніть її зміст.

36. Які експерименти називаються випробуваннями за схемою Бернуллі? Наведіть приклади.

37. Яка основна задача ставиться стосовно схеми Бернуллі?

38. Доведіть справедливість формули Бернуллі: $P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}$.

39. Як виражаються ймовірності наступних подій:

– в n незалежних випробуваннях подія *A* відбудеться менше (більше) r разів?

– в n незалежних випробуваннях подія *A* відбудеться не більше (не менше) r разів?

40. Дайте означення найімовірнішого числа появ випадкової події k_0.

41. Доведіть подвійну нерівність: $np - q \le k_0 \le np + p$.

42. У яких випадках користуються наближеними формулами для обчислення ймовірності $P_n(k)$?

43. Сформулюйте локальну теорему Муавра-Лапласа. Яка наближена рівність випливає з цієї теореми?

44. Запишіть аналітичний вираз функції Гаусса $\varphi(x)$. Які її основні властивості?

45. Сформулюйте інтегральну теорему Муавра-Лапласа.

46. Запишіть аналітичний вираз функції Лапласа $\Phi(x)$. Які її основні властивості?

47. При яких значеннях ймовірності p одержані за наближеними формулами Муавра-Лапласа значення ймовірностей є близькими до істинних?

48. Сформулюйте теорему Пуассона. Яка наближена рівність випливає з цієї теореми?

49. У яких випадках доцільно застосовування наближеної формули Пуассона?

50. Як знайти ймовірність $P_n(k_1 \le k \le k_2)$ у разі досить великого значення n і досить малих значень k_1 i k_2?

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Бобик О.І. Теорія ймовірностей і математична статистика: підручник / О.І. Бобик, Г.І. Берегова, Б.І. Копитко. – К.: Професіонал, 2007. –560 с.

2. Вентцель Е.С. Прикладные задачи теории вероятностей / Е.С. Вентцель, Л.А. Овчаров. – М.: Радио и связь, 1983. – 416 с.

3. Виноградова П.В. Теория вероятностей: учебное пособие / П.В. Виноградова, В.Г. Гамалей, Г.П. Кузнецова. – Хабаровск: ДВГУПС, 2007. –84 с.

4. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике: учеб. пособие для студентов вузов / В.Е. Гмурман. – М.: Высшая школа, 2004. – 400 с.

5. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика: учеб. пособие для студентов вузов / В.Е. Гмурман – М.: Высшая школа, 2003. – 480 с.

6. Жлуктенко В.І. Теорія ймовірностей і математична статистика: у 2 ч. / В.І. Жлуктенко, С.І. Наконечний. –К.: КНЕНУ, 2000 –.–

Ч. 1: Теорія ймовірностей – 2000. – 304 с.

7. Зайцев Е.П. Теория вероятностей и математическая статистика. Базовый курс с индивидуальными заданиями и решениями типовых вариантов: учебно-методическое пособие / Е.П. Зайцев. – Кременчуг: Кременчуг, 2008. – 484 с.

8. Мацкевич И.Л. Теория вероятностей и математическая статистика: учеб. для вузов / И.Л. Мацкевич, Г.П. Свирид. – Минск: Вышейшая школа, 1993. – 272 с.

9. Медведєв М.Г. Теорія ймовірностей і математична статистика: підручник / М.Г. Медведєв, І.О. Пащенко. – К.: Ліра-К, 2008. – 536 с.

10. Письменный Д.П. Конспект лекций по теории вероятностей и математической статистике / Д.П. Письменный. – М.: Айрис-пресс, 2013. – 288 с.

11. Ярхо Т.А. Комбинаторика и вероятность: учебно-методическое пособие / Т.А. Ярхо, О.В. Небратенко. – Х.: ХНАДУ, 2007. – 36 с.

ЗМІСТ

Навчальне видання

ЯРХО Тетяна Олександрівна

ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ ДЛЯ ПРОФЕСІЙНО-МАТЕМАТИЧНОЇ ПІДГОТОВКИ БАКАЛАВРІВ ТЕХНІЧНОГО ПРОФІЛЮ

Частина 1. Випадкові події.

Навчально-методичний посібник

Відповідальний за випуск *І.І. Мороз*

В авторській редакції

Дизайн обкладинки *Д.Ю. Нерівня*

Комп'ютерна верстка *О.І. Веретільник*

План 2017. Поз. 31 (н.п).
Підписано до друку 18.10.2017 р. Формат 60×84 1/16. Папір офсетний.
Гарнітура Times New Roman Cyr. Віддруковано на ризографі.
Ум. друк. арк. 4,8. Обл.-вид. арк. 5,2.
Зам. № 468/17. Наклад 50 прим. Ціна договірна.

ВИДАВНИЦТВО
Харківського національного автомобільно-дорожнього університету

Видавництво ХНАДУ, 61002, м. Харків – МСП, вул. Ярослава Мудрого, 25.
Тел. /факс: (057)700-38-64; 707-37-03, e-mail: rio@khadi.kharkov.ua

Свідоцтво Державного комітету інформаційної політики, телебачення та радіомовлення України про внесення суб'єкта видавничої справи до Державного реєстру видавців, виготівників і розповсюджувачів видавничої продукції, серія ДК № 897 від 17.04.2002 р.