Міністерство освіти і науки України

ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ
АВТОМОБІЛЬНО-ДОРОЖНІЙ УНІВЕРСИТЕТ

Т.О. Ярхо

ТЕОРІЯ ЧИСЛОВИХ РЯДІВ: СМИСЛОВИЙ, ДОКАЗОВИЙ, ПРАКТИЧНИЙ АСПЕКТИ

Навчально-методичний посібник

Харків
ХНАДУ
2017

УДК 517:378:004.85

Рецензенти: *Нечуйвітер Олеся Петрівна*, д-р фіз.-мат. наук, професор кафедри вищої та прикладної математики
(Українська інженерно-педагогічна академія);
Стрельнікова Олена Олександрівна, д-р техн. наук, професор кафедри вищої математики
(Український державний університет залізничного транспорту).

Я71 Ярхо Т. О. Теорія числових рядів: смисловий, доказовий, практичний аспекти: навчально-методичний посібник / Т.О. Ярхо – Х. : ХНАДУ, 2017. – 60 с.

Розглянуто основні поняття (числовий ряд, збіжний числовий ряд, загальний член ряду), необхідну ознаку збіжності ряду, критерій Коші збіжності ряду, основні властивості збіжних рядів, ряди з невід'ємними членами (ознаки порівняння, ознака Даламбера, ознака Коші, інтегральна ознака Маклорена-Коші), знакозмінні ряди.

Призначений для студентів І-ІІ курсів усіх спеціальностей ХНАДУ.

УДК 517:378:004.85

ПЕРЕДМОВА

Глибока і всебічна математична підготовка майбутніх фахівців технічного профілю у вищих навчальних закладах є необхідною умовою їх якісної професійної підготовки. Це обумовлено універсальною роллю математики в моделюванні й вивченні процесів і явищ різної природи, а також впливом математики на загальний інтелектуальний розвиток особистості.

Теорія рядів є одним з основоположних розділів загального курсу вищої математики технічних університетів, у зв'язку з важливістю її практичних застосувань. Теорія степенних рядів використовується, перш за все, при складанні алгоритмів обчислення значень функцій та інтегралів, а також наближеному інтегруванні диференціальних рівнянь. Теорія тригонометричних рядів застосовується при вивченні різноманітних періодичних процесів, які зустрічаються в природі й техніці.

Основу всієї теорії рядів складає теорія числових рядів, яку в останні роки прийнято викладати досить побіжно, у зв'язку з її уявною «простотою». Проте значимість теорії числових рядів для глибокого розуміння всього розділу визиває необхідність її ґрунтовного викладу.

У процесі навчання математиці студентів, для яких ця дисципліна не є профільною, виникають труднощі знаходження оптимального стилю викладання, що поєднує формальну математичну строгість і доступність викладу, включає роз'яснення сутності математичних понять і тверджень. У цьому відношенні теорія рядів доставляє додаткові проблеми, у зв'язку з незвичайністю самого об'єкту вивчення – суми нескінченної кількості доданків.

Метою даного навчального посібника є подолання вказаних проблем у частині систематичного викладу теорії числових рядів (математично строгого і, одночасно, зрозумілого), а також розгляду основних підходів до розв'язання відповідних практичних задач. Акцентуються важливі аспекти зазначеної теми, які недостатньо відображено (або зовсім не викладено) у відомій літературі з курсу вищої математики для майбутніх фахівців технічного профілю.

Наведено обґрунтування необхідної ознаки збіжності числового ряду, необхідної і достатньої ознаки (критерію Коші), достатніх ознак збіжності рядів з невід'ємними членами (ознак порівняння, Даламбера, Коші, Маклорена-Коші). Проаналізовано переваги і недоліки різних ознак збіжності при їх практичному застосуванні.

Розглянуто властивості знакозмінних (зокрема, знакопереміжних рядів) і ознаки їх збіжності, дослідження на абсолютну та умовну збіжність.

Даний навчально-методичний посібник призначено для поглибленого вивчення теми в умовах фундаменталізації математичної підготовки майбутніх фахівців технічного профілю. Посібник може бути корисним як для слухачів курсу вищої математики – студентів денної форми навчання, так і при самостійній роботі з дисципліни студентів заочної (дистанційної) форми навчання усіх спеціальностей ХНАДУ.

1. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ Й ОЗНАЧЕННЯ

1.1. Означення числового ряду і його збіжності

Операція додавання чисел (дійсних або комплексних) дозволяє знайти суму S_n будь-якого їх скінченного набору $u_1, u_2, \ldots, u_n$

$$S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n.$$

Дія додавання підпорядкована переставному, сполучному і розподільному законам.

Розглянемо тепер нескінченну послідовність дійсних чисел

$$u_1, u_2, \ldots , u_n, \ldots \; .$$

Означення 1. Вираз

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots \tag{1.1}$$

називається числовим рядом (або просто рядом), а елементи послідовності u_1, $u_2, \ldots , u_n, \ldots$ – членами ряду.

Для позначення ряду (1.1) застосовують такий запис:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \tag{1.2}$$

(читається: сума u_n по n від 1 до ∞).

Сам по собі вираз (1.1) ніякого конкретного смислу не має, тому що дія додавання є визначеною лише для скінченної кількості доданків. Отже, цьому виразу має бути приписаний смисл. Очевидно, це варто зробити так, щоб «нескінченна сума», насамперед, була «схожою» на звичайні суми.

Означення 2. Сума n перших членів ряду (1.1)

$$S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$$

називається n-ю частковою сумою (або відрізком) цього ряду.

Очевидно, перша, друга, третя й інші часткові суми ряду

$$S_1 = u_1,$$
$$S_2 = u_1 + u_2,$$
$$S_3 = u_1 + u_2 + u_3$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

складають нескінченну послідовність. Цю послідовність часткових сум $\{S_n\}$ будемо зіставляти з рядом (1.1).

Означення 3. Ряд (1.1) називається збіжним, якщо послідовність $\{S_n\}$ його часткових сум має скінченну границю

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S.$$

Значення *S* цієї границі називають сумою ряду (1.1) і записують

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} u_n,$$

надаючи тим самим символам (1.1) або (1.2) числовий смисл.

Означення 4. Ряд (1.1) називається розбіжним, якщо послідовність його часткових сум $\{S_n\}$ границі не має (зокрема, якщо члени послідовності часткових сум необмежено зростають за модулем).

Зазначимо, що всяка сума скінченної кількості доданків є окремим випадком збіжного ряду. Дійсно, нехай дана деяка сума

$$u_1 + u_2 + ... + u_k. \tag{1.3}$$

Приписавши до неї нескінченну кількість нулів, одержимо ряд

$$u_1 + u_2 + ... + u_k + 0 + 0 + ... + 0 + ... \tag{1.4}$$

Очевидно, що для цього ряду

$$S_1 = u_1;$$

$$S_2 = u_1 + u_2$$

$$. \; .$$

$$S_к = u_1 + u_2 + ... + u_k;$$

$$S_{k+1} = u_1 + u_2 + ... + u_k + 0 = S_k;$$

$$S_{k+2} = u_1 + u_2 + ... + u_k + 0 + 0 = S_k;$$

$$. \; .$$

Отже,

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S_k.$$

Тому ряд (1.4) є збіжним, і його сума дорівнює S_k, тобто сумі (1.3).

Зміст теорії числових рядів полягає у встановленні їх збіжності або розбіжності й в обчисленні сум збіжних рядів.

1.2. Загальний член ряду

Ряд вважається заданим, якщо відоме правило, за яким для будь-якого номера n можна записати відповідний член ряду. Отже, член ряду задається як деяка функція свого номера. Аналітичний вираз цієї функції $u_n = f(n)$ називають загальним членом ряду.

Наведемо приклад запису ряду за його загальним членом u_n.

Приклад 1. Записати ряд за його загальним членом

$$u_n = \sqrt{\frac{n+2}{n+1}} \ .$$

Розв'язання. Надаючи n значення 1, 2, 3, ..., одержимо послідовність чисел

$$u_1 = \sqrt{\frac{1+2}{1+1}} = \sqrt{\frac{3}{2}}\,;\ u_2 = \sqrt{\frac{2+2}{2+1}} = \sqrt{\frac{4}{3}}\,;$$

$u_3 = \sqrt{\dfrac{3+2}{3+1}} = \sqrt{\dfrac{5}{4}}$, ... і відповідний ряд

$$\sqrt{\frac{3}{2}} + \sqrt{\frac{4}{3}} + \sqrt{\frac{5}{4}} + \ldots + \sqrt{\frac{n+2}{n+1}} + \ldots \ .$$

У наступному прикладі за заданим рядом знайдемо його загальний член

$$u_n = f(n) \ .$$

Приклад 2. Знайти загальний член ряду

$$\frac{2}{3} + \left(\frac{3}{7}\right)^2 + \left(\frac{4}{11}\right)^3 + \left(\frac{5}{15}\right)^4 + \ldots \ .$$

Розв'язання. Показник степеня кожного члена ряду збігається з номером цього члена, тому показник степеня n-го члена дорівнює n.

Чисельники дробів

$$\frac{2}{3}, \frac{3}{7}, \frac{4}{11}, \frac{5}{15}, \ldots$$

утворюють арифметичну прогресію

$$2, 3, 4, 5, \ldots$$

з першим членом a_1=2 і різницею d = 1.
n-й член a_n цієї прогресії визначиться як

$$a_n = a_1 + (n-1)d = 2 + (n-1)\cdot 1 = n + 1\ .$$

Знаменники зазначених дробів утворюють арифметичну прогресію

$$3, 7, 11, 15, \ldots$$

з першим членом b_1=3 і різницею d = 4. Знайдемо n-й член b_n цієї прогресії

$$b_n = b_1 + (n-1)d = 3 + (n-1)4 = 4n - 1.$$

Отже, загальним членом ряду є

$$u_n = \left(\frac{a_n}{b_n}\right)^n = \left(\frac{n+1}{4n-1}\right)^n\ .$$

1.3. Безпосереднє доведення збіжності або розбіжності ряду

Можна доводити збіжність або розбіжність кожного ряду, а також обчислювати суму збіжного ряду, спираючись безпосередньо на означення збіжності і суми. А саме, в кожному випадку можна спробувати скласти аналітичний вираз для n-ї часткової суми ряду і знайти границю цього виразу при необмеженому зростанні n.

Приклад 1. Розглянемо ряд

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} n\,,$$

n-а часткова сума цього ряду

$$S_n = 1 + 2 + 3 + ... + n$$

являє собою суму перших n членів арифметичної прогресії, в якій $a_1 = 1$ і $d = 1$.

За формулою

$$S_n = \frac{2a_1 + (n-1)\cdot d}{2} \cdot n$$

маємо

$$S_n = \frac{2\cdot 1 + (n-1)\cdot 1}{2}\cdot n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Послідовність часткових сум ряду необмежено зростає, тому

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{2} = \infty.$$

Отже, даний ряд є розбіжним.

Приклад 2. Розглянемо ряд

$$1 - 1 + 1 - 1 + ... + (-1)^{n+1} + ... = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}.$$

Випишемо послідовність часткових сум цього ряду

$$S_1 = 1,\ S_2 = 0,\ S_3 = 1,\ S_4 = 0,\ ... .$$

Очевидно, що всяка часткова сума з парним номером дорівнює 0, а всяка часткова сума з непарним номером дорівнює 1. Послідовність часткових сум даного ряду, хоча і є обмеженою, однак границі не має. Отже, цей ряд також є розбіжним і не має суми.

Приклад 3. Розглянемо ряд

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + ... + \frac{1}{n(n+1)} + ... = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}.$$

Запишемо n-у часткову суму ряду

$$S_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + ... + \frac{1}{n(n+1)}.$$

Доданки цієї суми можуть бути представленими у вигляді

$$\frac{1}{1\cdot 2}=1-\frac{1}{2};\ \frac{1}{2\cdot 3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3};\ \frac{1}{3\cdot 4}=\frac{1}{3}-\frac{1}{4};\ \ldots;$$

$$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1},$$

тому

$$S_n=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}.$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=1.$$

Таким чином, даний ряд є збіжним, і його сума $S = 1$.

Приклад 4. Розглянемо ряд, складений з елементів довільної геометричної прогресії (геометричний ряд)

$$a+aq+aq^2+aq^3+\ldots+aq^{n-1}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1},$$

$$a\neq 0, q \text{ – знаменник прогресії.}$$

Можливі такі випадки:

1) $q = 1$. Тоді ряд приймає вигляд

$$a+a+\ldots+a+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty} a,$$

n-а часткова сума такого ряду

$$S_n=a+a+\ldots+a=na,\ \lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty} na=\infty.$$

Ряд є розбіжним.

2) $q = -1$. Тоді ряд приймає вигляд

$$a-a+a-a+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a,$$

n-а часткова сума ряду

$$S_n = \begin{cases} 0, \text{ якщо } n \text{ парне,} \\ a, \text{ якщо } n \text{ непарне.} \end{cases}$$

Тому $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ не існує, і ряд є розбіжним.

3) $|q| \neq 1$. Для визначення S_n скористаємося формулою суми n перших членів геометричної прогресії

$$S_n = a + aq + aq^2 + aq^3 + ... + aq^{n-1} = \frac{a(1-q^n)}{1-q} =$$

$$= \frac{a - aq^n}{1-q} = \frac{a}{1-q} - \frac{aq^n}{1-q}.$$

Якщо $|q| < 1$, то

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a}{1-q} - \frac{aq^n}{1-q}\right) = \frac{a}{1-q}.$$

Ряд є збіжним, і його сума $S = \dfrac{a}{1-q}$.

Якщо $|q| > 1$, то

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a}{1-q} - \frac{aq^n}{1-q}\right) = \infty.$$

Ряд є розбіжним.

Підсумуємо отримані в цьому прикладі результати:

$$\text{ряд } \sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} \begin{cases} \text{збіжний, якщо } |q| < 1; \\ \text{розбіжний, якщо } |q| \geq 1. \end{cases}$$

В усіх розглянутих прикладах ми встановлювали збіжність або розбіжність ряду безпосереднім або «природним» шляхом, користуючись означенням збіжності і формулою для n-ї часткової суми ряду.

Однак, у більшості випадків цей шлях виявляється незручним через труднощі явного обчислення часткової суми ряду S_n, знаходження компактної формули для неї і визначення границі послідовності $\{S_n\}$.

У зв'язку з цим доцільно використовувати методи аналізу рядів, що дозволяють обчислити їх суми безпосередньо, без обчислення часткових сум, а також прийоми, що дозволяють установлювати збіжність і розбіжність рядів без знаходження їх сум (так звані ознаки збіжності рядів).

2. НЕОБХІДНА ОЗНАКА ЗБІЖНОСТІ РЯДУ

Теорема. Якщо ряд

$$u_1 + u_2 + ... + u_n + ...$$

є збіжним, то його загальний член прямує до нуля при необмеженому зростанні його номера

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0.$$

Доведення. Нехай ряд

$$u_1 + u_2 + ... + u_n + ...$$

є збіжним, тобто має місце рівність

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S,$$

де S – сума ряду. Тоді має місце також рівність

$$\lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S,$$

оскільки $n \to \infty$ і $(n-1) \to \infty$.

Віднімаючи з першої рівності другу, одержимо

$$\lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = 0$$

або $$\lim_{n\to\infty}\left(S_n - S_{n-1}\right) = 0.$$

Але $$\left(S_n - S_{n-1}\right) = u_n,$$

отже,

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0,$$

що і потрібно було довести.

Приклад 1. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ є збіжним (п. 1.3, приклад 3). Його загальний член u_n прямує до 0 при необмеженому зростанні номера n

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n(n+1)} = 0.$$

З доведеної необхідної ознаки збіжності ряду випливає достатня ознака розбіжності ряду.

Наслідок (достатня ознака розбіжності ряду). Якщо загальний член ряду не прямує до нуля при необмеженому зростанні його номера, то ряд є розбіжним.

Приклад 2. Ряд

$$\frac{1}{3}+\frac{2}{5}+\frac{3}{7}+\ldots+\frac{n}{2n+1}+\ldots$$

є розбіжним, оскільки його загальний член $u_n = \frac{n}{2n+1}$ при $n\to\infty$ не прямує до нуля.

Дійсно,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2+\frac{1}{n}} = \frac{1}{2} \neq 0.$$

Слід пам’ятати, що розглянута необхідна ознака збіжності ряду не є достатньою. Тобто з того, що n-й член ряду прямує до нуля при $n\to\infty$ ще не випливає, що ряд є збіжним.

Приклад 3. Розглянемо так званий гармонічний ряд

$$1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{\mathrm{n}}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\;. \tag{2.1}$$

Тут $$\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0,$$

проте гармонічний ряд є розбіжним. Доведемо це.

Припустимо противне: нехай гармонічний ряд є збіжним, і його сума дорівнює *S*. За означенням збіжного ряду це означає, що

$$\lim_{n\to\infty}S_n=S,$$

де S_n – часткова сума ряду.
Тоді також справедлива рівність

$$\lim_{n\to\infty}S_{2n}=S,$$

тому що при $n\to\infty$ і $2n\to\infty$. Віднімаючи з останньої рівності попередню, маємо

$$\lim_{n\to\infty}S_{2n}-\lim_{n\to\infty}S_n=0$$

або $$\lim_{n\to\infty}\left(S_{2n}-S_n\right)=0. \tag{2.2}$$

Розглянемо різницю

$$S_{2n}-S_n=\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2n}\right)-\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right)=$$

$$=\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}\right)-\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right)=$$

$$=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}>\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}+\ldots+\frac{1}{2n}=\frac{n}{2n}=\frac{1}{2}.$$

Таким чином,

$$S_{2n}-S_n>\frac{1}{2}\;.$$

За теоремою про граничний перехід у нерівності

$$\lim_{n\to\infty}\left(S_{2n}-S_n\right)\ge\frac{1}{2}\ ,$$

що суперечить рівності (2.2). Отже, гармонічний ряд є розбіжним.

У наведених нижче прикладах будемо досліджувати збіжність ряду за допомогою необхідної ознаки збіжності.

Приклад 4. Дослідити збіжність ряду

$$\frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{3}{8\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{7}}{6\sqrt{3}}+\ldots+\frac{\sqrt{n^3+1}}{4\sqrt{n^3}}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n^3+1}}{4\sqrt{n^3}}.$$

Розв'язання.

$$\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^3+1}}{4\sqrt{n^3}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{4}\sqrt{\frac{n^3+1}{n^3}}=$$

$$=\frac{1}{4}\lim_{n\to\infty}\sqrt{1+\frac{1}{n^3}}=\frac{1}{4}\ne 0.$$

Виконано достатню ознаку розбіжності ряду. Даний ряд є розбіжним.

Відповідь: ряд розбіжний.

Приклад 5. Дослідити збіжність ряду

$$1+\frac{4}{5}+\frac{6}{10}+\ldots+\frac{2n}{n^2+1}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{n^2+1}.$$

Розв'язання.

$$\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2}{n}}{1+\frac{1}{n^2}}=0.$$

Необхідна ознака збіжності ряду виконується. Даний ряд може бути як збіжним, так і розбіжним, що можна встановити лише після додаткового дослідження.

3. КРИТЕРІЙ КОШІ ЗБІЖНОСТІ РЯДУ

Нагадаємо одну важливу теорему з теорії границь, що називається критерієм Коші існування границі послідовності.

Теорема 1. Нехай

$$S_1, S_2, ..., S_n, ... \tag{3.1}$$

деяка числова послідовність.

Для того, щоб вона мала скінченну границю, необхідно і достатньо, щоб для будь-якого числа $\varepsilon > 0$ існував такий номер $N = N(\varepsilon)$, що для всіх $n > N$ і $n' > N$ справедливо

$$\left|S_{n'} - S_n\right| < \varepsilon .$$

Як видно, елементи послідовності, що збігаються, необмежно зближуються між собою зі зростанням їх номерів.

Застосуємо сформульовану теорему 1 до теорії рядів, вважаючи (3.1) послідовністю часткових сум ряду, а $n' = n+m$, де $m > 0$ — ціле число.

Теорема 2 (критерій Коші збіжності ряду).

Для того, щоб ряд

$$u_1 + u_2 + ... + u_n + ... \tag{3.2}$$

був збіжним, необхідно і достатньо, щоб послідовність його часткових сум

$$S_1, S_2, ..., S_n, ...$$

мала таку властивість: яке б не було $\varepsilon>0$, існує такий номер $N=N(\varepsilon)$, що для всіх $n>N$ і всіх цілих $m > 0$ має місце нерівність

$$\left|S_{n+m} - S_n\right| < \varepsilon . \tag{3.3}$$

Пояснимо зміст теореми 2. Для збіжності ряду (3.2) необхідно і достатньо, щоб за будь-яким заданим $\varepsilon>0$ знайшовся такий номер N, що сума будь-якої кількості послідовних членів ряду з номерами, більшими за N, менше ε. Інакше кажучи, збіжність ряду означає, що як завгодно «довгі» суми його послідовних членів повинні бути малими, якщо вони складаються тільки з «досить далеких» членів ряду.

Зауваження. Застосовуючи критерій Коші збіжності ряду, можна одержати ще одне доведення необхідної ознаки збіжності ряду (розділ 2).

Дійсно, з теореми, зокрема, випливає: якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ є збіжним, то для довільного числа $\varepsilon > 0$ існує такий номер $N = N(\varepsilon)$, що для всіх $n > N$ при $m = 1$ справедливо

$$\left|S_{n+1} - S_n\right| < \varepsilon,$$

тобто
$$\left|u_{n+1}\right| < \varepsilon.$$

А це, за означенням границі послідовності, є $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.

Розглянемо на прикладі використання критерію Коші для доведення збіжності ряду.

Приклад 1. Довести, що ряд

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

є збіжним.

Доведення. За критерієм Коші потрібно знайти таке число N, що при всіх $n > N$ і довільному цілому $m > 0$ буде виконуватися нерівність $\left|S_{n+m} - S_n\right| < \varepsilon$, яке б не було додатне число ε. Маємо

$$\left|S_{n+m} - S_n\right| =$$

$$= \left|\left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \ldots + \frac{1}{(n+m)^2}\right) - \left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}\right)\right| =$$

$$= \left|\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \ldots + \frac{1}{(n+m)^2}\right| = \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \ldots + \frac{1}{(n+m)^2}.$$

Оскільки $\frac{1}{k^2} < \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}, (k > 1)$, маємо

$$\frac{1}{(n+1)^2} < \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1};$$

$$\frac{1}{(n+2)^2} < \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2};$$

....

$$\frac{1}{(n+m)^2} < \frac{1}{n+m-1} - \frac{1}{n+m},$$

тому

$$\left|S_{n+m} - S_n\right| < \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) +$$
$$+ \ldots + \left(\frac{1}{n+m-1} - \frac{1}{n+m}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+m} < \frac{1}{n}.$$

Одержано: при довільному натуральному n і цілому $m > 0$ має місце нерівність

$$\left|S_{n+m} - S_n\right| < \frac{1}{n}\ .$$

Задамо тепер довільне $\varepsilon > 0$ і оберемо $N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$, де $\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$ – ціла частина числа $\frac{1}{\varepsilon}$.

Тоді для $n > N$, оскільки n – ціле число, справедливо

$$n \ge \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1 > \frac{1}{\varepsilon},$$

звідки $n > \frac{1}{\varepsilon}$, а тому, $\frac{1}{n} < \varepsilon$. Виходить,

$$\left|S_{n+m} - S_n\right| < \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

Таким чином, для довільного $\varepsilon>0$ знайдено номер $N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$ такий, що для всіх $n>N$ при будь-якому цілому $m>0$ виконується нерівність

$$\left|S_{n+m}-S_n\right|<\varepsilon\ .$$

За критерієм Коші збіжності ряду даний ряд є збіжним.

У принципі, можна було б збіжність довільного ряду досліджувати за критерієм Коші. Однак тоді, приступаючи до дослідження якого-небудь нового ряду, ми змушені були б щораз починати дослідження «з нуля». Можливості вивчення рядів при цьому обмежилися б використанням конкретних особливостей кожного з досліджуваних рядів, а теорія рядів являла б собою набір розрізнених задач.

Для систематичної побудови теорії числових рядів, насамперед, необхідно встановити зв'язки між поводженням одних і поводженням інших рядів. Це дозволить надалі використовувати відомості, отримані в результаті аналізу одних рядів, для спрощення дослідження інших рядів.

4. ВЛАСТИВОСТІ ЗБІЖНИХ РЯДІВ

4.1. Властивості збіжних рядів, подібні до властивостей скінченних сум

Поняття суми числового ряду істотно відрізняється від поняття суми скінченної кількості доданків тим, що містить у собі граничний перехід. Однак, деякі властивості звичайних сум переносяться і на суми числових рядів. Розглянемо ці властивості.

Теорема 1 (асоціативний закон для збіжних рядів).

Якщо в збіжному ряді

$$u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots \tag{4.1}$$

довільно об'єднати сусідні члени в групи, не порушуючи порядку членів

$$\left(u_1+\ldots+u_{n_1}\right)+\left(u_{n_1+1}+\ldots+u_{n_2}\right)+\left(u_{n_2+1}+\ldots+u_{n_3}\right)+\ldots$$

і знайти суми v_1, v_2, v_3, ... членів, що входять у кожну з груп, то складений з цих сум ряд

$$v_1 + v_2 + v_3 + \dots \tag{4.2}$$

буде збігатися і мати ту ж суму, що і заданий ряд (4.1).

Доведення. Складемо послідовність часткових сум ряду (4.1)

$$S_{n_1} = u_1 ;$$
$$S_{n_2} = u_1 + u_2 ;$$
$$S_{n_3} = u_1 + u_2 + u_3;$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n;$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$

Серед членів цієї послідовності, зокрема, знаходяться і всі суми виду

$$S_{n_1} = u_1 + \dots + u_{n_1} = v_1;$$
$$S_{n_2} = u_1 + \dots + u_{n_1} + u_{n_1+1} + \dots + u_{n_2} = v_1 + v_2;$$
$$S_{n_3} = u_1 + \dots + u_{n_1} + u_{n_1+1} + \dots + u_{n_2} +$$
$$+ u_{n_2+1} + \dots + u_{n_3} = v_1 + v_2 + v_3 ;$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Таким чином, серед членів послідовності часткових сум ряду (4.1) знаходяться всі часткові суми ряду (4.2). Отже, послідовність часткових сум ряду (4.2) є підпослідовністю послідовності часткових сум ряду (4.1). За умовою, ряд (4.1) є збіжним. Це означає, що послідовність його часткових сум $\{S_n\}$ збігається і

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S .$$

Однак, якщо деяка послідовність має певну границю (скінченну або нескінченну), то ту ж границю має і будь-яка її підпослідовність. Тому послідовність часткових сум ряду (4.2) також буде збігатися і мати границю S.

Приклад 1. Дослідити збіжність і знайти суму ряду

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}. \qquad (4.3)$$

Розв'язання. Дослідження збіжності даного ряду було проведено раніше (п. 1.3, приклад 3). При цьому відзначена справедливість рівності

$$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}, n=1,2\ldots .$$

Установимо збіжність даного ряду, спираючись на доведену теорему 1.

Введемо в розгляд ряд

$$\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}+\ldots . \qquad (4.4)$$

Очевидно, що даний ряд (4.3) отриманий попарним об'єднанням членів ряду (4.4) оскільки

$$\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)+\ldots=$$

$$=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots\frac{1}{n(n+1)}+\ldots$$

Дослідимо збіжність ряду (4.4). Для цього обчислимо його часткові суми

$$S_1=u_1=1;$$

$$S_2=S_1+u_2=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2};$$

$$S_3=S_2+u_3=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1;$$

$$S_4=S_3+u_4=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$

....

$$S_{2k-1}=1;$$
$$S_{2k}=1-\frac{1}{k+1};$$
....

Таким чином,
$$S_n=\begin{cases}1, n=2k-1;\\ 1-\dfrac{1}{k+1}, n=2k, k=1,2,3,\dots,\end{cases} \tag{4.5}$$
тому
$$\lim_{n\to\infty} S_n=1,$$
отже введений у розгляд ряд (4.4) є збіжним. Тоді, за доведеною теоремою, збігається також даний ряд (4.3), і його сума дорівнює 1.

З теореми 1 випливає.

Наслідок. Якщо за умовою об'єднання, вказаному в теоремі 1, отримано розбіжний ряд (4.2), то і спочатку розглянутий ряд (4.1) також є розбіжним.

Доведення. Припустимо, що ряд (4.1) є збіжним. Тоді, за теоремою 1, ряд (4.2) є збіжним, а ми припустили протилежне. Отже, ряд (4.1) є розбіжним.

Зауваження 1. Теорема, обернена до теореми 1, взагалі кажучи, є невірною. Зі збіжності ряду (4.2) збіжність ряду (4.1) може і не випливати (так само, як зі збіжності якої-небудь підпослідовності, взагалі кажучи, не випливає збіжність усієї послідовності). Таким чином, коли ряд (4.2) збігається, і члени його є алгебричними сумами скінченної кількості доданків
$$(u_1+\dots+u_{n_1})+(u_{n_1+1}+\dots+u_{n_2})+$$
$$+(u_{n_2+1}+\dots+u_{n_3})+\dots,$$
якщо пропустити дужки в цьому ряді, можна одержати розбіжний ряд.

Приклад 2. Розглянемо збіжні ряди
$$(1-1)+(1-1)+\dots+(1-1)+\dots=0+0+\dots+0+\dots$$

$$1-(1-1)-(1-1)-\ldots-(1-1)-\ldots=1-0-0-\ldots-0-\ldots .$$

Суми цих рядів відповідно дорівнюють 0 і 1. Пропустивши дужки в кожному з розглянутих збіжних рядів, одержимо розбіжний ряд

$$1-1+1-1+\ldots+(-1)^{n+1}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}$$

(п. 1.3, приклад 2).

Зауваження 2. В окремому випадку, якщо всі члени даного ряду (4.1) є додатними, теорема, обернена до теореми 1, є справедливою, тобто зі збіжності ряду (4.2) випливає збіжність даного ряду (4.1).

Теорема 2 (дистрибутивний закон для збіжних рядів).

Нехай дано деякий ряд

$$u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots, \tag{4.6}$$

C – довільне, відмінне від 0 число.

Ряд

$$Cu_1+C\,u_2+\ldots+C\,u_n+\ldots \tag{4.7}$$

є збіжним тоді і тільки тоді, коли збігається ряд (4.6).

Якщо ряд (4.6) є збіжним і сума його дорівнює S, то сума ряду (4.7) дорівнює CS.

Доведення. Нехай $S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots$ – послідовність часткових сум ряду (4.6).

З існування границі послідовності $\{S_n\}$: $\lim\limits_{n\to\infty} S_n=S$ (що означає збіжність ряду (4.6)), відповідно до правил граничного переходу, випливає існування границі послідовності $\{CS_n\}$: $\lim\limits_{n\to\infty} CS_n=CS$ (що означає збіжність ряду (4.7)).

Навпаки, якщо існує $\lim\limits_{n\to\infty} CS_{\text{n}}$ (що означає збіжність ряду (4.7)) і $C\neq 0$, то існує границя $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{C}\left(CS_n\right)=\lim\limits_{n\to\infty}S_n$ (що означає збіжність ряду (4.6)).

Приклад 3. Дослідити збіжність ряду

$$-2-1-\frac{2}{3}-\frac{1}{2}-\ldots .$$

Розв'язання. Даний ряд утворений множенням на число 2 усіх членів гармонічного ряду

$$-2-1-\frac{2}{3}-\frac{1}{2}-\ldots=-2\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots\right).$$

Оскільки гармонічний ряд є розбіжним, на підставі теореми 2, є розбіжним і даний ряд.

Зауваження 3. Теореми 1 і 2 установлюють властивості асоціативности і дистрибутивности для рядів, аналогічні властивостям скінченних сум. Теорема, аналогічна комутативности додавання, про можливість переставляти в ряді члени, має більш вузький характер і справедлива вже не для всіх рядів. Зокрема, для рядів з додатними членами довільна перестановка членів не порушує збіжності рядів і не змінює суми рядів, що збігаються.

Теорема 3. Нехай дано ряд

$$u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots \tag{4.8}$$

з невід'ємними членами, а ряд

$$v_1+v_2+\ldots+v_n+\ldots \tag{4.9}$$

виходить з ряду (4.8) довільною перестановкою його членів.

Тоді, якщо ряд (4.8) збігається, то ряд (4.9) також збігається і має ту ж саму суму, що і ряд (4.8).

Ряди, що збігаються, можна почленно додавати і віднімати.

Теорема 4. Нехай

$$u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots \tag{4.10}$$

і

$$v_1+v_2+\ldots+v_n+\ldots \tag{4.11}$$

два збіжних ряда, відповідно, із сумами $S^{(1)}$ і $S^{(2)}$. Тоді ряд

$$(u_1\pm v_1)+(u_2\pm v_2)+\ldots+(u_n\pm v_n)+\ldots \tag{4.12}$$

також збігається, і його сума дорівнює $S^{(1)} \pm S^{(2)}$.

Доведення. Запишемо вираз для n-ї часткової суми S_n ряду (4.12)

$$S_n = (u_1 \pm v_1) + (u_2 \pm v_2) + \ldots + (u_n \pm v_n) =$$

$$= (u_1 + u_2 + \ldots + u_n) \pm (v_1 + v_2 + \ldots + v_n) =$$

$$= S_n^{(1)} \pm S_n^{(2)},$$

де $S_n^{(1)}$ і $S_n^{(2)}$ – n-і часткові суми, відповідно, ряду (4.10) і ряду (4.11). Зі збіжності цих рядів випливає існування границь $\lim\limits_{n\to\infty} S_n^{(1)} = S^{(1)}$ і $\lim\limits_{n\to\infty} S_n^{(2)} = S^{(2)}$.

За правилами граничного переходу маємо

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(S_n^{(1)} \pm S_n^{(2)}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} S_n^{(1)} \pm \lim_{n\to\infty} S_n^{(2)} =$$

$$= S^{(1)} \pm S^{(2)}.$$

Отже, ряд (4.12) збігається, і його сума

$$\mathrm{S} = S^{(1)} \pm S^{(2)}.$$

Приклад 4. Дослідити збіжність ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{3^{n-1}}\right).$$

Рішення. Даний ряд являє собою суму двох рядів

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n-1}} \tag{4.13}$$

і

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{3^{n-1}} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^{n-1}}. \tag{4.14}$$

Ряди (4.13) і (4.14) збігаються, тому що являють собою ряди, складені з елементів геометричної прогресії зі знаменниками, відповідно, рівними $q_1=\frac{1}{2}<1$ і $q_2=\frac{1}{3}<1$ (п. 1.3, приклад 4). Їх суми, відповідно, дорівнюють

$$S^{(1)}=\frac{1}{1-q_1}=2;$$

$$S^{(2)}=\frac{1}{1-q_2}=\frac{3}{2}.$$

На основі теореми 4 даний ряд збігається, і його сума

$$\mathrm{S}=S^{(1)}+S^{(2)}=2+\frac{3}{2}=\frac{7}{2}.$$

4.2. Подальші властивості рядів, що збігаються

Теорема 5. На збіжність ряду не впливає приєднання до нього скінченної кількості нових членів, розташованих на довільних місцях. Якщо даний ряд збігається, то сума нового ряду дістається додаванням суми приєднаних членів до суми даного ряду.

Доведення. Розглянемо даний ряд

$$u_1+u_2+...+u_n+...=\sum_{n=1}^{\infty}u_n\,. \qquad (4.15)$$

Впишемо в цей ряд деякі k членів

$$v_1,\ v_2,\ ...,\ v_k,$$

розташувавши їх між членами даного ряду на довільних місцях.

Оберемо S_n^* – n-у часткову суму нового ряду так, щоб вона містила вписані члени v_i (i = 1, 2, ..., k). Тоді

$$S_n^*=\sum_{i=1}^{k}v_i+S_{n-k}\,, \qquad (4.16)$$

де S_{n-k} – $(n–k)$-а часткова сума даного ряду (4.15). Коли $n\to\infty$, границі лівої та правої частин рівності (4.16) існують або не існують одночасно. Оскільки $\sum_{i=1}^{k} v_i$ не залежить від n, то новий ряд збігається тоді і тільки тоді, коли збігається даний ряд. Встановимо зв'язок між сумою S^* нового ряду і сумою S даного ряду у випадку збіжності цих рядів. На основі (4.16)

$$S^* = \lim_{n\to\infty} S_n^* = \sum_{i=1}^{k} v_i + \lim_{n\to\infty} S_{n-k} = \sum_{i=1}^{k} v_i + S \ .$$

Наслідок. На збіжність ряду не впливає відкидання скінченної кількості його членів. Якщо даний ряд збігається, то сума нового ряду дістається із суми даного ряду відніманням від неї суми відкинутих членів.

Приклад 1. Дослідити збіжність ряду

$$\frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \ldots \ .$$

Розв'язання. Даний ряд утворений відкиданням перших п'яти членів гармонічного ряду

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

Оскільки гармонічний ряд є розбіжним, то на основі наслідку з теореми 5, даний ряд також є розбіжним.

Означення 1. Нехай дано ряд

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots = \sum_{i=1}^{\infty} u_i \ . \qquad (4.17)$$

Ряд

$$u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots = \sum_{i=n+1}^{\infty} u_i \ , \qquad (4.18)$$

отриманий відкиданням перших n членів даного ряду (4.17), називається n-м залишком ряду (4.17).

Теорема 6. Якщо збігається ряд (4.17), то збігається і кожний з його n-х залишків (4.18). Навпаки, зі збіжності якого-небудь залишку (4.18) випливає збіжність заданого ряду (4.17).

Доведення. n-й залишок (4.18) можна розглядати як ряд, утворений з ряду (4.17) в результаті відкидання перших n членів u_1, u_2, ..., u_n. На основі наслідку з теореми 5, зі збіжності ряду (4.17) випливає збіжність будь-якого його n-го залишку (4.18). Навпаки, зі збіжності якого-небудь залишку (4.18) випливає збіжність даного ряду (4.17). При цьому сума r_n n-го залишку початкового ряду визначиться як

$$r_n = S - \sum_{i=1}^{n} u_i = S - S_n, \tag{4.19}$$

де S – сума даного ряду (4.17); S_n – n-а часткова сума ряду (4.17).

Теорема 7. Якщо ряд (4.17) збігається, то сума r_n його n-го залишку з ростом n прямує до нуля, тобто

$$\lim_{n\to\infty} r_n = 0 .$$

Доведення. Переходячи до границі, коли $n \to \infty$ в рівності (4.19), маємо

$$\lim_{n\to\infty} r_n = \lim_{n\to\infty}\left(S - S_n\right) = S - \lim_{n\to\infty} S_n = S - S = 0, \tag{4.20}$$

оскільки, за припущенням, даний ряд (4.17) збіжний, S – його сума.

Зауваження. Як встановлено, для з’ясування збіжності або розбіжності ряду не обов’язково враховувати всі його члени. Досить обмежитися членами, починаючи з деякого номера n.

5. РЯДИ З НЕВІД’ЄМНИМИ ЧЛЕНАМИ

5.1. Ознаки збіжності рядів

Ознаками збіжності рядів називають прийоми, що дозволяють встановлювати збіжність або розбіжність числових рядів.

До необхідних і достатніх ознак збіжності відноситься прийом безпосереднього встановлення збіжності ряду шляхом складання послідовності його часткових сум і з’ясування існування її границі (п.1.3). Іншою необхідною і достатньою ознакою є критерій Коші збіжності ряду (розділ 3).

Прямування до нуля загального члена ряду зі зростанням його номера n є ознакою збіжності, тільки необхідною, але недостатньою (розділ 2).

Відсутність прямування до нуля загального члена ряду зі зростанням n є достатньою ознакою розбіжності ряду (розділ 2).

Перейдемо тепер до розгляду деяких достатніх ознак збіжності рядів з невід'ємними членами. Попередньо сформулюємо і доведемо теорему, яку буде використано в подальших міркуваннях.

5.2. Умова збіжності ряду з невід'ємними членами

Теорема 1. Для того щоб ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ з невід'ємними членами був збіжним, необхідно і достатньо, щоб послідовність часткових сум цього ряду була обмеженою.

Доведення. Необхідність. Нехай ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ є збіжним. Це означає, що послідовність його часткових сум має границю. Отже, як усяка послідовність, що збігається, послідовність часткових сум є обмеженою.

Достатність. Нехай послідовність $\{S_n\}$ часткових сум ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ є обмеженою. Оскільки $u_n \geq 0$, то часткові суми ряду утворять неспадну послідовність

$$0 \leq S_1 \leq S_2 \leq \ldots \leq S_n \leq S_{n+1} \leq \ldots .$$

За теоремою про монотонні обмежені послідовності, ця неспадна послідовність збігається, тобто є збіжним ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n .$$

5.3. Ознаки порівняння

Розглянемо ознаки, що дозволяють зробити висновок про збіжність або розбіжність даного ряду шляхом порівняння його членів із членами іншого ряду, поводження якого вже з'ясовано.

Теорема 2 (перша ознака порівняння).

Нехай задано два ряди з невід'ємними членами

$$u_1 + u_2 + ... + u_n + ... \qquad (5.1)$$

і

$$v_1 + v_2 + ... + v_n + ... \quad . \qquad (5.2)$$

Якщо, починаючи з деякого номера, члени першого ряду не перевищують відповідні члени другого ряду

$$u_n \le v_n, \qquad n = k, k + 1, ... , \qquad (5.3)$$

то зі збіжності ряду (5.2) випливає збіжність ряду (5.1), а з розбіжності ряду (5.1) випливає розбіжність ряду (5.2).

Зауваження 1. Якщо справедлива нерівність (5.3), то говорять, що ряд (5.2) мажорує ряд (5.1). Ряд (5.2) називається мажорантою ряду (5.1).

Доведення. На основі того, що відкидання скінченної кількості членів ряду не впливає на його збіжність (п. 4.2, наслідок теореми 5), не порушуючи загальності, можна вважати, що $u_n \le v_n$ при всіх значеннях n=1, 2, 3, ... Позначивши часткові суми рядів (5.1) і (5.2) відповідно через $S_n^{(1)}$ і $S_n^{(2)}$, будемо мати

$$S_n^{(1)} \le S_n^{(2)}, \ n = 1,2,3, ... \qquad (5.4)$$

Нехай ряд (5.2) є збіжним. Тоді за теоремою 1 (необхідність), послідовність його часткових сум є обмеженою, тобто

$$S_n^{(2)} \le M, \ n = 1,2,3, ... ,$$

де M – деяке число. За нерівністю (5.4) і поготів

$$S_n^{(1)} \le M, \ n = 1,2,3, ...$$

Таким чином, послідовність часткових сум $\left\{S_n^{(1)}\right\}$ ряду (5.1) з невід'ємними членами є обмеженою. На основі тієї ж теореми 1 (достатність) робимо висновок, що ряд (5.1) збігається.

Нехай ряд (5.1) є розбіжним. Тоді ряд (5.2) також буде розбіжним. Інакше, припустивши збіжність ряду (5.2), за тільки що доведеним, одержимо збіжність ряду (5.1), а це суперечить умові.

Зауваження 2. При дослідженні збіжності рядів за допомогою ознак порівняння часто використовують такі «еталонні» ряди:

1) геометричний ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} \begin{cases} \text{збіжний, якщо} \left|q\right| < 1, \\ \text{розбіжний, якщо} \left|q\right| \geq 1; \end{cases}$$

2) узагальнений гармонічний ряд (ряд Дирихле)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} \begin{cases} \text{збіжний, якщо } \alpha > 1, \\ \text{розбіжний, якщо } \alpha \leq 1. \end{cases}$$

Збіжність першого з наведених рядів було досліджено (п. 1.3, приклад 4). Дослідження другого ряду буде проведено пізніше (п. 5.6). Зокрема, при $\alpha = 1$ маємо розбіжний гармонічний ряд

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

(розділ 2, приклад 3).

Наведемо приклади дослідження збіжності і розбіжності рядів з використанням першої ознаки порівняння.

Приклад 1. Дослідити збіжність ряду

$$1 + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 3^2} + \frac{1}{4 \cdot 3^2} + \ldots + \frac{1}{n \cdot 3^{n-1}} + \ldots =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 3^{n-1}}.$$

Розв'язання. Порівняємо даний ряд з геометричним рядом

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^{n-1}}.$$

Оскільки $$n \cdot 3^{n-1} \geq 3^{n-1},\ n = 1, 2, 3, \ldots ,$$

то $$\frac{1}{n \cdot 3^{n-1}} \leq \frac{1}{3^{n-1}}, n = 1, 2, 3, \ldots .$$

Але ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^{n-1}}$ є збіжним (геометричний ряд зі знаменником $q=\frac{1}{3}<1$).
Отже, за першою ознакою порівняння, даний ряд також збігається.

Відповідь: ряд збіжний.

Приклад 2. Дослідити збіжність ряду

$$\frac{\ln 3}{3}+...+\frac{\ln n}{n}+...=\sum_{n=3}^{\infty}\frac{\ln n}{n}.$$

Розв'язання. Порівняємо даний ряд з розбіжним рядом $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n}$.
Оскільки

$$\ln n > 1,\ n = 3, 4, 5, ... ,$$

то

$$\frac{\ln n}{n}>\frac{1}{n}, n = 3, 4, 5, ...$$

Кожен член даного ряду більше відповідного члена розбіжного ряду. За першою ознакою порівняння, даний ряд є розбіжним.

Відповідь: ряд розбіжний.

На практиці виявляється більш зручною наступна теорема, що випливає з першої ознаки порівняння.

Теорема 3 (друга або гранична ознака порівняння).

Нехай задано два ряди з невід'ємними членами

$$u_1 + u_2 + ... + u_n + ... \tag{5.5}$$

і

$$v_1 + v_2 + ... + v_n + ... \tag{5.6}$$

Якщо існує скінченна, відмінна від нуля границя

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=A(A\neq 0,\ A\neq\infty), \tag{5.7}$$

то ряди (5.5) і (5.6) збігаються або розбігаються одночасно (передбачається, що $v_n \neq 0$).

Приклад 3. Дослідити збіжність ряду

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots\frac{1}{n\left(n+1\right)}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\left(n+1\right)}.$$

Розв'язання. Дослідимо збіжність даного ряду з використанням граничної ознаки порівняння, узявши за «еталонний» ряд, що збігається $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$.

Нехай $$u_n=\frac{1}{n\left(n+1\right)};v_n=\frac{1}{n^2},$$

$$A=\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n\left(n+1\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{n}}=1.$$

Оскільки $A = 1 \neq 0$, то на основі граничної ознаки порівняння виводимо, що даний ряд збігається.

Відповідь: ряд збіжний.

Приклад 4. Дослідити збіжність ряду

$$\frac{3}{4}+\frac{5}{2\sqrt{2}+3}+\frac{7}{3\sqrt{3}+3}+\ldots+\frac{2n+1}{n\sqrt{n}+3}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n\sqrt{n}+3}.$$

Розв'язання. Порівняємо даний ряд з узагальненим гармонічним рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1/2}}$ за другою ознакою порівняння.

$$A=\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(2n+1\right)n^{1/2}}{n\sqrt{n}+3}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(2n+1\right)\sqrt{n}}{n\sqrt{n}+3}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{1}{n}}{1+\frac{3}{n\sqrt{n}}}=2\neq 0.$$

Оскільки ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1/2}}$ є розбіжним $\left(\alpha=\frac{1}{2}<1\right)$, то даний ряд також є розбіжним.

Відповідь: ряд розбіжний.

Існують ознаки збіжності рядів, що дозволяють безпосередньо судити про збіжність (або розбіжність) даного ряду, не порівнюючи його з іншим, вже вивченим рядом. Розглянемо три з них: ознаку Даламбера, ознаку Коші й інтегральну ознаку Маклорена-Коші.

5.4. Ознака Даламбера

Теорема 4. Нехай задано ряд

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots \tag{5.8}$$

з додатними членами й існує границя (скінченна або нескінченна)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \rho. \tag{5.9}$$

Тоді а) при $\rho<1$ ряд (5.8) збіжний; б) при $\rho>1$ ряд (5.8) розбіжний.

Доведення. а) Нехай $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \rho$ і $\rho<1$. Доведемо збіжність ряду (5.8).

За означенням границі числової послідовності, для кожного $\varepsilon>0$ існує номер N такий, що при $n\geq N$ виконується нерівність

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n} - \rho\right| < \varepsilon.$$

Ця нерівність рівносильна подвійній нерівності

$$\rho - \varepsilon < \frac{u_{n+1}}{u_n} < \rho + \varepsilon. \tag{5.10}$$

За припущенням $\rho<1$. Візьмемо ε настільки малим, щоб виконувалася нерівність $\rho + \varepsilon<1$. Позначимо $\rho + \varepsilon = q<1$. Тоді на основі правої з нерівностей (5.10) маємо

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < q \text{ або } u_{n+1} < u_n q \tag{5.11}$$

для $n = N, N+1, N+2, \ldots$.

Надаючи n ці значення, з останньої нерівності (5.11) одержимо

$$u_{N+1} < u_N \cdot q;$$

$$u_{N+2} < u_{N+1} \cdot q < u_N \cdot q \cdot q = u_N \cdot q^2;$$

$$u_{N+3} < u_{N+2} \cdot q < u_N \cdot q^2 \cdot q = u_N \cdot q^3;$$

. . . .

Таким чином, члени ряду

$$u_{N+1} + u_{N+2} + u_{N+3} + \ldots \qquad (5.12)$$

менше відповідних членів ряду, складеного з елементів геометричної прогресії

$$u_N \cdot q + u_N \cdot q^2 + u_N \cdot q^3 + \ldots\,. \qquad (5.13)$$

Оскільки $q<1$, то ряд (5.13) збігається (п. 5.3, зауваження 2). На основі першої ознаки порівняння (п. 5.3, теорема 2) ряд (5.12) також збігається. Але ряд (5.12) отриманий з ряду (5.8) відкиданням N його перших членів. Отже, відповідно до наслідку теореми 5 (п. 4.2), ряд (5.8) є також збіжним.

б) Нехай $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \rho$, де $\rho>1$ — деяке число.

Доведемо, що ряд (5.8) є розбіжним.

Оскільки ρ є границею послідовності $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$, то для кожного $\varepsilon>0$ існує номер N такий, що при $n\geq N$ виконується нерівність (5.10). За припущенням $\rho>1$. Виберемо ε настільки малим, що $\rho - \varepsilon > 1$. Тоді при $n\geq N$ на основі лівої з нерівностей (5.10) справедливо

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} > \rho - \varepsilon > 1 \text{ або } u_{n+1} > u_n.$$

Таким чином, члени ряду (5.8), починаючи з деякого номера N, зростають зі збільшенням їх номерів. Оскільки члени ряду (5.8) є додатними, загальний член ряду u_n не прямує до нуля при $n \to \infty$. Отже, відповідно до наслідку теореми 1 (розділ 2), ряд (5.8) є розбіжним.

Можна показати, що аналогічний результат має місце і при $\rho = +\infty$.

Приклад 1. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$ є збіжним, тому що

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot n}{1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot n(n+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0<1.$$

Приклад 2. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n}$ є розбіжним, тому що

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2^{n+1}}{n+1}}{\frac{2^n}{n}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{1+\frac{1}{n}}=2>1.$$

Зауваження 1. При $\rho=1$ ряд (5.8) може як збігатися, так і розбігатися. У цьому випадку для встановлення збіжності або розбіжності ряду необхідно додаткове дослідження за допомогою інших ознак.

Приклад 3. Розглянемо гармонічний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$.

Маємо

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{(n+1)}}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{n}}=1.$$

Відповідно до ознаки Даламбера зробити висновок про збіжність або розбіжність ряду не можна. Однак, як було показано раніше (розд. 2, приклад 3), цей ряд розбіжний.

Приклад 4. Розглянемо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$. Маємо

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)(n+2)}}{\frac{1}{n(n+1)}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\frac{2}{n}} = 1.$$

На основі ознаки Даламбера зробити висновок про збіжність або розбіжність ряду не можна. Однак, як було показано раніше (розд. 1, п.3, приклад 3; розд. 5, п. 3, приклади 1,3), цей ряд збіжний.

Наведемо ряд прикладів дослідження збіжності і розбіжності рядів за ознакою Даламбера.

Приклад 5. Дослідимо збіжність ряду

$$\frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{2}{5} + \frac{3}{5\sqrt{5}} + \ldots + \frac{n}{5^{n/2}} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{5^{n/2}}.$$

Розв'язання. Застосування ознаки Даламбера вимагає складання відношення $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ і визначення границі ρ цього відношення при $n \to \infty$. Для того, щоб з виразу u_n загального члена ряду одержати вираз u_{n+1}, потрібно у формулі для u_n замінити n на n+1.

Загальний член даного ряду $u_n = \frac{n}{5^{n/2}}$.

Член u_{n+1} виходить з u_n заміною n на n+1, тобто

$$u_{n+1} = \frac{n+1}{5^{(n+1)/2}}.$$

Складемо відношення

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)\cdot 5^{n/2}}{5^{(n+1)/2.}\cdot n} = \frac{n+1}{n\sqrt{5}};$$

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{n}}{1} = \frac{1}{\sqrt{5}} < 1.$$

Оскільки границя відношення $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ при $n \to \infty$ дорівнює числу, меншому за 1, то ряд збігається.

Відповідь: ряд збіжний.

Приклад 6. Дослідити збіжність ряду

$$\frac{2}{2}+\frac{4\cdot 2}{2\cdot 3}+\frac{8\cdot 6}{2\cdot 3\cdot 4}+\ldots+\frac{2^n\cdot n!}{(n+1)!}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\cdot n!}{(n+1)!}\ .$$

Розв'язання. Загальний член ряду $u_n=\frac{2^n\cdot n!}{(n+1)!}$;

$$u_{n+1}=\frac{2^{n+1}\cdot(n+1)!}{(n+2)!}.$$

Складемо відношення

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{2^{n+1}\cdot(n+1)!\cdot(n+1)!}{(n+2)!\cdot 2^n\cdot n!}=2\frac{(n+1)!}{(n+2)!}\cdot\frac{(n+1)!}{n!}=$$

$$=2\cdot\frac{1\cdot 2\cdot 3\ldots(n+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(n+1)\cdot(n+2)}\cdot\frac{1\cdot 2\cdot 3\ldots\cdot n\cdot(n+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n}=2\cdot\frac{n+1}{n+2}$$

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=2\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n+2}=2\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{2}{n}}=2.$$

Оскільки $\rho=2>1$, то за ознакою Даламбера, даний ряд розбігається.

Відповідь: ряд розбіжний.

5.5.Ознака Коші

Теорема 5. Нехай задано ряд

$$u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots \qquad (5.14)$$

з невід'ємними членами й існує границя (скінченна або нескінченна).

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \rho. \tag{5.15}$$

Тоді а) при $\rho<1$ ряд (5.14) збіжний, б) при $\rho>1$ ряд (5.14) розбіжний.

Доведення. а) Нехай $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \rho$ і $\rho<1$. Доведемо збіжність ряду (5.14).

За означенням границі числової послідовності для кожного $\varepsilon>0$ існує номер N такий, що при $n\geq N$ виконується нерівність

$$\rho - \varepsilon < \sqrt[n]{u_n} < \rho + \varepsilon. \tag{5.16}$$

За припущенням $\rho<1$. Візьмемо ε настільки малим, що $\rho + \varepsilon <$ 1. Позначимо $\rho + \varepsilon = q <1$. Тоді

$$\sqrt[n]{u_n} < \rho + \varepsilon = q<1 \text{ або } u_n < q^n. \tag{5.17}$$

Оскільки при $0<q<1$ ряд $\sum\limits_{n=N}^{\infty} q^n$ збігається (геометричний ряд), то з останньої нерівності (5.17), на основі першої ознаки порівняння (п. 5.2, теорема 2) ряд $\sum\limits_{n=N}^{\infty} u_n$ також збігається. Тоді буде збігатися і даний ряд (5.14), який одержано приєднанням до ряду $\sum\limits_{n=N}^{\infty} u_n$ $N-1$ членів: $u_1, u_2, \ldots, u_{N-1}$ (п. 4.2, теорема 5).

б) Нехай $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \rho$ і $\rho>1$. Доведемо, що ряд (5.14) є розбіжним. Виберемо ε настільки малим, що $\rho - \varepsilon > 1$. Тоді при $n \geq N$ на основі лівої з нерівностей (5.16) справедливо

$$\sqrt[n]{u_n} > \rho - \varepsilon >1,$$

звідки $u_n > 1$.

Таким чином, члени ряду (5.14), починаючи з деякого номера N, стають більше 1. З цього випливає, що

$$\lim_{n\to\infty} u_n \neq 0.$$

Відповідно до наслідку з теореми 1 (розділ 2), даний ряд (5.14) є розбіжним. Аналогічний результат має місце і при $\rho = +\infty$.

Зауваження. При $\rho=1$ ряд (5.14) може бути як збіжним, так і розбіжним. У цьому випадку необхідно додаткове дослідження ряду за допомогою інших ознак.

Наведемо приклади дослідження збіжності і розбіжності рядів за ознакою Коші.

Приклад 1. Дослідити збіжність ряду

$$\frac{1}{2}(1+1)+\frac{1}{2^2}\left(1+\frac{1}{2}\right)^{2^2}+\frac{1}{2^3}\left(1+\frac{1}{3}\right)^{3^2}+\ldots+$$

$$+\frac{1}{2^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}.$$

Розв'язання. Загальний член ряду $u_n = \frac{1}{2^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$,

$$\sqrt[n]{u_n}=\sqrt[n]{\frac{1}{2^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n},$$

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=\frac{e}{2}.$$

Оскільки e > 2, то ρ= e/2 > 1. Отже, за ознакою Коші даний ряд є розбіжним.

Відповідь: ряд розбіжний.

Приклад 2. Дослідити збіжність ряду

$$\frac{1}{3}(1+1)+\frac{1}{3^2}\left(1+\frac{1}{2}\right)^{2^2}+\frac{1}{3^3}\left(1+\frac{1}{3}\right)^{3^2}+\ldots+$$

$$+\frac{1}{3^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}.$$

Розв'язання. Загальний член ряду $u_n = \frac{1}{3^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$.

$$\sqrt[n]{u_n} = \sqrt[n]{\frac{1}{3^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}} = \frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n,$$

$$\rho = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \frac{e}{3}.$$

Оскільки $e < 3$, то $\rho = \frac{e}{3} < 1$. Отже, за ознакою Коші даний ряд збігається.

Відповідь: ряд збіжний.

5.6. Інтегральна ознака Маклорена-Коші

Виведемо ще одну ознаку, яка відрізняється за формою від усіх попередніх. Вона заснована на ідеї зіставлення ряду з інтегралом. Ознака виражає необхідні й достатні умови збіжності ряду.

Теорема 6. Нехай задано ряд

$$u_1 + u_2 + ... + u_n + ... , \tag{5.18}$$

члени якого є значеннями при $x = n$ деякої функції $f(x)$, додатної, неперервної і незростаючої на півінтервалі $[1, +\infty)$:

$$f(1) = u_1,\ f(2) = u_2,\ ...,\ f(n) = u_n, ... \tag{5.19}$$

Тоді для збіжності ряду (5.18) необхідно і достатньо, щоб збігався (існував) невласний інтеграл

$$\int_1^{+\infty} f(x)dx. \tag{5.20}$$

Доведення. Розглянемо ряд, членами якого є інтеграли

$$\int_1^2 f(x)dx + \int_2^3 f(x)dx + ... + \int_n^{n+1} f(x)dx + ... \tag{5.21}$$

Випишемо часткові суми цього ряду

$$S_1 = \int_1^2 f(x)dx;$$

$$S_2 = \int_1^2 f(x)dx + \int_2^3 f(x)dx = \int_1^3 f(x)dx;$$

. . . .

$$S_n = \int_1^2 f(x)dx + \int_2^3 f(x)dx + ... + \int_n^{n+1} f(x)dx = \int_1^{n+1} f(x)dx.$$

Збіжність ряду (5.21) означає існування границі послідовності $\{S_n\}$:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \int_1^{n+1} f(x)dx. \tag{5.22}$$

З рівності (5.22) випливає, що збіжність ряду (5.21) рівносильна існуванню невласного інтегралу $\int_1^{+\infty} f(x)dx$.

Покажемо тепер, що ряд (5.21) збігається тоді і тільки тоді, коли збігається даний ряд (5.18).

Нехай $n < x < n+1$.

Оскільки $f(x)$, за припущенням, є незростаючою функцією, то

$$f(n) \ge f(x) \ge f(n+1).$$

Оскільки $\qquad f(n) = u_n,\ f(n+1) = u_{n+1},$

маємо

$$u_n \ge f(x) \ge u_{n+1}. \tag{5.23}$$

Проінтегруємо кожну з нерівностей (5.23) по x від n до $n+1$. Тоді

$$\int_n^{n+1} u_n dx \ge \int_n^{n+1} f(x)dx \ge \int_n^{n+1} u_{n+1}dx$$

або

$$u_n \ge \int_n^{n+1} f(x)dx \ge u_{n+1}. \tag{5.24}$$

Припустимо, що даний ряд (5.18) є збіжним. Тоді, відповідно до лівої з нерівностей (5.24), на основі першої ознаки порівняння (п. 5.3, теорема 2), складений з інтегралів ряд (5.21) є також збіжним.

Нехай тепер даний ряд (5.18) є розбіжним. Тоді, відповідно до наслідку теореми 5 (п. 2.4), ряд

$$u_2 + u_3 + \ldots + u_{n+1} + \ldots ,$$

що одержано з ряду (5.18) відкиданням члена u_1, є також розбіжним. На основі правої з нерівностей (5.24), за першою ознакою порівняння (п. 5.3, теорема 2), розбіжним є і ряд (5.21).

Таким чином доведено, що збіжність ряду (5.18) еквівалентна збіжності ряду (5.21). Але збіжність ряду (5.21), як установлено раніше, рівносильна існуванню невласного інтегралу (5.20). Отже, збіжність ряду (5.18) рівносильна збіжності невласного інтегралу (5.20), що і потрібно було довести.

Приклад 1. Розглянемо ряд

$$1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \ldots + \frac{1}{n^\alpha} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} .$$

Це узагальнений гармонічний ряд (ряд Дирихле), збіжність якого (при $\alpha > 1$) і розбіжність (при $\alpha \le 1$) було відзначено (без доказу) в зауваженні 2 (п. 5.3).

Дослідимо тепер поведінку цього ряду при $\alpha > 0$ за допомогою інтегральної ознаки Маклорена-Коші.

Візьмемо за $f(x)$ функцію $\frac{1}{x^\alpha}\left(x \ge 1\right)$. Ця функція задовольняє умови теореми 6: її значення при $x = 1, 2, 3, \ldots$ є членами даного ряду

$$f(1) = \frac{1}{1^\alpha} = 1;\ f(2) = \frac{1}{2^\alpha};\ \ldots;\ f(n) = \frac{1}{n^\alpha};\ \ldots$$

Функція є додатною, неперервною і спадною на півінтервалі $[1, +\infty)$. Як відомо, невласний інтеграл $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ при $\alpha > 1$ збігається і розбігається при $\alpha \le 1$. Отже, узагальнений гармонічний ряд збігається при $\alpha > 1$ і розбігається при $\alpha \le 1$.

Приклад 2. Дослідити збіжність ряду

$$\frac{1}{2\ln^3 2} + \frac{1}{3\ln^3 3} + \ldots + \frac{1}{(n+1)\ln^3(n+1)} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\ln^3(n+1)}.$$

Розв'язання. Загальний член ряду $u_n = \dfrac{1}{(n+1)\ln^3(n+1)}$. Члени ряду можна розглядати як значення функції $f(x) = \dfrac{1}{(x+1)\ln^3(x+1)}$ при значеннях аргументу $x = 1, 2, 3, \ldots$.

При $x \geq 1$ $f(x)$ є додатною, неперервною і монотонно спадною зі зростанням x. Обчислимо невласний інтеграл

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{(x+1)\ln^3(x+1)} = \int_1^{\infty} \frac{d\ln(x+1)}{\ln^3(x+1)} = \lim_{A\to\infty} \int_1^{A} \frac{d\ln(x+1)}{\ln^3(x+1)} =$$

$$= -\lim_{A\to\infty} \left.\frac{1}{2\ln^2(x+1)}\right|_1^A = -\lim_{A\to\infty}\left(\frac{1}{2\ln^2(A+1)} - \frac{1}{2\ln^2 2}\right) = \frac{1}{2\ln^2 2}.$$

Оскільки невласний інтеграл має скінченне значення (тобто збігається), то досліджуваний ряд, на основі інтегральної ознаки Маклорена-Коші, також збігається.

Відповідь: ряд збіжний.

5.7. Переваги і недоліки різних ознак збіжності

Існують приклади, з яких видно, що інтегральна ознака Маклорена-Коші дозволяє зробити висновок про поводження ряду в тих випадках, коли ознаки Даламбера і Коші не вирішують питання щодо характеру збіжності, тобто коли

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 \text{ або } \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = 1.$$

У цілому варто мати на увазі, що ознаки Даламбера і Коші мають досить велику широту застосовності та є відносно нескладними при практичному використанні. Однак, у багатьох випадках вони виявляються недостатньо «чуттєвими».

Як необхідна і достатня, ознака Маклорена-Коші має ідеальну «чуттєвість». Однак, її практичне застосування в багатьох випадках є важким, оскільки найчастіше обчислення невласного інтегралу являє собою складну задачу.

6. ЗНАКОЗМІННІ РЯДИ

6.1. Абсолютна збіжність

Дотепер ми розглядали ряди з невід'ємними членами. Ряди з недодатними членами відрізняються від відповідних рядів з невід'ємними членами тільки множником -1, тому питання про їх збіжність вирішується аналогічно.

Розглянемо ряди з членами довільних знаків.

Означення 1. Знакозмінним рядом називається ряд, членами якого є дійсні числа довільного знаку.

Нехай

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots \tag{6.1}$$

– деякий знакозмінний ряд, де числа u_1, u_2, ... u_n, ... можуть бути як додатними, так і від'ємними, причому розташування додатних і від'ємних членів у ряді довільне. Одночасно розглянемо ряд, складений з абсолютних величин членів ряду (6.1):

$$|u_1| + |u_2| + \ldots + |u_n| + \ldots . \tag{6.2}$$

Складений з модулів ряд (6.2) є рядом з невід'ємними членами, тому його можна досліджувати методами, які викладені в розділі 5.

Між збіжністю рядів (6.2) і (6.1) існує зв'язок, що виражається наступною теоремою.

Теорема 1. (достатня ознака збіжності знакозмінного ряду).

Якщо ряд (6.2) збігається, то збігається і ряд (6.1).

Доведення. Нехай ряд (6.2) збігається. На основі критерію Коші (розділ 3), послідовність часткових сум $\{S'_n\}$ ряду (6.2) має наступну властивість: для кожного $\varepsilon > 0$ існує такий номер N, що для всіх $n > N$ і всіх цілих $m > 0$ виконується нерівність

$$|S'_{n+m} - S'_n| < \varepsilon .$$

Оскільки

$$S'_{n+m} = |u_1| + |u_2| + \ldots + |u_n| + |u_{n+1}| + \ldots + |u_{n+m}|,$$

а $$S_n' = |u_1| + |u_2| + ... + |u_n|,$$

то справедливо $|S_{n+m}' - S'| = |u_{n+1}| + |u_{n+2}| + ... + |u_{n+m}| < \varepsilon$. З урахуванням нерівності

$$|u_{n+1} + u_{n+2} + ... + u_{n+m}| \le |u_{n+1}| + |u_{n+2}| + ... + |u_{n+m}|,$$

маємо

$$|u_{n+1} + u_{n+2} + ... + u_{n+m}| < \varepsilon. \qquad (6.3)$$

Позначимо послідовність часткових сум ряду (6.1): $\{S_n\}$.

Оскільки

$$S_{n+m} = u_1 + u_2 + ... + u_n + ...\ u_{n+1} + ... + u_{n+m},$$

$$S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n,$$

то з нерівності (6.3) випливає, що

$$|S_{n+m} - S_n| = |u_{n+1} + u_{n+2} + ... + u_{n+m}| < \varepsilon. \qquad (6.4)$$

Таким чином, послідовність часткових сум $\{S_n\}$ ряду (6.1) має наступну властивість: $\forall\ \varepsilon > 0$ існує такий номер N, що для всіх $n > N$ і всіх цілих $m > 0$ справедливо

$$|S_{n+m} - S_n| < \varepsilon.$$

На основі критерію Коші ряд (6.1) збігається.

Приклад 1. Розглянемо ряд

$$1 - \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{6^2} - \frac{1}{7^2} + ...$$

За доведеною ознакою, ряд збігається, оскільки збігається ряд, складений з абсолютних величин членів даного ряду

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + ... + \frac{1}{\mathrm{n}^2} + ... = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

(узагальнений гармонічний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$, $\alpha = 2 > 1$).

Означення 2. Знакозмінний ряд називається абсолютно збіжним, якщо збігається ряд, складений з модулів його членів.

Введене означення дозволяє привести еквівалентне формулювання теореми 1.

Теорема $1'$**.** Довільний абсолютно збіжний ряд збігається.

6.2. Властивості абсолютно збіжних рядів

Зазначимо без доведення переставну властивість і теорему множення абсолютно збіжних рядів.

Теорема 2. (про можливість переставляти члени в абсолютно збіжних рядах).

Якщо в абсолютно збіжному ряді довільно переставити члени, то отриманий ряд також буде абсолютно збіжним, а його сума буде дорівнювати сумі даного ряду.

Тепер займемося множенням рядів. Нехай дано два збіжних ряди

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n = S^{(1)} \tag{6.5}$$

$$v_1 + v_2 + \ldots + v_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} v_n = S^{(2)}. \tag{6.6}$$

Наслідуючи правило множення кінцевих сум, розглянемо усякі можливі парні добутки $u_i v_k$ членів цих рядів. З цих добутків складемо нескінченну таблицю

$$\begin{array}{llllll}
u_1v_1 & u_2v_1 & u_3v_1 & \ldots & u_iv_1 & \ldots \\
u_1v_2 & u_2v_2 & u_3v_2 & \ldots & u_iv_2 & \ldots \\
\text{- - - - -} & \text{- - - - -} & \text{- - - - -} & \text{- - - -} & \text{- - - - -} & \text{- - -} \\
u_1v_k & u_2v_k & u_3v_k & \ldots & u_iv_k & \ldots \\
\text{- - - - -} & \text{- - - - -} & \text{- - - - -} & \text{- - - -} & \text{- - - - -} & \text{- - -}
\end{array} \tag{6.7}$$

Ці добутки можна розташувати різними способами у вигляді послідовності.

Теорема 3 (про множення абсолютно збіжних рядів).

Якщо обидва ряди (6.5) і (6.6) є абсолютно збіжними, то ряд, складений з добутків (6.7), узятих у будь-якому порядку, також є абсолютно збіжним, і сума його дорівнює добутку сум $S^{(1)} \cdot S^{(2)}$.

Зауваження. При множенні рядів зручно розміщувати добутки (6.7) по діагоналях. У такому випадку

$$S^{(1)} \cdot S^{(2)} = u_1v_1 + (u_1v_2 + u_2v_1) + (u_1v_3 + u_2v_2 + u_3v_1) + \ldots \qquad (6.8)$$

6.3. Знакопереміжні ряди

Окремим випадком знакозмінних рядів є так звані знакопереміжні ряди.

Означення 3. Знакозмінний ряд називається знакопереміжним, якщо його сусідні члени мають різні знаки

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots + (-1)^{n+1}u_n + \ldots , \qquad (6.9)$$

де $u_n > 0$.

Для знакопереміжних рядів має місце така достатня ознака збіжності.

Теорема 4 (ознака збіжності Лейбніца).

Якщо абсолютні величини членів знакопереміжного ряду (6.9) утворюють монотонно незростаючу послідовність, що прямує до нуля, тобто

$$u_1 \geq u_2 \geq \ldots \geq u_n \geq \ldots \qquad (6.10)$$

і

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0, \qquad (6.11)$$

то ряд (6.9) збігається.

Доведення. Нехай задано ряд (6.9) і $u_n \geq u_{n+1}$ (n=1,2,3,...), $u_n \to 0$, $n \to \infty$. Розглянемо часткову суму ряду (9) з парною кількістю членів

$$S_{2n} = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots + u_{2n-1} - u_{2n} =$$
$$= (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + \ldots + (u_{2n-1} - u_{2n}).$$

За умовою (6.10), різниці в дужках є невід'ємними. Тому послідовність $\{S_{2n}\}$ є неспадною. Доведемо, що ця послідовність є обмеженою.

Представимо S_{2n} у вигляді

$$S_{2n} = u_1 - [(u_2 - u_3) + (u_4 - u_5) + \ldots + (u_{2n-1} - u_{2n-1}) + u_{2n}].$$

За умови (6.10), у всіх круглих дужках містяться невід'ємні числа, отже, сума, що стоїть у квадратних дужках, є невід'ємною. Звідси

$$S_{2n} \le u_{1.}$$

Таким чином, послідовність $\{S_{2n}\}$ є неспадною, обмеженою, тому вона має границю

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n} = S \le u_{1.} \tag{6.12}$$

Покажемо тепер, що послідовність часткових сум непарної кількості членів $\{S_{2n+1}\}$прямує до тієї ж самої границі.

$$S_{2n+1} = S_{2n} + u_{2n+1}. \tag{6.13}$$

Перейдемо до границі при $n \to \infty$ у рівності (6.13). З урахуванням умови (6.11) маємо

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} \left(S_{2n} + u_{2n+1}\right) = \lim_{n\to\infty} S_{2n} + \lim_{n\to\infty} u_{2n+1} = S + 0 = S.$$

Таким чином, послідовність $\{S_n\}$ часткових сум ряду (6.9) прямує до границі S. Це означає, що ряд (6.9) збігається.

Приклад 1. Знакопереміжний ряд

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{1}{n} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{1}{n}$$

є збіжний, оскільки задовольняє умовам ознаки Лейбніца

$$1)\ 1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \ldots \frac{1}{n} > \frac{1}{n+1} > \ldots;$$

$$2)\ \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Зазначимо, що цей ряд відрізняється від гармонічного ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ тільки знаками парних членів.

Наслідок. Для знакопереміжного ряду (6.9), що задовольняє ознаці збіжності Лейбніца, залишок ряду r_n за абсолютною величиною не перевищує абсолютної величини першого з членів, що відкидаються

$$\left|r_n\right| \le u_{n+1}.$$

Доведення. Залишок ряду r_n (п. 4.2, означення 1) являє собою ряд

$$r_n = \pm u_{n+1} \pm u_{n+2} \pm u_{n+3} \pm \ldots, \qquad (6.14)$$

що задовольняє всі умови ознаки Лейбніца. Тому він збігається, а на основі нерівності (6.12) його сума за абсолютною величиною не перевищує модуля першого члена ряду (6.14), тобто

$$\left|r_n\right| \le u_{n+1}.$$

Зауваження. Наслідок з ознаки збіжності Лейбніца дозволяє оцінити похибку, що допускається при відкиданні всіх членів ряду, починаючи з деякого.

6.4. Оцінка похибки при обчисленнях зі знакопереміжними рядами

Обчислення суми ряду S є, як правило, більш важкою задачею, ніж з’ясування питання про збіжність ряду. Часто точне значення суми залишається невідомим. Однак, завжди можна обчислити наближене значення суми ряду з бажаним ступенем точності. Дійсно, нехай задано ряд, що збігається:

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots \ .$$

Позначимо його суму S, тоді

$$S = u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots \ .$$

Нехай S_n – n-а часткова сума ряду. На основі співвідношення (4.19) (п. 4. 2),

$$r_n = S - S_n, \tag{6.15}$$

де r_n – n-й залишок ряду, причому за теоремою 7 (п. 4.2)

$$\lim_{n\to\infty} r_n = 0. \tag{6.16}$$

Рівність (6.15) показує: якщо замість точного значення суми S узяти S_n, то похибка, яку ми допустимо, буде дорівнювати r_n. З рівності (6.16) випливає, що завжди можна взяти n настільки великим, щоб похибка r_n була як завгодно малою. Таким чином, суму ряду S, що збігається, завжди можна обчислити з будь-якою точністю. Величина r_n указує похибку, яку ми допускаємо, замінюючи суму ряду сумою його перших n членів.

У практичних обчисленнях за допомогою рядів є істотною оцінка похибки r_n. Важливо знати, скільки необхідно взяти членів ряду, щоб обчислити суму ряду з потрібною точністю.

Для суми знакопереміжного ряду, що задовольняє умови ознаки Лейбніца, відома оцінка похибки r_n. На основі наслідку теореми 4

$$|r_n| \le u_{n+1},$$

де u_{n+1} – модуль першого відкинутого члену.

Приклад 1. Оцінити похибку, що виникає від заміни суми ряду

$$1 - \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^2} - \frac{4}{2^4} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{n}{2^n} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1} n}{2^n},$$

сумою його перших 15 членів.

Розв'язання. Даний ряд задовольняє умови ознаки Лейбніца

$$1)\ 1 > \frac{2}{2^2} > \frac{3}{2^2} > \frac{4}{2^4} > \ldots > \frac{n}{2^n} > \frac{n+1}{2^{n+1}} > \ldots,$$

оскільки $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{(n+1)\cdot 2^n}{2^{n+1}\cdot n} = \dfrac{1}{2}\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) < 1.$

$$2)\ \lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2^n} = 0.$$

Отже, даний ряд збігається. Оцінимо похибку r_n наближеної рівності $S \approx S_n$

$$|r_n| \le u_{n+1} = \frac{n+1}{2^{n+1}}.$$

При $n = 15$

$$|r_{15}| \le \frac{15+1}{2^{16}} \le \frac{16}{2^{16}} = \frac{1}{2^{12}} = \frac{1}{4096} < 0{,}00025.$$

Таким чином, замінюючи суму ряду S сумою S_{15}, допускаємо похибку, за модулем меншу 0,00025.

Приклад 2. Перевірити, що знакопереміжний ряд

$$\frac{1}{1^3+1} - \frac{1}{2^3+1} + \frac{1}{3^3+1} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n^3+1} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^3+1}$$

збігається, й обчислити наближене значення його суми з точністю до 0,01.

Розв'язання. Даний знакопереміжний ряд задовольняє умови ознаки Лейбніца

$$1)\ \frac{1}{2} > \frac{1}{2^3+1} > \frac{1}{3^3+1} > \ldots > \frac{1}{n^3+1} > \frac{1}{(n+1)^3+1} > \ldots;$$

$$2)\ \lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3+1} = 0.$$

Отже, ряд збігається.

Обчислимо модулі декількох послідовних членів даного ряду, поки не одержимо такий член ряду, абсолютне значення якого менше 0,01

$$u_1 = \frac{1}{2}; u_2 = \frac{1}{9}; u_3 = \frac{1}{28}; u_4 = \frac{1}{65}; u_5 = \frac{1}{126}.$$

Відповідно до властивості знакопереміжних рядів, що задовольняють умови ознаки Лейбніца,

$$|r_4| < u_5 < 0{,}01.$$

Отже, для обчислення суми ряду S з точністю до 0,01 досить узяти суму його перших чотирьох членів

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^3+1} \approx \frac{1}{2} - \frac{1}{9} + \frac{1}{28} - \frac{1}{65} \approx 0{,}41.$$

6.5. Умовно збіжні ряди та їх властивості

Відзначимо, що достатня ознака збіжності знакозмінного ряду (п. 6.1, теорема 1) не є необхідною ознакою, оскільки існують знакозмінні ряди, які збігаються, а ряди, складені з абсолютних величин їх членів, є розбіжними.

Приклад 1. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$, відповідно до ознаки Лейбніца, є збіжним (п. 6.3, приклад 1). Однак, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$,складений з абсолютних величин його членів, є розбіжним (гармонічний ряд, розділ 2, приклад 3).

Означення 3. Знакозмінний ряд називається умовно збіжним, якщо він збігається, але не абсолютно.

Таким чином, усі ряди, що збігаються, можна розділити на абсолютно й умовно збіжні. Такий розподіл рядів є істотним, оскільки умовно збіжні ряди не мають деяких важливих властивостей, які мають абсолютно збіжні ряди. Наприклад, умовно збіжні ряди не мають переставної властивості. Суму будь-якого ряду, що збігається умовно, можна змінити належною перестановкою членів ряду (або навіть зовсім порушити збіжність ряду). Справедлива наступна теорема.

Теорема 5 (Риман). Нехай ряд $u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$ збігається умовно. Тоді, яке б не було число S, можна належною перестановкою членів даного ряду одержати ряд, що збігається:

$$v_1 + v_2 + \ldots + v_n + \ldots ,$$

сума якого буде дорівнювати S.

Зауваження. У випадку $S = +\infty$ або $S = -\infty$ відповідною перестановкою членів даного умовно збіжного ряду можна скласти ряд, що має суму, відповідно, $+\infty$ або $-\infty$.

Розглянемо тепер можливість розповсюдження теореми 3 про множення абсолютно збіжних рядів на випадок умовно збіжних рядів.

Відзначимо, що теорема 3 є справедливою і для більш загального випадку: якщо ряди (6.5) і (6.6) збігаються, причому хоча б один з них збігається абсолютно, то розклад (6.8) має місце.

Однак, якщо обидва ряди (6.5) і (6.6) збігаються лише умовно, у загальному випадку навіть не можна ручатися за збіжність їх добутку.

Таким чином, саме абсолютно збіжні ряди мають звичайні властивості скінченних сум. На умовно збіжні ряди ці властивості переносяться лише частково.

6.6. Дослідження рядів на абсолютну й умовну збіжність

У наведених нижче прикладах дослідимо збігається абсолютно, умовно або розбігається даний знакозмінний ряд.

Приклад 1. Дослідити збіжність ряду

$$1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n}}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Розв'язання. Даний ряд є знакопереміжним. Розглянемо ряд, складений з абсолютних величин його членів

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}+\ldots\ .$$

Це узагальнений гармонічний ряд (ряд Дирихле), що розбігається ($\alpha=\frac{1}{2}<1$). Таким чином, даний знакопереміжний ряд не є абсолютно збіжним.

Дослідимо збіжність даного знакопереміжного ряду за ознакою Лейбніца.

Оскільки

$$1>\frac{1}{\sqrt{2}}>\frac{1}{\sqrt{3}}>\ldots>\frac{1}{\sqrt{n}}>\ldots \text{ і } \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=0,$$

то умови ознаки виконані. Отже, даний ряд є збіжним.

Таким чином, даний знакопереміжний ряд збігається умовно.

Відповідь: ряд умовно збіжний.

Приклад 2. Дослідити збіжність ряду

$$\frac{1}{1\cdot 2}-\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}-\ldots+\left(-1\right)^{n-1}\frac{1}{n\left(n+1\right)}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^{n-1}}{n\left(n+1\right)}.$$

Розв'язання. Ряд, складений з абсолютних величин членів даного знакопереміжного ряду

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n\left(n+1\right)}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\left(n+1\right)},$$

збігається (п. 1.3, приклад 3). Отже, даний знакопереміжний ряд збігається абсолютно.

Відповідь: ряд абсолютно збіжний.

Приклад 3. Дослідити збіжність ряду

$$\sin\frac{\pi}{3}+\sin\frac{2\pi}{3}+\sin\pi+\ldots+\sin\frac{\pi n}{3}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi n}{3}.$$

Розв'язання. Для даного знакозмінного ряду не виконана необхідна ознака збіжності

$$\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\sin\frac{\pi n}{3}\ \text{не існує.}$$

Отже, даний ряд розбігається.

Відповідь: ряд розбіжний.

ЗАПИТАННЯ ДЛЯ САМОПЕРЕВІРКИ

1. Що називається числовим рядом? Що називається загальним членом ряду? Наведіть приклади.
2. Який ряд називається збіжним (розбіжним)? Наведіть приклади.
3. Дайте означення суми збіжного ряду.
4. Сформулюйте і доведіть необхідну ознаку збіжності ряду. Чи можна стверджувати, що ряд збігається, якщо його загальний член прямує до нуля?
5. У чому полягає найпростіша достатня ознака розбіжності ряду? Наведіть приклади.
6. Сформулюйте критерій Коші збіжності ряду. Яку теорему покладено в основу його доведення?
7. Які властивості скінченних сум справедливі для числових рядів? Сформулюйте відповідні теореми.
8. У якому випадку можна стверджувати, що довільна перестановка членів ряду не порушує його збіжності і не змінює суми? Сформулюйте відповідну теорему.
9. Сформулюйте і доведіть такі достатні ознаки збіжності рядів: перша і друга ознаки порівняння, ознака Даламбера, ознака Коші, інтегральна ознака Маклорена-Коші. Для яких рядів застосовуються ці ознаки?
10. У чому полягають переваги і недоліки ознак Даламбера, Коші й інтегральної ознаки Маклорена-Коші при практичному застосуванні?
11. Який ряд називається знакозмінним, знакопереміжним?
12. Який ряд називається абсолютно збіжним?
13. Сформулюйте і доведіть достатню ознаку збіжності знакозмінного ряду. Наведіть еквівалентне формулювання відповідної теореми.
14. Перелічіть відомі вам властивості абсолютно збіжних рядів.
15. Сформулюйте і доведіть достатню ознаку збіжності Лейбніца. Для якого ряду вона застосовна?
16. У чому полягає наслідок з теореми Лейбніца? Поясніть, як, користуючись цим наслідком, оцінити похибку, що допускається при наближеному обчисленні суми ряду.
17. Який ряд називається умовно збіжним? Наведіть приклади. Чому розподіл рядів на абсолютно й умовно збіжні ряди є істотним?

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Бермант А.Ф. Краткий курс математического анализа / А.Ф. Бермант, И.Г. Араманович.– М.: 11-е изд., стер. – СПб.: Лань, 2005. – 738 с.
2. Воробьев Н.Н. Теория рядов / Н.Н. Воробьев. – СПб.: Лань, 2002. – 408 с.
3. Герасимчук В.С. Вища математика. Повний курс у прикладах і задачах. Кратні, криволінійні та поверхневі інтеграли. Елементи теорії поля. Ряди. Прикладні задачі. / В.С. Герасимчук, Г.С. Васильченко, В.І. Кравцов. – К.: Книги України ЛТД, 2009. – 400 с.
4. Дубовик В.П. Вища математика: навч. посіб. для студ. вищих навч. закл. / В.П. Дубовик, І.І. Юрик. – 4-те видан. – К.: Ігнатекс – Україна, 2013. – 648 с.
5. Дюженкова Л.І. Вища математика. Приклади і задачі / Л.І. Дюженкова, О.Ю. Дюженкова, Г.О. Михалін. – К.: Академія, 2003. – 624 с.
6. Письменный Д. Конспект лекций по высшей математике. 2 часть. / Дмитрий Письменный. – 7-е изд. – М.: Айрис Пресс, 2011. – 256 с.
7. Подольский В.А. Сборник задач по математике / В.А. Подольский, А.М. Суходский, Е.С. Мироненко. – Изд. второе, перераб. и доп. – М.: Высшая школа, 1999. – 496 с.
8. Щипачев В.С. Высшая математика / В.С. Щипачев. – Под ред. акад. А.Н. Тихонова. – Изд. второе, стереот. – М.: Высшая школа, 1985. – 472 с.

ЗМІСТ

ДЛЯ НОТАТОК

Навчальне видання

ЯРХО Тетяна Олександрівна

ТЕОРІЯ ЧИСЛОВИХ РЯДІВ: СМИСЛОВИЙ, ДОКАЗОВИЙ, ПРАКТИЧНИЙ АСПЕКТИ

Навчально-методичний посібник

Відповідальний за випуск *І.І. Мороз*

В авторській редакції

Дизайн обкладинки *Д.Ю. Нерівня*

Комп'ютерна верстка *О.І. Веретільник*

План 2017. Поз. 30 (н.п.).
Підписано до друку 4.10.2017 р. Формат 60×84 1/16. Папір офсетний.
Гарнітура Times New Roman Cyr. Віддруковано на ризографі.
Ум. друк. арк. 3,5. Обл.-вид. арк. 3,9.
Зам. № 456/17. Тираж 50 прим. Ціна договірна.

ВИДАВНИЦТВО
Харківського національного автомобільно-дорожнього університету

Видавництво ХНАДУ, 61002, м. Харків – МСП, вул. Ярослава Мудрого, 25.
Тел. /факс: (057)700-38-64; 707-37-03, e-mail: rio@khadi.kharkov.ua

Свідоцтво Державного комітету інформаційної політики, телебачення та радіомовлення України про внесення суб'єкта видавничої справи до Державного реєстру видавців, виготівників і розповсюджувачів видавничої продукції, серія ДК № 897 від 17.04.2002 р.