Министерство образования и науки Украины

ХАРЬКОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ
АВТОМОБИЛЬНО-ДОРОЖНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Л. Д. НАЦИК

Е. И. ТАРАПОВА

А. Л. ВИШНЕВЕЦКИЙ

КУРС ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ ДЛЯ ИНОСТРАННЫХ СТУДЕНТОВ. МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Учебное пособие

Харьков
ХНАДУ
2016

УДК 51
ББК 22.11
Н 35

Рекомендовано до видання рішенням вченої ради
Харківського національного автомобільно-дорожнього університету

Рецензенты:

Батыгин Ю. В., заведующий кафедрой физики
Харьковского национального автомобильно-дорожного университета,
доктор физ.-мат. наук, профессор;

Кириченко И. К., заведующий кафедрой
информатики и компьютерных технологий
Украинской инженерно-педагогической академии,
доктор физ.-мат. наук, профессор;

Гандель Ю.В., профессор кафедры математической физики
и вычислительной математики ХНУ им. В.Н. Каразина,
заслуженный работник образования Украины, заслуженный професор ХНУ, доктор физ.-мат. наук, профессор;

Литвин О.Н., заведующий кафедрой высшей и прикладной математики
Украинской инженерно-педагогической академии,
доктор физ.-мат. наук, профессор

Н 35 Курс высшей математики для иностранных студентов. Математический анализ. Учебное пособие / Нацик Л. Д., Тарапова Е. И., Вишневецкий А. Л. – Х.: ХНАДУ, 2016. – 200 с. – Библиогр. в конце книги.

ISBN

Пособие содержит краткое изложение следующих разделов курса высшей математики: дифференциальное и интегральное исчисления, дифференциальные уравнения, ряды. Приведены примеры и типовые задачи по курсу. Предназначено для студентов на начальном этапе освоения курса высшей математики, в частности, иностранных студентов младших курсов.

Посібник містить стисле викладення таких розділів курсу вищої математики: диференціальне та інтегральне числення, диференціальні рівняння, ряди. Наведені приклади і типові задачі з курсу. Призначено для студентів на початковому етапі засвоєння курса вищої математики, зокрема, іноземних студентів молодших курсів.

УДК 51
ББК 22.11

ISBN

ПРЕДИСЛОВИЕ

Учебное пособие написано в соответствии с требованиями государственных стандартов к общему курсу высшей математики.

Учебное пособие предназначено для студентов на начальном этапе освоения курса высшей математики, в частности, для иностранных студентов младших курсов университетов, как правило, ещё не преодолевших языковой барьер при изучении курса высшей математики на русском языке. Известно, что указанное обстоятельство затрудняет написание излагаемого в аудитории материала, а также использование рекомендуемой учебной литературы, в связи с необходимостью восприятия больших объемов текстовой информации, содержащейся в определениях, утверждениях, доказательствах, пояснениях.

Оригинальная форма предлагаемого учебного пособия – форма опорного конспекта – позволила сделать изложение теоретического материала кратким, наглядным и доступным для понимания за счет использования схем, таблиц, алгоритмов (правил) решения типовых задач. В учебном пособии рассмотрено решение большого числа примеров, иллюстрирующих все основные теоретические положения.

Предполагается, что учебное пособие будет использовано студентами на начальном этапе освоения курса высшей математики. В дальнейшем рекомендован переход к изучению известной учебной литературы по курсу, содержащей все необходимые рассуждения и доказательства утверждений.

ЧАСТЬ I. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОГО И МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

§1. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

1.1. Комплексные числа в алгебраической форме

Определения

Символ $\boxed{Z = a + ib}$ называется *комплексным числом*, где i – *мнимая единица*, введенная равенством: $\boxed{i^2 = -1}$, числа a и b вещественны.

Число a называется *вещественной частью* комплексного числа Z: $\boxed{a = \operatorname{Re} Z}$, b – *мнимой частью* числа Z: $\boxed{b = Im\, Z}$.

Алгебраическая форма

комплексного числа

$$\boxed{Z = a + ib}$$

a – вещественная часть Z $(a = \operatorname{Re} Z)$

b – мнимая часть Z $(b = Im\, Z)$

$i^2 = -1$,

a, b – вещественны

$$\boxed{Z = a + ib} \qquad \boxed{\overline{Z} = a - ib}$$

Z и $\overline{Z}$ – *комплексно сопряженные числа*

Примеры

$Z = -3 - 2i$; $\quad a = \operatorname{Re} Z = -3$; $\quad b = \operatorname{Im} Z = -2$;

$\overline{Z} = -3 + 2i$; $\quad \operatorname{Re} \overline{Z} = -3$; $\quad \operatorname{Im} \overline{Z} = 2$.

1.2. Действия с комплексными числами в алгебраической форме

$$Z_1 = a_1 + ib_1$$
$$Z_2 = a_2 + ib_2$$

$\Rightarrow$

<table>
<tr><td colspan="2">1) сумма $Z_1 + Z_2 = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)$</td></tr>
<tr><td>2) произведение
$Z_1 \cdot Z_2 = (a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) =$
$= (a_1a_2 - b_1b_2) + i(a_1b_2 + b_1a_2)$
В частности, $Z \cdot \overline{Z} = a^2 + b^2$</td><td>раскрываем скобки с учетом того, что $i^2 = -1$</td></tr>
<tr><td colspan="2">3) частное
$\dfrac{Z_1}{Z_2} = \dfrac{Z_1 \cdot \overline{Z}_2}{Z_2 \cdot \overline{Z}_2} = \dfrac{(a_1a_2 + b_1b_2) + i(a_2b_1 - a_1b_2)}{a_2^2 + b_2^2}$</td></tr>
</table>

Примеры

$Z_1 = 5 - 3i; \quad Z_2 = -4 + 2i.$

1) $Z_1 + Z_2 = 5 - 3i + (-4 + 2i) = 5 - 4 + i(-3 + 2) = 1 - i$.

2) $Z_1 \cdot Z_2 = (5 - 3i)(-4 + 2i) = 5 \cdot (-4) - (-3)2 + i(5 \cdot 2 + (-3)(-4) =$

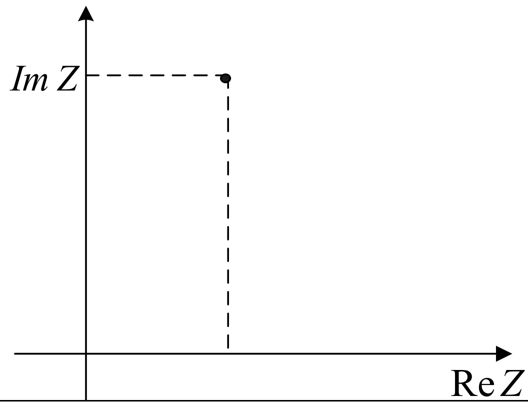
$= -20 + 6 + i(10 + 12) = -14 + 22i$.

3) $\dfrac{Z_1}{Z_2} = \dfrac{5 - 3i}{-4 + 2i} = \dfrac{(5 - 3i)(-4 - 2i)}{(-4 + 2i)(-4 - 2i)} = \dfrac{-20 - 6 + i(12 - 10)}{(-4)^2 + 2^2} =$

$= \dfrac{-26 + 2i}{20} = \dfrac{-13 + i}{10} = -\dfrac{13}{10} + \dfrac{1}{10}i.$

1.3. Изображение комплексного числа на комплексной плоскости. Модуль и аргумент комплексного числа

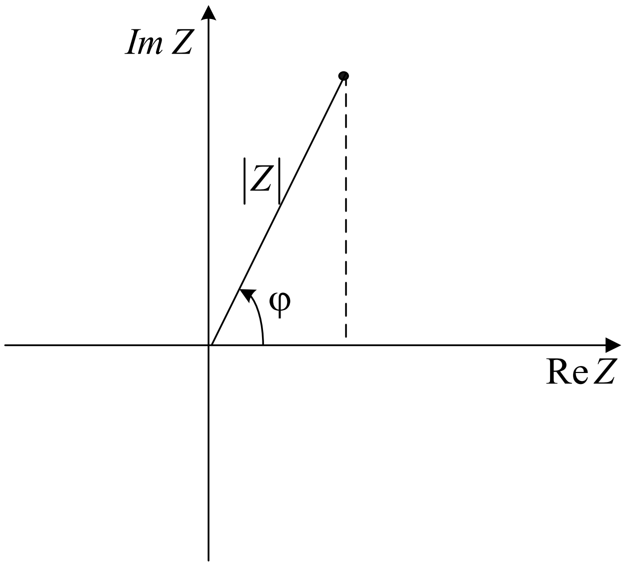
На *комплексной плоскости* (на оси абсцисс откладывается $\mathrm{Re}\,Z$, на оси ординат – $Im\,Z$) число $Z = a + ib$ изображается точкой М(a, b).



Модуль $|Z|$ комплексного числа Z – это расстояние от точки $M(a,\ b)$ до начала координат ($|Z| \geq 0$).

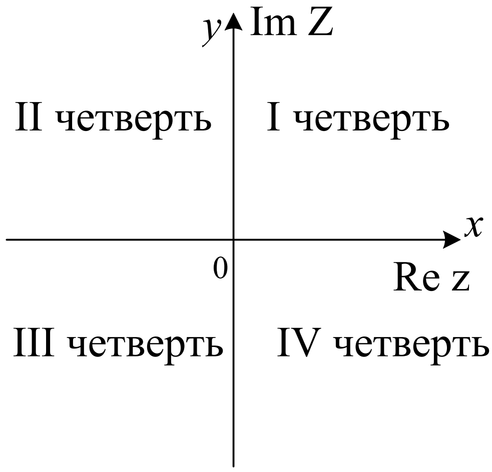
Аргумент $\arg Z = \varphi$ комплексного числа Z – это угол между положительным направлением оси абсцисс и отрезком *OM*.

($0 \leq \varphi < 2\pi$ или $-\pi \leq \varphi < \pi$)



Формулы для $|Z|$ и φ (из Δ *OMN*):

$$\boxed{a,b} \to \boxed{|Z|, \varphi - ?}$$

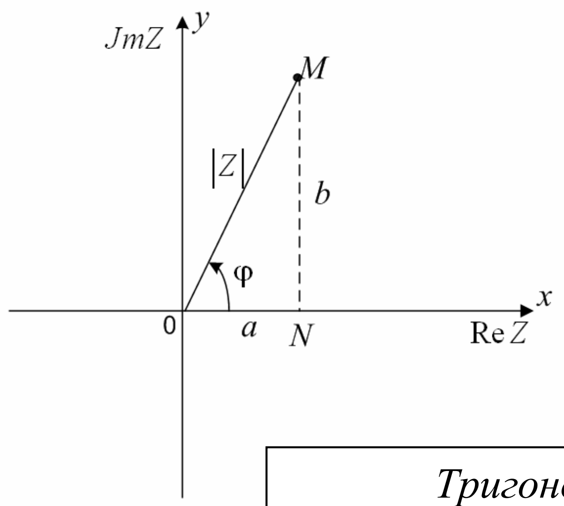


$$\boxed{|Z| = \sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$Z \in \text{I ÷., IV ÷.} \ \to \varphi = \operatorname{arctg}\frac{b}{a}$$

$$Z \in \text{II ÷., III ÷.} \ \to \varphi = \left(\operatorname{arctg}\frac{b}{a}\right) + \pi$$

1.4. Тригонометрическая и показательная формы комплексного числа



Алгебраическая

форма

$$\boxed{Z = a + ib}$$

$$\begin{cases} a = |Z|\cos\varphi \\ b = |Z|\sin\varphi \end{cases} \leftarrow \text{из } \Delta OMN$$

Тригонометрическая форма

комплексного числа

$$Z = |Z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

Формулы Эйлера

$$e^{\pm i\varphi} = \cos\varphi \pm i\sin\varphi$$

Показательная форма

комплексного числа

$$\boxed{Z = |Z| \cdot e^{i\varphi}}$$

Примеры

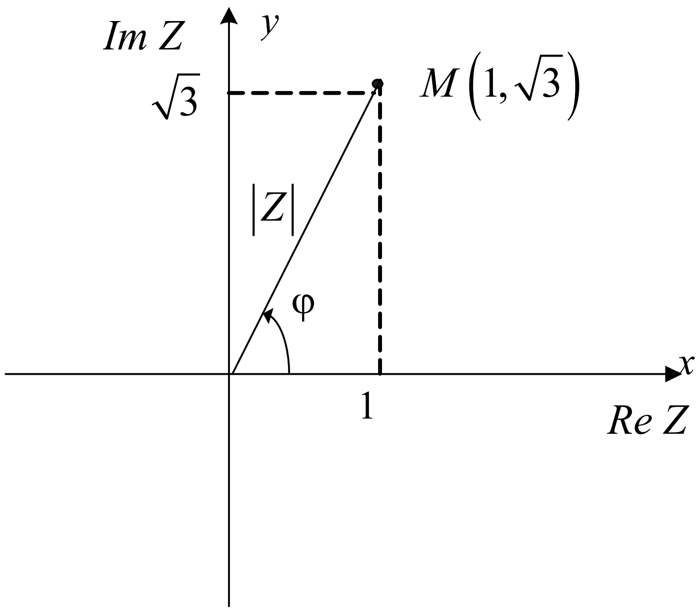
1) $Z = 1 + i\sqrt{3}$ – алгебраическая форма

$a = 1,\ b = \sqrt{3},\ |Z| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$

$$\varphi = \mathrm{arctg}\frac{\sqrt{3}}{1} = \frac{\pi}{3}$$

$Z = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$ – тригонометрическая форма

$Z = 2 \cdot e^{i\frac{\pi}{3}}$ – показательная форма.



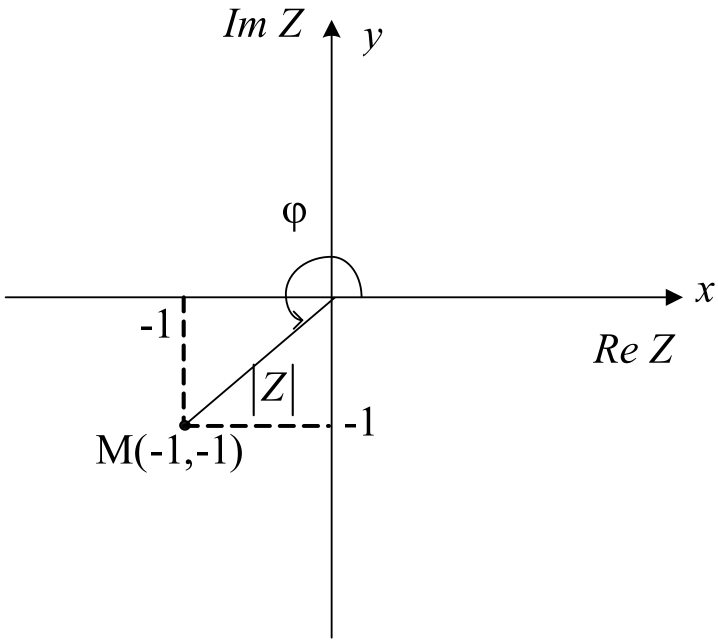
2) $Z = -1 - i$ – алгебраическая форма

$a = -1,\ b = -1,\ |Z| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$

$$\varphi = \operatorname{arctg}\left(\frac{-1}{-1}\right) + \pi = \frac{\pi}{4} + \pi = \frac{5}{4}\pi$$

$Z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5}{4}\pi\right)$ – тригонометрическая форма

$Z = \sqrt{2} \cdot e^{i\frac{5}{4}\pi}$ – показательная форма.



1.5. Действия над комплексными числами в тригонометрической и показательной формах

Действие \ Форма	Тригонометрическая	Показательная
$Z_1 \cdot Z_2$	$\lvert Z_1\rvert \cdot \lvert Z_2\rvert (\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2))$	$\lvert Z_1\rvert \cdot \lvert Z_2\rvert \cdot e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$
$\dfrac{Z_1}{Z_2}$	$\dfrac{\lvert Z_1\rvert}{\lvert Z_2\rvert}(\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2))$	$\dfrac{Z_1}{Z_2} e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}$
Z^n (n – целое число)	Формула Муавра $\lvert Z\rvert^n \cdot (\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$	Формула Муавра $\lvert Z\rvert^n \cdot e^{in\varphi}$

Примеры

$$Z_1 = 1 + i\sqrt{3} \qquad \left(|Z_1| = 2,\ \ \varphi_1 = \frac{\pi}{3}\right)$$

$$Z_2 = -1 - i \qquad \left(|Z_2| = \sqrt{2},\ \ \varphi_2 = \frac{5}{4}\pi\right)$$

$$Z_1 \cdot Z_2 = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{5}{4}\pi\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{5}{4}\pi\right)\right)=$$

$$=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{19}{12}\pi + i\sin\frac{19}{12}\pi\right) = 2\sqrt{2}e^{i\frac{19}{12}\pi}$$

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{2}{\sqrt{2}}\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{5}{4}\pi\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{5}{4}\pi\right)\right)=$$

$$=\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{11}{12}\pi\right)+i\sin\left(-\frac{11}{12}\pi\right)\right) = \sqrt{2}\,e^{-i\frac{11}{12}\pi}$$

$$Z_1^5 = 2^5\left(\cos 5\cdot\frac{\pi}{3} + i\sin 5\cdot\frac{\pi}{3}\right) = 32\left(\cos\frac{5}{3}\pi + i\sin\frac{5}{3}\pi\right) = 32e^{i\frac{5}{3}\pi}.$$

Контрольные вопросы к § 1

1. В какой форме удобнее складывать (умножать, делить, возводить в степень) комплексные числа?

2. Какой геометрический смысл имеют модуль и аргумент комплексного числа?

3. Может ли модуль (аргумент) комплексного числа быть равным нулю, отрицательным?

Упражнения к § 1

1. Найти сумму, произведение, частное следующих комплексных чисел:

а) $z_1 = 2 + i, \quad z_2 = 1 - 3i$;

б) $z_1 = -4 + i, \quad z_2 = 3 + 5i$;

в) $z_1 = 2i, \quad z_2 = 3 - i$.

Изобразить результаты на комплексной плоскости.

2. Записать в тригонометрической и показательной формах следующие комплексные числа:

а) $z = 1 + i$;

б) $z = 2 - \sqrt{2}i$;

в) $z = -2 + 3i$;

г) $z = -1 - i\sqrt{3}$.

Изобразить результаты на комплексной плоскости.

3. Найти $\overline{z_1} \cdot z_2$, $z_2^{\,3}$, $\dfrac{z_1}{\overline{z_2}}$, если

а) $z_1 = 3\sqrt{2}^{-i\frac{\pi}{7}}$, $\qquad z_2 = 4\left(\cos\dfrac{3}{5}\pi + i\sin\dfrac{3}{5}\pi\right)$;

б) $z_1 = 2$, $\qquad z_2 = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$;

в) $z_1 = e^{i\frac{\pi}{8}}$, $\qquad z_2 = \dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

§2. МНОГОЧЛЕНЫ

2.1. Разложение многочлена на множители

Определение *Многочленом степени n* ($n \ge 0$, n – целое число) от переменной x называется выражение вида: $\boxed{P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0}$
$a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0$ – *коэффициенты многочлена;* *n – степень многочлена*

Число α – корень многочлена $P_n(x)$	$\Longleftrightarrow$	$P_n(\alpha) = 0$

Разложение многочлена на множители	
$P_n(x) = a_n(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_n)$	$\leftarrow$ $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ – *корни* многочлена
$P_n(x) = a_n(x-\alpha_1)^{k_1}(x-\alpha_2)^{k_2}\ldots(x-\alpha_e)^{k_e}$, числа $\alpha_1, \ldots \alpha_e$ попарно различны, k_s – *кратность* корня α_s, $k_1 + k_2 + \ldots + k_e = n$.	

Пример

$$P_4(x) = 5x^4 + 5x^3 - 30x^2 = 5x^2(x^2 + x - 6) =$$
$$= 5x^2(x+3)(x-2)$$
$$(\alpha_1 = 0,\ k_1 = 2;\ \alpha_2 = -3,\ k_2 = 1;\ \alpha_3 = 2,\ k_3 = 1).$$

Контрольные вопросы к § 2

1. Может ли многочлен пятой степени иметь три различных корня (шесть различных корней)?

2. Может ли многочлен с вещественными коэффициентами иметь комплексные корни?

3. Может ли многочлен иметь один (три, пять) комплексных корней?

Упражнения к § 2

1. Разложить на множители следующие многочлены:

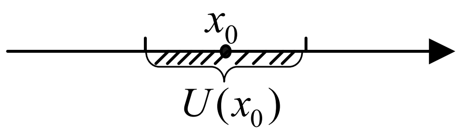
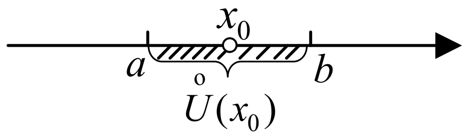
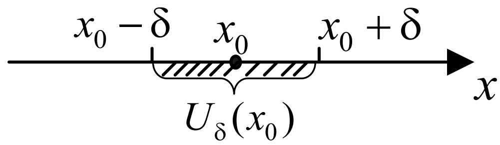
а) $P_3(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$;

б) $P_4(x) = x^4 - 2x^3 - 5x^2 + 6x$;

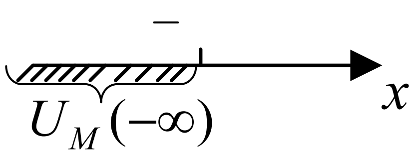
в) $P_5(x) = x^5 - 4x^4 - 6x^3 + 16x^2 + 29x + 12$.

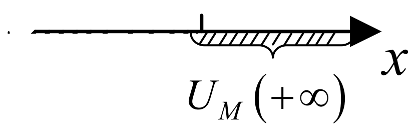
§3. ПРЕДЕЛ И НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ

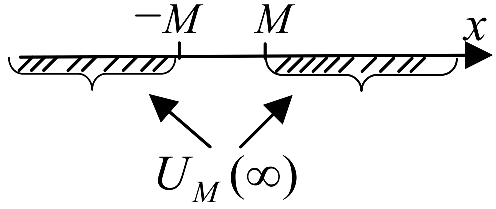
3.1. Окрестности точки $\tilde{o}_0, +\infty, -\infty, \infty$

Определения	
Окрестностью $U(\tilde{o}_0)$ *точки* $\tilde{o}_0$ называется любой интервал, содержащий эту точку.	
Проколотой окрестностью $\overset{\hat{\imath}}{U}(\tilde{o}_0)$ *точки* $\tilde{o}_0$ называется окрестность точки $\tilde{o}_0$, из которой исключена точка $\tilde{o}_0$.	
В любой окрестности точки $\tilde{o}_0$ содержится симметричная δ*–окрестность этой точки,* т. е. совокупность точек вида $(\tilde{o}_0-\delta, \tilde{o}_0+\delta)$, $\delta>0$.	

Определение	
Пусть $M>0$	Интервал (M; $+\infty$) называется M-окрестностью точки $+\infty$ (плюс бесконечности).
	Интервал ($-\infty$; $-M$) называется M-окрестностью точки $-\infty$ (минус бесконечности).
	Объединение интервалов $(-\infty;-M)\cup(M;+\infty)$ называется окрестностью ∞ (бесконечности).







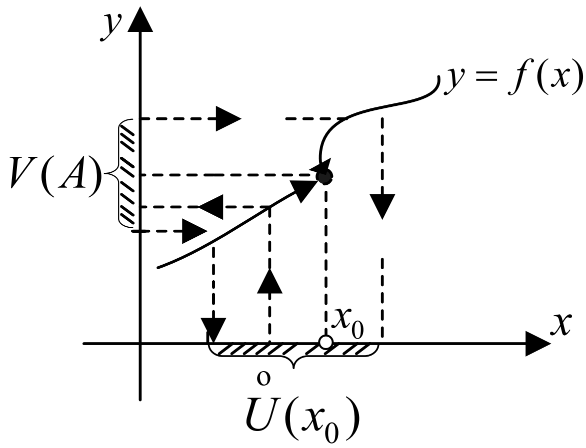
3.2. Предел функции в точке x_0

<table>
<tr>
<td>

Определение 1

Число A называется *пределом функции* $f(x)$ в точке x_0 (при x, стремящемся к x_0), если для любой окрестности $V(A)$ числа A найдется такая проколотая окрестность $\overset{o}{U}(x_0)$ точки x_0, что для всех $x \in \overset{o}{U}(x_0)$ значения функции $f(x) \in V(A)$.

</td>
<td>



$$\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) = A}$$

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{\begin{gathered}\forall V(A) \exists \overset{o}{U}(x_0) : \forall x \in \overset{o}{U}(x_0) \Rightarrow \\ \Rightarrow f(x) \in V(A)\end{gathered}}$$

Символы математической логики:

$\forall$ – для каждого, для любого;

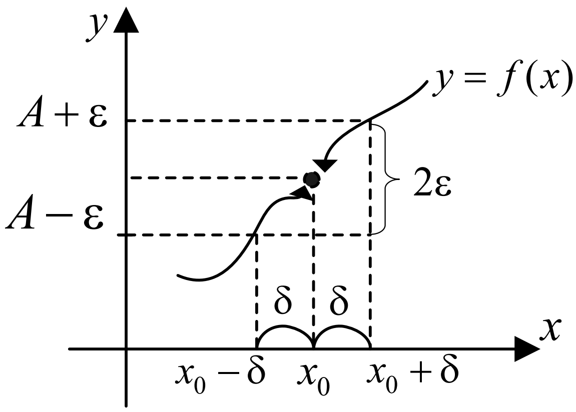
$\exists$ – существует, найдется.

</td>
</tr>
<tr>
<td>

Определение 2

Число A называется пределом функции $f(x)$ в точке x_0 (при x, стремящемся к x_0), если для каждого числа $\varepsilon > 0$, как бы мало оно ни было, можно указать такое число $\delta > 0$, что для всех x, отличных от x_0 и удовлетворяющих неравенству $|x - x_0| < \delta$, имеет место неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

</td>
<td>



$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A$$

</td>
</tr>
</table>

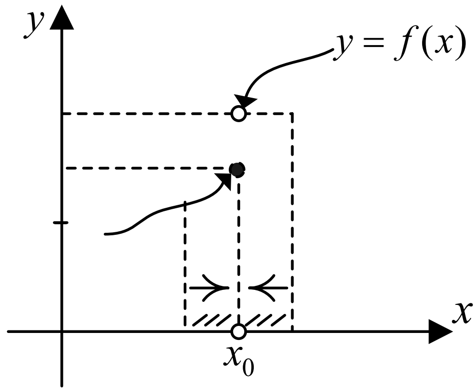
3.3. Односторонние пределы

$$\boxed{f\left(x_0+0\right)=\lim_{x\to x_0+0} f\left(x\right)=A}$$

(предел справа)

$$\boxed{f\left(x_0-0\right)=\lim_{x\to x_0+0} f\left(x\right)=B}$$

(предел слева)

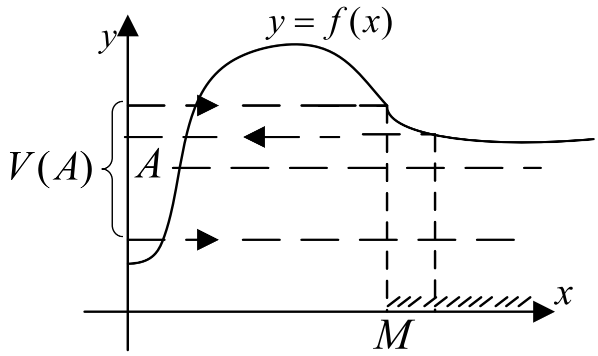


3.4. Конечный предел функции f(x) при x→+∞

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x)}$$

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{\forall V(A)\exists U_M(+\infty):\forall x\in U_M(+\infty)\Rightarrow f(x)\in V(A)}$$

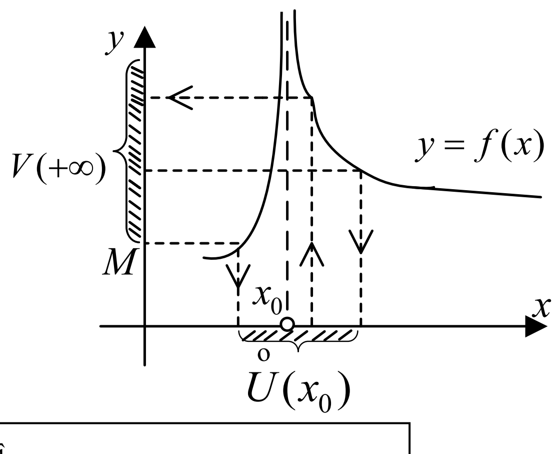


3.5. Бесконечный предел f(x) при x→ x_0

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} f(x)=+\infty}$$

$$\Updownarrow$$

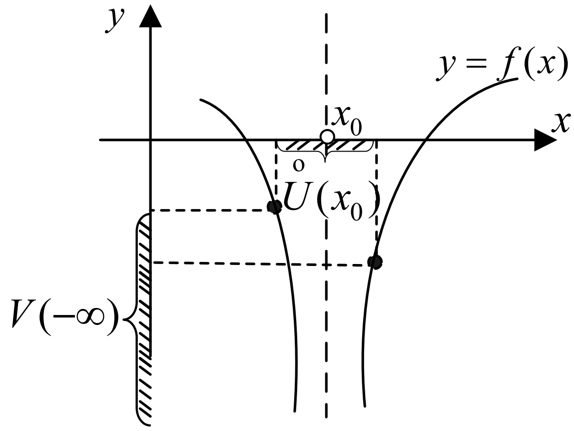
$$\boxed{\forall V(+\infty)\exists \overset{\text{î}}{U}(\tilde{o}_0):\forall x\in \overset{\text{î}}{U}(\tilde{o}_0)\Rightarrow f(x)\in V(+\infty)}$$



$$\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$$

$$\Updownarrow$$

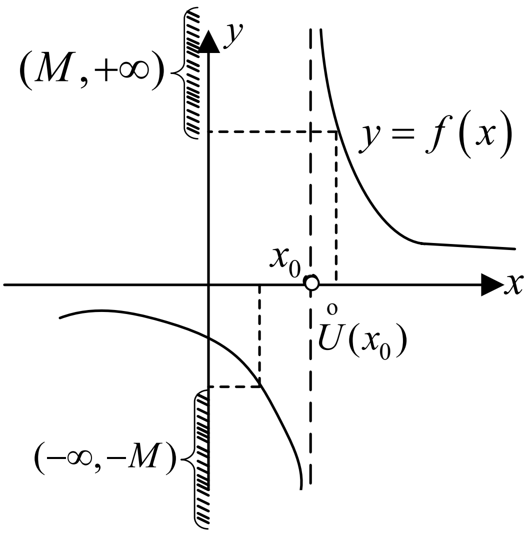
$$\forall V(-\infty)\exists \overset{\hat{\imath}}{U}(\tilde{o}_0) : \forall x \in \overset{\hat{\imath}}{U}(\tilde{o}_0) \Rightarrow f(x) \in V(-\infty)$$



$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty$$

$$\Updownarrow$$

$$\forall V(\infty)\exists \overset{o}{U}(x_0) : \forall x \in \overset{o}{U}(x_0) \Rightarrow f(x) \in V(\infty)$$



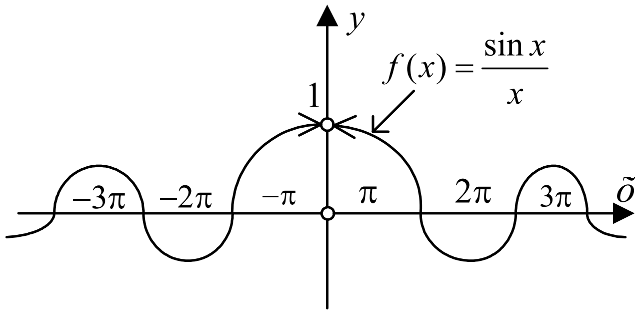
3.6. Теоремы о пределах

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$		1) $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x) + g(x)) = A + B$
$\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = B$	$\Rightarrow$	2) $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = A \cdot B$
A, B – конечны		3) $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{A}{B}$; $B \neq 0$

Утверждения теорем сохраняются
и при $x \to +\infty; -\infty; \infty$

3.7. Первый замечательный предел

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$
$\lim\limits_{\alpha(x)\to 0}\dfrac{\sin\alpha(x)}{\alpha(x)}=1$



Следствия

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{\dfrac{x^2}{2}}=1$	$\lim\limits_{\alpha(x)\to 0}\dfrac{1-\cos\alpha(x)}{\dfrac{\alpha(x)^2}{2}}=1$
$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}x}{x}=1$	$\lim\limits_{\alpha(x)\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}\alpha(x)}{\alpha(x)}=1$
$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg}x}{x}=1$	$\lim\limits_{\alpha(x)\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg}\alpha(x)}{\alpha(x)}=1$
$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}=1$	$\lim\limits_{\alpha(x)\to 0}\dfrac{\arcsin\alpha(x)}{\alpha(x)}=1$

3.8. Второй замечательный предел

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}=e$	$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$
$\lim\limits_{\alpha(x)\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{\alpha(x)}\right)^{\alpha(x)}=e$	$\lim\limits_{\alpha(x)\to 0}(1+\alpha(x))^{\frac{1}{\alpha(x)}}=e$

Следствия

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x\ln a}=1$	$\lim\limits_{\alpha(x)\to 0}\dfrac{a^{\alpha(x)}-1}{\alpha(x)\ln a}=1$
$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$	$\lim\limits_{\alpha(x)\to 0}\dfrac{e^{\alpha(x)}-1}{\alpha(x)}=1$
$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log_a(1+x)}{\dfrac{x}{\ln a}}=1$	$\lim\limits_{\alpha(x)\to 0}\dfrac{\log_a(1+\alpha(x))}{\dfrac{\alpha(x)}{\ln a}}=1$
$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$	$\lim\limits_{\alpha(x)\to 0}\dfrac{\ln(1+\alpha(x))}{\alpha(x)}=1$
$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^p-1}{px}=1$	$\lim\limits_{\alpha(x)\to 0}\dfrac{(1+\alpha(x))^p-1}{p\alpha(x)}=1$

$e\approx 2{,}71828...-$ основание натурального логарифма:

$$\log_e a=b \Leftrightarrow \ln a=b.$$

3.9. Бесконечно малые и бесконечно большие

Определение Функция $f(x)$ называется *бесконечно малой* при $x\to x_0$, если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$ (возможно, что $x\to+\infty; -\infty; \infty$)	$\boxed{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0}$ $\Updownarrow$ $f(x)$ *бесконечно малая* при $x\to x_0$ $f(x)=o(1),\ x\to x_0$
Определение Функция $f(x)$ называется *бесконечно большой* при $x\to x_0$, если $\lim\limits_{x\to x_0}\lvert f(x)\rvert=+\infty$ (возможно, что $x\to+\infty; -\infty; \infty$)	$\boxed{\lim\limits_{x\to x_0}\lvert f(x)\rvert=+\infty}$ $\Updownarrow$ $f(x)$ *бесконечно большая* при $x\to x_0$

Примеры

1) $f(x)=\sin x$ – бесконечно малая при $x\to 0$, т. к. $\lim\limits_{x\to 0}\sin x=0$

$$\left(\sin x=o(1),\ x\to 0\right).$$

2) $f(x)=\dfrac{1}{x}$ – бесконечно малая при $x\to\infty$, т. к. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$

$$\left(\frac{1}{x}=o(1),\ x\to\infty\right).$$

3) $f(x)=\dfrac{1}{x-4}$ –бесконечно большая при $x\to 4$, т. к. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{1}{x-4}=\infty$.

3.10. Эквивалентные бесконечно малые.

Таблица эквивалентных бесконечно малых.

Теорема о замене бесконечно малых эквивалентными

<table>
<tr><td>$f(x)$ – бесконечно малая при $x\to x_0$</td><td rowspan="2">$\Longrightarrow$</td><td>$\boxed{\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=c\neq 0}$ $\Longleftrightarrow$
$f(x)$ и $g(x)$ – бесконечно малые одного порядка при $x\to x_0$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$g(x)$ – бесконечно малая при $x\to x_0$</td><td>$\boxed{\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=1}$ $\Longleftrightarrow$
$f(x)$ и $g(x)$ – эквивалентные бесконечно малые при $x\to x_0$</td></tr>
<tr><td></td><td>Запись: $f(x)\sim g(x)$ при $x\to x_0$</td></tr>
</table>

Пример

$f(x)=\sin x$ и $g(x)=x$ – эквивалентные бесконечно малые при $x\to 0$, т. к. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$; $\sin x\sim x$ при $x\to 0$.

Таблица эквивалентных бесконечно малых

$\boxed{\text{При } \alpha(x)\to 0}$

1. $\sin\alpha(x) \sim \alpha(x)$	6. $a^{\alpha(x)}-1 \sim \alpha(x)\ln a$
2. $\arcsin\alpha(x) \sim \alpha(x)$	6′. $e^{\alpha(x)}-1 \sim \alpha(x)$
3. $\mathrm{tg}\,\alpha(x) \sim \alpha(x)$	7. $\log_a(1+\alpha(x)) \sim \dfrac{\alpha(x)}{\ln a}$
4. $\mathrm{arctg}\,\alpha(x) \sim \alpha(x)$	7′. $\ln(1+\alpha(x)) \sim \alpha(x)$
5. $1-\cos\alpha(x) \sim \dfrac{(\alpha(x))^2}{2}$	8. $(1+\alpha(x))^p-1 \sim p\alpha(x)$ (p – число)

Теорема о замене бесконечно малых эквивалентными

$f(x), g(x), f_1(x), g_1(x)$ – бесконечно малые (при $x\to x_0$) функции

$f(x) \sim f_1(x)$

$g(x) \sim g_1(x)$

при $x\to x_0$

$$\Longrightarrow \quad \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0}\frac{f_1(x)}{g_1(x)}$$

Предел отношения бесконечно малых функций не изменится, если каждую из них (или какую-нибудь одну) заменить эквивалентной.

Примеры

1) $$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-3x)}{\arcsin 5x} = \left|\begin{array}{l}\ln(1-3x)\sim -3x, x\to 0\\ \arcsin 5x \sim 5x, x\to 0\end{array}\right| = \lim_{x\to 0}\frac{-3x}{5x} = -\frac{3}{5}.$$

2) $$\lim_{x\to 3}\frac{e^{2(x-3)}-1}{\mathrm{tg}(x-3)} = \left|\begin{array}{l}e^{2(x-3)}-1\sim 2(x-3), x\to 3\\ tg(x-3) \sim x-3, x\to 3\end{array}\right| = \lim_{x\to 3}\frac{2(x-3)}{x-3} = 2.$$

3.11. Определение непрерывной функции

Определение 1

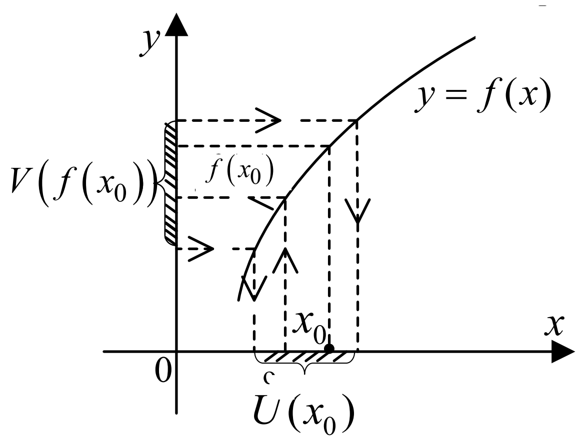
Функция $f(x)$ называется *непрерывной в точке* x_0, если предел этой функции в точке x_0 существует и равен значению функции в этой точке

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)}$$

Определение 2

$\boxed{f(x) \text{ – непрерывна в точке } x_0}$

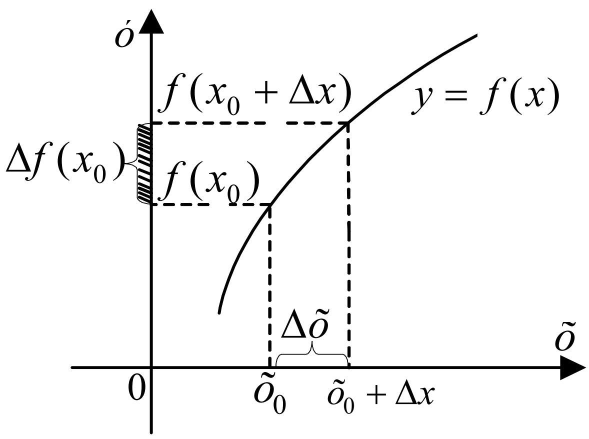
$$\boxed{\forall V(f(x_0))\exists U(x_0): \forall x \in U(x_0) \Rightarrow \Rightarrow f(x) \in V(f(x_0))}$$



Определение 3

Функция $f(x)$ называется *непрерывной в точке* x_0, если бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции

$$\boxed{\begin{array}{l}\Delta f(x_0) \to 0\\ \Delta x \to 0\end{array}}$$



(Δx – приращение аргумента,

$\Delta f\left(x_0\right) = f\left(x_0 + \Delta x\right) - f\left(x_0\right)$ – приращение функции $f(x)$).

Определение 4

Функция $f(x)$ называется *непрерывной на отрезке* $[a,b]$*,* если она непрерывна в каждой точке интервала (a,b) и

$$f(a) = \lim_{x\to a+0} f(x); \qquad f(b) = \lim_{x\to b-0} f(x).$$

$f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке x_0 $\Rightarrow$ $\left.\begin{array}{l} f(x)+g(x), \\ f(x)\cdot g(x), \\ \dfrac{f(x)}{g(x)}, (g(x_0)\neq 0) \end{array}\right\}$ непрерывны в точке x_0

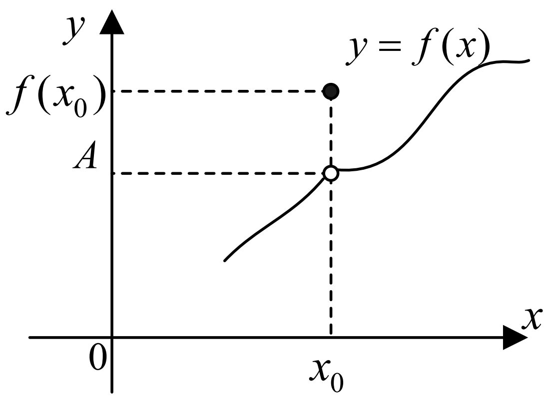
Элементарные функции непрерывны в их области определения

3.12. Разрывные функции. Классификация точек разрыва

Определение

Точка x_0 называется точкой *устранимого разрыва* функции $f(x)$, если

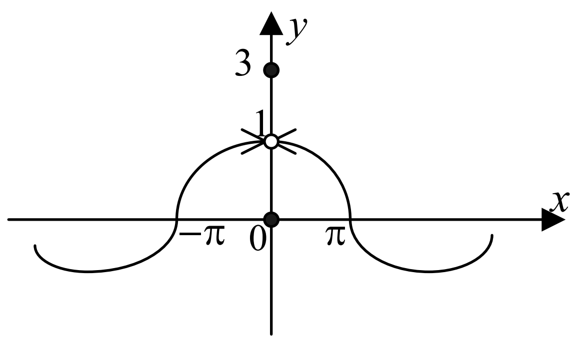
$$\boxed{\lim_{x\to x_0} f(x) = A \neq f(x_0)}$$



Пример

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, x\neq 0, \\ 3, \quad\quad x=0. \end{cases}$$

$x_0 = 0$ – точка устранимого разрыва



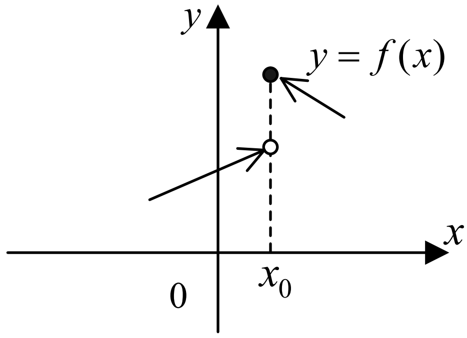
Разрыв I рода

Определение

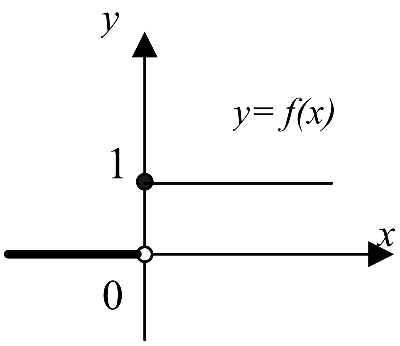
Точка x_0 называется *точкой разрыва I рода* функции $f(x)$, если в этой точке существуют конечные пределы справа и слева, но

$$\boxed{\lim_{x\to x_0+0} f(x) \neq \lim_{x\to x_0-0} f(x)}$$

$f(x_0+0)-f(x_0-0)\equiv \Delta f(x_0)$ – *скачок* функции в точке разрыва I рода.



Пример



$$f(x)=\begin{cases}1, x\geq 0,\\ 0, x<0\end{cases}$$

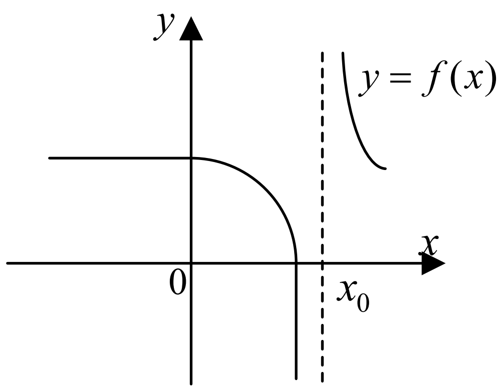
$x_0=0$ – точка разрыва I рода

$\Delta f(x_0)=1-0=1$

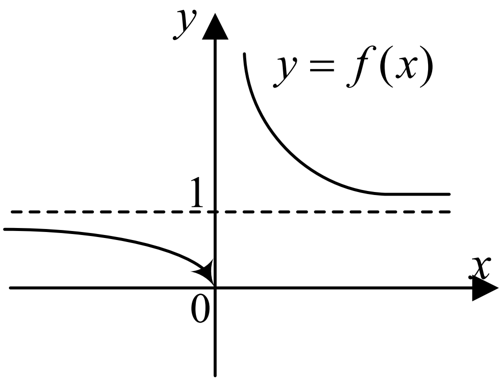
Разрыв II рода

Определение

Если хотя бы один из пределов $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$ не существует или бесконечен, то точка x_0 называется *точкой разрыва II рода* (функции $f(x)$).



Пример



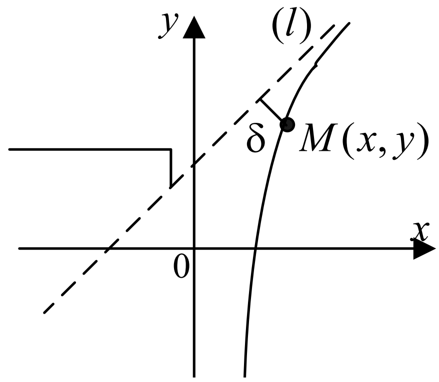
$f(x) = 2^{\frac{1}{x}}$

$x_0 = 0$ – точка разрыва II рода.

3.13. Асимптоты графика функции f(x)

Определение

Прямая (l) называется *асимптотой кривой*, если расстояние δ от переменной точки M этой кривой до (l) при удалении точки M в ∞ стремится к нулю.



Прямая $x = x_0$ является *вертикальной асимптотой* графика функции $f(x)$

$\Longleftrightarrow$

$|f(x)| \to +\infty$
$x \to x_0 + 0$ или
$x \to x_0 - 0$

Прямая $y = k \cdot x + b$ является *наклонной асимптотой* графика функции $f(x)$.

$\Longleftrightarrow$

$$k = \lim_{\substack{x \to +\infty \\ (x \to -\infty)}} \frac{f(x)}{x}$$

$$b = \lim_{\substack{x \to +\infty \\ (x \to -\infty)}} \left(f(x) - kx \right)$$