Міністерство освіти і науки, молоді та спорту України

ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ АВТОМОБІЛЬНО-ДОРОЖНІЙ УНІВЕРСИТЕТ

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

з вищої математики

«Збірник письмових завдань, зразки їх виконання»

Частина 1

для студентів денної та заочної форм навчання усіх спеціальностей

Затверджено методичною
радою університету,
протокол № 1 від 07.10.2015 р.

Харків
ХНАДУ
2016

Укладачі: Нестеренко В.О.,
Толстяк О.Д.,
Безугла В.С.

Кафедра вищої математики.

Збірник типових завдань, зразки їх виконання охоплюють теми: «Матриці, визначення та системи лінійних рівнянь»; «Елементи векторної алгебри», «Елементи аналітичної геометрії», Границі та неперервність», Диференціальні числення функції однієї змінної та його застосування».

Мета роботи – допомогти студентам у самостійній роботі та у виконанні типових завдань за вказаними темами.

Кожна з вказаних тем має таку структуру:

а) типове завдання, яке студент має виконати самостійно;

б) розв’язок «0» варіанта типового завдання;

в) завдання для поглибленої підготовки по темі.

Збірник рекомендований для студентів І курсів денної форми навчання.

Тема 1.
«МАТРИЦІ, ВИЗНАЧНИКИ ТА СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ»

Завдання 1–3.

Розв'язати систему лінійних рівнянь: 1 – за допомогою оберненої матриці; 2 – за правилом Крамера; 3 – за методом Гаусса.

Варіант 1

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 2 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = -1 \\ 4x_1 + x_2 + 6x_3 = 6 \end{cases}$$

Варіант 2

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 \\ 7x_1 - 7x_2 - x_3 = -2 \\ x_1 + 2x_2 - 4x_3 = -8 \end{cases}$$

Варіант 3

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 3 \\ 2x_1 + x_2 + 7x_3 = 1 \\ x_1 + 4x_2 = 6 \end{cases}$$

Варіант 4

$$\begin{cases} 5x_1 - 4x_3 = 0 \\ 6x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = -1 \end{cases}$$

Варіант 5

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = -2 \\ 4x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + 7x_2 - 5x_3 = 2 \end{cases}$$

Варіант 6

$$\begin{cases} 7x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ 5x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ 6x_1 - x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases}$$

Варіант 7

$$\begin{cases} 6x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 - x_3 = -3 \\ x_1 + x_2 = 1 \end{cases}$$

Варіант 8

$$\begin{cases} 4x_1 - x_2 + x_3 = -2 \\ 5x_1 + 2x_2 - x_3 = 4 \\ x_1 - 4x_2 + 5x_3 = -8 \end{cases}$$

Варіант 9

$$\begin{cases} 5x_1 - x_3 = -1 \\ x_1 + 8x_2 - 4x_3 = 12 \\ 7x_1 + x_2 = 2 \end{cases}$$

Варіант 10

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 - x_3 = -4 \\ 5x_1 - 2x_2 + x_3 = -2 \\ 6x_1 - x_2 + 2x_3 = 2 \end{cases}$$

Варіант 11

$$\begin{cases} 10x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ 10x_1 - 2x_2 + x_3 = -1 \\ x_1 - 8x_2 + x_3 = -13 \end{cases}$$

Варіант 12

$$\begin{cases} 7x_1 + x_2 - 5x_3 = 3 \\ 4x_1 - 4x_2 - 5x_3 = -12 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = -6 \end{cases}$$

Варіант 13

$$\begin{cases} 7x_1 - x_2 + 2x_3 = -1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 5 \\ 5x_1 - 4x_3 = -4 \end{cases}$$

Варіант 14

$$\begin{cases} 5x_1 - x_2 + 2x_3 = 1 \\ 5x_1 - 2x_2 + x_3 = -4 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -7 \end{cases}$$

Варіант 15

$$\begin{cases} 8x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ 7x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -3 \end{cases}$$

Варіант 16

$$\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 + x_3 = 4 \\ -x_1 + 3x_2 = -1 \\ 7x_1 - 4x_2 + x_3 = 7 \end{cases}$$

Варіант 17

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 - x_3 = 1 \\ x_1 + 4x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$$

Варіант 18

$$\begin{cases} 3x_1 - 4x_2 + x_3 = 5 \\ x_1 - 5x_2 - x_3 = -1 \\ 2x_1 + 5x_2 = 2 \end{cases}$$

Варіант 19

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 5 \\ x_1 - 7x_2 + 2x_3 = 7 \\ x_1 + 8x_2 - x_3 = -2 \end{cases}$$

Варіант 20

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 5x_3 = 1 \\ x_1 - 4x_2 + 7x_3 = -3 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 3 \end{cases}$$

Варіант 21

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 - x_3 = 4 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 1 \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

Варіант 22

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \\ x_1 - 3x_3 = -5 \\ x_1 + 3x_2 = 4 \end{cases}$$

Варіант 23

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = -2 \\ x_1 + 5x_3 = 16 \end{cases}$$

Варіант 24

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 5x_3 = -3 \\ 3x_1 - x_2 - 7x_3 = 1 \\ x_1 + 8x_2 - 10x_3 = 17 \end{cases}$$

Варіант 25

$$\begin{cases} 2x_1 - x_3 = 1 \\ 7x_1 - x_2 + 4x_3 = 9 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 = -1 \end{cases}$$

Варіант 26

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 10x_3 = 33 \\ 6x_1 + 2x_2 = 10 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 9 \end{cases}$$

Варіант 27

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 15x_3 = 52 \\ 7x_1 + 8x_2 + x_3 = 26 \\ 5x_1 + 4x_2 + x_3 = 16 \end{cases}$$

Варіант 28

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + 50x_3 = 11 \\ 10x_1 - 3x_2 - 10x_3 = 1 \\ 3x_1 - 8x_2 - 100x_3 = -21 \end{cases}$$

Варіант 29

$$\begin{cases} 10x_1 - 5x_2 + 5x_3 = 0 \\ 8x_1 - x_2 + 7x_3 = 12 \\ 7x_1 - x_2 + 4x_3 = 8 \end{cases}$$

Варіант 30

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 7x_3 = -7 \\ 3x_1 - x_2 - 4x_3 = -8 \\ 5x_1 - 6x_2 + x_3 = -11 \end{cases}$$

Завдання 4.

Визначити, чи сумісна система лінійних рівнянь.

Варіант 1

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -7 \\ x_2 - 4x_3 = 5 \\ 2x_1 - 11x_3 = 0 \end{cases}$$

Варіант 2

$$\begin{cases} x_1 - 4x_3 = -10 \\ 3x_1 + 2x_2 = 15 \\ -2x_1 - 2x_2 - 4x_3 = 100 \end{cases}$$

Варіант 5

$$\begin{cases} 6x_2 + 5x_3 = -18 \\ 3x_1 + x_2 + 7x_3 = 12 \\ 3x_1 + 7x_2 + 12x_3 = 11 \end{cases}$$

Варіант 6

$$\begin{cases} 2x_2 - x_2 + 4x_3 = 14 \\ 3x_2 + 2x_3 = 17 \\ 2x_1 + 14x_2 - 6x_3 = 21 \end{cases}$$

Варіант 7

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 1 \\ 3x_1 + x_3 = 10 \\ 16x_1 - 3x_2 + 9x_3 = 28 \end{cases}$$

Варіант 8

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_3 = 5 \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 9 \\ -x_1 - 2x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

Варіант 3

$$\begin{cases} 4x_1 - x_2 = 13 \\ 2x_2 + 3x_3 = 7 \\ 8x_1 + 3x_3 = 15 \end{cases}$$

Варіант 4

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 12 \\ x_2 + 4x_3 = 1 \\ 4x_1 - 9x_2 + 8x_3 = 4 \end{cases}$$

Варіант 11

$$\begin{cases} 5x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 6 \\ 2x_1 + 3x_3 = 5 \\ 23x_1 - 15x_2 + 17x_3 = 11 \end{cases}$$

Варіант 12

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 6 \\ 4x_1 + 3x_2 = 7 \\ 22x_1 + 15x_2 + 6x_3 = 13 \end{cases}$$

Варіант 13

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 7 \\ x_2 - 4x_3 = 5 \\ 2x_1 - 11x_3 = 0 \end{cases}$$

Варіант 14

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 = 13 \\ -4x_2 + x_3 = 18 \\ 3x_1 + 9x_2 + x_3 = 20 \end{cases}$$

Варіант 9

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 8 \\ 3x_2 + 2x_3 = 5 \\ x_1 + x_2 + 6x_3 = 8 \end{cases}$$

Варіант 10

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + x_3 = 8 \\ 4x_1 + 7x_2 = 11 \\ 12x_1 + 20x_2 + 11x_3 = 45 \end{cases}$$

Варіант 17

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 = 18 \\ 5x_1 + 6x_2 + x_3 = 19 \\ 3x_1 - x_3 = 38 \end{cases}$$

Варіант 18

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 + x_3 = 9 \\ 2x_1 + 3x_3 = 10 \\ 17x_1 + 9x_2 - 6x_3 = 10 \end{cases}$$

Варіант 19

$$\begin{cases} 24x_1 + 12x_2 + 3x_3 = 1 \\ 4x_1 + 3x_3 = 16 \\ 5x_1 + 3x_2 = 0 \end{cases}$$

Варіант 20

$$\begin{cases} 8x_1 + 3x_2 + 7x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 7 \\ 9x_1 + 4x_2 + 10x_3 = 4 \end{cases}$$

Варіант 15

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 8 \\ 3x_1 + 4x_3 = 9 \\ 4x_2 + x_3 = 17 \end{cases}$$

Варіант 16

$$\begin{cases} 5x_1 - 3x_2 + x_3 = -20 \\ 4x_2 + 7x_3 = 10 \\ 5x_1 - 11x_2 + 15x_3 = 50 \end{cases}$$

Варіант 23

$$\begin{cases} x_1 + 7x_2 + x_3 = 5 \\ 3x_1 + x_2 = 8 \\ 7x_1 + 11x_2 + x_3 = 9 \end{cases}$$

Варіант 24

$$\begin{cases} 2x_1 + 6x_2 + x_3 = 1 \\ 3x_1 + 8x_2 + 4x_3 = 0 \\ 17x_1 + 52x_2 + 6x_3 = 9 \end{cases}$$

Варіант 25

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + x_3 = 7 \\ 2x_1 + x_3 = 8 \\ x_1 + 5x_2 = 15 \end{cases}$$

Варіант 26

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 - 5x_3 = 9 \\ x_1 + 2x_2 = 0 \\ 15x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 6 \end{cases}$$

Варіант 21

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + x_3 = 8 \\ 3x_1 + 2x_3 = 5 \\ -x_1 + 5x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

Варіант 27

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 + 7x_3 = 8 \\ 2x_1 + 4x_2 + 9x_3 = 6 \\ 13x_1 + 5x_2 + 12x_3 = 7 \end{cases}$$

Варіант 22

$$\begin{cases} 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 1 \\ 7x_1 + 3x_2 = 9 \\ 75x_1 + 34x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$$

Варіант 28

$$\begin{cases} 8x_1 + 2x_2 + x_3 = 34 \\ 5x_1 + 3x_2 = 0 \\ 13x_1 + 5x_2 + x_3 = 67 \end{cases}$$

Варіант 29

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 8 \\ 3x_1 + 2x_2 = 6 \\ 5x_1 + x_2 - x_3 = 4 \end{cases}$$

Варіант 30

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + x_3 = 8 \\ 4x_1 + 2x_3 = 9 \\ 23x_1 + 5x_2 + 11x_3 = 14 \end{cases}$$

Завдання 5.

Розв’язати систему лінійних рівнянь методом Гаусса.

Варіант 1

$$\begin{cases} x_1 + 15x_2 + 14x_3 = 12 \\ 7x_1 + x_2 - 8x_3 = 2 \\ 8x_1 + 16x_2 + 6x_3 = 14 \end{cases}$$

Варіант 6

$$\begin{cases} 14x_1 - 11x_2 - 5x_3 = 9 \\ 14x_2 - 7x_3 = 3 \\ 14x_1 + 3x_2 - 12x_3 = 12 \end{cases}$$

Варіант 2

$$\begin{cases} 3x_1 + 7x_2 + 4x_3 = 1 \\ 8x_1 - 15x_2 = 11 \\ -5x_1 + 22x_2 + 4x_3 = -10 \end{cases}$$

Варіант 7

$$\begin{cases} 3x_1 - 10x_2 + 12x_3 = 0 \\ 11x_1 + 4x_2 + 19x_3 = 4 \\ 17x_1 - 16x_2 + 43x_3 = 4 \end{cases}$$

Варіант 3

$$\begin{cases} 15x_1 - 9x_2 + 10x_3 = 14 \\ 12x_2 + 4x_3 = 0 \\ 15x_1 + 15x_2 + 18x_3 = 14 \end{cases}$$

Варіант 4

$$\begin{cases} 2x_1 - 17x_2 + 5x_3 = 3 \\ 10x_1 - 15x_3 = 6 \\ 22x_1 - 17x_2 - 25x_3 = 15 \end{cases}$$

Варіант 5

$$\begin{cases} 9x_1 + 3x_2 - 10x_3 = 2 \\ 16x_1 - 18x_3 = 13 \\ -7x_1 + 3x_2 + 8x_3 = -11 \end{cases}$$

Варіант 11

$$\begin{cases} 5x_1 - 13x_2 + 2x_3 = 8 \\ 16x_1 + 14x_3 = 9 \\ 21x_1 - 13x_2 + 16x_3 = 17 \end{cases}$$

Варіант 12

$$\begin{cases} 13x_1 + 11x_2 + 7x_3 = 10 \\ 5x_1 - 6x_2 + 2x_3 = 7 \\ 8x_1 + 17x_2 + 5x_3 = 3 \end{cases}$$

Варіант 13

$$\begin{cases} 12x_1 + 14x_2 + 3x_3 = 6 \\ 7x_1 + 13x_2 + 7x_3 = 21 \\ 53x_1 + 57x_2 + 8x_3 = 9 \end{cases}$$

Варіант 8

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \\ 2x_1 + 12x_2 - 9x_3 = 4 \\ 10x_1 - 6x_2 + 12x_3 = 11 \end{cases}$$

Варіант 9

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 8x_3 = 10 \\ 6x_1 - 5x_2 - 11x_3 = 8 \\ -5x_1 + 6x_2 + 19x_3 = 2 \end{cases}$$

Варіант 10

$$\begin{cases} 6x_1 - 9x_2 - x_3 = 5 \\ 4x_1 + 6x_3 = 7 \\ 10x_1 - 9x_2 + 5x_3 = 12 \end{cases}$$

Варіант 17

$$\begin{cases} 10x_1 + 9x_2 - 13x_3 = 8 \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 3 \\ 7x_1 + 11x_2 - 17x_3 = 5 \end{cases}$$

Варіант 18

$$\begin{cases} 25x_1 + 3x_2 - 7x_3 = 18 \\ 7x_1 - 4x_3 = 9 \\ 18x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 9 \end{cases}$$

Варіант 19

$$\begin{cases} 5x_1 + 9x_2 - 4x_3 = 3 \\ 7x_1 - 10x_2 + 8x_3 = 12 \\ 12x_1 - x_2 + 4x_3 = 15 \end{cases}$$

Варіант 14

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 10 \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 11 \\ 7x_1 + 2x_2 + 10x_3 = 21 \end{cases}$$

Варіант 15

$$\begin{cases} 5x_1 - 4x_2 + 15x_3 = 14 \\ x_1 + 2x_2 - 11x_3 = 8 \\ 4x_1 - 6x_2 + 26x_3 = 6 \end{cases}$$

Варіант 16

$$\begin{cases} 8x_1 + 7x_2 + 4x_3 = 0 \\ 5x_1 - 3x_2 = 6 \\ 13x_1 + 7x_2 + x_3 = 6 \end{cases}$$

Варіант 23

$$\begin{cases} 7x_1 - 10x_2 - 11x_3 = 11 \\ -11x_1 + 10x_3 = 12 \\ -4x_1 - 10x_2 - x_3 = 23 \end{cases}$$

Варіант 24

$$\begin{cases} 5x_2 + 11x_3 = 8 \\ 8x_1 + 9x_2 - 8x_3 = 6 \\ -8x_1 - 14x_2 + 19x_3 = 2 \end{cases}$$

Варіант 25

$$\begin{cases} -18x_1 - 5x_2 + 7x_3 = 11 \\ -8x_1 - 4x_2 + 8x_3 = 15 \\ -26x_1 - 9x_2 + 15x_3 = 26 \end{cases}$$

Варіант 26

$$\begin{cases} 7x_1 - 12x_3 = 4 \\ 9x_1 + 12x_2 - 6x_3 = 11 \\ 16x_1 + 12x_2 - 18x_3 = 15 \end{cases}$$

Варіант 20

$$\begin{cases} 8x_1 + 8x_3 = 5 \\ 5x_1 - 9x_2 - 5x_3 = 7 \\ 13x_1 - 9x_2 + 3x_3 = 12 \end{cases}$$

Варіант 21

$$\begin{cases} 7x_1 - 10x_2 - 11x_3 = 11 \\ -11x_1 + 10x_3 = 12 \\ -4x_1 - 10x_2 - x_3 = 23 \end{cases}$$

Варіант 22

$$\begin{cases} 11x_1 + 7x_2 + 10x_3 = 7 \\ 7x_1 - 6x_2 + 6x_3 = 6 \\ 4x_1 + 13x_2 + 4x_3 = 1 \end{cases}$$

Варіант 27

$$\begin{cases} 8x_1 + 2x_2 + 17x_3 = 30 \\ 3x_1 - 4x_2 + 19x_3 = 25 \\ 5x_1 + 6x_2 - 2x_3 = 5 \end{cases}$$

Варіант 28

$$\begin{cases} -18x_1 + 5x_3 = 6 \\ 7x_1 + 8x_2 - 7x_3 = 0 \\ 7x_1 - 10x_2 - 2x_3 = 6 \end{cases}$$

Варіант 29

$$\begin{cases} 9x_1 - 9x_2 - 9x_3 = 11 \\ -9x_1 - 4x_2 - 6x_3 = 0 \\ 18x_1 - 5x_2 - 3x_3 = 11 \end{cases}$$

Варіант 30

$$\begin{cases} 6x_1 - 6x_2 + 3x_3 = 10 \\ 8x_1 + 9x_2 + 8x_3 = 0 \\ 14x_1 + 3x_2 + 11x_3 = 3 \end{cases}$$

Варіант №0

Завдання 1–3.
Розв'язати систему лінійних рівнянь:
1) за допомогою оберненої матриці;
2) за правилом Крамера;
3) за методом Гаусса

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 5 \\ 3x_2 + x_3 = 9 \\ x_2 + 2x_3 = 8 \end{cases}$$

Завдання 4.
Визначити, чи сумісна система лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 1 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 4 \\ 5x_1 + 13x_2 + 2x_3 = 7 \end{cases}$$

Завдання 5.
Розв'язати систему лінійних рівнянь методом Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 + 15x_2 + 14x_3 = 12 \\ 7x_1 + x_2 - 8x_3 = 2 \\ 8x_1 + 16x_2 + 6x_3 = 14 \end{cases}$$

Розв'язання «0» варіанта

Завдання 1.

Розв'язати систему лінійних рівнянь за допомогою оберненої матриці:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 = 5 \\ 3x_2 + x_3 = 9 \\ x_2 + 2x_3 = 8 \end{cases}$$

Цій системі відповідають три матриці

Матриця коефіцієнтів	Матриця стовпець вільних членів	Матриця стовпець невідомих
$A=\begin{pmatrix}1&2&0\\0&3&1\\0&1&2\end{pmatrix};$	$B=\begin{pmatrix}5\\9\\8\end{pmatrix};$	$X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}.$

Матрицю невідомих шукаємо за формулою

$$X = A^{-1}\cdot B,$$

де обернена матриця

$$A^{-1}=\frac{1}{\Delta}\cdot(A_{\text{а,д}})^T$$

де Δ – головний визначник системи; A^{-1} – існує, якщо $\Delta\neq 0$; $A_{\text{а,д}}$ – матриця алгебраїчних доповнень, $(A_{\text{а,д}})^T$ – транспонована до $A_{\text{а,д}}$)

$$\Delta=\begin{vmatrix}1&2&0\\0&3&1\\0&1&2\end{vmatrix}=1\begin{vmatrix}3&1\\1&2\end{vmatrix}-2\begin{vmatrix}0&1\\0&2\end{vmatrix}+0\begin{vmatrix}0&3\\0&1\end{vmatrix}=6-14=5\neq 0\Rightarrow$$

$\Rightarrow$ цей метод можна використовувати.

$$A_{\text{а,д}}=\begin{pmatrix}A_{11}&A_{12}&A_{13}\\A_{21}&A_{22}&A_{23}\\A_{31}&A_{32}&A_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}+\begin{vmatrix}3&1\\1&2\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}0&1\\0&2\end{vmatrix}&+\begin{vmatrix}0&3\\0&1\end{vmatrix}\\-\begin{vmatrix}2&0\\1&2\end{vmatrix}&+\begin{vmatrix}1&0\\0&2\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}1&2\\0&1\end{vmatrix}\\+\begin{vmatrix}2&0\\3&1\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}1&0\\0&1\end{vmatrix}&+\begin{vmatrix}1&2\\0&3\end{vmatrix}\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}5&0&0\\-4&2&-1\\2&-1&3\end{pmatrix}=(A_{\text{а,д}})^T=\begin{pmatrix}5&-4&2\\0&2&-1\\0&-1&3\end{pmatrix};$$

$$A^{-1} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix};$$

$$X = A^{-1} \cdot B = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ 8 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 25 - 36 + 16 \\ 0 + 18 - 8 \\ 0 - 9 + 24 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Відповідь: система сумісна і має єдиний зв'язок: $x_1 = 1$; $x_2 = 2$; $x_3 = 3$.

Перевірка: $\begin{cases} 1 + 2 \cdot 2 = 5 \\ 3 \cdot 2 + 3 = 9 \\ 2 + 2 \cdot 3 = 8 \end{cases}$

Завдання 2.

Розв'язати систему лінійних рівнянь за формулами Крамера:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 5 \\ 3x_2 + x_3 = 9 \\ x_2 + 2x_3 = 8 \end{cases}$$

Формули Крамера:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}; \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}; \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}; \quad (\Delta \neq 0).$$

Головний визначник системи:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 5 \neq 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ метод Крамера можна використовувати.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 9 & 3 & 1 \\ 8 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 5\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 9 & 1 \\ 8 & 2 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 9 & 3 \\ 8 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 5(6-1) - 2(18-8) = 25 - 20 = 5,$$

Δ_2 та Δ_3 розк4ладемо по елементах I стовпчика:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 0 & 9 & 1 \\ 0 & 8 & 2 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 9 & 1 \\ 8 & 2 \end{vmatrix} = (18-8) = 10,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 8 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 3 & 9 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} = 24 - 9 = 15.$$

Відповідь: система сумісна і має єдиний розв'язок: $x_1 = \dfrac{5}{5} = 1;$ $x_2 = \dfrac{10}{5} = 2;$ $x_3 = \dfrac{15}{5} = 3.$

Завдання 3.

Розв'язати систему рівнянь методом Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 5 \\ 3x_2 + x_3 = 9 \\ x_2 + 2x_3 = 8 \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

Складемо розширену матрицю $\overline{A}$ і за допомогою елементарних перетворень послідовно виключимо невідомі:

$$\overline{A}=(A|B)=\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&0&5\\0&1&2&8\\0&3&1&9\end{array}\right):\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&0&5\\0&1&2&8\\0&3&1&9\end{array}\right)\cdot(-3):$$

$$:\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&0&5\\0&1&2&8\\0&0&-5&-15\end{array}\right)\Leftrightarrow\begin{cases}-5x_3=-15\\x_2+2x_3=8\\x_1+2x_2=5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_3=3\\x_2=8-2x_3=8-6=2\\x_1=5-x_2=5-4=1\end{cases}$$

Відповідь: $x_1=1;\quad x_2=2;\quad x_3=3.$

Завдання 4.

Визначити, чи сумісна система лінійних рівнянь:

$$\begin{cases}x_1+3x_2-4x_3=1\\2x_1+5x_2+3x_3=4\\5x_1+13x_2+2x_3=7\end{cases}$$

Використовуємо метод Гаусса:

$$\overline{A}=(A|B)=\left(\begin{array}{ccc|c}1&3&-4&1\\2&5&3&4\\5&13&2&7\end{array}\right)^{\cdot(-2)\,\Big|^{\cdot(-5)}}:\left(\begin{array}{ccc|c}1&3&4&1\\0&-1&11&2\\0&-2&22&2\end{array}\right)_{:2}:$$

$$:\left(\begin{array}{ccc|c}1&3&-4&1\\0&-1&11&2\\0&-1&11&1\end{array}\right)\cdot(-1):\left(\begin{array}{ccc|c}1&3&-4&1\\0&-1&11&2\\0&0&0&-1\end{array}\right)\Leftrightarrow\begin{cases}x_1+3x_2-4x_3=1\\-x_2+11x_3=2\\0=-1\end{cases}$$

Відповідь: $0\neq-1\Rightarrow$ система несумісна (розв'язків нема).

Завдання 5.

Розв'язати систему лінійних рівнянь методом Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 + 15x_2 + 14x_3 = 12 \\ 7x_1 + x_2 - 8x_3 = 2 \\ 8x_1 + 16x_2 + 6x_3 = 14 \end{cases}$$

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 15 & 14 & 12 \\ 7 & 1 & -8 & 2 \\ 8 & 16 & 6 & 14 \end{array}\right)_{:2} : \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 15 & 14 & 12 \\ 7 & 1 & -8 & 2 \\ 4 & 8 & 3 & 7 \end{array}\right)^{\cdot(-7)\,\Big|\,\cdot(-4)} :$$

$$: \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 15 & 14 & 12 \\ 0 & -104 & -106 & -82 \\ 0 & -52 & -53 & -41 \end{array}\right)\begin{array}{l} :(-2) \\ \cdot(-1) \end{array} : \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 15 & 14 & 12 \\ 0 & 52 & 53 & 41 \\ 0 & 52 & 53 & 41 \end{array}\right) \cdot (-1) :$$

$$: \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 15 & 14 & 12 \\ 0 & 52 & 53 & 41 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} 52x_2 + 53x_3 = 41 \\ x_1 + 15x_2 + 14x_3 = 12 \end{cases}$$

Ми одержали систему двох рівнянь з трьома невідомими. Зрозуміло, що єдиного розв'язку немає, є зв'язок між невідомими.

Нехай

$$x_3 = C \Rightarrow x_2 = \frac{1}{52}(41 - 53C);$$

$$x_1 = 12 - \frac{15}{52}(41 - 53C) - 14C = \frac{1}{52}(9 - 67C),$$

де C – будь-яке число.

Відповідь: система сумісна і має нескінчену кількість розв'язків:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{52}(9 - 67C) \\ x_2 = \dfrac{1}{52}(41 - 53C) \\ x_3 = C \end{cases}$$

Завдання для поглибленої підготовки

Варіант 1

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 5 \\ 2x_1 - x_3 + 2x_4 = -3 \\ 7x_1 + 7x_2 - 4x_3 + x_4 = 14 \end{cases}$$

Варіант 2

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 1 \\ 2x_1 + 4x_3 + x_4 = 5 \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 5x_4 = 7 \\ 29x_1 + 17x_2 + 30x_3 + 36x_4 = 92 \end{cases}$$

Варіант 3

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 7 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 1 \\ 3x_1 - x_2 = 7 \\ x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 = 8 \end{cases}$$

Варіант 7

$$\begin{cases} 4x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 7 \\ x_1 + 4x_2 + x_4 = 6 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 3 \\ 4x_1 - 6x_2 + 3x_3 - 3x_4 = -2 \end{cases}$$

Варіант 8

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \\ 2x_2 + x_3 + x_4 = 5 \\ 7x_1 - x_2 + 2x_4 = 6 \\ 9x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 16 \end{cases}$$

Варіант 4

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 7x_3 + 2x_4 = 8 \\ 2x_1 - x_2 + x_4 = 10 \\ x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 8 \end{cases}$$

Варіант 5

$$\begin{cases} 6x_1 + x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 6 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_4 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 5 \\ x_1 + 4x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

Варіант 6

$$\begin{cases} 9x_1 - 9x_2 + 4x_3 - 5x_4 = 13 \\ x_1 - 4x_2 + x_3 = 0 \\ 5x_1 + x_2 - 4x_4 = 5 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 8 \end{cases}$$

Варіант 9

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 3 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 - 7x_4 = 8 \\ 3x_1 - 8x_2 + 6x_3 - 11x_4 = 11 \end{cases}$$

Варіант 10

$$\begin{cases} 9x_1 + x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 15 \\ 4x_1 - x_2 + 4x_4 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 8 \\ 3x_1 + 5x_3 - x_4 = 7 \end{cases}$$

Тема 2.
ЕЛЕМЕНТІ ВЕКТОРНОЇ АЛГЕБРИ

Частина I.

Завдання.

Дано точки $A_1(x_1, y_1, z_1)$; $A_2(x_2, y_2, z_2)$; $A_3(x_3, y_3, z_3)$; $A_4(x_4, y_4, z_4)$; $A_5(x_5, y_5, z_5)$.

Знайти:

1) вектор $\overline{A_1A_4}$ та його довжину;

2) проекцію вектора $\overline{A_4A_5}$ на $\overline{A_1A_2}$: $np_{\overline{A_1A_2}}\overline{A_4A_5}$;

3) кут $A_1A_2A_3$;

4) площу трикутника $A_1A_2A_3$: $S_{\Delta A_1A_2A_3}$;

5) об'єм піраміди $A_1A_2A_3A_4$: $V_{A_1A_2A_3A_4}$.

Варіанти обираємо за табл. 2.1.

Таблиця 2.1 – **Варіанти завдань**

Номери варіантів	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
1	2	3	4	5	6
1	(0,–1,0)	(1,1,1)	(2,–1,0)	(1,3,0)	(0,–1,2)
2	(1,1,1)	(2,–1,0)	(1,3,0)	(0,–1,2)	(0,–1,0)
3	(2,–1,0)	(1,3,0)	(0,–1,2)	(0,–1,0)	(1,1,1)
4	(1,3,0)	(0,–1,2)	(0,–2,0)	(1,1,1)	(2,–1,0)
5	(0,–1,0)	(0,–2,0)	(1,1,1)	(2,–1,0)	(1,3,0)
6	(0,1,0)	(–2,1,0)	(1,3,0)	(0,1,–2)	(0,2,–3)
7	(–2,1,0)	(1,3,0)	(0,1,–2)	(0,2,–3)	(0,1,0)
8	(1,3,0)	(0,1,–2)	(0,2,–3)	(0,1,0)	(–2,1,0)
9	(0,1,–2)	(0,2,–3)	(2,3,0)	(–2,1,0)	(1,3,0)
10	(0,2,–3)	(0,1,0)	(–2,1,0)	(1,3,0)	(0,1,–2)
11	(1,0,1)	(0,–2,3)	(2,2,0)	(–3,0,1)	(2,3,–1)
12	(0,–2,3)	(2,2,0)	(–3,0,1)	(2,3,–1)	(1,01)
13	(2,2,0)	(–3,0,1)	(2,3,–1)	(1,0,1)	(0,–2,3)

Продовження табл. 2.1

1	2	3	4	5	6
14	(–3,0,1)	(2,3,–1)	(1,0,1)	(0,–2,3)	(2,2,0)
15	(2,3,–1)	(1,0,1)	(0,–2,3)	(2,2,0)	(–3,0,1)
16	(1,2,3)	(0,0,1)	(2,–3,0)	(–1,–1,2)	(0,1,–2)
17	(0,0,1)	(2,–3,0)	(–1,–1,2)	(0,1,–2)	(1,2,3)
18	(2,–3,0)	(–1,–1,2)	(0,1,–2)	(1,2,3)	(0,0,1)
19	(–1,–1,2)	(0,1,–2)	(1,2,3)	(0,0,1)	(2,–3,0)
20	(0,1,–2)	(1,2,3)	(0,0,1)	(2,–3,0)	(–1,–1,2)
21	(0,0,0)	(1,2,1)	(–2,0,5)	(3,–1,2)	(3,–3,0)
22	(1,2,3)	(–2,0,5)	(3,–1,2)	(3,–3,0)	(0,0,0)
23	(–2,0,5)	(3,–1,2)	(3,–3,0)	(0,0,0)	(1,2,1)
24	(3,–1,2)	(3,–3,0)	(0,0,0)	(1,2,1)	(–2,0,5)
25	(3,–3,0)	(0,0,0)	(1,2,1)	(–2,0,5)	(3,–1,2)
26	(1,2,1)	(0,–2,3)	(–1,0,1)	(3,0,0)	(2,3,1)
27	(0,–2,3)	(–1,0,1)	(3,0,0)	(2,3,1)	(1,2,1)
28	(1,0,1)	(3,0,0)	(2,3,1)	(1,2,1)	(0,–2,3)
29	(3,0,0)	(2,3,1)	(1,2,1)	(0,–2,3)	(1,0,1)
30	(2,3,1)	(1,2,1)	(0,–2,3)	(1,0,1)	(3,0,0)

Розв’язання «0» варіанта

Дано точки: $A_1(3;4;0)$; $A_2(1;0;5)$; $A_3(0;-4;-2)$; $A_4(0;6;0)$; $A_5(1;1;-1)$.

1. Знайти вектор $\overline{A_1A_4}$ та його довжину.

Розв’язання.

Якщо вектор $\overline{AB}$ заданий початком $A(x_A;y_A;z_A)$ та кінцем $B(x_B;y_B;z_B)$, то він знаходиться за формулою

$$\overline{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A),$$

а його довжина (модуль за формулою

$$\left|\overline{AB}\right| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}.$$

Тоді

$$\overline{A_1A_4} = (0-3;6-4;0-0) = (-3;2;0),$$
$$\left|\overline{A_1A_4}\right| = \sqrt{9+4+0} = \sqrt{13} = 3,61.$$

2. Знайти проекцію вектора $\overline{A_4A_5}$ на вектор $\overline{A_1A_2}$: $np_{\overline{A_1A_2}}\overline{A_4A_5}$.

Розв'язання.

Проекція вектора $\overline{a}$ на вектор $\overline{b}$ знаходимо за формулою:

$$np_{\overline{b}}\overline{a} = \frac{\overline{a}\cdot\overline{b}}{\left|\overline{b}\right|}.$$

Якщо вектор $\overline{a}$ і $\overline{b}$ у координатній формі:

$$\overline{a} = (a_x;a_y;a_z),$$
$$\overline{b} = (b_x;b_y;b_z),$$

то скалярній добуток векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$ знаходимо за формулою

$$\overline{a}\cdot\overline{b} = a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z,$$
$$\left|\overline{b}\right| = \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}.$$

Отже,

$$\overline{a} = \overline{A_4A_5} = (1-0;1-6;-1-0) = (1;-5;-1),$$
$$\overline{b} = \overline{A_1A_2} = (1-3;0-4;5-0) = (-2;-4;5),$$
$$\left|\overline{b}\right| = \left|\overline{A_1A_2}\right| = \sqrt{4+16+25} = 6,71,$$

тоді

$$np_{\overline{A_1A_2}}\overline{A_4A_5} = \frac{13}{6,71} = 1,94.$$

3. Знайти кут $A_1A_2A_3$.

Розв'язання.

$\angle A_1A_2A_3 = \varphi$ утворюється векторами $\overline{A_2A_1}$ та $\overline{A_2A_3}$, тобто $\varphi = (\overline{A_2A_1}, \overline{A_2A_3})$.

Якщо кут $\varphi = (\bar{a}, \bar{b})$, то ____ цього кута знаходимо за формулою

$$\cos\varphi = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{a}| \cdot |\bar{b}|}.$$

В нашому випадку

$$\cos\varphi = \frac{\overline{A_2A_1} \cdot \overline{A_2A_3}}{\left|\overline{A_2A_1}\right| \cdot \left|\overline{A_2A_3}\right|}.$$

$$\overline{A_2A_1} = (2; 4; -5), \quad \overline{A_2A_3} = (-1; -4; -7), \quad \left|\overline{A_2A_1}\right| = \sqrt{45} = 6,71,$$

$$\left|\overline{A_2A_3}\right| = \sqrt{66} = 8,12, \quad \overline{A_2A_1} \cdot \overline{A_2A_3} = -2 - 16 + 35 = 17,$$

тоді

$$\cos\varphi = \frac{17}{6,81 \cdot 8,12} = 0,31,$$

$$\varphi = \arccos 0,31 = 71,82°.$$

4. Знайти площу трикутника $A_1A_2A_3$.

Розв'язання.

Площа трикутника, який утворюється векторами $\bar{a}$ і $\bar{b}$, знаходимо за формулою:

$$S_\Delta = \frac{1}{2}\left|\bar{a} \times \bar{b}\right|,$$

отже

$$S_{\Delta A_1A_2A_3} = \frac{1}{2}\left|\overline{A_1A_2} \times \overline{A_1A_3}\right|.$$

Якщо $\overline{a}=(a_x,a_y,a_z)$, $\overline{b}=(b_x,b_y,b_z)$, то їх векторний добуток знаходимо за формулою:

$$\overline{a}\times\overline{b}=\begin{vmatrix}\overline{i} & \overline{j} & \overline{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}.$$

Маємо $\overline{A_1A_2}=(-2;-4;5)$, $\overline{A_1A_3}=(-3;-8;-2)$, тоді

$$\overline{A_1A_2}\times\overline{A_1A_3}=\begin{vmatrix}\overline{i} & \overline{j} & \overline{k}\\ -2 & -4 & 5\\ -3 & -8 & -2\end{vmatrix}=48\overline{i}-19\overline{j}+4\overline{k}=(48;-19;4).$$

Тоді

$$S_{\Delta A_1A_2A_3}=\frac{1}{2}\sqrt{48^2+19^2+4^2}=\frac{1}{2}\sqrt{2681}=\frac{1}{2}\cdot 51,78=25,89\ (\text{од}^2).$$

5. Знайти об'єм піраміди $A_1A_2A_3A_4$.

Розв'язання.

Об'єм піраміди, яка побудована на векторах $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$ за формулою:

$$V_{\text{пір}}=\frac{1}{6}\left|(\overline{a}\times\overline{b})\cdot\overline{c}\right|.$$

Мішаний добуток трьох векторів знаходимо за формулою:

$$(\overline{a}\times\overline{b})\cdot\overline{c}=\begin{vmatrix}a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix}.$$

Отже

$$V_{A_1A_2A_3A_4} = \frac{1}{6}\left|(\overline{A_1A_2} \times \overline{A_1A_3}) \cdot \overline{A_1A_4}\right|.$$

$$\overline{A_1A_2} = (-2;-4;5), \quad \overline{A_1A_3} = (-3;-8;-2), \quad \overline{A_1A_4} = (-3;2;0).$$

Обчислимо мішаний добуток трьох векторів $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_1A_3}$, $\overline{A_1A_4}$

$$(\overline{A_1A_2} \times \overline{A_1A_3}) \cdot \overline{A_1A_4} = \begin{vmatrix} -2 & -4 & 5 \\ -3 & -8 & -2 \\ -3 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -2 \cdot 4 + 4(-6) + 5(-30) = -182.$$

Тоді

$$V_{A_1A_2A_3A_4} = \frac{1}{6}\left|-182\right| = 30,33 \text{ (од}^3\text{)}.$$

Для поглибленої підготовки рекомендуємо розв'язати самостійно наступні додаткові завдання.

Додаткові завдання

За умови «0» варіанта треба знайти:

1) точку B_1, таку щоб чотирикутник $A_1A_2A_3B_1$ був паралелограмом;

2) точку B_2, таку, щоб $\overline{A_1B_2} = -5\overline{A_4A_5}$;

3) одиночний вектор, який перпендикулярний до площини $(A_1A_2A_3)$;

4) вектор $\overline{x}$, який компланарний векторам $\overline{A_1A_2}$ та A_1A_3, перпендикулярний вектору $\overline{A_4A_5}$, довжина якого дорівнює $\alpha = 4$;

5) чи будуть вектори $\overline{A_2A_4}$ і $\overline{A_3A_5}$ коленіарні (паралельні)?

6) чи будуть вектори $\overline{A_2A_4}$ і $\overline{A_3A_5}$ – ортогональні (перпендикулярні?

7) вектор $\overline{l}$, який буде колінеарним (перпендикулярним) до бісектриси кута $\angle A_1A_2A_3$;

8) вектор $\overline{m}$ такий, що перпендикулярний (ортогональний) до векторів $\overline{A_1A_2}$ та $\overline{A_3A_4}$ має довжину $|\overline{m}| = 5$ та утворює з віссю Oy тупий кут;

9) чи належать чотири точки A_1, A_2, A_3, A_5 одній площині;

10) напрямні _____ вектора $\overline{A_2A_3}$.

Частина II

Завдання.

Дано два вектори: $\overline{a} = \alpha_1 \overline{p} + \alpha_2 \overline{q}$, $\overline{b} = \beta_1 \overline{p} + \beta_2 \overline{q}$, $|\overline{p}| = p$, $|\overline{q}| = q$; $(\widehat{\overline{p}, \overline{q}}) = \varphi$.

Знайти:

1) довжина діагоналей паралелограма, який побудовано на векторах $\overline{a}$ та $\overline{b}$;

2) кут між діагоналями паралелограма;

3) проекцію вектора $\overline{b}$ на вектор $\overline{a}$: $np_{\overline{a}}\overline{b}$;

4) площу паралелограма, який побудовано на векторах $\overline{a}$ та $\overline{b}$.

Варіанти обираємо за табл. 2.2.

Таблиця 2.2 – Варіанти

Номери варіантів	α_1	α_2	β_1	β_2	p	q	φ
1	2	3	4	5	6	7	8
1	3	–2	2	5	$\sqrt{3}$	4	$\frac{\pi}{6}$
2	2	3	–1	4	$2\sqrt{2}$	3	$\frac{\pi}{4}$
3	3	4	–2	3	2	1	$\frac{\pi}{3}$
4	–2	3	4	–3	3	2	$\frac{2\pi}{3}$
5	3	–4	2	3	2	$2\sqrt{3}$	$\frac{3\pi}{4}$
6	–5	3	2	–1	3	$3\sqrt{2}$	$\frac{5\pi}{6}$

Продовження табл. 2.2

1	2	3	4	5	6	7	8
7	2	–4	3	–2	$2\sqrt{3}$	1	$\frac{\pi}{6}$
8	1	3	2	–1	$3\sqrt{2}$	3	$\frac{\pi}{4}$
9	4	–2	3	2	4	2	$\frac{\pi}{3}$
10	3	5	4	–1	3	4	$\frac{2\pi}{3}$
11	–3	2	5	–2	2	$\sqrt{2}$	$\frac{3\pi}{4}$
12	2	–5	3	2	3	$\sqrt{3}$	$\frac{5\pi}{6}$
13	–2	–3	4	–5	4	$3\sqrt{3}$	$\frac{\pi}{6}$
14	3	–5	2	–3	$3\sqrt{2}$	3	$\frac{\pi}{4}$
15	–3	5	4	3	2	4	$\frac{\pi}{3}$
16	4	–3	2	5	4	2	$\frac{2\pi}{3}$
17	2	6	–3	2	3	$2\sqrt{2}$	$\frac{3\pi}{4}$
18	5	–3	2	5	3	$\sqrt{3}$	$\frac{5\pi}{6}$
19	7	–1	6	5	$2\sqrt{3}$	2	$\frac{\pi}{6}$
20	5	4	–2	3	3	$\sqrt{2}$	$\frac{\pi}{4}$
21	–2	3	3	6	1	4	$\frac{\pi}{3}$
22	2	–5	1	3	2	3	$\frac{2\pi}{3}$

Закінчення табл. 2.2

1	2	3	4	5	6	7	8
23	3	–4	2	3	$\sqrt{2}$	1	$\frac{3\pi}{4}$
24	–5	6	3	–2	$3\sqrt{3}$	4	$\frac{5\pi}{6}$
25	4	–3	5	2	6	$\sqrt{3}$	$\frac{\pi}{6}$
26	5	2	–2	3	5	$3\sqrt{2}$	$\frac{\pi}{4}$
27	4	–1	3	2	4	2	$\frac{\pi}{3}$
28	3	–2	4	3	1	4	$\frac{2\pi}{3}$
29	–3	4	3	–2	$2\sqrt{2}$	3	$\frac{3\pi}{4}$
30	3	2	–4	3	$\sqrt{3}$	4	$\frac{5\pi}{6}$

Розв'язання «0» варіанта

Завдання.

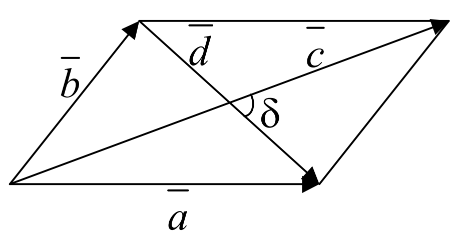
Дано вектори: $\overline{a} = 5\overline{p} + 4\overline{q}$, $\overline{b} = -3\overline{p} + 4\overline{q}$, а також

$$\left|\overline{p}\right| = p = 2\sqrt{2},\ \left|\overline{q}\right| = q = 3,\ \varphi = (\widehat{\overline{p}, \overline{q}}) = \frac{3\pi}{4}.$$

1. Знайти довжину діагоналей паралелограма, який побудовано на векторах $\overline{a}$ та $\overline{b}$.

Розв'язання:

Для наочності зробимо рис. 1.1.



Вектори діагоналей паралелограма знайдемо за правилами додавання та віднімання векторів. Маємо $\overline{c}=\overline{a}+\overline{b},\ \overline{d}=\overline{a}-\overline{b}$, (рис. 1.1), тоді

$$\overline{c}=(5\overline{p}+4\overline{q})+(-3\overline{p}+4\overline{q})=2\overline{p}+8\overline{q};$$
$$\overline{d}=\overline{a}-\overline{b}=(5\overline{p}+4\overline{q})-(-3\overline{p}+4\overline{q})=8\overline{p}.$$

Довжина (модулі) векторів знайдемо за формулою:

$$\left|\overline{m}\right|=\sqrt{(\overline{m})^2}=\sqrt{\overline{m}\cdot\overline{m}}.$$

Отже

$$\left|\overline{c}\right|=\sqrt{\overline{c}\cdot\overline{c}},\quad \overline{d}=\sqrt{\overline{d}\cdot\overline{d}}.$$

Знайдемо скалярні добутки векторів $\overline{c}\cdot\overline{c}$ та $\overline{d}\cdot\overline{d}$.

За властивостями скалярного добутку маємо

$$\overline{c}\cdot\overline{c}=(2\overline{p}+8\overline{q})\cdot(2\overline{p}+8\overline{q})=4\overline{p}\cdot\overline{p}+32\overline{p}\cdot\overline{q}+64\overline{q}\cdot\overline{q},$$

оскільки

$$\overline{p}\cdot\overline{p}=\overline{p}^2=\left|\overline{p}\right|=p^2=8;\quad \overline{q}\cdot\overline{q}=\overline{q}^2=q^2=9;$$
$$\overline{p}\cdot\overline{q}=\left|\overline{p}\right|\cdot\left|\overline{q}\right|\cos\varphi=2\sqrt{2}\cdot3\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-6,$$

тоді

$$\overline{c}\cdot\overline{c}=4\cdot8+32(-6)+64\cdot9=416;\quad \left|\overline{c}\right|=\sqrt{416}=20,4.$$

Аналогічно,

$$\overline{d}\cdot\overline{d}=8\overline{p}\cdot8\overline{p}=64\cdot\overline{p}\cdot\overline{p}=64\cdot8=512,$$

отже

$$\left|\overline{d}\right|=\sqrt{512}=22,63.$$

2. Знайти кут між діагоналями паралелограма.

Розв'язання:

Кут між діагоналями паралелограма дорівнює куту δ між векторами $\overline{c}$ та $\overline{d}$ (рис. 1.1).

Конус цього кута обчислимо за формулою:

$$\cos\delta = \frac{\overline{c}\cdot\overline{d}}{|\overline{c}|\cdot|\overline{d}|},$$

яка випливає з означення скалярного добутку двох векторів

$$\overline{c}\cdot\overline{d} = |\overline{c}|\cdot|\overline{d}|\cos\delta$$

де $$\delta = (\overline{c},\ \overline{d}).$$

Оскільки $|\overline{c}| = 20,4,\ \overline{d} = 22,63$ (з пункту 1), то нам потрібно знайти $\overline{c}\cdot\overline{d}$

$$\overline{c}\cdot\overline{d} = (2\overline{p} + 8\overline{q})\cdot 8\overline{p} =$$
$$= 16\cdot\overline{p}\cdot\overline{p} + 64\cdot\overline{p}\cdot\overline{q} = 16\cdot 8 + 64\cdot(-6) = -256.$$

Отже

$$\cos\delta = \frac{-256}{20,4\cdot 22,63} = -0,55,$$

звідси

$$\delta = \arccos(-0,55) = 123,68°.$$

3. Знайти проекція вектора $\overline{a}$ на вектор $\overline{b}$: $np_{\overline{a}}\overline{b}$.

Розв'язання:

Проекцію вектора $\overline{b}$ на проектор $\overline{a}$ обчислимо за формулою:

$$np_{\overline{a}}\overline{b} = \frac{\overline{a}\cdot\overline{b}}{|\overline{a}|}.$$

Отже нам потрібно обчислити $\left|\overline{a}\right|$ та скалярний добуток векторів $\overline{a}\cdot\overline{b}$

$$\left|\overline{a}\right|=\sqrt{\overline{a}\cdot\overline{a}},\quad \overline{a}\cdot\overline{a}=\overline{a}^{2}=(5\overline{p}+4\overline{q})^{2}=25\overline{p}+40\overline{p}\cdot\overline{q}+16\overline{q}^{2}=$$
$$=25\cdot 8+40\cdot(-6)+16\cdot 9=1047,\quad \left|\overline{a}\right|=\sqrt{104}=10,2.$$
$$\overline{a}\cdot\overline{b}=(5\overline{p}+4\overline{q})\cdot(-3\overline{p}+4\overline{q})=-15\overline{p}\cdot\overline{p}+8\overline{p}\cdot\overline{q}+16\overline{q}\cdot\overline{q}=$$
$$=-15\cdot 8+8(-6)+16\cdot 9=-24.$$

Тоді

$$np_{\overline{a}}\overline{b}=\frac{-24}{10,2}=-2,35.$$

4. Знайти площу паралелограма, який побудовано на вектора $\overline{a}$ та $\overline{b}$.

Розв'язання.

Із геометричного змісту модуля векторного добутку маємо, що площа паралелограма, який побудовано на вектора $\overline{a}$ та $\overline{b}$, чисельно дорівнює $S_{\text{пар}}=\left|\overline{a}\times\overline{b}\right|$.

Знайдемо векторний добуток $\overline{a}\times\overline{b}$, за його властивостями маємо

$$\overline{a}\times\overline{b}=(5\overline{p}+4\overline{q})\times(-3\overline{p}+4\overline{q})=$$
$$=-15\overline{p}\times\overline{p}+20\overline{p}\times\overline{q}-12\overline{q}\times\overline{p}+16\overline{q}\times\overline{q}=32(\overline{p}\times\overline{q}),$$

оскільки

$$\overline{p}\times\overline{p}=0,\ \overline{q}\times\overline{q}=0,\quad \overline{q}\times\overline{p}=-\overline{q}\times\overline{p}.$$

Отже

$$\overline{a}\times\overline{b}=32(\overline{p}\times\overline{q})$$

$$\left|\overline{a}\times\overline{b}\right|=32\left|\overline{p}\times\overline{q}\right|=32\cdot\left|\overline{p}\right|\cdot\left|\overline{q}\right|\cdot\sin\frac{3\pi}{4}=32\cdot 2\sqrt{2}\cdot 3\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}192.$$

Тоді

$$S_{\text{пар}} = 192 \text{ (од}^2\text{)}.$$

Для поглибленої підготовки рекомендуємо розв'язати самостійно наступні додаткові завданні.

Додаткові завдання

За умови «0» варіанта треба знайти:

1) вектор, який є колінеарним бісектриси кута між векторами $\overline{a}$ та $\overline{b}$;

2) число x, якщо $(x \cdot \overline{a} + 3\overline{b}) \perp (\overline{a} + \overline{b})$;

3) чи будуть вектори $\overline{a}$ і $\overline{b}$ ортогональні?

4) за якої умови для ненульових векторів $\overline{m}$ та $\overline{n}$ вектор $\overline{m} + \overline{n}$ буде ділити кут між ними навпіл?

5) чи будуть вектори $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{p}$, утворювати трикутник?

6) за якої умови для векторів $\overline{m}$ та $\overline{n}$ буде вірна рівність $|\overline{m} + \overline{n}| = |\overline{m} - \overline{n}|$?

7) гострий кут паралелограма, що побудований на векторах $\overline{a}$ і $\overline{b}$;

8) площу паралелограма, що побудований на векторах $\overline{c}$ і $\overline{d}$; (рис. 1.1);

9) $np_{\overline{c}}\overline{d}$;

10) дано: $|\overline{k}| = 13$; $|\overline{l}| = 19$; $|\overline{k} + \overline{l}| = 24$. Обчислити $\overline{k} - \overline{l}$.

Тема 3.
ЕЛЕМЕНТИ АНАЛІТИЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ

Частина І. Пряма на площині

Завдання 3.

Дано точки $A_1(x_1;y_1)$, $A_2(x_2;y_2)$, $A_3(x_3;y_3)$. Для трикутника $A_1A_2A_3$ знайти:

1) рівняння сторін A_1A_2 і A_1A_3;

2) рівняння медіани, що проведена із вершини A_1;

3) рівняння висоти, яка проведена із вершини A_2 та її довжину;

4) рівняння прямої, яка проходить через вершину A_2, та паралельна протилежній стороні;

5) рівняння середньої лінії, що паралельна стороні A_1A_3.

Варіанти обираємо за табл. 3.1.

Таблиця 3.1 – Варіанти

Номер варіантів	A_1	A_2	A_3
1	(4,–1)	(0,2)	(1,0)
2	(0,2)	(1,0)	(1,1)
3	(1,0)	(1,1)	(2,–3)
4	(1,1)	(2,–3)	(4,–1)
5	(2,–3)	(4,–1)	(0,2)
6	(–2,0)	(0,1)	(3,–2)
7	(–2,0)	(1,2)	(1,–1)
8	(1,2)	(0,–1)	(–2,0)
9	(1,2)	(1,–1)	(0,–1)
10	(3,0)	(1,5)	(–1,1)
11	(1,5)	(–1,1)	(0,2)
12	(–1,1)	(0,2)	(3,0)
13	(0,2)	(3,0)	(1,5)
14	(1,2)	(2,–1)	(–2,0)
15	(2,–1)	(0,2)	(–2,0)

Номер варіантів	A_1	A_2	A_3
16	(0,2)	(–2,0)	(1,2)
17	(0,2)	(1,2)	(2,–1)
18	(3,–4)	(4,0)	(2,1)
19	(1,0)	(2,1)	(3,–4)
20	(0,–5)	(1,–3)	(4,0)
21	(3,5)	(–1,5)	(–3,0)
22	(–1,5)	(–3,0)	(4,1)
23	(–3,0)	(4,1)	(0,5)
24	(4,1)	(0,5)	(3,5)
25	(0,3)	(3,5)	(–1,5)
26	(1,0)	(0,–4)	(3,4)
27	(0,–4)	(1,1)	(3,4)
28	(0,6)	(1,1)	(3,4)
29	(1,1)	(3,4)	(1,0)
30	(3,4)	(1,0)	(0,–4)

Розв'язання «0» варіанта

Дано точки $A_1(1;1)$, $A_2(0;-3)$, $A_3(3;-1)$.

1. Знайти рівняння сторін A_1A_2 і A_1A_3.

Розв'язання.

Рівняння прямої, що проходить через дві точки $A_1(x_1; y_1)$, $A_2(x_2; y_2)$, запишемо за формулою

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}.$$

Маємо, (A_1A_2):

$$\frac{x-1}{0-1}=\frac{y-1}{-3-1}, \quad \frac{x-1}{-1}=\frac{y-1}{-4},$$

звідки $4x-y-3=0-$ рівняння прямої (A_1A_2);

(A_1A_3):

$$\frac{x-1}{3-1}=\frac{y-1}{-1-1}, \quad \frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{-2},$$

звідки $x+y-2=0-$ рівняння прямої (A_1A_3).

2. Знайти рівняння медіани, що проведена із вершини A_1.

Розв'язання.

Медіана – це відрізок прямої, яка з'єднує вершину A_3 із серединою сторони A_2A_3. Отже, знайдемо середину сторони A_2A_3 точку M_1 за формулами:

$$x_{M_1}=\frac{x_2+x_3}{2}; \quad y_{M_1}=\frac{y_2+y_3}{2}.$$

Обчислимо

$$x_{M_1}=\frac{0+3}{2}=\frac{3}{2};\quad y_{M_1}=\frac{-3-1}{2}=-2\Rightarrow M_1\left(\frac{3}{2};-2\right).$$

Запишемо рівняння медіани A_1M_1 за рівнянням прямої, що проходе через дві точки:

$$\frac{x-1}{\frac{3}{2}-1}=\frac{y-1}{-2-1},\quad \frac{x-1}{0,5}=\frac{y-1}{-3},\quad \frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{-6},$$

звідки $6x+y-7=0-$ рівняння медіани A_1M_1.

3. Знайти рівняння висоти, яка проведена із вершини A_2.

Розв'язання.

Висота, яка проведена із вершини A_2, перпендикулярна до сторони A_1A_3. Отже вектор $\overline{n}=\overline{A_1A_3}=(2;-2)$ є нормальним вектором (вектори, що перпендикулярні до висоти) висоти. За рівнянням прямої, яка проходе через т. $M_0(x_0;y_0)$ з нормальним вектором $\overline{n}=(A;B)$, $A(x-x_0)+B(y-y_0)=0$, запишемо рівнянням висоти:

$$2(x-0)-2(y+3)=0,$$

$x-y-3=0-$ рівняння висоти, що проведена із вершини A_2.

За формулою відстані між точкою $K_1(x_1;y_1)$ та прямою $Ax+By+D=0$:

$$d=\frac{|Ax_1+By_1+D|}{\sqrt{A^2+B^2}},$$

обчислимо відстань від т. A_2 до прямої A_1A_3 – це і є довжина висоти h.

Із пункту 1) рівняння сторони A_1A_3: $x+y-2=0$ т. $A_2(0;-3)$ маємо

$$d=\frac{|1\cdot 0+1\cdot(-3)-2|}{\sqrt{1+1}}=\frac{5}{\sqrt{2}}=3{,}53 \text{ (од).}$$

4. Рівняння прямої, яка проходить через вершину A_2, та паралельна протилежній стороні.

Розв'язання.

Якщо пряма проходить через т. $K_2(x_2;y_2)$ та паралельна вектору $\overline{S}=(m,n)-$ паралельний вектор, то її рівняння має вигляд

$$\frac{x-x_2}{m}=\frac{y-y_2}{n}.$$

Отже т. A_2 є, а вектор сторони $\overline{A_1A_3}=(2;-2)$ – напрямний вектор цієї прямої, то маємо

$$\frac{x-0}{2}=\frac{y+3}{-2};$$

$x+y+3=0-$ рівняння шуканої прямої.

5. Рівняння середньої лінії, що паралельна стороні A_1A_3.

Рівняння.

Середня лінія, проходить через дві середні точки сторін A_1A_2 та A_2A_3 відповідно, вона паралельна стороні A_1A_3. Отже маємо т. $M_1\left(\frac{3}{2};-2\right)$ середина сторони A_2A_3, $\overline{S}=\overline{A_1A_3}=(2;-2)-$ напрямний вектор середньої лінії, тому за формулою з пункту 4) запишемо її рівняння:

$$\frac{x-\frac{3}{2}}{2}=\frac{y+2}{-2},$$

$2x+2y+1=0-$ рівняння середньої лінії.

Для поглибленої підготовки рекомендуємо розв'язати самостійно наступні додаткові завдання.

Додаткові завдання

1) рівняння бісектриси, що проведено із вершини A_2;

2) рівняння середнього перпендикуляра до сторони A_1A_3;

3) кут між медіаною, що проведена із вершини A_1, та висотою, що проведена із вершини A_2.

4) координати точки перетину медіан трикутника $A_1A_2A_3$;

5) координати центра кола, що описане навколо трикутника $A_1A_2A_3$;

6) площу трикутника $A_1A_2A_3$;

7) проекцію вершини A_3 на сторону A_1A_2;

8) точку A_3', що є симетричною точці A_3 відносно сторони (A_1A_2);

9) кут $\angle A_1A_2A_3$;

10) координати точки *M*, яка поділяє сторону A_1A_3 бісектриса кута A_2.

Частина II.
Пряма та площина у просторі

Завдання.

Дано точки

$$A_1(x_1;y_1;z_1),\ A_2(x_2;y_2;z_2),\ A_3(x_3;y_3;z_3),\ A_4(x_4;y_4;z_4),$$
$$A_5(x_5;y_5;z_5).$$

Звідси:

1) рівняння площини $(A_1A_2A_3)$;

2) рівняння площини, що проходить через точку A_1 перпендикулярно прямій (A_2A_3);

3) рівняння площини, що проходить через точку A_5, та паралельна до площини $(A_1A_2A_3)$;

4) відстань від точки A_5 до площини $(A_1A_2A_3)$;

5) рівняння прямої (A_1A_4);

6) рівняння прямої, що проходить через точку A_4 перпендикулярно до площини $(A_1A_2A_3)$;

7) рівняння прямої, що проходить через точку A_5 паралельно прямій (A_1A_4).

Варіанти обираємо за табл. 4.1.

Таблиця 4.1 – Варіанти

Номери варіантів	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*
1	(0,2,–3)	(1,0,–1)	(4,2,–2)	(0,5,3)	(4,1,3)
2	(1,0,–1)	(4,2,–2)	(0,5,3)	(4,1,3)	(0,2,–3)
3	(4,2,–2)	(0,5,3)	(4,1,3)	(0,2,–3)	(1,0,–1)
4	(0,5,3)	(4,1,3)	(0,–2,–3)	(1,0,–1)	(4,2,–2)
5	(3,5,4)	(–1,5,2)	(–3,0,1)	(4,1,2)	(0,5,4)
6	(–1,5,2)	(–3,0,1)	(4,1,2)	(0,5,4)	(3,5,4)
7	(–3,0,1)	(4,1,2)	(0,5,4)	(3,5,4)	(–1,5,2)
8	(4,1,2,)	(0,5,4)	(3,5,4)	(–1,5,2)	(–3,0,1)

Закінчення табл. 4.1

1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*
9	(0,3,4)	(3,5,4)	(–1,5,2)	(–3,0,1)	(4,1,2)
10	(2,0,0)	(–2,0,–2)	(0,1,0)	(0,2,2)	(0,0,–2)
11	(–2,0–2)	(0,1,0)	(0,2,2)	(0,2,2)	(2,0,0)
12	(0,1,0)	(2,2,2)	(0,0,–2)	(2,0,0)	(–2,0,–2)
13	(0,2,2)	(0,0,–2)	(2,0,0)	(–2,0,–2)	(0,1,0)
14	(0,0,–2)	(2,1,0)	(–2,0,–2)	(0,1,0)	(0,2,2)
15	(1,0,5)	(0,–4,–2)	(0,6,0)	(1,1,–1)	(3,4,0)
16	(0,–4,–2)	(0,6,0)	(1,1,–1)	(3,4,0)	(1,0,5)
17	(0,6,0)	(1,1,–1)	(3,4,0)	(1,0,5)	(0,–4,–2)
18	(1,1,–1)	(3,4,0)	(1,0,5)	(0,–4,–2)	(0,6,0)
19	(3,4,0)	(1,0,5)	(0,–4,–2)	(0,6,0)	(1,1,–1)
20	(1,0,1)	(5,0,–5)	(3,–3,0)	(0,–2,2)	(3,2,–1)
21	(5,0,–5)	(3,–3,0)	(0,–2,0)	(3,2,1)	(1,0,1)
22	(3,–3,0)	(0,–2,2)	(3,2,1)	(1,0,1)	(5,0,–5)
23	(0,–2,2)	(3,2,1)	(1,0,1)	(5,0,–5)	(3,–3,0)
24	(3,2,1)	(1,0,1)	(5,0,–5)	(3,–3,0)	(0,–2,2)
25	(0,2,–1)	(1,0,–2)	(2,0,–1)	(0,0,2)	(1,0,0)
26	(1,0,–2)	(2,0,–1)	(0,2,2)	(1,0,0)	(0,–2,1)
27	(2,0,–1)	(0,2,2)	(1,0,0)	(0,–2,1)	(1,0,–2)
28	(0,0,2)	(1,0,0)	(0,–2,0)	(1,0,–2)	(2,0,–1)
29	(1,0,0)	(0,–2,0)	(1,2,2)	(2,0,–1)	(0,0,2)
30	(6,0,0,)	(3,2,0)	(1,0–1,0)	(0,0,0)	(0,5,0)

Розв'язання «0» варіанта

Дано точки: $A_1(2;3;0)$, $A_2(1;-1;1)$, $A_3(0;0;0)$, $A_4(0;5;2)$, $A_5(6;0;-1)$.

1. Знайти рівняння площини $(A_1A_2A_3)$.

Розв'язання.

Рівняння площини, що проходить через три точки $A_1(x_1;y_1;z_1)$, $A_2(x_2;y_2;z_2)$, $A_3(x_3;y_3;z_3)$ знаходимо у вигляді:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Для знаходження точок $A_1A_2A_3$маємо

$$\begin{vmatrix} x-3 & y-2 & z-0 \\ 1-3 & -1-2 & 1-0 \\ 0-3 & 0-2 & 0-0 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} x-3 & y-2 & z \\ -2 & -3 & 1 \\ -3 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

$$2(x-3)-3(y-2)-5z=0,$$

або $2x-3y-5z=0$ – рівняння площини $(A_1A_2A_3)$.

2. Знайти рівняння площини, що проходить через точку A_1 перпендикулярно прямій (A_2A_3).

Розв'язання.

Рівнянм площини, яка проходить через точку $M_0(x_0,y_0,z_0)$ з нормальним вектором $\overline{n}=(A,B,C)$ ($\overline{n}$ – вектор перпендикулярний до площини) має вигляд

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0.$$

Площа проходе через точку $A_1(3;2;0)$ та перпендикулярна до прямої (A_2A_3), отже $\overline{n}=\overline{A_2A_3}$ є нормальним вектором площини, $\overline{n}=(-1;1;-1)$, тоді

$$-1(x-3)+1(y-2)-1(z-0)=0,$$

або $x-y+z-1=0$ – рівняння площини.

3. Рівняння площини, що проходить через точку A_5, та паралельна до площини $(A_1A_2A_3)$.

Розв'язання.

Оскільки площини паралельні, то їхні нормальні вектори колінеарні (паралельні) або рівні $\overline{n_1} = \overline{n}$, де $\overline{n} = (2;-3;-5)$ – нормальний вектор площини $(A_1A_2A_3)$. Отже рівняння площини запишемо як у пункті 2). Маємо

$$2(x-6)3(y-0)-5(z+1)=0,$$

або $A_1 2x-3y-5z-17=0$ – рівняння площини.

4) Знайти відстань від точки A_5 до площини $(A_1A_2A_3)$.

Розв'язання.

Якщо дано точку $M_1(x_1;y_1;z_1)$ та рівняння площини ($Ax+By+Cz+D=0$), то відстань між ними знаходимо за формулою:

$$d = \frac{|Ax_1+By_1+Cz_1+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

За умови завдання $A_5(6;0;-1)$, площа $(A_1A_2A_3)$ має рівняння $2x-3y-5z=0$, то

$$d = \frac{|2\cdot 6+3\cdot 0-5\cdot(-1)+0|}{\sqrt{2^2+3^2+5^2}} = \frac{17}{\sqrt{38}=2,76} \text{ (од).}$$

5. Знайти рівняння прямої (A_1A_4).

Розв'язання.

Рівнянням прямої, що проходить через дві точки $A_1(x_1;y_1;z_1)$ та $A_4(x_4;y_4;z_4)$ має вигляд

$$\frac{x-x_1}{x_4-x_1}=\frac{y-y_1}{y_4-y_1}=\frac{z-z_1}{z_4-z_1},$$

отже рівняння прямої находимо

$$\frac{x-3}{0-3}=\frac{y-2}{5-2}=\frac{z-0}{2-0},$$

або, $\dfrac{x-3}{-3}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z}{2}$ – рівняння прямої (A_1A_4).

6. Знайти рівняння прямої, що проходить через точку A_4 перпендикулярно до площини $(A_1A_2A_3)$.

Розв'язання.

Рівняння прямої, що проходить через точку $M_0(x_0;y_0;z_0)$ із напрямним вектором $\overline{S}=(m,n,p)$ (вектор $\overline{S}$ Р прямій) має вигляд

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}.$$

За умовами задачі пряма проходить через точку $A_4(0;5;2)$ та перпендикулярна до площини $(A_1A_2A_3)$ $2x-3y-5z=0$, де $\overline{n}=(2;-3;-5)$ її нормальний вектор. Тоді нормальний вектор прямої $\overline{S}$ та нормальний вектор площини будуть колінеарні (паралельні) або рівні. Отже $\overline{S}=\overline{n}=(2;-3;-5)$. Запишемо рівняння прямої:

$$\frac{x-0}{2}=\frac{y-5}{-3}=\frac{z-2}{-5} \quad \text{або} \quad \frac{x}{2}=\frac{y-5}{-3}=\frac{z-2}{-5}.$$

7) Знайдемо рівняння прямої, що проходить через точку A_5 паралельно прямій (A_1A_4).

Розв'язання.

Пряма проходе через точку $A_5(6;0;-1)$. Оскільки ця пряма паралельна прямій (A_1A_4), то їх напрямні вектори паралельні або рівні, тобто $\overline{S}_1=(m,n,p)=\overline{A_1A_4}=(-3;3;2)$. За формулою для прямої через точку з напрямним вектором маємо

$$\frac{x-6}{-3}=\frac{y-0}{3}=\frac{z+1}{2},$$

отже, $\dfrac{x-6}{-3}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z+1}{2}$ – рівняння прямої.

Для поглибленої підготовки рекомендуємо розв'язати самостійно наступні додаткові завдання.

Додаткові завдання

1) рівняння площини, що проходить через точку A_5 паралельно до прямих (A_2A_3) і (A_1A_4);

2) рівняння площини, що проходить через пряму (A_4A_5) перпендикулярно до площини $(A_1A_2A_3)$;

3) рівняння площини,Ю що проходить через пряму (A_4A_5) паралельно до прямої (A_1A_2);

4) рівняння ліній перетину площин $(A_1A_2A_3)$ і $(A_1A_4A_5)$ (у канонічному вигляді);

5) рівняння проекції прямої (A_4A_5) на площину $(A_1A_2A_3)$ (у канонічному вигляді);

6) координати проекцій точки A_1 на пряму (A_2A_3);

7) відстань між прямими (A_2A_3) і (A_1A_4);

8) рівняння площини, що проходить через дві паралельні прямі

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z}{4} \text{ та } \begin{cases} x=3+2t \\ y=1+3t \\ z=4t-3 \end{cases};$$

9) чи будуть прямі (A_2A_3) та (A_4A_5) перетинатись?

10) кут між прямими (A_2A_3) та (A_5A_4).

ВАРІАНТИ ЗАВДАНЬ

Обчислити граничні функції.

№01

1. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{(x^2-9)(x+3)}{x+5}$;
2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-x+4}{2x^2-4x^2+3}$;
3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^5+4x^4-3x-2}{7x^3-4x+5}$;
4. $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{x+2x+5}-\sqrt{x-x-1})$;
5. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+6x+8}{x^3+8}$;
6. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{3x+1}-\sqrt{2x+2}}{\sqrt{8x+1-3}}$;
7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin^2 x}{x\sin x}$;
8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 3x-\cos x}{\cos x-1}$;
9. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x-3}{5x+3}\right)^{4x}$;
10. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{3x}$;

№02

1. $\lim\limits_{x\to 4}(3x^2-2x+5)$;
2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-4x+3}{4x^2+7x-5}$;
3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-2x+5}{2x^3+4x-3}$;
4. $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+3x-5}-\sqrt{x^2-x+10})$;
5. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{3x^2-10x+3}{x^2-9}$;
6. $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$;
7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{\sin 3x}$;
8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 7x-\cos 5x}{\sin^2 2x}$;
9. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x+1}{4x}\right)^{2x}$;
10. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{7x}-e^{-x}}{\sin x}$;

№03

1. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{(x^2-4)(x+2)}{x+5}$;

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3+3x-2}{5x^3+3x-1}$;

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^3+5x-3}{2x^5+4x^2+5}$;

4. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{7x^2+5x-4}-\sqrt{7x^2-x+6})$;

5. $\lim\limits_{x\to+7}\dfrac{2x^2-5x-63}{x^2-6x-7}$;

6. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{\sqrt{x+1}-2}$;

7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\arcsin x}{3x}$;

8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 3x-\cos 5x}{x^2}$;

9. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x+1}{4x+5}\right)^{7x}$;

10. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(a+x)-\ln a}{x}$;

№04

1. $\lim\limits_{x\to 1}(x+4)(3x-6)$;

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^2+5x-3}{2x^3+4x^2+5}$;

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{10x^2-7x+8}{5x^3+x^2-10}$;

4. $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{3x^2-x+5}-\sqrt{3x^2+2x-3})$;

5. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{3x^2-7x-40}{x^2-10x+25}$;

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+16}-4}$;

7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{\sin 2x}$;

8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x+\sin 3x}{\mathrm{tg} 2x}$;

9. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+1}{3x-1}\right)^{x+2}$;

10. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-e^{3x}}{x}$;

№05

1. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{(x^2-4)(x+2)}{3x-4}$;

2. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{7x^4-3x^2+5}{6x^3+3x-4}$;

3. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{5x^3-2x^2+4x-3}{6x^3+5x+100}$;

4. $\lim\limits_{x\to +\infty}(\sqrt{2x^2+5x-3}-\sqrt{2x^2-3x+4})$;

5. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-6x+5}{x^2-2x-15}$;

6. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{3x-2}-2}{x^2-4}$;

7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}x}{\sin 3x}$;

8. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\cos x-\cos a}{x-a}$;

9. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{x-2}{x+3}\right)^{7x-1}$;

10. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-e^{x}}{3x}$;

№06

1. $\lim\limits_{x\to -1}(2x-3)(x+2)$;

2. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{12x^3+4x-7}{3x^2+6x+3}$;

3. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{7x^4-5x+4}{3x^4+2x-2}$;

4. $\lim\limits_{x\to +\infty}(\sqrt{x^2+7x+4}-\sqrt{x^2+3})$;

5. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^2-5x-6}{6x^2-37x+6}$;

6. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-25}{2-\sqrt{3x-11}}$;

7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 5x}{\operatorname{arctg}3x}$;

8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos^3 x}{x^2}$;

9. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^{2x+3}$;

10. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}-e^{3x}}{x}$;

№07

1. $\lim\limits_{x\to 3}\left(-x^2+2x-\frac{1}{6}\right);$

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{6x^2+7x+2}{5x^2-2x+5};$

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^5-4x+7}{6x^7+2x-10};$

4. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+4x+5}-\sqrt{x^2-1});$

5. $\lim\limits_{x\to 4}\frac{x^2-8x+16}{2x^2+\frac{17}{2}x+2};$

6. $\lim\limits_{x\to 4}\frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5};$

7. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}7x}{x};$

8. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos 3x}{1-\cos 2x};$

9. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x-6}{2x+3}\right)^{3x};$

10. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-e^{3x}}{\mathrm{tg}5x};$

№08

1. $\lim\limits_{x\to 3}(x+4)(2x-7);$

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-3x^4+5x+10}{2x^3+15x+21};$

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{17x^3-6x^2+3}{3x^3-x+10};$

4. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+4x+5}-\sqrt{x^2-2x+1};$

5. $\lim\limits_{x\to 5}\frac{x^2-6x+5}{x^2-2x-15};$

6. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{5+2x}-3}{\sqrt{3-x}-1};$

7. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\mathrm{arctg}^2 2x}{x\sin 3x};$

8. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos 3x-\cos 8x}{1-\cos 6x};$

9. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x}{2x-3}\right)^{x-1};$

10. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}5x}{2^x-1};$

№09

1. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{(2x+3)(4-x)}{x-1}$;

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^5-5x^4-3}{3x^3+5x+4}$;

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{12x^3+7x^2-2}{6x^3+5x+10}$;

4. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+2x+8}-\sqrt{x^2+x+3})$;

5. $\lim\limits_{x\to 1/3}\dfrac{9x^2-6x+1}{3x^2+2x-1}$;

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x^2}$;

7. $\lim\limits_{x\to 0}(1-x)\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2}$;

8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\sin 5x}$;

9. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x-2}\right)^{x+3}$;

10. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-e^{-x}}{\sin 2x}$;

№10

1. $\lim\limits_{x\to -4}(x-6)\left(\dfrac{1}{3}x+8\right)$;

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^2-14x+12}{13x^4+7x-3}$;

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3+18x-3}{3x^3+5x^2+10}$;

4. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+3x-2}-\sqrt{x^2-2x+5})$;

5. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2-x-1}{4x^2-7x+3}$;

6. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{4-x}-\sqrt{2}}{x^2-4}$;

7. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\arcsin(x+2)}{x^2+2x}$;

8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(x^2)}{(\sin x)^5}$;

9. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+5}{3x+3}\right)^{2x-1}$;

10. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg}3x}{1-e^{-3x}}$;

№11

1. $\lim\limits_{x\to 10}\dfrac{(4x+80)(x-5)}{2x-10}$;

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-5x+14}{14x^3+2x^2-3}$;

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^5+4x+3}{10x^3+5x^2-1}$;

4.

$\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{14x^2-3x+5}-\sqrt{14x^2+5})$;

5. $\lim\limits_{x\to 1/2}\dfrac{8x^3-1}{4x^2-4x+1}$;

6. $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{2-\sqrt{x-3}}{49-x^2}$;

7. $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{1-\sin\dfrac{x}{2}}{\pi-x}$;

8. $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{\cos x-\cos 5x}{\mathrm{tg}^2 x}$;

9. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+5}{2x+7}\right)^{x-3}$;

10. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-x^{-x}}{\arcsin 3x}$;

№12

1. $\lim\limits_{x\to -5}(x-10)(x+7)$;

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3-5x^2+11}{13x^2-5x-7}$;

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{11x^5+7x^2-12}{3x^5+6x^3+13x}$;4.

4.

$\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^4+3x^2-7}-\sqrt{x^4+7x+2})$;

5. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-4x-5}{2x^2-3x-5}$;

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{5-x}-\sqrt{5}}{x^2+2x}$;

7. $\lim\limits_{x\to\pi/3}\dfrac{\sin\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)}{1-2\cos x}$;

8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\mathrm{tg} 7x}$;

9. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-2}{3x+1}\right)^{2x}$;

10. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^x-1}{\mathrm{tg} x}$;

№13

1. $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{(x+4)(2x+7)}{x+6}$;

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x^3+5x-4}{3x^4+6x+11}$;

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^3+8x^2+1}{12x^3-9x+5}$;

4.
$\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+3x+8}-\sqrt{x^2-2x+1})$;

5. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{2x^2+5x+2}{x^2-4}$;

6. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sqrt{3x+a}-\sqrt{x+3a}}{x-a}$;

7. $\lim\limits_{x\to 2/2}\dfrac{\arcsin(1-2x)}{4x^2-1}$;

8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2\dfrac{x}{2}}{x^2}$;

9. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+5}{x-3}\right)^{2x-1}$;

10. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-3x}-1}{2x}$;

№14

1. $\lim\limits_{x\to 11}\left(\dfrac{4}{22}x-1\right)(5x+6)$;

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{12x^4+6x-1}{5x^4-4x^3+3}$;

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{25x^4+7x^2-3}{8x^6+5x+4}$;

4. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+7x+3}-\sqrt{x^2+8})$;

5. $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{x^2+6x+5}{x^2-x-30}$;

6. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{4x+1}-3}{\sqrt{x+2}-2}$;

7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x\cdot\sin x}{\operatorname{arctg}^2(-3x)}$;

8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{1-\cos 2x}$;

9. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+5}{2x+8}\right)^{3x}$;

10. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^x-3^{-x}}{\operatorname{tg}2x}$;

№15

1. $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{(2x+3)(3x-4)}{7x-8}$;

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{15x^3+7x+5}{23x^4-17x+8}$;

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x^4+17x^2+9}{5x^4+8x-3}$;

4. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{2x^2-4x+6}-\sqrt{2x^2+3x-4})$

5. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4x+4}{3x^2-2x-8}$;

6. $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$;

7. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin\pi x}{\sin 3\pi x}$;

8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(a+x)-\sin(a-x)}{x}$;

9. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{x+3}\right)^{x+2}$;

10. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-2x}-e^{x}}{5x}$;

№16

1. $\lim\limits_{x\to -1}(2x-13)\left(x+\dfrac{1}{3}\right)$;

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{11x^5+x^4-19}{12x^6+10x+2}$;

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^4+x^2+3x}{4x^4+3x-2}$;

4. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{4x^2+x+5}-2\sqrt{x^2-5x+4})$

5. $\lim\limits_{x\to -7}\dfrac{x^2+6x-7}{2x^2+15x+7}$;

6. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{2-x}}{x-1}$;

7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\sin^2 3x}$;

8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 5x-\cos 9x}{x^2}$;

9. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{x+3}\right)^{x+2}$;

10. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{5x^2}-1}{\sin^2 3x}$;

№17

1. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{(x+5)(2x+15)}{x+6}$;

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^3+4x^2-5}{7x^4+3x+6}$;

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x^5+4x^4-3}{5x^5-3x+6}$;

4. $\lim\limits_{x\to +\infty}(\sqrt{3x^2+6x+3}-\sqrt{3x^2-2x-5})$;

5. $\lim\limits_{x\to 0,1}\dfrac{10x^2-21x+2}{x^2+0,9x-0,1}$;

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{4+x-2}}$;

7. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}}$;

8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x-\sin x}{\mathrm{tg}x}$;

9. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+14}{x+6}\right)^{2x-3}$;

10. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^x-2^{-x}}{\sin 3x}$;

№18

1. $\lim\limits_{x\to -4}(6x^2-x-1)$;

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^5+x^3+5}{7x^5+3x-4}$;

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{16x^2-7x+3}{6x^3+5x+4}$;

4. $\lim\limits_{x\to +\infty}(\sqrt{x^2-4x+5}-\sqrt{x^2+3x-2})$;

5. $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{x^2-10x+21}{x^2-14x+49}$;

6. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x-4}{\sqrt{5x+5}-5}$;

7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}5x}{2x}$;

8. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\arcsin(1-x)}{\sqrt{x}-1}$;

9. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+2}{x^2-1}\right)^{x^2}$;

10. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\sin 6x}$;

№19

1. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{(4x-10)(2x+20)}{4x-16}$;

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^4+7x^3+100}{-8x^4+3x-5}$;

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{15x^8+7x^5+6}{9x^6+10x^2+12}$;

4. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{9x^6+4x^3+7}-3\sqrt{x^6+x+5})$;

5. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-10x+16}{x^2-2x}$;

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{1+3x}-1}$;

7. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{1-2\cos x}{\pi-3x}$;

8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg}^2 2x}{x\sin(-3x)}$;

9. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x+1}{4x-1}\right)^{3x}$;

10. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-e^{-x}}{\operatorname{tg}4x}$;

№20

1. $\lim\limits_{x\to\infty}(x^2-x+1)$;

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{13x^5+12x^2-13}{2x^5+11x^3+10}$;

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{16x^6+12x^4+1}{4x^5+12x^3+10}$;

4. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{9x^6-9x+6}-3\sqrt{x^6+2x})$;

5. $\lim\limits_{x\to 17}\dfrac{x^2-18x+17}{x^2-16x-17}$;

6. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{1+3x}-\sqrt{5x-9}}{x^2-5x}$;

7. $\lim\limits_{x\to 0}x\operatorname{ctg}2x$;

8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 5x-\cos 3x}{1-\cos x}$;

9. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x+3}{5x-2}\right)^{4x}$;

10. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-1}{1-\cos x}$;

№21

1. $\lim\limits_{x\to 2}(2x+9)(3x+7)$;

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^3+12x+4}{8x^5+4x^3+7}$;

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{12x^5+7x^4-3}{8x^5+4x+5}$;

4. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{14x^2-3x+2}-\sqrt{14x^2-2x+3})$;

5. $\lim\limits_{x\to\frac{2}{3}}\dfrac{9x^2-12x+4}{9x^2+9x-10}$;

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+2x}-\sqrt{1-x}}{3x}$;

7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot \operatorname{tg}5x}{\operatorname{arctg}^2 2x}$;

8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-\sin 3x}{\arcsin x}$;

9. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+5}{x-1}\right)^{2x+1}$;

10. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{5x}}{\sin 7x}$;

№22

1. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{(4x^2-25)(x+3)}{4x-5}$;

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^7+5x^2-4}{3x^2+5x+6}$;

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^6-4x^2+5}{2x^6+2x+3}$;

4. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{3x^2+5x-4}-\sqrt{3x^2-x+5})$;

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+10x+21}{x^2+5x-14}$;

6. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{1+x}-2\sqrt{x-2}}{-9x^2}$;

7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin^3 2x}{x^2\cdot \operatorname{arctg}(-3x)}$;

8. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\cos 3x-\cos x}{\operatorname{tg}^2 x}$;

9. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-1}{x^2}\right)^{2x^2+1}$;

10. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^x-1}{\sin 3x}$;

№23

1. $\lim\limits_{x\to -4}(3x^2-2x+5)$;

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{17x^5+12x+6}{8x^4+5x+16}$;

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{9x^7+8x^5+12}{10x^7+6x-5}$;

4. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^4+5x^2+8}-\sqrt{x^4-5x^2+5})$;

5. $\lim\limits_{x\to 1/3}\dfrac{3x^2-10x+3}{9x^2-6x+1}$;

6. $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{\sqrt{2+x}-3}{x-7}$;

7. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(1-x)}{\sqrt{x}-1}$;

8. $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{\mathrm{tg}^2 5x}{2x^2}$;

9. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x}{4x+1}\right)^{3x+2}$;

10. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-e^{7x}}{\mathrm{tg}12x}$;

№24

1. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{(x-4)(x+8)}{2x+3}$;

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{12x^3-7x^2+5}{16x^4+5x+5}$;

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{12x^4+7x^2+5}{16x^4+5x+5}$;

4. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{4x^2+x+5}-2\sqrt{x^2-3x+9})$;

5. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-4x+3}{x^2-2x-3}$;

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{9+5x}-3}{x}$;

7. $\lim\limits_{x\to 1/2}\dfrac{\arcsin(1-2x)}{4x^2-1}$;

8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2-\sin x}{x-2}$;

9. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x^2+2}\right)^{x^2-3}$;

10. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-e^{3x}}{\mathrm{tg}x}$;

№25

1. $\lim\limits_{x\to -3}(2x^2-5x-9)$;

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x^5-15x^2+6}{13x^5-12x+17}$;

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{15x^5-17x^2+9}{9x^4+81x-3}$;

4. $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{3x^2+7x+2}-\sqrt{3x^2-4x+1})$;

5. $\lim\limits_{x\to\frac{1}{4}}\dfrac{4x^2+3x-1}{4x^2-17x+4}$;

6. $\lim\limits_{x\to\frac{1}{4}}\dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2}$;

7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 2x}{3x^2}$;

8. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sin^2 x-\sin^2 3}{x^2-9}$;

9. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+1}{3x+7}\right)^{2x+1}$;

10. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\sin 5x}$;

№26

1. $\lim\limits_{x\to -1}(4-x)(5x+7)$;

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{11x^4-7x^2+5}{11x^4+5x-3}$;

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{24x^3+7x^2-2}{7x^5+6x^3-3}$;

4. $\lim\limits_{x\to +\infty}(\sqrt{x^4+7x-2}-\sqrt{x^4+3x-7})$;

5. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+2x-15}{x^2-8x+15}$;

6. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{5-\sqrt{x^2+9}}{\sqrt{2x+1}-3}$;

7. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\operatorname{arctg}^2 5x}{5x\cdot\operatorname{tg}3x}$;

8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos 2x}{x\sin x}$;

9. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2}{x^2-5x}\right)$;

10. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-e^x}{\operatorname{tg}4x}$;

№27

1. $\lim\limits_{x\to 15}(20x-4)(x-10);$

2. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{105x^4-12x+7}{11x^2+5x+4};$

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{28x^4-17x^3+5}{10x^4+5x^2+74};$

4. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{9x^6-3x^2+7}-\sqrt{9x^6-2x+7});$

5. $\lim\limits_{x\to 2/7}\dfrac{49x^2-28x+4}{7x2^4+5x-2};$

6. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{2x-1}-\sqrt{5}}{x-3};$

7. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sin(x-2)}{x^2-4};$

8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x-\sin 6x}{2\arcsin x};$

9. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x+4}\right)^{7x};$

10. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^x-1}{\mathrm{tg}3x};$

№28

1. $\lim\limits_{x\to 12}\left(\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{1}{4}x+\dfrac{1}{8}\right);$

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{18x^9+24x^6-x^3+3}{7x^5-4x^2+5};$

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^4+5x^2-4}{2x^4+7x^2+10};$

4. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{3x^2+7x-2}-\sqrt{3x^2-4x+11});$

5. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^5+5x+2}{4x^2-16};$

6. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{\sqrt{x^2+5}-3};$

7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3}{\sin^2 2x};$

8. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\mathrm{arctg}(x-1)}{x^2-1};$

9. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+3}{x^2+1}\right)^{x^2+1};$

10. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-e^{-4x}}{\mathrm{tg}3x};$

№29

1. $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{(2x+11)(x-12)}{3-x}$;

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^2-4x+5}{2x^7+3x^2-3}$;

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2+2x+1}{3x^5+3x^2+7x+5}$;

4. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{14x^2+9x+3}-\sqrt{14x^2+7x-2})$;

5. $\lim\limits_{x\to1/5}\dfrac{5x^2+4x-1}{5x^2-6x+1}$;

6. $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{3-\sqrt{5+x}}{1-\sqrt{5-x}}$;

7. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{arctg}^2\dfrac{x}{2}}{x\cdot\operatorname{tg}5x}$;

8. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos4x-\cos x}{\operatorname{arctg}^2 2x}$;

9. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+4}{3x+5}\right)^{x+1}$;

10. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-e^{2x}}{\sin7x}$;

№30

1. $\lim\limits_{x\to3}\left(\dfrac{1}{4}x-4\right)\left(\dfrac{1}{6}x+7\right)$;

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3+3x+11}{3x^3+4x+17}$;

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{12x^2+3x+5}{3x^3+4x+17}$;

4. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-2x+5}-\sqrt{x^2+7x-3})$;

5. $\lim\limits_{x\to1/3}\dfrac{9x^2-1}{9x^2-6x+1}$;

6. $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{\sqrt{3x+1}-\sqrt{2x+6}}{x^2-5x}$;

7. $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{\arcsin(x+2)}{x^2+2x}$;

8. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin(-3x)}{\operatorname{tg}5x}$;

9. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x^2+2}{5x^2}\right)^{3x^2-1}$;

10. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{2x}-e^{-2x}}{\sin3x}$;

Варіант «0»

Обчислити границі функцій.

1. $\lim\limits_{x\to 2}(5x^2-3x+4);$

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3+4x+5}{2x^3+4x+7};$

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^4+3x^2+2x}{3x^3+4x-2};$

4. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{3x^2+4x-3}-\sqrt{3x^2-2x+7});$

5. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{3x^2-7x-6}{2x^2+x-21};$

6. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+1}-2}{\sqrt{2x+3}-3};$

7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{\mathrm{tg}2x};$

8. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{1-\sin x}{\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)};$

9. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-1}{2x+1}\right)^x;$

10. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{3x};$

Розв'язання.

1. $\lim\limits_{x\to 2}(5x^2-3x+4)=5\cdot 4-3\cdot 2+4=20-6+4=18;$

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3+4x+5}{2x^3+4x+7}=\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\cancel{x^3}\left(3-\dfrac{4}{x^2}+\dfrac{5}{x^3}\right)}{\cancel{x^3}\left(2+\dfrac{4}{x}+\dfrac{7}{x^3}\right)}=\dfrac{3}{2},$ тому що

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4}{x^2}=0,\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5}{x^3}=0,\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4}{x}=0$ та $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{7}{x^3}=0;$

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^4+3x^2+2x}{3x^3+4x-2}=\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\cancel{x^4}\left(4+\dfrac{3}{x^2}+\dfrac{2}{x^4}\right)}{\cancel{x^4}\left(3+\dfrac{4}{x^2}-\dfrac{2}{x^3}\right)}=$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x\left(4+\dfrac{3}{x^2}+\dfrac{2}{x^3}\right)}{3+\dfrac{4}{x^2}-\dfrac{2}{x^3}}=\infty;$$

4. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{3x^2+4x-3}-\sqrt{3x^2-2x+7})=(\infty-\infty)=$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{3x^2+4x-3}-\sqrt{3x^2-2x+7})(\sqrt{3x^2+4x-3}-\sqrt{3x^2-2x+7})}{\sqrt{3x^2+4x-3}+\sqrt{3x^2-2x+7}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{3x^2+4x-3})^2-(\sqrt{3x^2-2x+7})^2}{\sqrt{3x^2+4x-3}+\sqrt{3x^2-2x+7}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2+4x-3-(3x^2-2x+7)}{\sqrt{3x^2+4x-3}+\sqrt{3x^2-2x+7}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{6x-10}{\sqrt{3x^2+4x-3}+\sqrt{3x^2-2x+7}}=$$

$$=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x\left(6-\dfrac{10}{x}\right)}{\sqrt{x^2\left(3+\dfrac{4}{x}-\dfrac{3}{x^2}\right)}+\sqrt{x^2\left(3-\dfrac{2}{x}+\dfrac{7}{x^2}\right)}}=$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{x}\left(6-\frac{10}{x}\right)}{\cancel{x}\left(\sqrt{3+\frac{4}{x}-\frac{3}{x^2}}+\sqrt{3-\frac{2}{x}+\frac{7}{x^2}}\right)} = \frac{6}{2\sqrt{3}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3};$$

5. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{3x^2-7x-6}{2x^2+x-21} = \dfrac{3\cdot 9-7\cdot 3-6}{2\cdot 9+3-21} = \left(\dfrac{0}{0}\right) = \ldots$ розкладемо чисельник та знаменник на множники:

$3x^2-7x-6=0$

$x_{1n} = \dfrac{7\pm\sqrt{49+72}}{6} = \dfrac{7\pm\sqrt{121}}{6} = \dfrac{7\pm 11}{6}$

$x_1 = \dfrac{7+11}{6} = 3, \quad x_2 = \dfrac{7-11}{6} = -\dfrac{2}{3}, \quad 3x^2-7x+6 = 3(x-3)\left(x+\dfrac{7}{2}\right)$

$$\ldots = \lim_{x\to 3}\frac{3\left(\cancel{x-3}\left(x+\frac{2}{3}\right)\right)}{2\left(\cancel{x-3}\left(x+\frac{7}{2}\right)\right)} = \lim_{x\to 3}\frac{3x+2}{2x+7} = \frac{11}{13}$$

6. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+1}-2}{\sqrt{2x+3}-3} = \lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(\sqrt{x+1}-2)(\sqrt{\sqrt{x+1}+2})(\sqrt{2x+3}+3)}{(\sqrt{2x+3}-3)(\sqrt{2x+3}+3)(\sqrt{x+1}+2)} =$

$$= \lim_{x\to 3}\frac{(x+1-4)(\sqrt{2x+3}+3)}{(2x+3-9)(\sqrt{x+11}+2)} = \lim_{x\to 3}\frac{\cancel{(x-3)}\,(\sqrt{2x+3}+3)}{\cancel{(2x-6)}\,(\sqrt{x+11}+2)} =$$

$$= \lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{2x+3}+3}{2(\sqrt{x+11}+2)} = \frac{3+3}{2(2+2)} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4};$$

7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{\mathrm{tg}2x} = \left(\dfrac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x}{2x} = \dfrac{3}{2}$, тому що $\sin\alpha : \cos\alpha$ та $\mathrm{tg}\alpha : \alpha$ коли $\alpha\to 0$;

$$8.\ \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin x}{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)} = \left(\frac{0}{0}\right) = \left| \begin{matrix} \frac{\pi}{2}-x=y,\ x=\frac{\pi}{2}-y \\ x\to\frac{\pi}{2}\Rightarrow y\to 0 \end{matrix} \right| = \lim_{y\to 0} \frac{1-\sin\left(\frac{\pi}{2}-y\right)}{y^2} =$$

$$= \lim_{y\to 0}\frac{1-\cos y}{y^2} = \lim_{y\to 0}\frac{\frac{y^2}{2}}{y^2} = \frac{1}{2},$$ тому що $1-\cos\alpha \sim \frac{\alpha^2}{z}$ коли $\alpha\to 0$.

$$9.\ \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x-1}{2x+1}\right)^x = (1^\infty) = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2x-1}{2x+1}-1\right)^x =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2x-(-2x-1)}{2x+1}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{-2}{2x+1}\right)^{-\frac{2x+1}{2}}\right)^{-\frac{2}{2x+1}\cdot x} =$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-2x}{2x+1}} = e^1 = \frac{1}{e};$$

10. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{3x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x\to 0}\frac{2x}{3x} = \frac{2}{3}$ тому що $e^\alpha - 1 \sim \alpha$ коли $\alpha \to 0$.

Зауваження:

1. При розв'язанні прикладів 2 та 3 можна було використати формулу

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_n}{b_0x^k+b_1x^{k-1}+\ldots+b_k} = \begin{cases} \frac{a_0}{b_0}, & \text{якщо } n=k \\ 0, & \text{якщо } n<k \\ \infty, & \text{якщо } n>k \end{cases}$$

Тоді розв'язання прикладу 2 можна записати у вигляді

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3+4x+5}{2x^3+4x^2+7}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\frac{3}{2},$$

тому що ступінь чисельника дорівнює ступеню знаменника, а розв'язання прикладу 3

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4x^4+3x^2+2x}{3x^3+4x-2}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\infty,$$

тому що ступінь чисельника більша за ступінь знаменника.

2. При розв'язанні прикладу 5 при розкладанні чисельника та знаменника на лінійні множники можна не розв'язувати квадратне рівняння.

Так при розкладанні чисельника на множники можна скористатися властивостями коренів квадратного рівняння: корені квадратного тричлена ax^2+bx+c задовольняють умовам $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$, а $x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}$ (теорема Вієтта).

Чисельник обертається до нуля коли $x = 3$ (тобто один корінь відомий – $x_1 = 3$). Для визначення другого кореня достатньо розв'язати рівняння $x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}$,, тобто $3x_2=-\frac{6}{3}$ або $x_2=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$. Розв'язання прикладу 5 можна записати у вигляді:

$$\lim_{x\to 3}\frac{3x^2-7x-6}{2x^2+x-21}=\left(\frac{0}{0}\right)=\ldots$$

$$3x^2-7x-6=0\Rightarrow x_1=3,\quad x_1\cdot x_2=-2,$$

$$3x_2=-2,\quad x_2=-\frac{2}{3}$$

$$3x^2-7x-6=3(x-3)\left(x+\frac{2}{3}\right)$$

$$2x^2+x-21=0\Rightarrow x_1=3,\quad x_1\cdot x_2=-\frac{21}{2},\quad 3x_2=-\frac{21}{2},x_2=-\frac{7}{2}$$

$$\ldots=\lim_{x\to 3}\frac{3(x-3)\left(x+\frac{2}{3}\right)}{2(x-3)\left(x+\frac{7}{2}\right)}=\lim_{x\to 3}\frac{3x+2}{2x+7}=\frac{11}{13}.$$

Завдання для поглибленої підготовки

Обчислити границі функції.

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{3x^4+5x-35}+3\sqrt{2x^3+5x^2+4}}{\sqrt[4]{7x^3+4x^2+3}+\sqrt[4]{3x^5+7x^4-5}}$;

2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{5x^2-4x+3}+\sqrt{x^3-4x^2+5}}{\sqrt{3x^2+5x-3}+\sqrt[4]{x-3}}$;

3. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{3x^2+4x-2}+\sqrt[6]{x^3-4x+3}}{\sqrt[3]{4x^3+5x+43}+\sqrt[4]{x^3+2x+4}}$;

4. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt[3]{8x^3+4x-5}+\sqrt{x-3}}{\sqrt{x^2+4x+3}+\sqrt[4]{x+7}}$;

5. $\lim\limits_{x\to-3}\left(\dfrac{x+2}{x+3}-\dfrac{x^2-4}{x^2+4x+3}\right)$;

6. $\lim\limits_{x\to\frac{5}{2}}\left(\dfrac{x+2}{2x+5}-\dfrac{x^2-4x}{2x^2-3x-5}\right)$;

7. $\lim\limits_{x\to5}\left(\dfrac{x+3}{5-x}-\dfrac{x^2-4}{15+2x-x^2}\right)$;

8. $\lim\limits_{x\to3}\left(\dfrac{x+1}{x-3}-\dfrac{x^2+13}{x^2-8x+15}\right)$;

9. $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{\sqrt{2x+1}-3}{2-\sqrt[3]{3x-4}}$;

10. $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{\sqrt{x+6}}{\sqrt[3]{29+x}-3}$;

11. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt{2x+5}-3}{\sqrt[3]{3x+2}-2}$;

12. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt[3]{3x-1}-\sqrt[3]{2x+2}}{x-3}$;

13. $\lim\limits_{x\to +\infty}(x+1)[\ln x-\ln(x+5)]$;

14. $\lim\limits_{x\to +\infty}(4x-1)[\ln(x+5)-\ln(x-1)]$;

15. $\lim\limits_{x\to +\infty}(2x+1)[\ln(x+1)-\ln(x+3)]$;

16. $\lim\limits_{x\to +\infty}x[\ln(3x-4)-\ln(3x+4)]$;

17. $\lim\limits_{x\to 6}\left(\dfrac{2x-6}{x}\right)^{\frac{3}{x-6}}$;

18. $\lim\limits_{x\to 4}\left(\dfrac{x+1}{2x-3}\right)^{\frac{2x}{x-4}}$;

19. $\lim\limits_{x\to\sqrt{2}}\left(\dfrac{1+x^2}{2x^2-1}\right)^{\frac{1}{x^2-2}}$;

20. $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{3x+1}{x+5}\right)^{\frac{3}{x-2}}$;

21. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(3+2x)-\ln(3-2x)}{x}$;

22. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(5+x)-\ln(5-2x)}{x}$;

23. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(10-x)-\ln(10+3x)}{x}$;

24. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(3x+1)-\ln(3x-2)}{x}$.

Тема 5.
ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ ТА ЙОГО ЗАСТОСУВАННЯ

Варіанти завдань

Завдання 1.

Використовуючи правила диференціювання та таблицю похідних, знайти похідні $\frac{dy}{dx}$ поданих функцій.

№01

а) $y = \frac{x}{\sqrt{4 - x^2}}$;

б) $y = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg}^2 x)$;

в) $y = \arcsin\sqrt{3 + 2x}$;

г) $y = 2^{\cos 5x}$;

д) $y = 2^{\cos 5x}$;

е) $\begin{cases} x = 3\cos^2 t \\ y = 4\sin^2 t \end{cases}$

ж) $y = (\cos x)^{x^2}$.

№02

а) $y = \frac{x}{\sqrt{x^2 + x - 2}}$;

б) $y = 3^{\sin^2 4x}$;

в) $y = \operatorname{tg}\ln(x^2 + 2)$;

г) $y = \operatorname{arctg}\sqrt{1 - 7x}$;

д) $y = \cos^3(\operatorname{tg} 5x)$;

е) $\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$

ж) $y = x^{\frac{1}{x}}$.

№03

а) $y=\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}+1}$;

б) $y=\cos^2(3x)+\operatorname{tg}\sqrt{3x}$;

в) $y=e^{\arccos^3 5x}$;

г) $y=\ln(x^2+\sqrt[4]{1-x^3})$;

д) $y=\operatorname{arctg}\sqrt{\dfrac{x+4}{x-1}}$;

е) $\begin{cases} x=\cos\left(\dfrac{t}{2}\right) \\ y=t-\sin t \end{cases}$

ж) $y=x^{x^2}$.

№04

а) $y=\operatorname{tg}\dfrac{1-e^x}{1+e^x}$;

б) $y=\arcsin(\ln x)$;

в) $y=\operatorname{arc\,tg}(x^3-3x)$;

г) $y=\sin^2\dfrac{x}{3}\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$;

д) $y=e^{\sqrt{1-x^2}}$;

е) $\begin{cases} x=t^3+8t \\ y=t^5+2t \end{cases}$

ж) $y=(\operatorname{tg}x)^{x^2}$.

№05

а) $y=xe^{1-\cos x}$;

б) $y=\ln(x+\sqrt{x^2-1})$;

в) $y=e^{\frac{1}{\ln x}}$;

г) $y=\cos\dfrac{\arcsin x}{2}$;

д) $y=\dfrac{2\sin^2 x}{\cos 2x}$;

е) $\begin{cases} x=\sin 3t \\ y=e^{2t} \end{cases}$

ж) $y=\left(\dfrac{x^2-1}{x^2+3}\right)^{4x}$.

№06

а) $y=x^2e^{1+\cos x}$;

б) $y=\ln\operatorname{arctg}x^3$;

в) $y=10^{x\operatorname{tg}x}$;

г) $y=x\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x^2}}$;

д) $y=\sin xe^{\cos x}$;

е) $\begin{cases} x=\ln 2t \\ y=1-e^{-t} \end{cases}$

ж) $y=x^{-\operatorname{tg}x}$.

№07

а) $y=\log_3(x^2-\sin x)$;

б) $y=\operatorname{arctg}\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$;

в) $y=\sin^2\left(\dfrac{1-\ln x}{x}\right)$;

г) $y=x^2\sqrt{1+\sqrt{x}}$;

д) $y=\dfrac{\ln\sin x}{\ln\cos x}$;

е) $\begin{cases} x=t^2-t \\ y=\operatorname{arctg} t \end{cases}$

ж) $y=x^{\ln x}$.

№08

а) $y=\ln(x-\cos x)$;

б) $y=\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{tg}^4 x}$;

в) $y=\arcsin\sqrt{\sin x}$;

г) $y=\dfrac{1}{\operatorname{arctg}(e^{-2x})}$;

д) $y=\dfrac{2\cos x}{\sqrt{2\cos x}}$;

е) $\begin{cases} x=t\cos t \\ y=t-e^{-t} \end{cases}$

ж) $y=(\operatorname{arctg} x)^{\frac{1}{x}}$.

№09

а) $y=x\cdot 3^{\sqrt{x}}$;

б) $y=\cos x\sqrt{1+\sin^2 x}$;

в) $y=x\ln(\arcsin x)$;

г) $y=\ln\dfrac{1-e^{\sqrt{x}}}{e^x}$;

д) $y=\sin^2 x\sin(x^2)$;

е) $\begin{cases} x=t^3 \\ y=\arcsin^2 t \end{cases}$

ж) $y=x^{\operatorname{tg} x}$.

№10

а) $y=\arcsin(3\sin x)$;

б) $y=\ln^4\cos 2x$;

в) $y=2^{\frac{x}{\ln x}}$;

г) $y=\sin 2^x$;

д) $y=\arcsin\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$;

е) $\begin{cases} x=\operatorname{tg}^2 t \\ y=e^{3t} \end{cases}$

ж) $y=(1+x^3)^{\operatorname{tg} x}$.

№11

а) $y = \mathrm{arctg}(x - \sqrt{1 - x^2});$

б) $y = \ln \mathrm{tg}x;$

в) $y = \arccos^2 \frac{1}{x};$

г) $y = \sqrt{\frac{1 - x^2}{1 + x^2}};$

д) $y = 10^{1 - \sin^4 3x};$

е) $\begin{cases} x = t^2 - t \\ y = \ln t \end{cases}$

ж) $y = (\sqrt{x})^{\frac{1}{x}}.$

№12

а) $y = \mathrm{tg}x - \frac{1}{3}\mathrm{tg}^2 x + \frac{1}{5}\mathrm{tg}^5 x;$

б) $y = \sqrt{1 + \mathrm{arctg}^3 x};$

в) $y = \ln^2 x - \ln(\ln x);$

г) $y = \sqrt[4]{\frac{x - 2}{x + 1}};$

д) $y = \sin^2 5x \cos^2 \frac{x}{3};$

е) $\begin{cases} x = \sin^2 t \\ y = \cos t \end{cases}$

ж) $y = (\sin x)^{\ln x}.$

№13

а) $y = \arcsin \frac{1}{x};$

б) $y = \frac{1}{\sqrt{x} \cos^2 \sqrt{x}};$

в) $y = \ln\left(\sqrt{1 + e^x} - 1\right);$

г) $y = \ln \sin x;$

д) $y = \mathrm{arctg} e^x;$

е) $\begin{cases} x = t^3 + 7t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$

ж) $y = (\mathrm{tg}x)^{2^x}.$

№14

а) $y = \arccos \sqrt[3]{x};$

б) $y = \ln(\mathrm{ctg}3x);$

в) $y = e^{\sin^2 x};$

г) $y = \sqrt{\frac{x - 2}{x + 3}};$

д) $y = \frac{\ln(x^2 + 1)}{\ln(x^2 - 1)};$

е) $\begin{cases} x = t + 2\sin t \\ y = \mathrm{arctg} t \end{cases}$

ж) $y = (\cos x)^{\sin x}.$

№15

а) $y=\operatorname{arctg}(3\ln x)$;

б) $y=\sqrt{1+\cos^4 x}$;

в) $y=2^{\arcsin 3x}$;

г) $y=\sqrt{\sin x}\cdot e^{\sqrt{\sin x}}$;

д) $y=x\cdot\arcsin\dfrac{1}{x}$;

е) $\begin{cases} x=t^4-t \\ y=\sin 3t \end{cases}$

ж) $y=(x^3)^{\frac{1}{x}}$.

№16

а) $y=x^3\cdot 4^{-x^2}$;

б) $y=\sqrt{\dfrac{x-3}{x^2+4}}$;

в) $y=\ln(x^2+x-2)$;

г) $y=\ln\arccos x+\arccos\ln x$;

д) $y=2^{\arcsin\frac{3}{x}}$;

е) $\begin{cases} x=3\cos^3 t \\ y=3\sin^3 t \end{cases}$

ж) $y=(\arccos 2x)^{\frac{1}{x}}$.

№17

а) $y=3^{\operatorname{ctg}\frac{1}{x}}$;

б) $y=\arcsin\ln x$;

в) $y=\ln\ln(3-x^2)$;

г) $y=\dfrac{\cos x}{\sin^2 x}$;

д) $y=x\cdot\sqrt{1-\operatorname{arctg}^3 x}$;

е) $\begin{cases} x=\dfrac{e^t+e^{-t}}{2} \\ y=\cos^2 t \end{cases}$

ж) $y=(x^3+1)^{\sin x}$.

№18

а) $y=\dfrac{\ln(1+\sqrt{\sin x})}{1-\sqrt{\sin x}}$;

б) $y=\operatorname{arctg}\dfrac{x+3}{\cos x}$;

в) $y=4^{\arccos^3 x}$;

г) $y=(1-\operatorname{tg}4x)^7$;

д) $y=\ln(\arccos 4x)$;

е) $\begin{cases} x=t^2 \\ y=\dfrac{t^3}{3}-\sin t \end{cases}$

ж) $y=\left(\dfrac{x^2+3}{x-4}\right)^{3x+2}$.

№19

а) $y=\sqrt[3]{\dfrac{x^2-4}{x+5}}$;

б) $y=e^{x^2}\cdot\cos 4x$;

в) $y=\operatorname{tg}\left(\arccos 5x\right)$;

г) $y=\arcsin\sqrt{\ln x}$;

д) $y=\ln\dfrac{1+\sqrt{x^2+1}}{x}$;

е) $\begin{cases} x=\operatorname{tg}t \\ y=\sin^2 t \end{cases}$

ж) $y=(\sin 2x)^{\ln x}$.

№20

а) $y=4^{\operatorname{arctg}^3(2x+1)}$;

б) $y=\sqrt{\dfrac{x+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}}}$;

в) $y=\arccos^3(4^x)$;

г) $y=\ln\sqrt[3]{1+x^5}$;

д) $y=\sin^5 3x\cdot\operatorname{tg}^4\dfrac{1}{x}$;

е) $\begin{cases} x=2(t-\sin t) \\ y=2(1-\cos t) \end{cases}$

ж) $y=x^{\sqrt{x}}$.

№21

а) $y=\left(x^2+\sqrt{\dfrac{1+4x}{1-4x}}\right)^4$;

б) $y=3^{\arccos\sqrt[3]{x^2}}$;

в) $y=x\cdot\operatorname{arctg}^3 5x$;

г) $y=\ln\left(\arcsin\dfrac{x}{2}+\cos^2 2x\right)$;

д) $y=\dfrac{\sqrt{1+\cos^5 x}}{1+\sin^3 x}$;

е) $\begin{cases} x=e^{2t} \\ y=\sin t \end{cases}$

ж) $y=(x^2+\cos x)^{\frac{1}{x}}$.

№22

а) $y=x+\arccos^2 e^x$;

б) $y=\ln\dfrac{\cos\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}x}$;

в) $y=e^{\frac{1}{\cos x}}$;

г) $y=x\cdot\operatorname{arctg}^2(\sin 2x)$;

д) $y=\sqrt[4]{\dfrac{2x+3}{x-4}}$;

е) $\begin{cases} x=\cos 4t \\ y=e^{2t} \end{cases}$

ж) $y=\dfrac{x\cdot\sin 3x\cdot\sqrt{1+x^2}}{(1+x)^5}$.

№23

а) $y=(1+\operatorname{arctg}^4 3x)\cdot e^{-x}$;

б) $y=\arccos\left(2^{\frac{1}{x}}\right)$;

в) $y=\sqrt[3]{\sin 4x}\cdot\cos 5x$;

г) $y=e^{-\frac{1}{\sin x}}\arcsin 4x$;

д) $y=\ln\left(x+\sqrt{\frac{2-x}{2+x}}\right)$;

е) $\begin{cases} x=1-t^2 \\ y=\sin 2t \end{cases}$

ж) $y=\dfrac{(x+7)^3\cos 4x\operatorname{tg}3x}{(x^2+4)^6}$.

№24

а) $y=\ln\left(x^2+\sqrt[3]{x^4+7}\right)$;

б) $y=6^{\cos\sqrt{x^3}}$

в) $y=\operatorname{tg}^3(\sqrt{5x})$;

г) $y=e^{\arcsin(1-2x)}$;

д) $y=\sin^2 2x\cdot\cos^{\frac{1}{3}} x$;

е) $\begin{cases} x=\operatorname{arctg}3t \\ y=2^t \end{cases}$

ж) $y=\dfrac{x^2\sin^3 2x}{e^{5x}(x^2+1)}$.

№25

а) $y=x^2\cdot\sqrt{\frac{3x+2}{4x-5}}$;

б) $y=\operatorname{ctg}^2(6x)-e^{\frac{1}{\sqrt{x}}}$;

в) $y=(1+\cos^2 x)\cdot\ln(\sin x)$;

г) $y=3^{\operatorname{arctg}\sqrt[3]{x^4}}$;

д) $y=\arcsin^3\left(\frac{1}{x}\right)$;

е) $\begin{cases} x=\arcsin t \\ y=e^{t^2} \end{cases}$

ж) $y=\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\cos^2 x}$.

№26

а) $y=x\cdot\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$;

б) $y=\sqrt{x}\cdot 2^{\frac{1}{x}}$;

в) $y=e^{-x^2}+\operatorname{arctg}\sqrt{x}$;

г) $y=\ln\dfrac{x+\sqrt{9-x^2}}{x^3}$;

д) $y=\dfrac{\sqrt{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}}{1+\cos^2 x}$;

е) $\begin{cases} x=t+t^3 \\ y=e^{2t} \end{cases}$

ж) $y=(\operatorname{tg}\sin x)^{x^2}$.

№27

а) $y=\left(x+\sqrt[3]{\dfrac{1+x}{1-x}}\right)^4$;

б) $y=\ln\left(x^2+\sqrt{1+\cos 2x}\right)$;

в) $y=\left(1+\sin^2 3x\right)\cdot 2^{\frac{1}{x}}$;

г) $y=\cos\cos^5 e^x$;

д) $y=7^{\operatorname{arctg}^3\frac{x}{2}}$;

е) $\begin{cases} x=5^{3t} \\ y=\cos 4t \end{cases}$

ж) $y=(\cos 3x)^{\sqrt{x}}$.

№28

а) $y=\arccos\sqrt{1-3^x}$;

б) $y=2^{\operatorname{tg}^2\frac{1}{x}}$;

в) $y=\sqrt[4]{\dfrac{1+\cos 3x}{5+4\sin 2x}}$;

г) $y=\ln\dfrac{x+\sqrt[3]{1+x^2}}{x^7}$;

д) $y=3\sqrt{4x^3+1}-\sqrt{1-x^5}$;

е) $\begin{cases} x=\sin t-t\cos t \\ y=e^{2t} \end{cases}$

ж) $y=(\ln x)^{\operatorname{arctg}3x}$.

№29

а) $y=\dfrac{\operatorname{tg}^4 x}{\cos^3 x}$;

б) $y=\sqrt{1+x^3}-\dfrac{x}{\sqrt{2x-5}}$;

в) $y=\sin^5 e^{\frac{1}{x^2}}$;

г) $y=\ln\operatorname{arctg}\sqrt{x}$;

д) $y=\dfrac{\arccos^3 x}{1+x^2}$;

е) $\begin{cases} x=\operatorname{ctg}t \\ y=\cos t+t\sin t \end{cases}$

ж) $y=(x+3)^5(x+4)^3(x^2+3)x$.

№30

а) $y=\operatorname{arctg}\sqrt{3-\dfrac{x^4}{4}}$;

б) $y=\ln\left(\dfrac{1}{x}+\sqrt{x^2-4}\right)$;

в) $y=4^{\cos^3(2x)\cdot\sin 3x}$;

г) $y=\sqrt[7]{x+x\sqrt{x}}$;

д) $y=\dfrac{e^{\cos 4x}}{\operatorname{tg}^2 3x}$;

е) $\begin{cases} x=e^{3t} \\ y=t\cdot\operatorname{tg}t \end{cases}$

ж) $y=(x+4)^{x^2-3}$.

Завдання 2.

Знайти похідну $\frac{dy}{dx}$ та $\frac{d^2}{dx^2}$ даних функцій.

01

а) $y = e^{-x}\sin x$

б) $\begin{cases} x = e^{2t} \\ y = \cos 4t \end{cases}$

02

а) $y = \sin^2 x$

б) $\begin{cases} x = \ln 3t \\ y = t^2 \end{cases}$

03

а) $y = e^{-x^2}$

б) $\begin{cases} x = \operatorname{arctg} t \\ y = \ln(1+t^2) \end{cases}$

04

а) $y = e^{3x}\cos 2x$

б) $\begin{cases} x = 2\sin^3 t \\ y = 2\cos^3 t \end{cases}$

05

а) $y = (1+x^2)\operatorname{arctg} x$

б) $\begin{cases} x = \sin t - t\cos t \\ y = \cos t + t\sin t \end{cases}$

06

а) $y = \sqrt{9-x^2}$

б) $\begin{cases} x = e^{-2t} \\ y = \sin 4t \end{cases}$

07

а) $y = x^3 \ln x$

б) $\begin{cases} x = \operatorname{arctg} t \\ y = \frac{1}{2}t^2 \end{cases}$

08

а) $y = \operatorname{arctg}^2 x$

б) $\begin{cases} x = \ln(1+t^2) \\ y = t^2 \end{cases}$

09

а) $y = \ln\cos x$

б) $\begin{cases} x = 3\cos^2 t \\ y = 3\sin^2 t \end{cases}$

10

а) $y = (1-x^3)$

б) $\begin{cases} x = \ln t \\ y = t\sin t \end{cases}$

11

а) $y = (x^2+1)\cos x$

б) $\begin{cases} x = \operatorname{arctg} t \\ y = \ln(1+t^2) \end{cases}$

12

а) $y = \sqrt{\frac{2x-3}{x+5}}$

б) $\begin{cases} x = 4\cos 2t \\ y = 3\sin t \end{cases}$

13

а) $y = x\ln x$

б) $\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$

14

а) $y = xe^{-4x}$

б) $\begin{cases} x = t^2 \\ y = t + t^3 \end{cases}$

15

а) $y = \frac{x+3}{x^2-4}$

б) $\begin{cases} x = e^{2t} \\ y = e^{3t} \end{cases}$

16

а) $y = x^2 \ln x$

б) $\begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = t^3 \end{cases}$

17

а) $y = e^{\sin x}$

б) $\begin{cases} x = 2\cos^3 t \\ y = 2\sin^3 t \end{cases}$

18

а) $y = \ln \operatorname{tg} x$

б) $\begin{cases} x = \ln(1+t^3) \\ y = t \end{cases}$

19

а) $y = \ln\frac{x-1}{x+1}$

б) $\begin{cases} x = \operatorname{arctg} t \\ y = \frac{1}{2}t^2 \end{cases}$

20

а) $y = e^{2x}$

б) $\begin{cases} x = e^{-t} \\ y = t^3 \end{cases}$

21

а) $y = e^{-x}\cos x$

б) $\begin{cases} x = \ln t \\ y = t^5 \end{cases}$

22

а) $y = \dfrac{1+x}{x^2-5}$

б) $\begin{cases} x = e^{2t} \\ y = \cos 3t \end{cases}$

23

а) $y = \ln\dfrac{1}{1-x}$

б) $\begin{cases} x = 3\cos^2 t \\ y = 2\sin^2 t \end{cases}$

24

а) $y = x^2 \operatorname{arctg} x$

б) $\begin{cases} x = 5\cos t \\ y = 2\sin^3 t \end{cases}$

25

а) $y = x^2\cos x$

б) $\begin{cases} x = \ln t \\ y = t^3 \end{cases}$

26

а) $y = \operatorname{arctg}(x^2)$

б) $\begin{cases} x = 4\cos^2 t \\ y = 3\sin 2t \end{cases}$

27

а) $y = \ln(1+2x^4)$

б) $\begin{cases} x = e^{5t} \\ y = \cos 3t \end{cases}$

28

а) $y = \ln(1+\sqrt{x})$

б) $\begin{cases} x = e^{3t} \\ y = \sin 2t \end{cases}$

29

а) $y = \sqrt{\dfrac{x-2}{x+3}}$

б) $\begin{cases} x = \ln(3t+2) \\ y = e^{3t} \end{cases}$

30

а) $y = \ln\sin 2x$

б) $\begin{cases} x = e^{-t} \\ y = e^{-t}\sin t \end{cases}$

Завдання 3.

Знайти найбільше та найменше значення функції $y = f(x)$ на відрізку $[a;b]$.

1. $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 1,\ [-2;0]$
2. $f(x) = \cos x + \dfrac{x}{\sqrt{2}},\ \left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$
3. $f(x) = \ln x - 2x,\ \left[\dfrac{1}{4};1\right]$
4. $f(x) = 2\ln x - 3x,\ \left[\dfrac{1}{2};1\right]$
5. $f(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x + 5},\ [-4;4]$
6. $f(x) = \dfrac{x^2 - 16}{x + 5},\ [-3;0]$
7. $f(x) = x + \dfrac{8}{x^4},\ [1;3]$
8. $f(x) = \dfrac{x}{x^3 + 2},\ [-1;1;0]$
9. $f(x) = 3\ln x - 4x,\ \left[\dfrac{1}{2};1\right]$
10. $f(x) = \dfrac{x}{3} + \dfrac{3}{x},\ [-5;-1]$
11. $f(x) = \dfrac{2x + 3}{x^2 + 4},\ [-2;2]$
12. $f(x) = 32x - x^4,\ [1;3]$
13. $f(x) = \dfrac{1}{5}x^5 - \dfrac{4}{3}x^3 + 1,\ [-1;3]$
14. $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 1,\ [-2;0]$
15. $f(x) = x^3 - 12x,\ [1;3]$
16. $f(x) = 2\ln x - \dfrac{x}{5},\ [8;12]$
17. $f(x) = x^2 - x^3,\ [-1;0;5]$
18. $f(x) = \dfrac{x}{8} + \dfrac{2}{x},\ [1;6]$
19. $f(x) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}x + \cos x,\ \left[\dfrac{\pi}{2};\pi\right]$
20. $f(x) = \cos^2 x + \sin x,\ \left[0;\dfrac{\pi}{4}\right]$
21. $f(x) = \sin 2x - x,\ [0;\pi]$
22. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 7,\ [-1;1]$
23. $f(x) = x^3 - 12x + 3,\ [0;3]$
24. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 2,\ [-2;2]$
25. $f(x) = 2x^2 - \ln x,\ [1;e]$
26. $f(x) = x^3 - 12x + 3,\ [1;3]$
27. $f(x) = 8x^2 - x^4 + 2,\ [-1;3]$
28. $f(x) = x^3 - 27x + 4,\ [0;4]$
29. $f(x) = -\sqrt{3x} + \sin 2x,\ \left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$
30. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5,\ [1;3]$

Варіант «0»

Завдання 1.

Використовуючи правила диференціювання та таблицю похідних, знайти похідні $\frac{dy}{dx}$ поданих функцій

а) $y = \sqrt[3]{x^2 + 4x}$;

б) $y = e^{\cos^3 3x}$;

в) $y = \ln\sin(2x + 3)$;

г) $y = \dfrac{1}{\mathrm{tg}^2 4x}$;

д) $y = \arcsin\sqrt{1 - 3x}$;

е) $\begin{cases} x = 3\cos^2 t \\ y = 2\sin^3 t; \end{cases}$

ж) $y = x^{x^2}$.

Завдання 2.

Знайти похідні $\frac{dy}{dx}$ та $\frac{d^2}{dx^2}$ даних функцій

а) $y = x \cdot e^{-x^2}$;

б) $\begin{cases} x = \sin^2 t \\ y = e^{5t}. \end{cases}$

Завдання 3.

Знайти найбільше та найменше значення функції $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$ на відрізку $[1,3]$.

Завдання 4.

Дослідити функцію та побудувати її графік

$$f(x) = \frac{x^2 + 4}{2x}.$$

Розв'язання:

Завдання 1.

Використовуючи правила диференціювання та таблицю похідних, знайти похідні $\frac{dy}{dx}$ функції.

а) $y = \sqrt[3]{x^2+4x} = (x^2+4x)^{\frac{1}{3}}$

$$y' = \frac{1}{3}(x^2+4x)^{\frac{1}{3}-1} \cdot (x^2+4x)^1 =$$

$$= \frac{1}{3}(x^2+4x)^{-\frac{2}{3}} \cdot (2x+4) = \frac{2x+4}{3\sqrt[3]{(x^2+4x)^2}};$$

б) $y = e^{\cos^3 3x}$

$$y' = e^{\cos^3 3x} \cdot (\cos^3 3x)' = e^{\cos^3 3x} \cdot 3\cos^2 3x \cdot (\cos 3x)' =$$

$$= e^{\cos^3 3x} \cdot 3\cos^2 3x \cdot (-\sin 3x) \cdot (3x)' =$$

$$= -9xe^{\cos^3 3x} \cdot \cos^2 3x \cdot \sin 3x;$$

в) $y = \ln\sin(2x+3)$

$$y' = \frac{1}{\sin(2x+3)} \cdot \sin(2x+3)' =$$

$$\frac{1}{\sin(2x+3)} \cdot \cos(2x+3) \cdot (2x+3)' = \frac{2\cos(2x+3)}{\sin(2x+3)} = 2\operatorname{ctg}(2x+3);$$

г) $y = \frac{1}{\operatorname{tg}^2 4x} = \operatorname{tg}^{-2} 4x$

$$y' = -2\operatorname{tg}^{-2-1} 4x \cdot (\operatorname{tg} 4x)' = -2\operatorname{tg}^{-3} 4x \cdot \frac{1}{\cos^2 4x} \cdot (4x)' =$$

$$= \frac{-8}{\operatorname{tg}^3 4x \cdot \cos^2 4x};$$

д) $y = \arcsin\sqrt{1-3x}$

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-(\sqrt{1-3x})^2}} \cdot (\sqrt{1-3x})' = \frac{1}{\sqrt{\cancel{1}-\cancel{1}+3x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{1-3x}} \cdot (-3x)' =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{1-3x}} \cdot (-3) = \frac{-3}{2\sqrt{3x(1-3x)}};$$

е) $\begin{cases} x = 3\cos^2 t \\ y = 2\sin^3 t \end{cases}$

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$$

$$y'_t = 2 \cdot 3 \cdot \sin^2 t \cdot \cos t = 6\sin^2 t \cos t$$
$$x'_t = 3 \cdot 2 \cdot \cos t \cdot (-\sin t) = -6\cos t \sin t$$

$$y'_x = \frac{6\sin^{\cancel{2}} t\ \cancel{\cos t}}{-6\cancel{\cos t}\ \cancel{\sin t}} = -\sin t$$

ж) $y = x^{x^2}$

$$\ln y = \ln x^{x^2}$$

$$(\ln y)' = (x^2 \cdot \ln x)'$$

$$\frac{1}{y} \cdot y' = (x^2)' \cdot \ln x + x^2 \cdot (\ln x)'$$

$$\frac{1}{y} \cdot y' = 2x \cdot \ln x + x^2 \cdot \frac{1}{x}$$

$$y' = (2x \cdot \ln x + x) \cdot y$$

$$y' = (2x \cdot \ln x + x) \cdot x^{x^2}$$

Завдання 2.

Знайти похідні $\dfrac{dy}{dx}$ та $\dfrac{d^2}{dx^2}$ даних функцій

а) $y = x \cdot e^{-x^2}$;

$$y' = \left(x \cdot e^{-x^2}\right)' = (x)' \cdot e^{-x^2} + x \cdot \left(e^{-x^2}\right)' = e^{-x^2} + x \cdot e^{-x^2} \cdot (-x^2)' =$$

$$= e^{-x^2} + x \cdot e^{-x^2} \cdot (-2x) = e^{-x^2}(1 - 2x^2)$$

$$y'' = \left(e^{-x^2}(1 - 2x^2)\right)' = \left(e^{-x^2}\right)' \cdot (1 - 2x^2) + e^{-x^2} \cdot (1 - 2x^2)' =$$

$$= -2x \cdot e^{-x^2}(1 - 2x^2) + e^{-x^2} \cdot (-4x) =$$

$$= e^{-x^2}(-2x(1 - 2x^2) - 4x) = e^{-x^2}(-2x + 4x^3 - 4x) =$$

$$= e^{-x^2}(4x^3 - 6x) = 2e^{-x^2}(2x^3 - 3x)$$

б) $\begin{cases} x = \sin^2 t \\ y = e^{5t}. \end{cases}$

$$= \frac{dy}{dx} = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{5e^{5t}}{2\sin t \cdot \cos t} = \frac{5e^{5t}}{\sin 2t}, \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{(y'_x)_t}{x'_t}$$

$$\frac{dy^2}{dx^2} = \left(\frac{dy}{dx}\right)'_t \cdot \frac{1}{x'_t} = \left(\frac{5e^{5t}}{\sin 2t}\right)'_t \cdot \frac{1}{x'_t} =$$

$$= \frac{25e^{5t}\sin 2t - \cos 2t \cdot 2 \cdot 5e^{5t}}{(\sin 2t)^2} \cdot \frac{1}{\sin 2t} = \frac{5e^{5t}(5\sin 2t - 2\cos 2t)}{\sin^3 t}$$

Завдання 3.

Знайти найбільше та найменше значення функції $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$ на відрізку $[1,3]$.

1) $f'(x) = (x^3 - 3x^2 + 2)' = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$;

$f'(x) = 0$; $3x(x - 2) = 0$; $x = 0$ або $x - 2 = 0$;

$x_1 = 0 \notin [1;3]$, $x_2 = 2 \in [1;3]$

2) $f(1)=1^3-3\cdot 1^2+2=0;$

$f(2)=2^3-3\cdot 2^2+2=-2;$

$f(3)=3^3-3\cdot 3^2+2=27-27+2=2$

3) $f_{\text{б.н}}=f(3)=2$

$f_{\text{н.м}}=f(2)=-2$

Завдання 4.

Дослідити функцію та побудувати її графік

$$f(x)=\frac{x^2+4}{2x}.$$

1) $D(f): x\in(-\infty;0)\cup(0;+\infty)-$ область визначення та область неперервності, $x=0$ – точка розриву;

2) $x\neq 0-$ немає точок перетину з віссю OY;

3) $f(x)>0$ коли $x>0$ та $f(x)<0$ коли $x<0$;

4) знайдемо асимптоти:

а) розглянемо точку розриву $x=0$:

$$\lim_{x\to -0} f(x)=\lim_{x\to -0}\frac{x^2+4}{2x}=\left(\frac{4}{-0}\right)=-\infty$$

$$\lim_{x\to +0} f(x)=\left(\frac{4}{+\infty}\right)=+\infty$$

$x=0$ – рівняння вертикальної асимптоти;

б) знайдемо похилі асимптоти у вигляді $y=kx+b$

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+4}{2x^2}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{2x^2}=\frac{1}{2}$$

$$b=\lim_{x\to\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+4}{2x}-\frac{1}{2}x\right)=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+4-x^2}{2x}=\lim_{x\to\infty}\frac{4}{2x}=0;$$

5) інтервали монотонності та екстремуму функції. Знайдемо стаціонарні точки

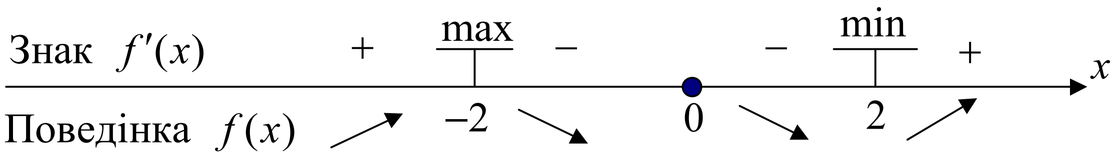
а) $$f'(x)=\left(\frac{x^2+4}{2x}\right)'=\frac{(x^2+4)'\cdot 2x-(x^2+4)\cdot(2x)'}{(2x)^2}=$$

$$=\frac{2x\cdot 2x-2(x^2+4)}{4x^2}=\frac{4x^2-2x^2-8}{4x^2}=\frac{2x^2-8}{4x^2}=$$

$$=\frac{x^2-4}{2x^2}=\frac{(x-2)(x+2)}{2x^2};$$

б) $f'(x)=0,\ (x-2)(x+2)=0,\ x_1=-2;\ x_2=2-$ стаціонарні точки, точка $x=0$ – критична, тому що похідна у цій точці не існує;

в) визначимо знаки похідної $f'(x)$ та поведінку функції

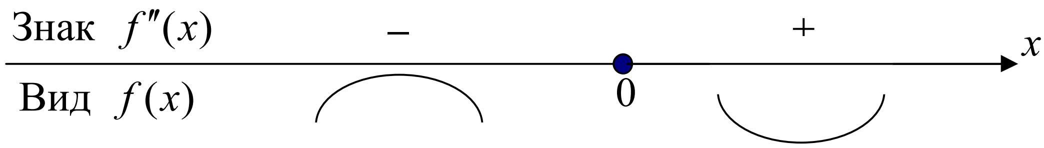


$x_1=-2$ – точка максимуму $f(x)$;
$x_2=2$ – точка мінімуму $f(x)$;
$f_{\max}(-2)=-2,\quad f_{\min}(2)=2;$

6) інтервали опухлості, вгнутості та точки перегибу:

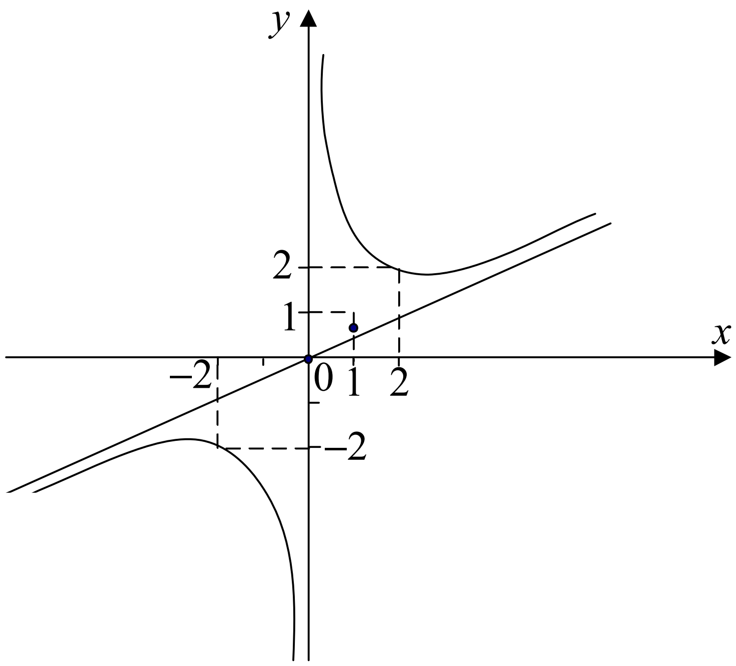
а) $$f''(x)=\left(\frac{x^2-4}{2x}\right)'=\frac{2x\cdot 2x-2(x^2-4)}{4x^4}=\frac{4}{x^3}$$

б) $f''(x)\neq 0,$ тому що $4\neq 0;$
в) $f''(x)\neq\infty$ коли $x=0,$ але $x=0\notin D(f);$
г)



Коли $x<0$ крива опукла, коли $x>0$ крива вгнута.

Будуємо графік функції



Завдання для поглибленої підготовки

Знайти найбільше та найменше значення функції $y=f(x)$ на відрізку $[a;b]$

1. $f(x)=\text{tg}x+\text{ctg}^2x,\ \left[\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{3}\right]$

2. $f(x)=xe^{-2x},\ [0;1]$

3. $f(x)=\ln x-\frac{1}{3}\ln^3 x,\ [1;e^3]$

4. $f(x)=\arcsin x-\frac{2x}{\sqrt{3}},\ \left[\frac{1}{4};\frac{3}{4}\right]$

5. $f(x)=\text{arc tg}x+\frac{x}{5},\ [1;3]$

6. $f(x)=\sqrt{3x}-\sin 2x,\ \left[0;\frac{\pi}{2}\right]$

7. $f(x)=x+\cos^2 x,\ \left[0;\frac{\pi}{2}\right]$

8. $f(x)=(x-2)e^{-x},\ [1;4]$

9. $f(x) = 2\sin x + 0,5\cos 2x,\ \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

10. $f(x) = \mathrm{ctg}x + x,\ \left[\frac{\pi}{8}; \frac{3\pi}{4}\right]$

Дослідити функції та побудувати їх графіки.

$y = x^2 e^{-x};$

$y = x\mathrm{arctg}x;$

$y = x - \ln(x+1);$

$y = \frac{\ln^2 x}{x};$

$y = (x-3)e^{-x};$

$y = \frac{\ln x}{\sqrt{x}};$

$y = \frac{x^2}{2(1-x)^2};$

$y = x^2 \ln x;$

$y = 2x - \mathrm{arctg}x;$

$y = xe^{\frac{1}{x}}.$

ДЛЯ НОТАТОК

Навчальне видання

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
з вищої математики №1
«Збірник письмових завдань, зразки їх виконання»
для студентів денної та заочної форм навчання усіх спеціальностей

Укладачі: НЕСТЕРЕНКО Володимир Олексійович
ТОЛСТЯК Олена Дмитрівна
БЕЗУГЛА Вікторія Сергіївна

Відповідальний за випуск *Т.О. Ярхо*

В авторській редакції

Комп'ютерна верстка І. І. Лаптій

План 2016. Поз. 84.
Підписано до друку 11.11.2016 р. Формат 60×84 1/16. Папір газетний.
Гарнітура Times New Roman Cyr. Віддруковано на різографі.
Ум. друк. арк. 1,9. Обл.-вид. арк. 1,8.
Зам. № 576/16. Тираж 50 прим. Ціна договірна.

ВИДАВНИЦТВО
Харківського національного автомобільно-дорожнього університету

Видавництво ХНАДУ, 61002, м. Харків – МСП, вул. Петровського, 25.
Тел. /факс: (057)700-38-64; 707-37-03, e-mail: rio@khadi.kharkov.ua

Свідоцтво Державного комітету інформаційної політики, телебачення
та радіомовлення України про внесення суб'єкта видавничої справи
до Державного реєстру видавців, виготівників і розповсюджувачів
видавничої продукції, серія ДК №897 від 17.04.2002 р.