Министерство образования и науки Украины

ХАРЬКОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ
АВТОМОБИЛЬНО-ДОРОЖНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

к выполнению контрольных работ № 1 и № 2
по высшей математике
для иностранных студентов 1-го курса
экономических специальностей

Утверджено методическим
советом университета,
протокол № 2 от 10.10.2012 г.

Харьков
ХНАДУ
2013

Составители: Небратенко О.В.
НестеренкоВ.О.
Саппа Ж.В.
Толстяк О.Д.

Кафедра высшей математики

Цель методических указаний – помочь студентам выполнить контрольные работы № 1 и № 2 по высшей математике.

В разделах I и IV рассмотрены типовые задания, изложен достаточный для выполнения этих заданий теоретический материал, проиллюстрированный решением конкретных примеров.

Разделы II и V содержат условия типовых заданий контрольных работ № 1 и № 2.

В разделах III и VI даны решения соответственно типовых заданий контрольных работ № 1 и № 2.

Раздел VII содержит условия вариантов заданий контрольных работ для самостоятельного решения. При выполнении контрольной работы № 1 необходимо внимательно прочитать материал раздела I, разобраться в решениях примеров рассмотренных там. Попробовать самостоятельно решить примеры, предложенные в разделе III, сравнить полученные решения с решениями, приведенными в разделе IV и, в случае их совпадения, приступить к решению своего варианта контрольной работы № 1 (раздел VII, приложение 1). Аналогично при выполнении контрольной работы № 2 необходимо рассмотреть разделы V и VI и после этого решить свой вариант контрольной работы № 2 (раздел VII, приложение 2).

В конце методических указаний приведен список литературы для более глубокого изучения рассматриваемых в контрольных работах тем.

РАЗДЕЛ I. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ № 1

Задание 1.

Вычислить определитель третьего порядка.

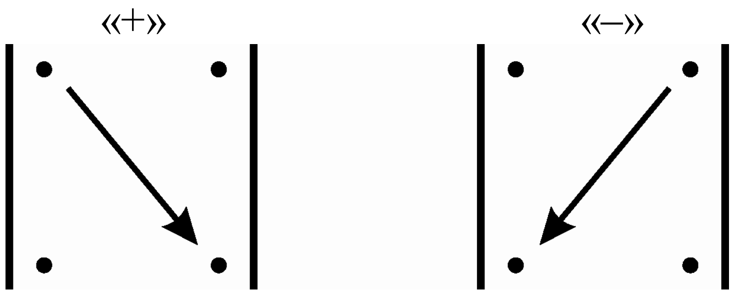
Для выполнения задания введем основные определения и сформулируем теорему разложения.

Для таблицы $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ определителем второго порядка $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ называется число, которое находят по формуле $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$, т.е.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \qquad (1)$$

Числа $a_{11}, a_{22}, a_{12}, a_{21}$ называются элементами определителя.

Для запоминания с какими знаками берутся произведения полезна следующая схема:



Замечание. Знак «+» означает, что произведение берется со своим знаком, а «–» – с противоположным

Примеры.

$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 6 = -2$; $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -5 & 4 \end{vmatrix} = 8 - (-15) = 23$; $\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 6 = 0$.

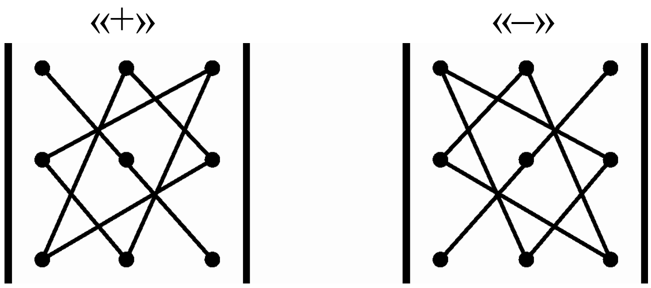
Для таблицы $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ определителем третьего порядка $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ называется число, которое находится по формуле

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{33}a_{21}a_{12},$$

т.е.
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{31}a_{12}a_{23} - \qquad (2)$$
$$-a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{33}a_{21}a_{12}$$

где a_{ij} – числа, которые называются элементами определителя (i– номер строки, j– номер столбца, в которых находится элемент).

Для запоминания с какими знаками берутся произведения элементов полезна следующая схема:



Замечание. Знак «+» означает, что произведения элементов берется со своим знаком, а знак «-» – с противоположным.

Примеры. Вычислить определители, пользуясь формулой (2).

1. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 9 + 8 + 24 - (-18 - 4 + 24) = 39.$

2. $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 1 & -3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -9 + 32 + 6 + 12 - 36 - 4 = 1$.

Для вычисления определителя третьего порядка полезно использовать теорему разложения, которая будет сформулирована ниже после введения понятий минора и алгебраических дополнений элементов определителя.

Определение. Если в определителе 3-го порядка вычеркнуть i-ю строку и j-ый столбец, то получится определитель второго порядка, который называется минором элемента a_{ij} и обозначается M_{ij}.

Пример. Найти миноры определителя

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

элементов a_{11}, a_{22}, a_{13}.

Решение.

$$M_{11} = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -4 - 9 = -13; \qquad M_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 16 = -12;$$

$$M_{13} = \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 15 - (-8) = 23.$$

Определение. Алгебраическим дополнением элемента a_{ij} определителя третьего порядка называется число $(-1)^{i+j} M_{ij}$ и обозначается A_{ij}, т.е.

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij} \tag{3}$$

Пример. Найти алгебраические дополнения определителя

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

элементов a_{21}, a_{13}.

Решение. Воспользуемся формулой (3).

$$a_{21} = (-1)^{2+1} \cdot M_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -(6-1) = -5;$$

$$a_{13} = (-1)^{1+3} \cdot M_{13} = \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 4-(-6) = 4+6 = 10.$$

Замечание. Знак алгебраического дополнения совпадает со знаком минора для элементов $a_{11}, a_{13}, a_{22}, a_{31}, a_{33}$, а для остальных элементов берется с противоположным знаком. Для запоминания можно воспользоваться таблицей:

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$$

Знак «+» означает, что алгебраическое дополнение равно минору, а «–» – минор берется с противоположным знаком.

Теорема разложения. Определитель 3-го порядка равен сумме парных произведений элементов любого ряда (т.е. строки или столбцы) на их алгебраические дополнения.

Если определитель (2) обозначить символом Δ, то для строк будем иметь три формулы

$$\Delta = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} \tag{4}$$

$$\Delta = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} \tag{5}$$

$$\Delta = a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33} \tag{6}$$

Аналогичные формулы можно выписать раскладывая определитель по столбцам.

Пример. Вычислитель определитель

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 4 & 5 & 2 \end{vmatrix}$$

Разложим, пользуясь теоремой разложения, определитель по элементам первой строки, т.е. формулой (4).

$$\Delta = 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} + 4 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 2(4+5) - 3(6+4) + 4(15-8) =$$

$$= 2 \cdot 9 - 3 \cdot 10 + 4 \cdot 7 = 18 - 30 + 28 = 16$$

Задание 2.

Даны точки $A_1(x_1; y_1; z_1)$, $A_2(x_2; y_2; z_2)$, $A_3(x_3; y_3; z_3)$.

Найти: а) векторы $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_1A_3}$, $\overline{A_2A_3}$ и их длины;

б) $\angle A_2A_1A_3$.

Указания к выполнению задания

Напомним основные определения и выпишем формулы нахождения координат вектора, их длин и угла между векторами.

В геометрии вектором называется всякий направленный отрезок. Вектор, начало которого совпадает с точкой $A_1(x_1; y_1; z_1)$, а конец с точкой $A_2(x_2; y_2; z_2)$ обозначает $\overline{A_1A_2}$ или надчеркнутой буквой $\overline{a}$.

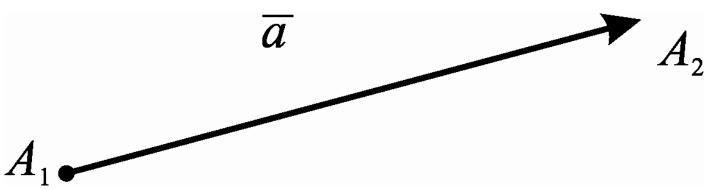


Рис. 1

Соответственно длины векторов обозначаются так: $\left|\overline{A_1A_2}\right|$ или $\left|\overline{a}\right|$, $\left|\overline{a}\right| = \left|\overline{A_1A_2}\right|$. Если известны координаты точки $A_1(x_1;y_1;z_1)$ и $A_2(x_2;y_2;z_2)$, то координаты вектора $\overline{A_1A_2}$ определяются по формуле

$$\overline{A_1A_2} = \left(x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\right), \tag{7}$$

а его длина

$$\left|\overline{A_1A_2}\right| = \sqrt{\left(x_2 - x_1\right)^2 + \left(y_2 - y_1\right)^2 + \left(z_2 - z_1\right)^2}\,, \tag{8}$$

Замечание. Числа $x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1$ называются координаттами вектора $\overline{A_1A_2}$.

2. Если вектор обозначается одной надчеркнутой буквой $\overline{a}$, то его координаты обозначаются: $a_x; a_y; a_z$ т.е.

$$\overline{a} = \left(a_x; a_y; a_z\right).$$

При этом, длина вектора вычисляется по формуле

$$\left|\overline{a}\right| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\,. \tag{9}$$

Пример 1. Даны точки $A_1(3;2;1)$, $A_2(4;-3;2)$. Найти вектор $\overline{A_1A_2}$ и его длину.

Решение. Для нахождения вектора $\overline{A_1A_2}$ воспользуемся формулой (7)

$$\overline{A_1A_2} = \left(x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\right) = \left(4 - 3; -3 - 2; 2 - 1\right) = \left(1; -5; 1\right)$$

Длину вектора $\overline{A_1A_2}$ найдем по формуле (9), т.к. известны координаты вектора $\overline{A_1A_2}$.

$$\left|\overline{A_1A_2}\right| = \sqrt{1^2 + (-5)^2 + 1^2} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}\,.$$

Пример 2. Даны точки $A_1(2;-3;1)$, $A_2(3;1;3)$. Найти длину вектора $\overline{A_1A_2}$.

Решение. Воспользуемся формулой (8).

$$\left|\overline{A_1A_2}\right| = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2} =$$
$$= \sqrt{(3-2)^2+(1+3)^2+(3-1)^2} = \sqrt{1+16+4} = \sqrt{21}$$

В пункте б) задания 2 при нахождении угла $A_2A_1A_3$ следует обратить внимание на то, что этот угол образован векторами $\overline{A_1A_2}$ и $\overline{A_1A_3}$. Для нахождения угла воспользуемся формулой

$$\cos\angle A_2A_1A_3 = \frac{\overline{A_1A_2}\cdot\overline{A_1A_3}}{\left|\overline{A_1A_2}\right|\cdot\left|\overline{A_1A_3}\right|}, \tag{10}$$

где $\overline{A_1A_2}\cdot\overline{A_1A_3}$ – скалярное произведение векторов.

Определение. Скалярным произведением двух векторов называется число равное произведению модулей этих векторов на косинус угла между ними.

В более общем виде угол между векторами $\overline{a}=\left(a_x;a_y;a_z\right)$ и $\overline{b}=\left(b_x;b_y;b_z\right)$ определяется по формуле

$$\cos\left(\overline{a},\overline{b}\right) = \frac{\overline{a}\cdot\overline{b}}{\left|\overline{a}\right|\cdot\left|\overline{b}\right|}, \tag{11}$$

$$\overline{a}\cdot\overline{b} = a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z \tag{12}$$

Пример. Найти угол $A_2A_1A_3$ если известно, что $A_1(1;2;1)$, $A_2(3;1;-1)$, $A_3(2;3;2)$.

Решение. Воспользуемся формулой (10)

$$\cos\angle A_2A_1A_3 = \frac{\overline{A_1A_2}\cdot\overline{A_1A_3}}{\left|\overline{A_1A_2}\right|\cdot\left|\overline{A_1A_3}\right|}$$

Найдем векторы $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_1A_3}$ и их длины. Для нахождения векторов $\overline{A_1A_2}$ и $\overline{A_1A_3}$ воспользуемся формулой (7)

$$\overline{A_1A_2} = \left(x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\right) = \left(3-1; 1-2; -1-1\right) = \left(2; -1; -2\right)$$

$$\overline{A_1A_3} = \left(x_3 - x_1; y_3 - y_1; z_3 - z_1\right) = \left(2-1; 3-2; 2-1\right) = \left(1; 1; 1\right).$$

Для определения длин векторов $\overline{A_1A_2}$ и $\overline{A_1A_3}$, т.к. известны координаты этих векторов, воспользуемся формулой (9)

$$\left|\overline{A_1A_2}\right| = \sqrt{4+1+4} = 3; \qquad \left|\overline{A_1A_3}\right| = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}.$$

$$\overline{A_1A_2} \cdot \overline{A_1A_3} = 2\cdot 1 + (-1)\cdot 1 + (-2)\cdot 1 = 2 - 1 - 2 = -1$$

$$\cos\angle A_2A_1A_3 = -\frac{1}{3\sqrt{3}},$$

$$\angle A_2A_1A_3 = \arccos\left(-\frac{1}{3\sqrt{3}}\right) = 180^{\circ} - \arccos\frac{1}{3\sqrt{3}}.$$

Задание 3.

Даны точки $M_1(x_1; y_1)$, $M_2(x_2; y_2)$, $M_3(x_3; y_3)$.

Найти:

а) уравнение прямой, проходящей через точки M_1 и M_2;

б) уравнение высоты треугольника $M_1M_2M_3$, опущенной из вершины M_1.

Указания к выполнению задания

Введем основные понятия связанные с темой «Прямая на плоскости» и выпишем формулы, позволяющие решить поставленные задачи. Всякое уравнение прямой, не параллельной оси OY, можно записать в виде

$$y = kx + b, \tag{13}$$

$$k = tg\,\alpha$$

k – называется угловым коэффициентом прямой.

$A(0; b)$ – точка пересечения прямой с осью OY.

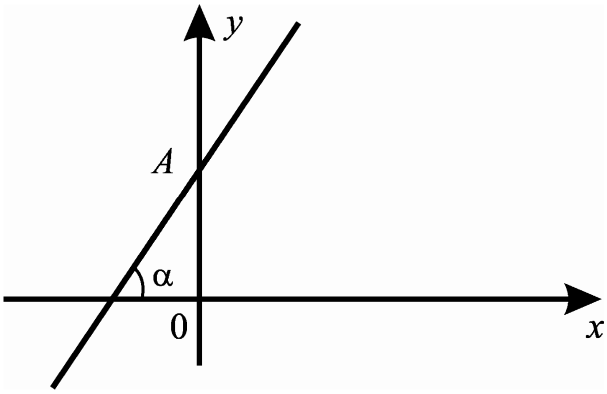


Рис. 2

Уравнение (13) называется *уравнением прямой с угловым коэффициентом.*

Уравнение прямой параллельной оси OY имеет вид $x = a$.

Если прямые $y = k_1 x + b_1$ и $y = k_2 x + b_2$ параллельны, то

$$k_1 = k_2, \tag{14}$$

Если же прямые перпендикулярны, то

$$k_2 = -\frac{1}{k_1}, \tag{15}$$

Уравнение прямой, проходящей через точки $M_1(x_1; y_1)$, $M_2(x_2; y_2)$ записывается в виде

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}, \tag{16}$$

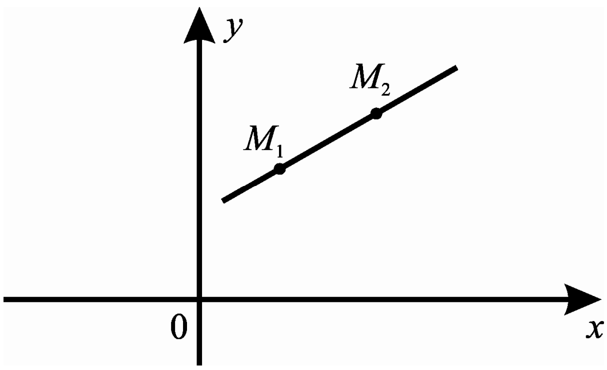


Рис. 3

Замечание. Может оказаться, что один из знаменателей в уравнении обращается в нуль. Это означает, что числитель этой дроби равен нулю.

Уравнение пучка прямых, проходящей через точку $M_1(x_1;\, y_1)$ записывается в виде

$$y - y_1 = k(x - x_1) \tag{17}$$

где k – угловой коэффициент прямых.

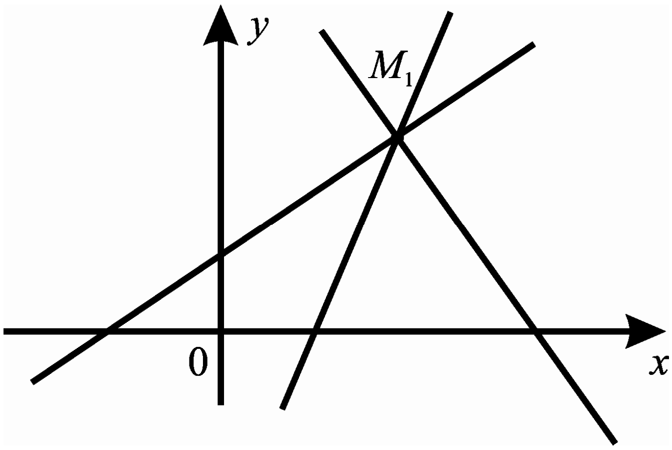


Рис. 4

Уравнение прямой, проходящей через точку $M_1(x_1;\, y_1)$ и перпендикулярную вектору $\overline{N} = \left(A; B\right)$ – (нормальный вектор) имеет вид

$$A(x - x_1) + B\left(y - y_1\right) = 0 \tag{18}$$

$Ax + By + C = 0$ – общее уравнение прямой.

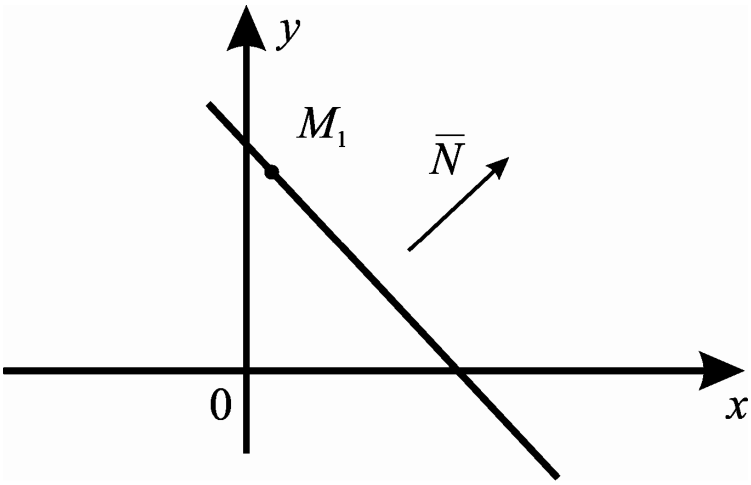


Рис. 5

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Написать уравнение прямой, проходящей точки $M_1(1;2)$, $M_2(-3;1)$.

Решение. Воспользуемся уравнением (16)

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1},\ \frac{x-1}{-3-1}=\frac{y-2}{1-2},$$

$$\frac{x-1}{-4}=\frac{y-2}{-1},\ x-1=4y-8.$$

Окончательно получим $x-4y+7=0$ – это общее уравнение прямой.

Пример 2. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $M_1(2;3)$ перпендикулярно вектору $\overline{N}=(3;-2)$.

Решение. Воспользуемся уравнением (18)

$$3(x-2)-2(y-3)=0$$

$$3x-6-2y+6=0 \quad \text{или} \quad 3x-2y=0.$$

Ответ: $3x-2y=0$.

Пример 3. Написать уравнение высоты треугольника $M_1M_2M_3$, опущенной из вершины M_2.

$$M_1(3;2),\ M_2(-1;3),\ M_3(2;-2).$$

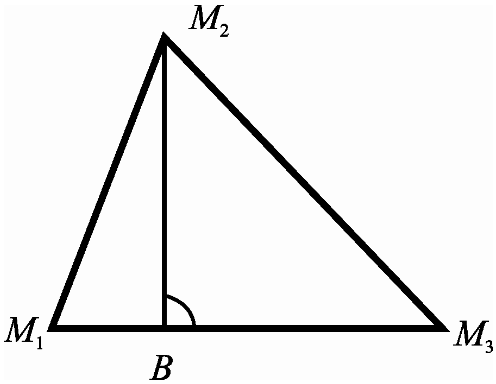


Рис. 6

Решение. Эту задачу решим двумя способами. M_2B – высота.

1 способ. Найдем уравнение прямой M_1M_3.

$\left(M_1M_3\right): \dfrac{x-x_1}{x_3-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_3-y_1}$ – воспользовались уравнением (16)

$$\frac{x-3}{2-3}=\frac{y-2}{-2-2},\ \frac{x-3}{-1}=\frac{y-2}{-4},$$

$$4x-12=y-2 \quad \text{или} \quad y=4x-10.$$

$k_1=4$ – угловой коэффициент прямой $\left(M_1\,M_3\right)$.

Так как прямая M_2B перпендикулярна прямой $\left(M_1\,M_3\right)$, то $k_2=-\dfrac{1}{k_1}$ (на основании (15)), т.е. $k_2=-\dfrac{1}{4}$ – угловой коэффициент прямой M_2B.

Воспользуемся уравнением (17) – уравнение пучка прямых. В нашем случае оно имеет вид

$$y-y_2=k_2(x-x_2), \text{ т.е.}$$

$$y-3=-\frac{1}{4}(x+1),\ 4y-12=-x-1 \quad \text{или} \quad x+4y-11=0.$$

Ответ: $x+4y-11=0$.

2 способ. Воспользуемся уравнением (18). В нашем случае оно имеет вид

$$A(x-x_2)-B\left(y-y_2\right)=0, \text{ где } \overline{N}=\left(A;B\right)$$

Т.к. вектор $\overline{M_1\,M_3}$ перпендикулярен прямой $\left(M_2B\right)$, то можно считать

$$\overline{N}=\overline{M_1\,M_3}=(2-3;-2-2)=(-1;-4).$$

Таким образом, имеем

$$-\left(x+1\right)-4\left(y-3\right)=0 \quad \text{или} \quad x+4y-11=0.$$

Ответ: $x+4y-11=0$.

Ответы совпали. При решение своего варианта можете решить любым из этих способов.

Задание 4.

Даны точки $A_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$, $A_2(x_2;y_2;z_2)$, $A_3(x_3;y_3;z_3)$.

Найти:

а) уравнение прямой, проходящей через точки A_2 и A_3;

б) уравнение плоскости, проходящей через точку A_1 перпендикулярно прямой $\left(A_2A_3\right)$.

Указания к выполнению задания

Уравнение прямой в пространстве, проходящей через точки $A_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$ и $A_2(x_2;y_2;z_2)$ записывается в виде

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1} \qquad (19)$$

Замечание. Один или два знаменателя в уравнениях (19) могут обращаться в нуль. Это означает, что соответствующие числители равны нулю.

Так уравнение $\frac{x-3}{0}=\frac{y+2}{0}=\frac{z-4}{5}$, можно записать в виде $\begin{cases} x-3=0, \\ y+2=0 \end{cases}$, а уравнение $\frac{x-5}{2}=\frac{y-3}{0}=\frac{z-2}{3}$ – в виде $\begin{cases} y-3=0, \\ \frac{x-5}{2}=\frac{z-2}{3} \end{cases}$ или $\begin{cases} y-3=0, \\ 3x-2z-11=0 \end{cases}$.

Уравнение плоскости, проходящей через точку $A_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$ перпендикулярно вектору $\overline{N}=(A;B;C)$ – нормальный вектор, имеет вид

$$A(x-x_1)+B\left(y-y_1\right)+C\left(z-z_1\right)=0 \qquad (20)$$

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1.

Написать уравнения прямой, проходящей через точки $A_1(1;\,2;\,-3)$ и $A_2(2;\,3;\,-5)$.

Решение. Воспользуемся уравнением прямой, проходящей через две точки (19).

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1},$$
$$\frac{x-1}{2-1}=\frac{y-2}{3-2}=\frac{z+3}{-5+3},$$

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{1}=\frac{z+3}{-2}.$$

Ответ: $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z+3}{-2}$.

Пример 2.

Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $A_1(2;\,-1;\,0)$ и перпендикулярно вектору $\overline{N}=(3;2;1)$.

Решение.

Воспользуемся уравнением (20).

$$A(x-x_1)+B\left(y-y_1\right)+C\left(z-z_1\right)=0$$

$$3(x-2)+2\left(y+1\right)+z=0 \quad \text{или} \quad 3x+2y+z-4=0.$$

Ответ: $3x+2y+z-4=0$.

Задания 5.

Найти пределы.

Указания к выполнению задания

Для выполнения задания рассмотрим основные определения, теоремы и формулы по теме «Теория пределов».

При нахождении пределов необходимо использовать следующие теоремы.

Теорема I. Если существуют пределы $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$, то

1. $\lim\limits_{x\to x_0}\big(f(x)\pm g(x)\big)=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\pm\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$;
2. $\lim\limits_{x\to x_0} k\,f(x)=k\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, $k-const$ (постоянная);
3. $\lim\limits_{x\to x_0}\big(f(x)\cdot g(x)\big)=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\cdot\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$;
4. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}$, если $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)\neq 0$.

Теорема II. Если существует $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=t_0$, а функция $f(t)$ непрерывна в точке t_0, то $\lim\limits_{x\to x_0} f\big(g(x)\big)=f\left(\lim\limits_{x\to x_0} g(x)\right)$

Замечания.

1. Теоремы I и II справедливы и в случае если $x\to\infty$;
2. Если функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0, то $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$;
3. $\lim\limits_{x\to x_0} x^n=x_0^n$;
4. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^n}=0,\quad n>0.$

Пример 1.

Вычислить $\lim\limits_{x\to 2}(3x^2-x+2)$.

Решение.

$\lim\limits_{x\to 2}(3x^2-x+2)=3\lim\limits_{x\to 2}x^2-\lim\limits_{x\to 2}x+\lim\limits_{x\to 2}2=3\cdot 4-2+2=12$

Воспользовались теоремой I и замечанием 2.

Пример 2. Вычислить $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{3x^2+5x+3}{2x-1}$

Решение. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{3x^2+5x+3}{2x-1}=\dfrac{\lim\limits_{x\to 3}(3x^2+5x+3)}{\lim\limits_{x\to 3}(2x-1)}=\dfrac{3\cdot 9+5\cdot 3+3}{2\cdot 3-1}=\dfrac{45}{5}=9$ – воспользовались теоремой I и замечанием 2.

При решении примеров вида

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0}$$

получается отношение $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$. Такое отношение называется неопределенностью. Для раскрытия неопределенности (т.е. для решения этого примера) необходимо числитель и знаменатель дроби разделить на самую высокую входящую в них степень или же воспользоваться формулой

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0} = \begin{cases} \frac{a_n}{b_m}, & \text{если } n = m, \\ 0, & \text{если } n < m, \\ \infty, & \text{если } n > m \end{cases} \qquad (21)$$

Пример 3. Найти предел $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^4+5x^2-2x+1}{4x^4-5x+2}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^4+5x^2-2x+1}{4x^4-5x+2} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^4\left(3+\frac{5}{x^2}-\frac{2}{x^3}+\frac{1}{x^4}\right)}{x^4\left(4-\frac{5}{x^3}+\frac{2}{x^4}\right)} = \frac{3}{4}$,

т.к. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^n} = 0$ при $n > 0$.

Решение этого примера можно записать и так: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^4+5x^2-2x+1}{4x^4-5x+2} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \frac{3}{4}$, т.к. степень числителя равна степени знаменателя (воспользовались формулой (21)).

Пример 4. Найти предел $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^4+3x^3+2x-5}{3x^2+5x+6}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^4+3x^3+2x-5}{3x^2+5x+6}=\infty$, так как степень числителя больше степени знаменателя.

Кроме неопределенности $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$имеют место и неопределенности вида $(\infty\cdot 0),(\infty-\infty),\left(\dfrac{0}{0}\right),\ldots$. При раскрытии неопределенности $\left(\dfrac{0}{0}\right)$ используется понятие бесконечно малой функции (величины).

Определение 1.

Функция $\alpha(x)$ называется бесконечно малой функцией при $x\to x_0$,если $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$.

Определение 2.

Функции $\alpha_1(x)$ и $\alpha_2(x)$ называются эквивалентными бесконечно малыми при $x\to x_0$, если $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha_1(x)}{\alpha_2(x)}=1$.

Эквивалентность обозначается так: $\alpha_1(x)\sim\alpha_2(x)$.

Теорема III. Пусть $\alpha_1(x),\alpha_2(x)$ – бесконечно малые и $\alpha_1(x)\sim\beta(x)$ при $x\to x_0$, тогда если существует $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha_1(x)}{\alpha_2(x)}$, то существует и $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\beta(x)}{\alpha_2(x)}$ и они равны между собой.

При раскрытии неопределенностей $\left(\dfrac{0}{0}\right)$ в предположении, что $\alpha\to 0$ часто используется таблица эквивалентных бесконечно малых. При $\alpha\to 0$

$$\begin{array}{l|l} \sin\alpha \sim \alpha; & \\ tg\alpha \sim \alpha; & e^{\alpha} - 1 \sim \alpha; \\ \arcsin\alpha \sim \alpha; & \ln(1+\alpha) \sim \alpha; \\ arctg\alpha \sim \alpha; & 1-\cos\alpha \sim \dfrac{\alpha^2}{2}. \end{array} \qquad (22)$$

В качестве иллюстрации применения теоремы III и таблицы (22), рассмотрим следующие примеры.

Пример 4. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{e^{2x}-1}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{e^{2x}-1} = \left(\dfrac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x}{2x} = \dfrac{5}{2}$

$\sin 5x \sim 5x$, т.к. при $x \to 0, 5x \to 0$ (в этом случае $\alpha = 5x$) и $e^{2x} - 1 \sim 2x$, вытекает из формулы $e^{\alpha} - 1 \sim \alpha(2x \to 0, \text{ï ðè } x \to 0)$ использованы теоремы III и таблицы (22).

Ответ: $\dfrac{5}{2}$.

Пример 5. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{2\sin^2 x}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{2\sin^2 x} = \left(\dfrac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{x^2}{2}}{2\cdot x^2} = \dfrac{1}{4}$, т.к. $1-\cos x \sim \dfrac{x^2}{2}$, $\sin x \sim x$, при $x \to 0$. Использована теорема III и таблица (22).

Ответ: $\dfrac{1}{4}$.

Задания 6.

Найти производные функций.

Указания к выполнению задания

Для выполнения задания введем основные определения, правила вычисления и таблицу производных.

Определение. Производной функции $y = f(x)$ в точке x называется конечный предел отношения приращения функции $\Delta y = \Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x)$ к приращению аргумента Δx при условии, что Δx стремится к нулю.

Производные обозначаются: $y', f'(x), \dfrac{dy}{dx}, \dfrac{df}{dx}$.

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f\left(x + \Delta x\right) - f(x)}{\Delta x}$$

Если функция имеет производную в точке, то ее называют дифференцируемой в этой точке.

Правила дифференцирования

Если функция $u(x)$ и $v(x)$ дифференцируемы в точке x, то

1. $\left(u(x) \pm v(x)\right)' = u'(x) \pm v'(x)$– производная суммы (разности);
2. $\left(u(x) \cdot v(x)\right)' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$ – производная произведения;
3. $\left(c u(x)\right)' = c \cdot u'(x), \quad c - const$;
4. $\left(\dfrac{u(x)}{v(x)}\right)' = \dfrac{u'(x)v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v^2(x)}$ – производная частного;
5. $y = f(u), u = u(x)$
$y' = f_u'(u) \cdot u_x'(x)$– производная сложной функции.

Таблица производных

1. $c' = 0, \quad c - \text{const}.$
2. $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha - 1}, \quad \alpha \in R.$
3. $(a^x)' = a^x \ln a, \quad a > 0, a \neq 1.$
$(e^x)' = e^x.$

4. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}, \quad a > 0, a \neq 1.$

5. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}, \quad$ *где* $\ln x = \log_e x.$

6. $(\sin x)' = \cos x.$

7. $(\cos x)' = -\sin x.$

8. $(tgx)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}.$

9. $(ctgx)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}.$

10. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$

11. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$

12. $(arctgx)' = \dfrac{1}{1+x^2}.$

13. $(arcctgx)' = -\dfrac{1}{1+x^2}.$

Пользуясь таблицей производных и правилами дифференцирования функций, в качестве примеров найдем производные некоторых функций.

1. $y = 3\sin x + 4\ln x - 2tg x.$

Решение.

Воспользуемся правилами дифференцирования (1) и (3), получим

$$y' = 3(\sin x)' + 4(\ln x)' - 2(tg x)' = 3\cos x + 4 \cdot \frac{1}{x} - 2 \cdot \frac{1}{\cos^2 x}.$$

2. $y = e^x (x^2 + 2).$

Решение.

Воспользуемся правилами дифференцирования (2) и (1), получим

$$y' = \left(e^x\right)'(x^2+2) + e^x (x^2+2)' = e^x (x^2+2) + e^x \cdot 2x = e^x (x^2 + 2x + 2).$$

3. $y=\dfrac{\cos x}{e^x}$.

Решение.

Воспользуемся формулой (4) правила дифференцирования и таблицей производных

$$y'=\left(\frac{\cos x}{e^x}\right)'=\frac{(\cos x)'\cdot e^x-\left(e^x\right)'\cos x}{\left(e^x\right)^2}=\frac{-\sin x\cdot e^x-e^x\cos x}{e^{2x}}=$$

$$=-\frac{e^x(\sin x+\cos x)}{e^{2x}}=-\frac{\sin x+\cos x}{e^x}.$$

4. $y=\sin^3 x$.

Решение.

Воспользуемся формулой (5) правила дифференцирования и таблицей производных. Пусть $u=\sin x$, тогда $y=u^3$ и

$$y'=y'_u\cdot u'_x=3u^2\cdot\cos x=3\sin^2 x\cdot\cos x.$$

5. $y=\cos^5 3x$.

Решение.

Воспользуемся формулой (5) правила дифференцирования и таблицей производных. Пусть $u=\cos 3x$, тогда $y=u^5$ и $y'=y'_u\cdot u'_x=5u^4\cdot(\cos 3x)'_x$.

Но $\cos 3x$ сложная функция от x и для нахождения производной от этой функции снова нужно воспользоваться формулой (5). $u=\cos 3x$. Пусть $3x=z$, тогда $u=\cos z$ и $u'_x=u'_z\cdot z'_x=-\sin z\cdot 3=$ $=-\sin 3x\cdot 3$ или $y'=5\cos^4 3x\cdot(-3\sin 3x)$.

Окончательно

$$y'=-15\cos^4 3x\cdot\sin 3x.$$

Обычно замену переменных в сложных функциях производят мысленно и запись решенного примера будет иметь следующий вид

$$y=\cos^5 3x$$

Решение.

$$y' = 5\cos^4 3x \cdot (\cos 3x)'_x = 5\cos^4 3x \cdot \left(-\sin 3x\right) \cdot \left(3x\right)' =$$

$$= 5\cos^4 3x\left(-\sin 3x\right) \cdot 3 = -15\cos^4 3x \cdot \sin 3x.$$

При некоторой тренировке промежуточные записи можно опускать, т.е. записать решение так: $y = \cos^5 3x$.

Решение.

$$y' = 5\cos^4 3x \cdot (-\sin 3x) \cdot 3 = -15\cos^4 3x \cdot \sin 3x.$$

6. $y = \ln^4 \sqrt{\sin 7x}$.

Решение.

$$y' = 4\ln^3 \sqrt{\sin 7x} \cdot \frac{1}{\sqrt{\sin 7x}} \cdot \frac{1}{2}(\sin 7x)^{-\frac{1}{2}} \cdot \cos 7x \cdot 7 =$$

$$= \frac{14\ln^3 \sqrt{\sin 7x} \cdot \cos 7x}{\sin 7x} = 14ctg 7x \ln^3 \sqrt{\sin 7x}.$$

Задание 7.

Найти частные производные функций.

Указания к выполнению задания

Введем понятие частных производных и сформулируем правила нахождения их. Пусть функция $z = f(x, y)$ определена в некоторых точке $M_0(x_0; y_0)$. Разность

$$\Delta_x z = f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)$$

называется частным приращением функции $z = f(x, y)$ в точке M_0 по переменной x.

Определение.

Если существует конечный предел

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x},$$

то он называется частной производной функции $z=f(x,y)$ в точке $M_0(x_0;y_0)$ по переменной x и обозначается

$$f'_x(M_0), \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{M_0}, \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{M_0}, \left. z'_x\right|_{M_0}.$$

Аналогично определяется частная производная по переменной y

$$\left. z'_y\right|_{M_0} = \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{M_0} = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}.$$

Из определения частных производных следует, что для нахождения частной производной по какой-то переменной достаточно найти обыкновенную производную по этой переменной, считая другую переменную постоянной.

Замечание. Для функции $u=f(x,y,z)$ определенные частных производных по переменным x,y и z дается аналогично определению частных производных для двух переменных.

В частности, сформулируем определение частной производной по переменной z функции $u=f(x,y,z)$ в точке $M_0(x_0;y_0;z_0)$.

Определение. Если существует конечный предел $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{f(x_0,y_0,z_0+\Delta z)-f(x_0,y_0,z_0)}{\Delta z}=\left.\dfrac{\partial u}{\partial z}\right|_{M_0}$, то он и является частной производной по переменной z в точке $M_0(x_0;y_0;z_0)$.

Из определения следует, что для функции $u=f(x,y,z)$ при нахождении частной производной по какой-то переменной находит обычную производную по этой переменной, считая другие переменные постоянными. Рассмотрим несколько примеров нахождения частных производных.

Пример 1. Найти частные производные по переменным x и y функции:

а) $z=x^2+5xy$

б) $z=x^3e^y+3x^2y^3$

Решение.

а) $z = x^2 + 5xy$

$z'_x = 2x + 5y$ – при нахождении z'_x y считаем постоянной.

$z'_y = 5x$ – при нахождении z'_y считаем x постоянной.

б) $z = x^3 e^y + 3x^2 y^3$

Решение.

$z'_x = 3x^2 \cdot e^y + 6x \cdot y^3,$

$z'_y = x^3 e^y + 3x^2 \cdot 3y^2 = x^3 e^y + 9x^2 y^2.$

Пример 2. Найти частные производные по переменным x, y и z функции

$$u = 2x^2 y + 3xz^2 - yz$$

в точке $M_0(2;1;-1)$.

Решение.

$u'_x\big|_{M_0} = \left(4xy + 3z^2\right)\Big|_{M_0} = 8 + 3 = 11.$

$u'_y\big|_{M_0} = \left(2x^2 - z\right)\Big|_{M_0} = 8 + 1 = 9.$

$u'_z\big|_{M_0} = \left(3x \cdot 2z - y\right)\big|_{M_0} = \left(6xz - y\right)\big|_{M_0} = -12 - 1 = -13.$

Задание 8.

Вычислить градиент функции $u = f(x, y, z)$ в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$

Указания к выполнению задания

Для выполнения задания введем определение градиента и выпишем вычислительную формулу.

Определение. Градиентом функции $u = f(x, y, z)$, в точке $M_0(x_0; y_0; z_0)$ называется вектор, координаты которого соответственно равны значениям частных производных функции $u = f(x, y, z)$ в точке M_0, т.е.

$$grad\, u\Big|_{M_0} = \frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{M_0} i + \frac{\partial u}{\partial y}\bigg|_{M_0} \overline{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\bigg|_{M_0} \overline{k}, \tag{23}$$

где i, $\overline{j}$, $\overline{k}$ – единичные векторы, соответственно параллельные осям Ox, Oy и Oz.

Вычисление градиента функции $u = f(x, y, z)$ в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ сводится непосредственно к применению формулы (23). Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Найти градиент функции $u = 3x^2 y + 4xz^2 + 2z$ в точке $M_0(2;1;1)$.

Решение.

Воспользуемся формулой (23).

$$grad\, u\Big|_{M_0} = \frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{M_0} i + \frac{\partial u}{\partial y}\bigg|_{M_0} \overline{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\bigg|_{M_0} \cdot \overline{k}$$

Найдем

$$\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{M_0} = \left(6xy + 4z^2\right)\Big|_{M_0} = 12 + 4 = 16, \frac{\partial u}{\partial y}\bigg|_{M_0} = 3x^2\Big|_{M_0} = 12,$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}\bigg|_{M_0} = \left(8xz + 2\right)\Big|_{M_0} = 16 + 2 = 18.$$

Окончательно имеем $grad\, u\Big|_{M_0} = 16i + 12\overline{j} + 18\overline{k}$.

Пример 2. Найти градиент функции $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z}$ в точке $M_0(2;2;2)$.

Решение.

Воспользуемся формулой (23). Найдем частные производные функции в точке M_0.

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{M_0} = \left.\frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2+z}}\cdot 2x\right|_{M_0} = \left.\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z}}\right|_{M_0} = \frac{2}{\sqrt{4+4+1}} = \frac{2}{3}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{M_0} = \left.\frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2+z}}\cdot 2y\right|_{M_0} = \frac{2}{3}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{M_0} = \left.\frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2+z}}\right|_{M_0} = \frac{1}{2\cdot 3} = \frac{1}{6}$$

Окончательно имеем $\left. grad\, u\right|_{M_0} = \frac{2}{3}i + \frac{2}{3}\bar{j} + \frac{1}{6}\bar{k}$.

Замечание. Градиент используется для отыскания экстремумов функций нескольких переменных.

Градиент в точке $M_0(x_0;y_0;z_0)$ задает направление наибольшего возрастания функции в данной точке.

РАЗДЕЛ II.ТИПОВОЕ ЗАДАНИЕ К КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЕ № 1

1. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix}$.

2. Даны точки $A_1(3;1;2)$, $A_2(-2;1;-1)$, $A_3(2;0;4)$.

Найти:

а) векторы $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_1A_3}$, $\overline{A_2A_3}$ и их длины;

б) $\angle A_2A_1A_3$.

3. Даны точки $M_1(2;-2)$, $M_2(1;3)$, $M_3(-1;0)$.

Найти:

а) уравнение прямой, проходящей через точки M_2 и M_3;

б) уравнение высоты треугольника $M_1M_2M_3$, опущенной из вершины M_1.

4. Даны точки $A_1(3;1;2)$, $A_2(-2;1;-1)$, $A_3(2;0;4)$.

Найти:

а) уравнение прямой $\left(A_2A_3\right)$;

б) уравнение плоскости, проходящей через точку A_1 перпендикулярно прямой $\left(A_1A_2\right)$.

5. Найти пределы.

а) $\lim\limits_{x\to 3}(2x+1)$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-4x+7}{2x^2+3x+2}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctg\,2x}{\sin 3x}$.

6. Найти производные функций.

а) $y=3x^2+\sin x$;

б) $y=\dfrac{x^2+1}{\sin 2x}$.

7. Найти частные производные

а) $z=7x+2y$;

б) $y=5x^2-xy+7y^2$.

8. Найти градиент функции $u=2x^2-3xyz+z^2$ в точке $M_0(1;-1;1)$.

РАЗДЕЛ III. РЕШЕНИЯ ТИПОВОГО ЗАДАНИЯ К КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЕ №1.

1. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix}$.

Решение. Воспользуемся теоремой разложения по элементам второй строки

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} =$$
$$= -(-4+1) - 2(3-4) = 3 + 2 = 5.$$

2. Даны точки $A_1(3;1;2)$, $A_2(-2;1;-1)$, $A_3(2;0;4)$.

Найти: а) векторы $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_1A_3}$, $\overline{A_2A_3}$ и их длины;

б) $\angle A_2A_1A_3$.

Решение.

а) $\overline{A_1A_2} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1) =$
$= (-2-3; 1-1; -1-2) = (-5; 0; -3)$

$\overline{A_1A_3} = (x_3 - x_1; y_3 - y_1; z_3 - z_1) = (2-3; 0-1; 4-2) = (-1; -1; 2)$

$\overline{A_2A_3} = (x_3 - x_2; y_3 - y_2; z_3 - z_2) = (2+2; 0-1; 4+1) = (4; -1; 5)$

$\overline{|A_1A_2|} = \sqrt{25+9} = \sqrt{34}$,

$\overline{|A_1A_3|} = \sqrt{1+1+4} = \sqrt{6}$,

$\overline{|A_3A_2|} = \sqrt{16+1+25} = \sqrt{42}$.

т.к. если $\overline{a} = (a_x; a_y; a_z)$,то $|\overline{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$.

3. Даны точки $M_1(2;-2)$, $M_2(1;3)$, $M_3(-1;0)$.

Найти:

а) уравнение прямой, проходящей через точки M_2 и M_3;

б) уравнение высоты треугольника $M_1M_2M_3$, опущено из вершины M_1.

Решение. а) Воспользуемся уравнением прямой, проходящей через две точки. В нашем случае оно имеет вид

$$\frac{x-x_2}{x_3-x_2}=\frac{y-y_3}{y_3-y_2} \text{ или } \frac{x-1}{-1-1}=\frac{y-3}{-3},$$

$$3x-3=2y-6, \quad 3x-2y+3=0.$$

Ответ: $3x-2y+3=0$.

б) Воспользуемся уравнением прямой, проходящей через точку с заданным нормальным вектором.

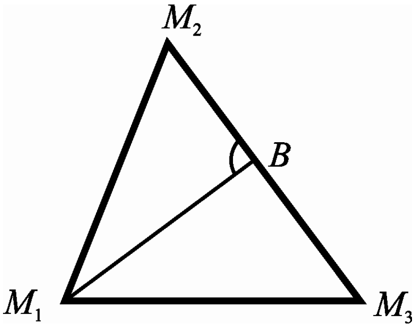


Рис. 7

$A(x-x_1)+B(y-y_1)=0, \overline{N}=(A;B)$

Вектор $M_2M_3 \perp$ прямой M_1B

$\overline{N}=M_2M_3=(x_3-x_2;y_3-y_2)=(-2;-3).$

Искомое уравнение запишем в виде

$$-2(x-2)-3(y+2)=0.$$

$$2x-4+3x+6=0 \text{ или}$$

$$2x+3y+2=0.$$

Ответ: $2x+3y+2=0$.

4. Даны точки $A_1(3;1;2)$, $A_2(-2;1;-1)$, $A_3(2;0;4)$.

Найти: а) уравнение прямой $\left(A_2A_3\right)$;

б) уравнение плоскости проходящей через точку A_1 перпендикулярно прямой $\left(A_1A_2\right)$.

Решение.

а) Воспользуемся уравнениями прямой, проходящей через две точки. В нашем случае уравнения имеют вид

$$\frac{x-x_2}{x_3-x_2}=\frac{y-y_2}{y_3-y_2}=\frac{z-z_2}{z_3-z_2}$$

$$\frac{x+2}{2+2}=\frac{y-1}{0-1}=\frac{z+1}{4+1}, \quad \frac{x+2}{4}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z+1}{5}.$$

Ответ: $\frac{x+2}{4}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z+1}{5}$.

б) Т.к. прямая (A_1A_2) перпендикулярна плоскости, то в качестве нормального вектора $\overline{N}$ возьмем вектор $\overline{A_1A_2}$ и воспользуемся уравнением

$$A(x-x_1)+B(y-y_1)+C(z-z_1)=0, \overline{N}=(A;B;C)$$

$$\overline{N}=\overline{A_1A_2}=(x_2-x_1;y_2-y_1;z_2-z_1)=(-2-3;1-1;-1-2)=(-5;0;-3)$$

Замечание. Этот вектор $\overline{N}$ уже найден в задании 2. Можно себя проконтролировать.

Уравнение плоскости будет иметь вид

$$-5(x-3)+0(y-1)-3(z-2)=0.$$

Окончательно имеем

$$5x+3z-21=0.$$

Ответ: $5x+3z-21=0$.

5. Найти пределы.

а) $\lim\limits_{x\to 3}(2x+1)$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2-4x+7}{2x^2+3x+2}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{arctg2x}{\sin 3x}$.

Решение.

а) $\lim\limits_{x\to 3}(2x+1)=2\lim\limits_{x\to 3}x+1=2\cdot 3+1=7$

Ответ: 7.

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2-4x+7}{2x^2+3x+2}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\frac{3}{2}$, т.к. степень числителя равна степени знаменателя.

Ответ: $\frac{3}{2}$.

в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{arctg2x}{\sin 3x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x}{3x}=\frac{2}{3}$, т.к. $arctg\alpha\sim\alpha$ и $\sin\alpha\sim\alpha$ при $\alpha\to 0$.

Ответ: $\frac{2}{3}$.

6. Найти производные функций.

а) $y = 3x^2 + \sin x$; б) $y = \dfrac{x^2+1}{\sin 2x}$.

Решение.

а) $y = 3x^2 + \sin x$

$$y' = \left(3x^2 + \sin x\right)' = 3(x^2)' + (\sin x)' = 3 \cdot 2x + \cos x = 6x + \cos x.$$

б) $y = \dfrac{x^2+1}{\sin 2x}$

$$y' = \left(\frac{x^2+1}{\sin 2x}\right)' = \frac{\left(x^2+1\right)' \cdot \sin 2x - \left(x^2+1\right) \cdot \left(\sin 2x\right)'}{\sin^2 2x} =$$

$$= \frac{2x \cdot \sin 2x - \left(x^2+1\right) \cdot \cos 2x \cdot 2}{\sin^2 2x} = \frac{2x \sin 2x - 2\left(x^2+1\right)\cos 2x}{\sin^2 2x}.$$

7. Найти частные производные

а) $z = 7x + 2y$; б) $y = 5x^2 - xy + 7y^2$.

Решение.

а) $z = 7x + 2y$

$z'_x = 7, \quad z'_y = 2.$

б) $y = 5x^2 - xy + 7y^2$.

$z'_x = 5 \cdot 2x - y = 10x - y$

$z'_y = -x + 7 \cdot 2y = -x + 14y.$

8. Найти градиент функции $u = 2x^2 - 3xyz + z^2$ в точке $M_0(1;-1;1)$.

Решение.

Воспользуемся формулой

$$grad\, u\Big|_{M_0} = \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{M_0} i + \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{M_0} \overline{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\Big|_{M_0} \cdot \overline{k}\,.$$

Найдем частные производные функции в точке M_0.

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{M_0} = \left.(4x - 3yz)\right|_{M_0} = 4 + 3 = 7,$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{M_0} = \left.(-3xz)\right|_{M_0} = -3,$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{M_0} = \left.(-3xy + 2z)\right|_{M_0} = 3 + 2 = 5.$$

Окончательно имеем $\left. grad\, u\right|_{M_0} = 7i - 3\overline{j} + 5\overline{k}.$

РАЗДЕЛ IV. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЕ №2.

Задание 1.

Найти интегралы.

Указания к выполнению задания

Для выполнения задания введем основные понятия связанные с неопределенными интегралами, сформулируем свойства и выпишем таблицу основных интегралов.

Определение. Функция $F(x)$ называется первообразной функцией для данной функции $y = f(x)$, определенной на отрезке $[a;b]$, если в каждой точке этого отрезка производная функции $F(x)$ равна $f(x)$, т.е.

$$F'(x) = f(x)$$

Так функция $\dfrac{x^3}{3}$ есть первообразная функции x^2 ибо $\left(\dfrac{x^3}{3}\right)' = x^2$, а функция tgx есть первообразная функции $\dfrac{1}{\cos^2 x}$, т.к. $(tgx)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$.

Определение. Совокупность всех первообразных функции $f(x)$ называется неопределенным интегралом и обозначается $\int f(x)dx$, т.е.

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

где $\int$ – знак интеграла,

$f(x)$ – подынтегральная функция,

$f(x)dx$ – подынтегральное выражение.

Таблица основных интегралов

1. $\int x^{\alpha} dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad \alpha \neq -1.$

2. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C.$

3. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad a > 0,\ a \neq 1.$

4. $\int e^x dx = e^x + C.$

5. $\int \sin x dx = -\cos x + C.$

6. $\int \cos x dx = \sin x + C.$

7. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C.$

8. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C.$

9. $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C, \quad a \neq 0.$

10. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + b}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 + b}\right| + C,$ ãäå $b \in R, b \neq 0.$

11. $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C, \quad a \neq 0.$

12. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C, \quad a \neq 0.$

Теорема существования неопределенного интеграла: если $f(x)$ непрерывная функция на $[a;b]$, то существует неопределенный интеграл.

Свойства неопределенного интеграла.

1. Производная неопределенного интеграла равна подынтегральной функции:

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)\ .$$

2. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла

$$\int a\, f(x)dx = a\int f(x)dx, \quad a - const\,.$$

3. Интеграл от суммы (разности) функций равен сумме (разности) интегралов от этих функций

$$\int \left(f_1(x) \pm f_2(x)\right)dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx\,.$$

Свойства 1 и 2 называются свойствами линейности.

4. $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b)+C$, если $\int f(x)dx = F(x)+C$.

В следующих примерах найдем неопределенные интегралы.

1. $\int\left(3\sin x+\frac{4}{\cos^2 x}-3x^2\right)dx = 3\int\sin x dx + 4\int\frac{1}{\cos^2 x}dx - 3\int x^2 dx =$

$= -3\cos x + 4tg\, x - 3\frac{x^3}{3} + C = -3\cos x + 4tgx - x^3 + C.$

При решении использованы свойства (2), (3) и формулы (1), (5), (8) таблицы основных интегралов.

2. $\int 3\cos(5x+6)\,dx = 3\int\cos(5x+6)\,dx = 3\cdot\frac{1}{5}\sin(5x+6)+C =$

$= \frac{3}{5}\sin(5x+6)+C.$

При решении использованы свойства (2), (4) и формула (6) таблицы неопределенных интегралов.

3.

$$\int\frac{dx}{(3x+4)^5} = \int(3x+4)^{-5}dx = \frac{1}{3}\cdot\frac{(3x+4)^{-5+1}}{-5+1}+C = -\frac{1}{12(3x+4)^4}+C,$$

использованы свойство (4) и формула (1) таблицы интегралов.

Задание 2.

Вычислить определенный интеграл.

Указания к выполнению задания

Для выполнения задания введем понятие определенного интеграла и сформулируем свойства интеграла.

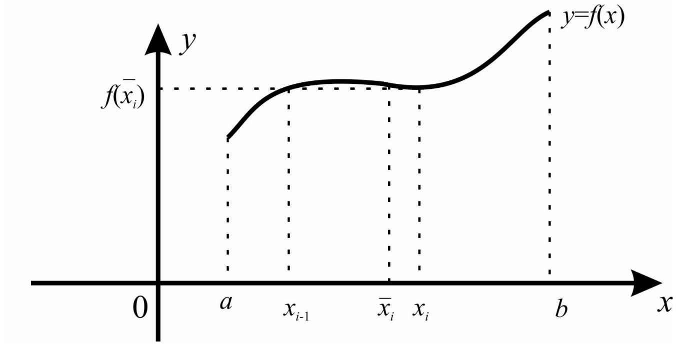


Рис. 8

Интегральной суммой для функции $y = f(x)$ на отрезке $[a;b]$ называется сумма

$$\sum_{i=1}^{n} f(\overline{x_i})\Delta x_i ,$$

где n – число элементарных отрезков, на которые разбивается отрезок $[a;b]$,

$\overline{x_i}$ – произвольная точка внутри отрезка $[x_{i-1};x_i]$, длина которого $x_i - x_{i-1} = \Delta x_i$.

Определение. Определенным интегралом функции $y = f(x)$ на отрезке $[a;b]$ называется предел интегральной суммы при стремлении к нулю длины наибольшего элементарного отрезка, если этот предел не зависит от способа разбиения отрезка $[a;b]$ и выбора точки $\overline{x_i}$ внутри отрезка $[x_{i-1};x_i]$, т.е.

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\max|\Delta x_i|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\overline{x_i})\Delta x_i ,$$

где a – нижний предел интегрирования,

b – верхний предел интегрирования.

При вычислении определенного интеграла используется формула Ньютона-Лейбница

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b ,$$

где $F(x)$ – первообразная функция $f(x)$ и свойства:

1. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$,
2. $\int_a^b c\,f(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$, c – константа.
3. $\int_a^b \left(f_1(x) \pm f_2(x)\right)dx = \int_a^b f_1(x)dx \pm \int_a^b f_2(x)dx$,

4. $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx$.

Замечания. 1. Если $a = b$, то $\int\limits_a^b f(x)dx = 0$, т.е. $\int\limits_a^a f(x)dx = 0$.

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Вычислить $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (3\sin x + 4\cos x)dx$.

Решение.

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (3\sin x + 4\cos x)dx = 3\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx + 4\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\, dx = 3(-\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + 4\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= -3\left(\cos\frac{\pi}{2} - \cos 0\right) + 4\left(\sin\frac{\pi}{2} - \sin 0\right) = 3 + 4 = 7,$$

т.к. $\cos\frac{\pi}{2} = 0$, $\cos 0 = 1$, $\sin\frac{\pi}{2} = 1$ и $\sin 0 = 0$.

Пример 2. Вычислить $\int\limits_0^1 \frac{dx}{(5x+2)^3}$.

Решение.

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{(5x+2)^3} = \int\limits_0^1 (5x+2)^{-3} dx = \frac{1}{5} \cdot \frac{(5x+2)^{-3+1}}{-3+1}\Bigg|_0^1 = -\frac{1}{10(5x+2)^2}\Bigg|_0^1$$

$$= -\frac{1}{10}\left(\frac{1}{(5+2)^2} - \frac{1}{2^2}\right) = -\frac{1}{10}\left(\frac{1}{49} - \frac{1}{4}\right) = \frac{9}{392}.$$

Пример 3. Вычислить $\int\limits_0^1 e^{3x-1}dx$.

Решение.

$$\int\limits_0^1 e^{3x-1}dx = \frac{1}{3}e^{3x-1}\Bigg|_0^1 = \frac{1}{3}\left(e^2 - e^{-1}\right) = \frac{e^3 - 1}{3e}.$$

Задание 3.

Найти площадь фигуры, ограниченной данными линиями.

Указания к выполнению задания.

Для выполнения задания необходимо воспользоваться геометрическими приложениями определенного интеграла.

Определенный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ при $f(x)>0$ и $a>b$ равен площади фигуры ограниченной линией $y=f(x)$ и прямыми $x=a$, $x=b$, $y=0$ (фигура называется криволинейной трапецией).

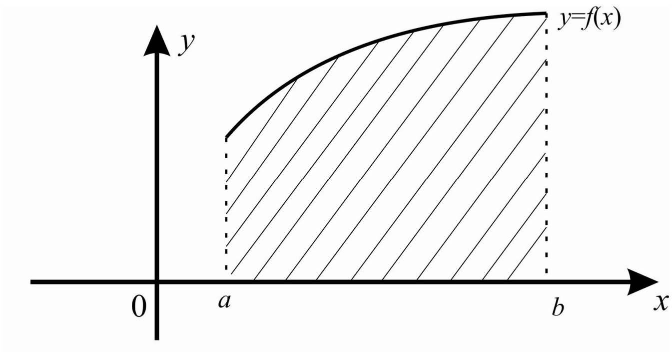


Рис. 9

$$S_{êðèâ.ò\ ðàï\ .}=\int_a^b f(x)dx$$

Для вычисления площади фигуры изображенного на рисунке (10) используется формула

$$S=\int_a^b \left(f_2(x)-f_1(x)\right)dx \qquad (24)$$

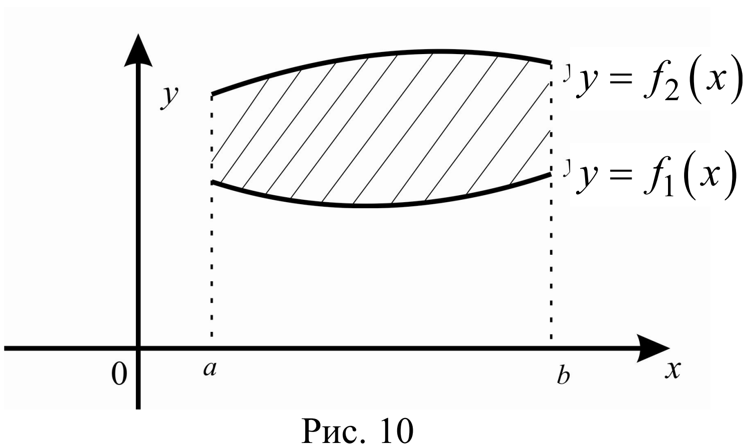


Рис. 10

При выполнении задания необходимо сделать схематично рисунок области, площадь которой нужно найти.

Рассмотрим примеры.

Пример 1. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 + 4x$ и $x - y + 4 = 0$.

Решение. Сделаем схематично рисунок области, площадь которой необходимо найти.

$y = x^2 + 4x$ – парабола

$y = 0 \Rightarrow x^2 + 4x = 0 \Rightarrow x(x+4) = 0 \Rightarrow x = 0$ и $x = -4$, т.е. график функции пересекает ось Ox в точках $x = 0$ и $x = -4$.

$x = 0 \Rightarrow y = 0$, т.е. проходит через начало координат.

Ветви парабол направлены вверх, т.к. коэффициент при x^2 равен $1 > 0$.

$x - y + 4 = 0$ – прямая.

$y = 0 \Rightarrow x + 4 = 0 \Rightarrow x = -4$

$x = 0 \Rightarrow -y + 4 = 0 \Rightarrow y = 4$, т.е. прямая пересекает ось Ox при $x = -4$, а ось Oy при $y = 4$.

Нарисуем графики функций $y = x^2 + 4x$ и $y = x + 4$.

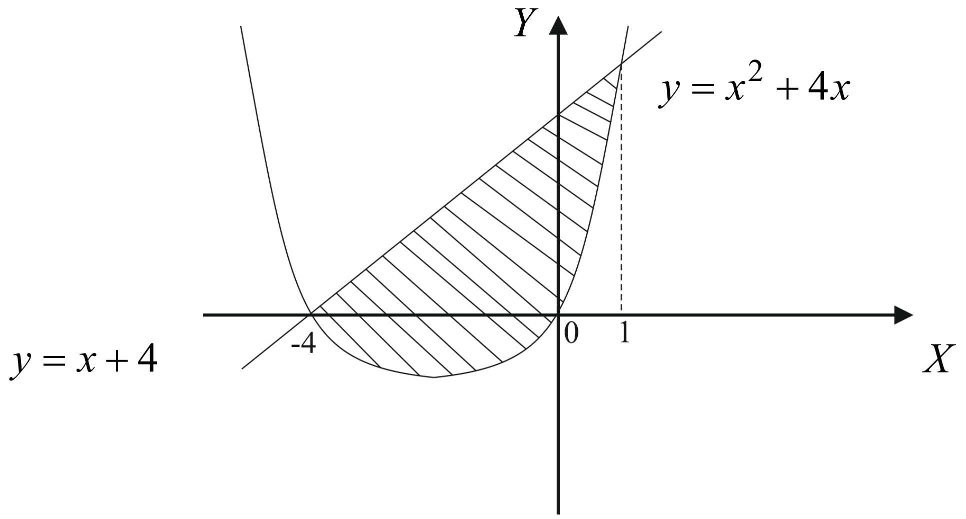


Рис. 11

На рисунке 11 заштрихована часть плоскости, площадь которой необходимо найти. Найдем координаты x точки пересечения графиков функции $y = x^2 + 4x$ и $y = x + 4$. Для этого решим систему уравнения

$$\begin{cases} y = x^2 + 4x \\ y = x + 4 \end{cases}.$$

Поскольку нас интересует только координаты x точек пересечения, то достаточно решить уравнение $x^2 + 4x = x + 4$.

Решим его

$$x^2 + 3x - 4 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9+16}}{2} = \frac{-3 \pm 5}{2}$$

$$x_1 = \frac{-3+5}{2} = 1 = b; \; x_2 = \frac{-3-5}{2} = -4 = a.$$

Воспользуемся формулой (24)

$$S = \int_{-4}^{1} \left(x + 4 - (x^2 + 4x) \right) dx = \int_{-4}^{1} \left(4 - 3x - x^2 \right) dx = \left(4x - 3\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) \Bigg|_{-4}^{1} =$$

$$= 4 - \frac{3}{2} - \frac{1}{3} - \left(-16 - 24 + \frac{64}{3} \right) = \frac{125}{6} \left(\text{åä}^2 \right).$$

Пример 2. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 - 1$, $y = 3 - x^2$.

Решение. Сделаем схематично рисунок области, ограниченный заданными линиями

$y = x^2 - 1$ – парабола.

$y = 0 \Rightarrow x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$ и $x = -1$

$x = 0 \Rightarrow y = -1.$

Так как коэффициент при x^2 равен $1 > 0$, то ветви параболы направлены вверх. Парабола пересекает ось Ox в точках $x = 1$ и $x = -1$, а ось Oy при $y = -1$

$y = 3 - x^2$ – парабола.

$y = 0 \Rightarrow 3 - x^2 = 0 \Rightarrow x = \sqrt{3}$ и $x = -\sqrt{3}$

$x = 0 \Rightarrow y = 3.$

Так как коэффициент при x^2 равен $-1 < 0$, то ветви параболы направленной вниз. Парабола пересекает ось Ox при $x = \sqrt{3}$ и $x = -\sqrt{3}$, а ось Oy при $y = 3$.

Найдем координаты x точек пересечения линий $y = x^2 - 1$, $y = 3 - x^2$. Для этого решим систему уравнений

$$\begin{cases} y = x^2 - 1 \\ y = 3 - x^2 \end{cases}.$$

Поскольку нас интересует только значения x, то достаточно решить уравнение

$$x^2 - 1 = 3 - x^2 \Rightarrow 2x^2 = 4 \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x = \sqrt{2} \text{ и } x = -\sqrt{2}.$$

Нарисуем графики функций $y = x^2 - 1$ и $y = 3 - x^2$.

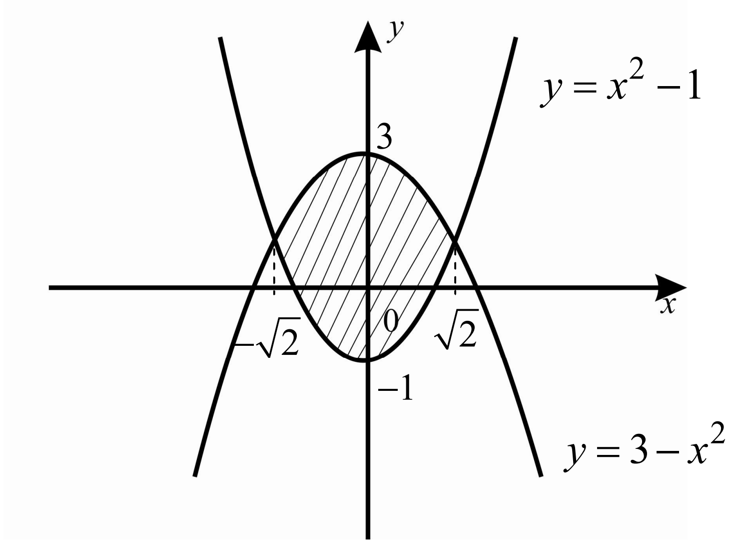


Рис. 12

На рисунке 12 заштрихована часть плоскости, площадь которой надо найти.

Из-за симметрии заштрихованной фигуры достаточно найти площадь фигуры расположенной справа от оси Oy и удвоить полученное значение. Воспользуемся формулой (24)

$$S = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \left(3 - x^2 - \left(x^2 - 1\right)\right) dx = 2\int_{0}^{\sqrt{2}} \left(4 - 2x^2\right) dx = 2\left(4x - 2 \cdot \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^{\sqrt{2}} =$$

$$= 2\left(4\sqrt{2} - \frac{2}{3} \cdot 2\sqrt{2}\right) = 8\sqrt{2}\left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{16\sqrt{2}}{3}\left(\text{åä}^2\right).$$

Задание 4.

Записать решения дифференциальных уравнений.

Указания к выполнению задания

Для выполнения задания введем определение линейного дифференциального уравнения II-го порядка с постоянными коэффициентами, выпишем формулы для записи общих решений однородных и неоднородных уравнений со специальной правой частью, а именно $f(x) = Ax + B$ и на конкретных примерах проиллюстрируем методику нахождения их.

Уравнение

$$y'' + py' + qy = f(x), \tag{25}$$

где p и q – числа (постоянные), а $f(x)$ зависит только от x (или является постоянной величиной), называется линейным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами. Если $f(x) \neq 0$, то уравнение называется неоднородным, если же $f(x) = 0$, то уравнение называется однородным.

Рассмотрим методику решения линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка, то есть уравнения

$$y'' + py' + qy = 0, \tag{26}$$

Для уравнения (26) составляется характеристическое уравнение

$$k^2 + pk + q = 0, \tag{27}$$

которое получается из уравнения (26) если в нем вместо y'', y' и y соответственно подставляют k^2, k и 1 (т.е. k^0).

Характеристическое уравнение является квадратным уравнением относительно k.

Решаем характеристическое уравнение (27) используя формулу

$$k_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2} \tag{28}$$

В зависимости от $p^2 - 4q = D$ – дискриминанта квадратного уравнения, могут быть три случая:

1. $D > 0$ – характеристическое уравнение имеет два различных

действительных корня k_1 и k_2. Общее решение уравнения (26) в этом случае записывается в виде

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}.\ C_1 \text{ и } C_2 - \text{константы.} \tag{29}$$

2. $D = 0$ – характеристическое уравнение имеет два равных корня $k_1 = k_2 = k$ и общее решение уравнения записывается в виде

$$y = \left(C_1 + C_2 x\right) e^{kx}. \tag{30}$$

3. $D < 0$ – характеристическое уравнение имеет комплексные корни $k_1 = \alpha + \beta i$ и $k_2 = \alpha - \beta i$ ($i^2 = -1$ или $\sqrt{-1} = i$). Общее решение в этом случае имеет вид

$$y = e^{\alpha x}\left(C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x\right) \tag{31}$$

Приведем примеры иллюстрирующие методику решения уравнения (26) с помощью формул (29), (30), (31).

1. Найти общее решение уравнения $y'' - 5y' + 4y = 0$.

Решение. Составим характеристическое уравнение и решим его

$k^2 - 5k + 4 = 0$

$k_{1,2} = \dfrac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{2} = \dfrac{5 \pm 3}{2}$

$k_1 = \dfrac{5+3}{2} = 4, \quad k_2 = \dfrac{5-3}{2} = 1.$

Воспользуемся формулой (29), т.к. k_1 и k_2 действительные и неравные. Общее решение уравнения имеет вид

$$y = C_1 e^{4x} + C_2 e^{x}.$$

2. Найти общее решение уравнения $y'' - 6y' + 9y = 0$.

Решение. Характеристическое уравнение $k^2 - 6k + 9 = 0$ имеет два одинаковых корня, т.к. $D = p^2 - 4q = 36 - 36 = 0$

$$k_{1,2} = \frac{6}{2} = 3.$$

Общее решение будет $y=\left(C_1+C_2x\right)e^{3x}$ – использовали формулу (30).

3. Найти общее уравнение уравнения $y''+4y'+13y=0$.

Решение. Характеристическое уравнение имеет вид $k^2+4k+13=0$

$$k_{1,2}=\frac{-4\pm\sqrt{16-52}}{2}=\frac{-4\pm\sqrt{-36}}{2}=\frac{-4\pm 6i}{2};$$

где $k_1=-2+3i,\quad k_2=-2-3i$ – корни комплексные $\alpha=-2;\quad \beta=3$.

Общее решение имеет вид $y=e^{-2x}\left(C_1\cos 3x+C_2\sin 3x\right)$, использована формула (31).

При решении линейного неоднородного уравнения (25) исходим из того, что общее решение неоднородного уравнения равно сумме общего решения соответствующего однородного уравнения и какого-либо частного решения неоднородного уравнения или

$$y=y_{oo}+y_{÷í} \qquad (32)$$

где y_{oo}– общее решение соответствующего однородного уравнения, т.е. уравнения (26).

$y_{÷í}$ – частное решение неоднородного уравнения, т.е. уравнения (25).

Общее решение однородного уравнения находим, используя в зависимости от знака дискиминанта, формулы (29), (30), (31).

Рассмотрим методику нахождения $y_{÷í}$ в предложении, что $f(x)=Ax+B$ – линейная функция. В зависимости от корней характеристического уравнения могут быть два случая:

1. k_1 и $k_2\neq 0$.

В этом случае частное решение неоднородного уравнения будет искать в виде $y_{÷í}=Ax+B$ – A и B пока неопределенные коэффициенты.

2. k_1 или k_2 равен нулю (т.е. $k_1=0, k_2\neq 0$ либо $k_2=0, k_1\neq 0$).

В этом случае $y_{÷í}=\left(Ax+B\right)x$ или $y=Ax^2+Bx$.

Для определения A и B используем метод неопределенных коэффициентов. При решении конкретных примеров проиллюстрируем методику нахождения их.

Пример 1. Найти общее решение уравнения $y'' + 3y' + 2y = x + 2$.

Решение. Общее решение неоднородного уравнения будем искать в виде

$$y = y_{oo} + y_{\div\acute{i}}.$$

Для определения y_{oo} решим уравнение $y'' + 3y' + 2y = 0$, т.е. предлагаем, что в исходном уравнением справа стоит 0. Характеристическое уравнение имеет вид

$$k^2 + 3k + 2 = 0$$

$$k_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{-3 \pm 1}{2},$$

$$k_1 = \frac{-3+1}{2} = -1, \quad k_2 = \frac{-3-1}{2} = -2.$$

Так как k_1 и k_2 вещественные и $k_1 \neq k_2$, то на основании формулы (29), имеем

$$y_{oo} = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x}.$$

Найдем $y_{\div\acute{i}}$. Так как k_1 и $k_2 \neq 0$, то решение будем в виде

$$y_{\div\acute{i}} = Ax + B.$$

Для определения A и B найдем $y'_{\div\acute{i}} = A$ и $y''_{\div\acute{i}} = 0$, и подставим в исходное уравнение выражения $y_{\div\acute{i}}$, $y'_{\div\acute{i}}$ и $y''_{\div\acute{i}}$. Получим

$$3A + 2(Ax + B) = x + 2 \tag{33}$$

Так как два многочлена тождественно равны только в том случае, когда равны их коэффициенты при одинаковых степенях x, то приравняем коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях равенства (33)

$$\begin{array}{c|l} x & 2A = 1; \\ x^0 & 3A + 2B = 2, \end{array} \qquad \begin{cases} A = \dfrac{1}{2} \\ B = \dfrac{2-3A}{2} = \dfrac{1}{4} \end{cases}$$

Таким образом $y_{\div\acute{\imath}} = x - 1$.

Следовательно, общее решение уравнения можно записать в вид

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x} + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}..$$

Пример 2. Найти общее решение уравнения $y'' + 4y' = 3x - 2$.

Решение. $y = y_{oo} + y_{\div\acute{\imath}}$.

Найдем y_{oo}: $y'' + 4y' = 0$

Составим и решим характеристическое уравнение

$k^2 + 4k = 0,\ k(k+4) = 0,$

$k_1 = -4, \quad k_2 = 0$

$y_{oo} = C_1 e^{-4x} + C_2 e^{0x} = C_1 e^{-4x} + C_2.$

Найдем $y_{\div\acute{\imath}}$.

$f(x) = 3x - 2$ т.к. $k_1 = -4 \neq 0$, а $k_2 = 0$, то частное решение будем искать в виде

$y_{\div\acute{\imath}} = \left(Ax + B\right)x = Ax^2 + Bx..$

Найдем $y'_{\div\acute{\imath}}$ и $y''_{\div\acute{\imath}}$.

$y'_{\div\acute{\imath}} = 2Ax + B, \quad y''_{\div\acute{\imath}} = 2A.$

Подставим в исходное уравнение $y'_{\div\acute{\imath}}$, $y''_{\div\acute{\imath}}$, получим $2A + 4\left(2Ax + B\right) = 3x - 2$.

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях x

$$\begin{array}{l|l} x & 8A = 3; \\ x^0 & 2A + 4B = -2, \end{array} \Rightarrow \begin{cases} A = \dfrac{3}{8} \\ B = \dfrac{-2 - 2A}{4} = \dfrac{-2 - \frac{3}{4}}{4} = -\dfrac{11}{16}. \end{cases}$$

Следовательно, $y_{\div\acute{\imath}} = \dfrac{3}{8}x^2 - \dfrac{11}{16}x$.

Окончательно получим $y = C_1 e^{-4x} + C_2 + \dfrac{3}{8}x^2 - \dfrac{11}{16}x$.

РАЗДЕЛ V. ТИПОВОЕ ЗАДАНИЕ К КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЕ №2

1. Найти интегралы

а) $\int \cos x\,dx$;

б) $\int \frac{dx}{16+x^2}$;

в) $\int \frac{dx}{(7x+4)^2}$;

г) $\int \frac{dx}{4x^2-7}$.

2. Вычислить определенный интеграл $\int_0^1 \left(3x^2+\sqrt[3]{x}\right)dx$.

3. Найдем площадь фигуры, ограниченной линиями: $y=x^3$, $y=1$, $x=0$.

4. Записать общие решения дифференциальных уравнений:

а) $y''-3y'+2y=0$;

б) $y''-9y'=3x-1$.

РАЗДЕЛ VI. РЕШЕНИЕ ТИПОВОГО ЗАДАНИЯ К КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЕ №2

1. Найти интегралы

а) $\int \cos x\,dx$; б) $\int \frac{dx}{16+x^2}$; в) $\int \frac{dx}{(7x+4)^2}$; г) $\int \frac{dx}{4x^2-7}$.

Решение.

а) $\int \cos x\,dx = \sin x + C$ – интеграл табличный, воспользовались формулой (6) таблицы основных интегралов.

б) $\int \frac{dx}{16+x^2} = \frac{1}{4} arctg \frac{x}{4} + C$ – воспользовались формулой (11) таблицы основных интегралов.

в) $\int \frac{dx}{(7x+4)^2} = \int (7x+4)^{-2}\,dx = \frac{1}{7} \cdot \frac{(7x+4)^{-2+1}}{-2+1} + C =$

$= -\frac{1}{7} \cdot \frac{1}{7x+4} + C$ – воспользовались свойством (4) неопределенного интеграла и формулой (1) таблицы интегралов.

г) $\int \frac{dx}{4x^2-7} = \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x^2-\frac{7}{4}} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2\cdot\sqrt{\frac{7}{4}}} \cdot \ln\left|\frac{x-\sqrt{\frac{7}{4}}}{x+\sqrt{\frac{7}{4}}}\right| + C =$

$$= \frac{1}{4\cdot 2\frac{\sqrt{7}}{2}} \ln\left|\frac{x-\frac{\sqrt{7}}{2}}{x+\frac{\sqrt{7}}{2}}\right| + C = \frac{1}{4\sqrt{7}} \ln\left|\frac{2x-\sqrt{7}}{2x+\sqrt{7}}\right| + C$$

– воспользовались формулой (12) таблицы интегралов.

2. Вычислить определенный интеграл $\int_0^1 \left(3x^2 + \sqrt[3]{x}\right)dx$.

Решение $\int_0^1 \left(3x^2 + \sqrt[3]{x}\right)dx = 3\int_0^1 x^2 dx + \int_0^1 x^{\frac{1}{3}} dx = 3 \cdot \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1 + \left.\frac{x^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1}\right|_0^1 =$

$. = x^3\Big|_0^1 + \dfrac{x^{\frac{4}{3}}}{4}\cdot 3\Big|_0^1 = 1 + \dfrac{3}{4} = \dfrac{7}{4}$

3. Найдем площадь фигуры, ограниченной линиями: $y = x^3$, $y = 1$, $x = 0$.

Решение.

Сделаем рисунок области, площадь которой нужно найти.

Найдем точку пересечения линий $y = 1$ и $y = x^3$

$$x^3 = 1 \Rightarrow x = 1.$$

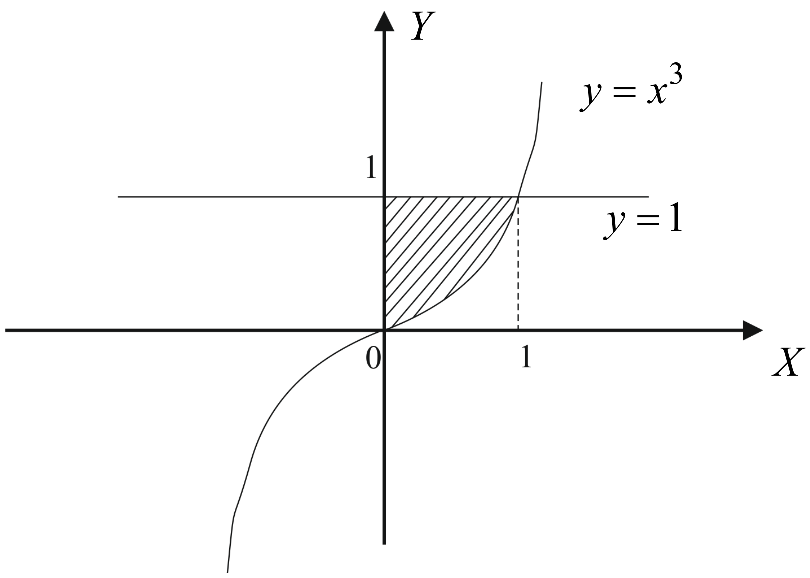


Рис. 12

Область, площадь которой нужно определить, заштрихована

$$S = \int_0^1 \left(1 - x^3\right)dx = \left(x - \frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_0^1 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}\left(\text{ед}^2\right).$$

4. Записать общие решения дифференциальных уравнений:

а) $y'' - 3y' + 2y = 0$; б) $y'' - 9y' = 3x - 1$.

Решение.

а) $y'' - 3y' + 2y = 0$.

Составим и решим характеристическое уравнение

$k^2 - 3k + 2 = 0$

$k_{1,2} = \dfrac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \dfrac{3 \pm 1}{2}$

$k_1 = 2, \quad k_2 = 1$ т.к. $k_1 \neq k_2$,

то $y_{oo} = C_1 e^{2x} + C_2 e^{x}$.

Ответ: $y_{oo} = C_1 e^{2x} + C_2 e^{x}$.

б) $y'' - 9y = 3x - 1$.

$y_{\hat{i}\acute{i}} = y_{oo} + y_{\div\acute{i}}$

Найдем y_{oo}: $y'' - 9y = 0$

$k^2 - 9 = 0$,

$k_1 = 3, \quad k_2 = -3$.

$y_{oo} = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-3x}$.

Найдем $y_{\div\acute{i}}$. Т.к. $f(x) = 3x - 1$; $k_1, k_2 \neq 0$, то $y_{\div\acute{i}} = Ax + B$,

$y'_{\div\acute{i}} = A, \quad y''_{\div\acute{i}} = 0$.

Подставим в уравнение полученным $y_{\div\acute{i}}$ и $y''_{\div\acute{i}}$.

$-9\left(Ax + B\right) = 3x - 1$.

Найдем A и B.

$$\begin{array}{c|l} x & -9A = 3 \Rightarrow A = -\dfrac{1}{3} \\ x^0 & -9B = -1 \Rightarrow B = \dfrac{1}{9} \end{array}$$

$y_{\div\acute{i}} = -\dfrac{1}{3}x + \dfrac{1}{9}$

$y_{oo} = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-3x} - \dfrac{1}{3}x + \dfrac{1}{9}$.

Ответ: $y_{oo} = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-3x} - \dfrac{1}{3}x + \dfrac{1}{9}$.

РАЗДЕЛ VII. ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение 1

Варианты заданий контрольной работы №1

I. Вычислить определитель

1. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$

2. $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

3. $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

4. $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$

5. $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix}$

6. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$

7. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 1 \end{vmatrix}$

8. $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

9. $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & -2 & 4 \end{vmatrix}$

10. $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \end{vmatrix}$

11. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 4 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

12. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & 0 \end{vmatrix}$

13. $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

14. $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

15. $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$

16. $\begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}$

17. $\begin{vmatrix} 4 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \end{vmatrix}$

18. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 3 \\ -2 & 3 & 0 \end{vmatrix}$

19. $\begin{vmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

20. $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

21. $\begin{vmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}$

22. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \end{vmatrix}$

23. $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

24. $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$

25. $\begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}$

26. $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

27. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}$

28. $\begin{vmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix}$

29. $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$

30. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

II. Даны точки $A_1\left(x_1;y_1;z_1\right)$, $A_2\left(x_2;y_2;z_2\right)$, $A_3\left(x_3;y_3;z_3\right)$.
Найти:
а) векторы $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_1A_3}$, $\overline{A_2A_3}$ и их длины;
б) $\angle A_2A_1A_3$.

1. $A_1(2;-1;3); A_2(-1;1;1); A_3(0;2;1)$.
2. $A_1(0;1;-1); A_2(-1;-1;2); A_3(3;1;4)$.
3. $A_1(-1;2;1); A_2(3;0;-1); A_3(1;1;1)$.
4. $A_1(2;3;-1); A_2(0;2;-3); A_3(1;-1;5)$.
5. $A_1(1;2;-1); A_2(3;1;0); A_3(2;4;1)$.
6. $A_1(2;1;1); A_2(3;-1;0); A_3(1;-4;1)$.
7. $A_1(2;1;0); A_2(-3;1;2); A_3(4;-1;1)$.
8. $A_1(-1;2;4); A_2(2;-1;0); A_3(1;1;2)$.
9. $A_1(3;-1;2); A_2(1;3;0); A_3(2;-2;4)$.
10. $A_1(2;-1;1); A_2(-2;3;1); A_3(4;2;0)$.
11. $A_1(2;3;1); A_2(0;2;-1); A_3(4;1;0)$.
12. $A_1(3;2;1); A_2(2;0;-1); A_3(1;4;0)$.
13. $A_1(1;4;0); A_2(2;0;-1); A_3(3;2;1)$.
14. $A_1(-1;2;3); A_2(2;-1;0); A_3(4;1;2)$.
15. $A_1(2;-1;0); A_2(4;1;2); A_3(-1;2;3)$.
16. $A_1(4;1;2); A_2(-1;2;3); A_3(2;-1;0)$.
17. $A_1(4;0;3); A_2(1;1;1); A_3(-2;3;0)$.
18. $A_1(1;1;1); A_2(4;0;3); A_3(-2;3;0)$.
19. $A_1(-2;3;0); A_2(4;0;3); A_3(1;1;1)$.
20. $A_1(3;-1;2); A_2(-1;3;0); A_3(1;0;1)$.
21. $A_1(-1;3;0); A_2(1;0;1); A_3(3;-1;2)$.
22. $A_1(1;0;1); A_2(3;-1;2); A_3(-1;3;0)$.
23. $A_1(-1;2;3); A_2(2;-1;1); A_3(4;1;2)$.
24. $A_1(2;-1;1); A_2(4;1;2); A_3(-1;2;3)$.
25. $A_1(4;1;2); A_2(-1;2;3); A_3(2;-1;1)$.
26. $A_1(3;1;-1); A_2(-1;3;2); A_3(0;3;1)$.
27. $A_1(-2;1;1); A_2(1;0;3); A_3(2;3;2)$.
28. $A_1(1;1;1); A_2(-1;0;2); A_3(2;1;3)$.
29. $A_1(2;1;2); A_2(3;-2;1); A_3(0;2;3)$.
30. $A_1(3;2;-1); A_2(2;1;-2); A_3(1;1;1)$.

III. Даны точки $M_1(x_1;y_1;)$, $M_2(x_2;y_2)$, $M_3(x_3;y_3)$.

Найти:

а) уравнение прямой, проходящей через точки $M_2(x_2;y_2)$ и $M_3(x_3;y_3)$;

б) уравнение высоты треугольника $M_1M_2M_3$ опущенной из вершины $M_1(x_1;y_1)$.

1. $\grave{I}_1(2;-1);\grave{I}_2(1;1);\grave{I}_3(0;0)$.	16. $\grave{I}_1(4;1);\grave{I}_2(-1;2);\grave{I}_3(2;-1)$.
2. $\grave{I}_1(0;1);\grave{I}_2(-1;-1);\grave{I}_3(3;1)$.	17. $\grave{I}_1(4;0);\grave{I}_2(1;1);\grave{I}_3(-2;3)$.
3. $\grave{I}_1(-1;2);\grave{I}_2(3;0);\grave{I}_3(1;1)$.	18. $\grave{I}_1(4;1);\grave{I}_2(4;0);\grave{I}_3(-2;3)$.
4. $\grave{I}_1(3;-1);\grave{I}_2(-4;2);\grave{I}_3(1;1)$.	19. $\grave{I}_1(-2;3);\grave{I}_2(4;0);\grave{I}_3(1;1)$.
5. $\grave{I}_1(1;2);\grave{I}_2(3;1);\grave{I}_3(2;4)$.	20. $\grave{I}_1(3;-1);\grave{I}_2(-1;3);\grave{I}_3(1;0)$.
6. $\grave{I}_1(2;1);\grave{I}_2(3;-1);\grave{I}_3(1;-4)$.	21. $\grave{I}_1(-1;3);\grave{I}_2(1;0);\grave{I}_3(3;-1)$.
7. $\grave{I}_1(2;1);\grave{I}_2(-3;1);\grave{I}_3(4;-1)$.	22. $\grave{I}_1(1;0);\grave{I}_2(3;-1);\grave{I}_3(-1;3)$.
8. $\grave{I}_1(-1;2);\grave{I}_2(2;-1);\grave{I}_3(1;1)$.	23. $\grave{I}_1(-1;2);\grave{I}_2(2;-1);\grave{I}_3(4;1)$.
9. $\grave{I}_1(3;-1);\grave{I}_2(1;3);\grave{I}_3(2;-2)$.	24. $\grave{I}_1(2;-1);\grave{I}_2(4;1);\grave{I}_3(-1;2)$.
10. $\grave{I}_1(2;-1);\grave{I}_2(-2;3);\grave{I}_3(4;2)$.	25. $\grave{I}_1(4;1);\grave{I}_2(-4;2);\grave{I}_3(2;-1)$.
11. $\grave{I}_1(2;3);\grave{I}_2(0;2);\grave{I}_3(4;1)$.	26. $\grave{I}_1(3;2);\grave{I}_2(1;1);\grave{I}_3(0;3)$.
12. $\grave{I}_1(3;2);\grave{I}_2(2;0);\grave{I}_3(1;4)$.	27. $\grave{I}_1(2;-1);\grave{I}_2(3;3);\grave{I}_3(0;2)$.
13. $\grave{I}_1(1;4);\grave{I}_2(2;0);\grave{I}_3(3;2)$.	28. $\grave{I}_1(4;1);\grave{I}_2(1;2);\grave{I}_3(2;0)$.
14. $\grave{I}_1(-1;2);\grave{I}_2(2;-1);\grave{I}_3(4;1)$.	29. $\grave{I}_1(0;-1);\grave{I}_2(3;4);\grave{I}_3(2;2)$.
15. $\grave{I}_1(2;-1);\grave{I}_2(4;1);\grave{I}_3(-1;2)$.	30. $\grave{I}_1(1;1);\grave{I}_2(-3;0);\grave{I}_3(-2;2)$.

IV. Даны точки $A_1(x_1;y_1;z_1)$, $A_2(x_2;y_2;z_2)$, $A_3(x_3;y_3;z_3)$.

Найти:

а) уравнений прямой (A_2A_3);

б) уравнение плоскости, проходящей через точку $A_1(x_1;y_1;z_1)$ перпендикулярно прямой (A_1A_2).

1. $\grave{A}_1(2;-1;3);\grave{A}_2(-1;1;1);\grave{A}_3(0;2;1)$.	6. $\grave{A}_1(2;1;1);\grave{A}_2(3;-1;0);\grave{A}_3(1;-4;1)$.
2. $\grave{A}_1(0;1;-1);\grave{A}_2(-1;-1;2);\grave{A}_3(3;1;4)$.	7. $\grave{A}_1(2;1;0);\grave{A}_2(-3;1;2);\grave{A}_3(4;-1;1)$.
3. $\grave{A}_1(-1;2;1);\grave{A}_2(3;0;-1);\grave{A}_3(1;1;1)$.	8. $\grave{A}_1(3;-1;2);\grave{A}_2(1;3;0);\grave{A}_3(2;-2;4)$.
4. $\grave{A}_1(2;3;-1);\grave{A}_2(0;2;-3);\grave{A}_3(1;-1;5)$.	9. $\grave{A}_1(-1;2;4);\grave{A}_2(2;-1;0);\grave{A}_3(1;1;2)$.
5. $\grave{A}_1(1;2;-1);\grave{A}_2(3;1;0);\grave{A}_3(2;4;1)$.	10. $\grave{A}_1(2;-1;1);\grave{A}_2(-2;3;1);\grave{A}_3(4;2;0)$.

11. $A_1(2;3;1); A_2(0;2;-1);\ A_3(4;1;0).$

12. $A_1(3;2;1); A_2(2;0;-1);\ A_3(1;4;0).$

13. $A_1(1;4;0); A_2(2;0;-1);\ A_3(3;2;1).$

14. $A_1(-1;2;3); A_2(2;-1;0);\ A_3(4;1;2).$

15. $A_1(2;-1;0); A_2(4;1;2);\ A_3(-1;2;3).$

16. $A_1(4;1;2); A_2(-1;2;3);\ A_3(2;-1;0).$

17. $A_1(4;0;3); A_2(1;1;1);\ A_3(-2;3;0).$

18. $A_1(1;1;1); A_2(4;0;3);\ A_3(-2;3;0).$

19. $A_1(-2;3;0); A_2(4;0;3);\ A_3(1;1;1).$

20. $A_1(3;-1;2); A_2(-1;3;0);\ A_3(1;0;-1).$

21. $A_1(-1;3;0); A_2(1;0;1);\ A_3(3;-1;2).$

22. $A_1(1;0;1); A_2(3;-1;2);\ A_3(-1;3;0).$

23. $A_1(-1;2;3); A_2(2;-1;1);\ A_3(4;1;2).$

24. $A_1(2;-1;1); A_2(4;1;2);\ A_3(-1;2;3).$

25. $A_1(4;1;2); A_2(-1;2;3);\ A_3(2;-1;1).$

26. $A_1(3;1;-1); A_2(-1;3;2);\ A_3(0;3;1).$

27. $A_1(-2;1;1); A_2(1;0;3);\ A_3(2;3;2).$

28. $A_1(1;1;1); A_2(-1;0;2);\ A_3(2;1;3).$

29. $A_1(2;1;2); A_2(3;-2;1);\ A_3(0;2;3).$

30. $A_1(3;2;-1); A_2(2;1;-2);\ A_3(1;1;1).$

V. Найти пределы

1. а) $\lim\limits_{x\to 1}(3x+2)$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-3x+1}{3x^2+2x-1}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{tg 5x}$.

2. а) $\lim\limits_{x\to 4}(5x-4)$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-7x+8}{3x+5}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 3x}{\sin 5x}$.

3. а) $\lim\limits_{x\to -2}(2x+1)$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x^2-1}{4x^2+12x+3}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctgx}{\sin 5x}$.

4. а) $\lim\limits_{x\to 3}(4x+5)$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+4x-1}{2x-x^2}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg 3x}{\sin 7x}$.

5. а) $\lim\limits_{x\to 3}(2x-7)$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x+5}{x^2+5x+6}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{tg 3x}$.

6. а) $\lim\limits_{x\to -2}(5x+6)$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+6x}{x^2+5x+6}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 7x}{\sin 3x}$.

7. а) $\lim\limits_{x\to 7}(3x+5)$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^3+3x^2-3}{4x^3+5x^2-x}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 3x}{\mathrm{arctg} 5x}$

8. а) $\lim\limits_{x\to 8}(3x-7)$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+8}{2x^2-x+6}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg 8x}{\mathrm{arctg} 2x}$.

9. а) $\lim\limits_{x\to 9}(3+4x)$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-x+1}{2x^2-x+8}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 9x}{\mathrm{arctg} 2x}$.

10. а) $\lim\limits_{x\to 5}(7x-3)$;   б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+4}{5x^3+9}$;   в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{\operatorname{arctg}2x}$

11. а) $\lim\limits_{x\to 1}(11x+2)$;   б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2-3}{5x^3-3}$;   в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 10x}{\operatorname{tg}2x}$.

12. а) $\lim\limits_{x\to 2}(2x+12)$;   б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2-x+7}{6x^4+x^2}$;   в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg}2x}{\arcsin 3x}$.

13. а) $\lim\limits_{x\to 3}(4x-3)$;   б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-4x+5}{5x^2-13}$;   в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 3x}{\operatorname{arctg}5x}$.

14. а) $\lim\limits_{x\to 4}(3x-3)$;   б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-3x}{5x^2+8}$;   в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 10x}{\sin 5x}$.

15. а) $\lim\limits_{x\to -4}(3x+3)$;   б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-2x+1}{5x^3+8x^2-1}$;   в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x}{\sin 6x}$.

16. а) $\lim\limits_{x\to 2}(7x+10)$;   б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+x-3}{5x^2+128}$;   в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{\sin 5x}$.

17. а) $\lim\limits_{x\to 5}(17x+8)$;   б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-4x+8}{2x^2+3x-1}$;   в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{\operatorname{tg}7x}$.

18. а) $\lim\limits_{x\to 6}(18x-7)$;   б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$;   в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x}{\operatorname{arctg}3x}$.

19. а) $\lim\limits_{x\to 7}(7x-19)$;   б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-x+1}{5x^3+x-1}$;   в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg}7x}{\operatorname{arctg}3x}$.

20. а) $\lim\limits_{x\to 3}(4x+8)$;   б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+x+1}{x^3+x^2-2}$;   в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 3x}{\operatorname{tg}3x}$.

21. а) $\lim\limits_{x\to 6}(3x+9)$;   б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+x-1}{3x-8}$;   в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}3x}{\arcsin 2x}$.

22. а) $\lim\limits_{x\to -3}(2x+5)$;   б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+x-3}{5x^2+x+3}$;   в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}5x}{\operatorname{tg}4x}$.

23. а) $\lim\limits_{x\to 2}(4x+8)$;   б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-x+8}{5x^2-7x+1}$;   в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}4x}{\sin 6x}$.

24. а) $\lim\limits_{x\to 3}(3x-11)$;   б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-x+8}{4x^3+2x-1}$;   в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}5x}{\arcsin 6x}$.

25. а) $\lim\limits_{x\to 4}(3x+8)$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^2-3x-1}{x+8}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\text{arctg}4x}{\arcsin 5x}$.

26. а) $\lim\limits_{x\to 2}(4x-3)$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+1}{2x^2+3x-4}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{\text{arctg}3x}$.

27. а) $\lim\limits_{x\to 3}(-2x+3)$; б $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2-3x+2}{2x^2-4x+1}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{\sin x}$.

28. а) $\lim\limits_{x\to 3}(2x-3)$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2-4x+3}{7-3x-2x^2}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x}{\arcsin 2x}$.

29. а) $\lim\limits_{x\to 5}(3x-2)$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x-5x^2}{2x^2-3x+4}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctg5x}{\text{e}^{3\text{x}}-1}$.

30. а) $\lim\limits_{x\to 3}(2x-5)$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3-x^2}{5x^2+4x-3}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctg2x}{\arcsin 3x}$.

VI Найти производные функций

1. а) $y=3x+\cos x$; б) $y=(x^2+1)\cdot tgx$.

2. а) $y=5x^3-tgx$; б) $y=\dfrac{x^2-1}{\sin 3x}$.

3. а) $y=7x^2-ctgx$; б) $y=(x+1)\cdot\cos 5x$.

4. а) $y=3x^2+\sin x$; б) $y=\dfrac{x^3+1}{ctgx}\cdot$

5. а) $y=5x^2-\ln x$; б) $y=(1-x^2)\cdot e^{3x}$.

6. а) $y=3x^3-tgx$; б) $y=\dfrac{1-2x}{\cos 3x}$.

7. а) $y=5x^2+ctgx$; б) $y=(2+x)\cdot tg2x$.

8. а) $y=8x^2-3x+x^3$; б) $y=\dfrac{(x+8)}{e^{3x}}$.

9. а) $y=9x^2-3x^3$; б) $y=(x^2+1)\cdot\sin 9x$.

10. а) $y=3x^2+2x$; б) $y=\dfrac{2x+1}{\cos 5x}$.

11. а) $y=11x^2-ctgx$; б) $y=(2x+1)\cdot\cos 5x$.

12. а) $y = 12x^2 + tgx$; б) $y = \frac{x-1}{e^{3x}}$.

13. а) $y = 13x^2 - ctgx$; б) $y = (1-x) \cdot e^{3x}$.

14. а) $y = 3x^5 - \cos x$; б) $y = \frac{3-x}{\cos 7x}$.

15. а) $y = 2x^4 - e^x$; б) $y = (2x+2) \cdot tg2x$.

16. а) $y = 3x^3 + tgx$; б) $y = \frac{3x-1}{\cos 7x}$.

17. а) $y = 17x^2 - 3^x$; б) $y = (x^2 - 1) \cdot tg2x$.

18. а) $y = 18x^2 - 2^x$; б) $y = \frac{x+1}{\cos 8x}$.

19. а) $y = 19x^3 - tgx$; б) $y = (x^2 - 1) \cdot e^{3x}$.

20. а) $y = 20x^2 - \sin x$; б) $y = \frac{x^2 - 1}{tg2x}$.

21. а) $y = 21x^3 - \cos x$; б) $y = (1-x) \cdot ctg3x$.

22. а) $y = 22x^3 - ctgx$; б) $y = \frac{x^2 + 1}{e^{5x}}$.

23. а) $y = 23x^2 + tgx$; б) $y = (x^2 + 4) \cdot \ln(x+1)$.

24. а) $y = 24x^3 + ctgx$; б) $y = \frac{e^{3x}}{(x^2 - 4)}$.

25. а) $y = 25x^5 - 1$; б) $y = e^{5x+1}(x^2 + 4)$.

26. а) $y = 2x^4 + tgx$; б) $y = \frac{2x^2 + 3}{\cos 4x}$.

27. а) $y = 5x^2 - ctgx$; б) $y = (2x^3 + 3)tg2x$.

28. а) $y = x^3 + 5\sin x$; б) $y = \frac{x - 3x^2}{tg3x}$.

29. а) $y = \sin x - e^x$; б) $y = (3x - 2x^2)\ln x$.

30. а) $y = 2x + \arcsin x$; б) $y = \frac{3x^2 - 2x}{\cos 2x}$.

VII. Найти частные производные функции

1. а) $z = 3x + 2y$; б) $z = 3x^2 + 4yx$.
2. а) $z = 5x + 4y$; б) $z = 3x^2 - 4x^3 + xy$.
3. а) $z = 7x + 5y$; б) $z = 7x^2 + 4xy + y^3$.
4. а) $z = 3x + 2y$; б) $z = x^2 - 4x + xy$.
5. а) $z = -2x + 5y$; б) $z = 3x^2 - 2xy + 3x$.
6. а) $z = 5x + 3y$; б) $z = 5x^2 - xy + y^3$.
7. а) $z = 4x + 3y$; б) $z = 4x^2 + xy - y^2$.
8. а) $z = 8x + 4y$; б) $z = 8x^2 - 3xy + y^3$.
9. а) $z = 9x - 3y$; б) $z = x^2 - 9xy + 7y$.
10. а) $z = 9x + 3y$; б) $z = 2x^2 - 10x + 5y^3$.
11. а) $z = 11x - 4y$; б) $z = 7x^2 - xy + 2y^3$.
12. а) $z = 12x - 3y$; б) $z = 3x^2 - 12x + y^2$.
13. а) $z = 13x - 4y$; б) $z = x^2 - 3xy - 3y$.
14. а) $z = 14x - 3y$; б) $z = 2x^2 - 5xy + 4y^3$.
15. а) $z = 15x - 3y$; б) $z = 3x^2 - xy + 4y$.
16. а) $z = 16x + 4y$; б) $z = x^2 - 3xy + 5y^2$.
17. а) $z = 17x + 3y$; б) $z = x^2 - 17xy + y^3$.
18. а) $z = 18x + 16y$; б) $z = x^2 + y^2 - 3x$.
19. а) $z = 19x + 6y$; б) $z = 3x^2 - y^2 - 4x$.
20. а) $z = 20x + 13y$; б) $z = x^2 - xy + 8y^3$.
21. а) $z = 21x + 11y$; б) $z = 2x^2 - xy + 7y^4$.
22. а) $z = 22x - 11y$; б) $z = 3x^2 - 2xy + y^2$.
23. а) $z = 23x + 12y$; б) $z = x^2 - 3xy + 4y^3$.
24. а) $z = 24x + 15y$; б) $z = x^2 - 17xy + 3y^2$.

25. а) $z = 25x + 26y$; б) $z = x^2 - 13xy + 4y^4$.

26. а) $z = 2x - 3y^2$; б) $z = 3xy - 4x^2 + y$.

27. а) $z = 2x - 3y^2$; б) $z = 3xy + 4x^2 + y^2$.

28. а) $z = 5x - 4y^2$; б) $z = 3x^3 - 5xy + 2y^2$.

29. а) $z = 4x - 2y$; б) $z = 2x^2 - 7xy + 4y^2$.

30. а) $z = 7x + 2y$; б) $z = 32x^2 - 7xy - y^2$.

VIII. Найти градиент функции $u = u(x; y; z)$ в точке $M_0(x_0; y_0; z_0)$

1. $u = x^2 + y^2 - 3xy + z^2$; $\grave{A}(1;1;1)$.
2. $u = 3x - 4xy + z^3$; $\grave{A}(1;-1;2)$.
3. $u = 2x^2 + 3x^2y + zy$; $\grave{A}(1;-1;2)$.
4. $u = x^2 - 3xy + z^5$; $\grave{A}_1(1;2;0)$.
5. $u = 5x^2 - xy^2 + z$; $\grave{A}(1;2;0)$.
6. $u = 3x^2 - xy + 2y^2 - z$; $\grave{A}(1;3;-1)$.
7. $u = 7x^2 + 3xy + z - x$; $\grave{A}(2;1;0)$.
8. $u = x^2 + y^5 + zx$; $\grave{A}(-1;2;4)$.
9. $u = 2x^2 + 3y^2 - 5z$; $\grave{A}(3;-1;2)$.
10. $u = x^2 - 3y + 5z^2$; $\grave{A}(2;-1;1)$.
11. $u = 7x^2 - xy + z^2$; $A(2;3;1)$.
12. $u = 3x^2 - 2xy - z^2$; $\grave{A}(3;2;1)$.
13. $u = x^2 - xy - yz$; $\grave{A}_1(1;4;0)$.
14. $u = 4x - 3y^2 + z^2$; $\grave{A}(-1;2;3)$.
15. $u = 3x^2 - y + xz$; $\grave{A}(2;-1;0)$.
16. $u = x^2 - xy + zy$; $\grave{A}(4;1;2)$.
17. $u = x^2 - 17xy + 5zy$; $\grave{A}(4;0;3)$.
18. $u = 2x^2 - 2xz - y^2$; $\grave{A}(1;1;1)$.
19. $u = 3x^2 - 3xy + 5zx$; $\grave{A}(-2;3;0)$.
20. $u = 2x^2 - yz + zx$; $\grave{A}(1;0;1)$.
21. $u = 3x^2 - 4yz + 2zx$; $\grave{A}(3;-1;2)$.
22. $u = x^2 - 4yx + 3zy$; $\grave{A}(1;0;1)$.
23. $u = x^2 - 3xz + zy$; $\grave{A}(4;1;2)$.
24. $u = y^2 - 3xy + 5zy$; $\grave{A}(-1;2;3)$.
25. $u = x^2 - xz - zy$; $\grave{A}(2;-1;1)$.
26. $u = x^3 - 2y^2 + 3xy + z^2$; $\grave{A}(1;2;1)$.
27. $u = 2x^2 - 3y^2 + 2xy + yz$; $\grave{A}(2;0;1)$.
28. $u = x^3 + 2x^2y + z^2$; $\grave{A}(1;2;1)$.
29. $u = -3x^2 - 2y^2 + 3xz$; $\grave{A}(1;2;1)$.
30. $u = x^2 + 2y^2 - 5xy + zx$; $\grave{A}(1;2;1)$.

Варианты заданий контрольной работы №2

I. Найти интегралы

1. а) $\int e^x dx$; б) $\int \frac{dx}{49+x^2}$; в) $\int \frac{dx}{4x+3}$; г) $\int \frac{dx}{3x^2-11}$.

2. а) $\int x^5 dx$; б) $\int \frac{dx}{\sqrt{36-x^2}}$; в) $\int \cos(3x+2)dx$; г) $\int \frac{dx}{7x^2+5}$.

3. а) $\int 3^x dx$; б) $\int \frac{dx}{x^2-4}$; в) $\int (5x-7)^{14} dx$; г) $\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2-7}}$.

4. а) $\int 7^x dx$; б) $\int \frac{dx}{x^2-25}$; в) $\int \frac{dx}{5x+3}$; г) $\int \frac{dx}{11x^2+3}$.

5. а) $\int \frac{dx}{x-1}$; б) $\int \frac{dx}{9+x^2}$; в) $\int \frac{dx}{\sin^2 3x}$; г) $\int (2x-3)^3 dx$.

6. а) $\int 5^x dx$; б) $\int \frac{dx}{(x+3)^2}$; в) $\int \cos\left(3-2x\right)dx$; г) $\int \frac{dx}{x^2+4}$.

7. а) $\int 7^x dx$; б) $\int \frac{dx}{x+7}$; в) $\int (7x-1)^5 dx$; г) $\int \frac{dx}{3x^2+7}$.

8. а) $\int e^x dx$; б) $\int \frac{dx}{x+8}$; в) $\int \frac{dx}{x^2+4}$; г) $\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2+8}}$.

9. а) $\int \frac{dx}{x+1}$; б) $\int 7^x dx$; в) $\int (3x+2)^2 dx$; г) $\int \frac{dx}{3x^2-9}$.

10. а) $\int 5^x dx$; б) $\int \frac{dx}{100+x^2}$; в) $\int \frac{dx}{7x+8}$; г) $\int \frac{dx}{5x^2-10}$.

11. а) $\int e^x dx$; б) $\int \frac{dx}{x^2-16}$; в) $\int (2x-3)^7 dx$; г) $\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2+27}}$.

12. а) $\int 3^x dx$; б) $\int \frac{dx}{x^2-64}$; в) $\int \frac{dx}{2x-12}$; г) $\int \frac{dx}{12x^2+3}$.

13. а) $\int x^3 dx$; б) $\int \frac{dx}{\sqrt{64-x^2}}$; в) $\int \sin(5x+2)dx$; г) $\int \frac{dx}{7x^2+8}$.

14. а) $\int 2^x dx$; б) $\int \frac{dx}{\sqrt{64-x^2}}$; в) $\int \frac{dx}{2x-3}$; г) $\int \frac{dx}{3x^2+9}$.

15. а) $\int 8^x dx$; б) $\int \frac{dx}{x^2+1}$; в) $\int \frac{dx}{3x-2}$; г) $\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2-1}}$.

16. а) $\int x^4 dx$; б) $\int \frac{dx}{3x+8}$; в) $\int \frac{dx}{x^2-1}$; г) $\int \frac{dx}{3x^2+5}$.

17. а) $\int 9^x dx$; б) $\int \frac{dx}{x^2+16}$; в) $\int \frac{dx}{3x-8}$; г) $\int \frac{dx}{12x^2+3}$.

18. а) $\int x^4 dx$; б) $\int \frac{dx}{x^2+64}$; в) $\int \frac{dx}{6x-7}$; г) $\int \frac{dx}{5x^2+2}$.

19. а) $\int x^5 dx$; б) $\int \frac{dx}{x^2-64}$; в) $\int \frac{dx}{7+9x}$; г) $\int \frac{dx}{\sqrt{5x^2-2}}$.

20. а) $\int 10^x dx$; б) $\int \frac{dx}{3x-1}$; в) $\int \frac{dx}{\sin^2 3x}$; г) $\int \frac{dx}{2x^2+5}$.

21. а) $\int x^4 dx$; б) $\int \frac{dx}{5x+8}$; в) $\int \frac{dx}{\cos^2 5x}$; г) $\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2+5}}$.

22. а) $\int e^x dx$; б) $\int \frac{dx}{x^2+25}$; в) $\int \frac{dx}{3x+8}$; г) $\int \frac{dx}{\sqrt{25-5x^2}}$.

23. а) $\int x^5 dx$; б) $\int \frac{dx}{14+x^2}$; в) $\int \frac{dx}{7x-4}$; г) $\int \frac{dx}{2x^2-32}$.

24. а) $\int x^5 dx$; б) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-81}}$; в) $\int \frac{dx}{\sqrt{3x+15}}$; г) $\int \frac{dx}{2x^2+32}$.

25. а) $\int x^5 dx$; б) $\int \frac{dx}{\sin^2 x}$; в) $\int \frac{dx}{7x+5}$; г) $\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2-48}}$.

26. а) $\int \sin x dx$; б) $\int \frac{dx}{(x+1)^3}$; в) $\int \frac{dx}{16-x^2}$; г) $\int \frac{dx}{3x-2}$.

27. а) $\int x^6 dx$; б) $\int \frac{dx}{16+x^2}$; в) $\int \frac{dx}{5-3x}$; г) $\int \frac{dx}{4x^2-8}$.

28. а) $\int 2x^2 dx$; б) $\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$; в) $\int \frac{dx}{(3x-1)^2}$; г) $\int \frac{dx}{4-x^2}$.

29. а) $\int \cos x dx$; б) $\int \frac{dx}{9-x^2}$; в) $\int \frac{dx}{(3-x)^2}$; г) $\int \frac{dx}{\sqrt{3-4x^2}}$.

30. а) $\int \frac{dx}{x^2}$; б) $\int \frac{dx}{4-x^2}$; в) $\int \frac{dx}{3-4x}$; г) $\int \frac{dx}{4x^2+9}$.

II. Вычислить определенный интегралы.

1. $\int_0^1 (1+x\sqrt{x})dx$.
2. $\int_0^2 \frac{dx}{(x+7)^2}$.
3. $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{16-x^2}}$.
4. $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$.
5. $\int_1^2 \frac{dx}{(x+3)^2}$.
6. $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{4+x^2}}$.
7. $\int_{-1}^0 \frac{dx}{(x-3)^2}$.
8. $\int_0^3 x^3 dx$.
9. $\int_1^2 \frac{dx}{x^2}$.
10. $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{2+x}}$.
11. $\int_1^2 \frac{dx}{x+2}$.
12. $\int_0^1 \frac{dx}{(x+3)^3}$.
13. $\int_0^1 \frac{dx}{(x+3)^3}$.
14. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$.
15. $\int_0^1 \frac{dx}{x^2-4}$.
16. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-2x^2}}$.
17. $\int_0^1 \frac{dx}{(2x-3)^2}$.
18. $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x^2+9}}$.
19. $\int_0^1 \frac{dx}{(3x+1)^2}$.
20. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$.
21. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+4}}$.
22. $\int_0^2 \frac{dx}{(3x+5)^2}$.
23. $\int_0^1 (3-x^2)dx$.
24. $\int_1^2 (4+\sqrt{x})dx$.
25. $\int_2^3 (3-e^x)dx$.
26. $\int_1^2 \frac{3}{x^2}dx$.
27. $\int_0^1 \frac{dx}{\left(2x+1\right)^3}$.
28. $\int_0^1 \left(x^2-x\sqrt{x}\right)dx$.
29. $\int_0^1 \frac{dx}{3x+1}$.
30. $\int_1^2 \frac{dx}{\left(2x+1\right)^2}$.

III. Найти площадь фигуры, ограниченный линиями.

1. $y=\frac{1}{x}$, $x=2$, $x=6$, $y=0$.
2. $y=x^2$, $y=9$.
3. $y=x^2$, $y=-x$.
4. $y=x^2$, $y=2-x$.
5. $y=x^2$, $y=2x+3$.

6. $y=\dfrac{2}{x}$, $x=2$, $x=3$, $y=0$.

7. $y=x^2$, $\acute{o}=2x$.

8. $y=x^2$, $y=4x$.

9. $y=x^2$, $y=0$, $x=1, x=2$.

10. $y=\dfrac{2}{x}$, $x=1, x=3$, $y=0$.

11. $y=x^2$, $x=3, x=4$, $y=0$.

12. $y=x^2$, $y=1$.

13. $y=x^2$, $y=3x-2$.

14. $y=x^2$, $y=4$.

15. $y=x^2$, $y=16$.

16. $y=x^2$, $y=5x$.

17. $y=x^2$, $y=3x$.

18. $y=x^2$, $y=-3x$.

19. $y=x^2$, $y=-4x$.

20. $y=x^2$, $y=-x$.

21. $y=x^2$, $y=4$.

22. $y=\dfrac{1}{x}$, $x=1$, $x=4$, $y=0$.

23. $y=x^2$, $y=4$.

24. $y=x^2$, $y=16$.

25. $y=x^2+1$, $x=1$, $y=0$, $x=0$.

26. $y=\dfrac{2}{x}$, $x=1$, $x=3$, $y=0$.

27. $y=x^2-3$, $y=1$.

28. $y=9-x^2$, $y=0$.

29. $y=x^2$, $y=-3x$.

30. $y=e^x$, $x=0$, $x=1$, $y=0$.

IV. Решить дифференциальные уравнения

1. а) $y''-y'-2y=0$; б) $y''-4y=6x+1$.

2. а) $y''+2y'-3y=0$; б) $y''-25y=x+1$.

3. а) $y''-3y'-4y=0$; б) $y''+6y'+5y=x+3$.

4. а) $y''-3y'+2y=0$; б) $y''-9y'=x+3$.

5. а) $y''-y'=0$; б) $y''-2y'-3y=3x-1$.

6. а) $y''-5y'-6y=0$; б) $y''+2y'-3y=2x-3$.

7. а) $y''-y'-6y=0$; б) $y''-y'=7x+8$.

8. а) $y''+2y'=0$; б) $y''+2y'-3y=3x+8$.

9. а) $y''-9y=0$; б) $y''-y=2x+1$.

10. а) $y''-y'=0$; б) $y''-2y'-8y=2x+5$.

11. а) $y''-11y'=0$; б) $y''+2y'-8y=3x+1$.

12. а) $y''-3y'=0$; б) $y''-4y'=3x$.

13. а) $y'' - 3y' - 4y = 0$; б) $y'' - y' = x + 3$.

14. а) $y'' - 8y' + 7y = 0$; б) $y'' - 8y' = x + 3$.

15. а) $y'' - y' - 2y = 0$; б) $y'' - 2y' - 3y = 3 + x$.

16. а) $y'' - y' - 12y = 0$; б) $y'' + 5y' + 4y = 3x$.

17. а) $y'' - 2y' - 3y = 0$; б) $y'' - 17y' = 3x + 5$.

18. а) $y'' + 2y' - 3y = 0$; б) $y'' - 18y' = 5x - 1$.

19. а) $y'' + y' - 12y = 0$; б) $y'' + 2y' - 3y = 3x + 5$.

20. а) $y'' - 4y' + 3y = 0$; б) $y'' - y' - 2y = x + 1$.

21. а) $y'' - 21y' = 0$; б) $y'' - 4y' + 3y = 5x + 1$.

22. а) $y'' - 22y' = 0$; б) $y'' + y' - 2y = 3x - 9$.

23. а) $y'' - 23y' = 0$; б) $y'' + y' - 12y = 3x$.

24. а) $y'' - y' = 0$; б) $y'' - 2y' - 3y = 7x + 11$.

25. а) $y'' + y' = 0$; б) $y'' + 5y' + 4y = 4x - 7$.

26. а) $y'' - 3y' + 2y = 0$; б) $y'' - 9y' = 5x + 1$.

27. а) $y'' - 5y' + 6y = 0$; б) $y'' - 2y' = 2x + 1$.

28. а) $y'' + 5y' + 6y = 0$; б) $y'' - 9y' = 3x - 2$.

29. а) $y'' - 4y' + 4y = 0$; б) $y'' - 9y' = 5 - 2x$.

30. а) $y'' - 9y' = 0$; б) $y'' - 4y' + 3y = x - 1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бугров Я.С., Никольский С.М. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. – М: Наука, 1984.

2. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное начисление. Т1,2 – М.: Наука, 1978.

3. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах: Учебное пособие для студентов втузов. В 2-х частях. М.: Высш. шк., 1996.

4. Нацик Л.Д., Тарапова Е.Б. Высшая математика для студентов иностранцев. ХНАДУ – 2010 г.

5. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. – М.: Наука, 1972.

6. Демидович Б.П. Задачи и упражнения по математическому анализу для вузов. – М.: Наука, 1972.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ДЛЯ ЗАМЕТОК

ДЛЯ ЗАМЕТОК

Навчальне видання

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до виконання контрольних робіт №1 і №2
з вищої математики
для іноземних студентів 1 курса
економічних спеціальностей

(російською мовою)

Укладачі: НЕБРАТЕНКО Олег В'ячеславович
НЕСТЕРЕНКО Володимир Олексійович
САППА Жанетта Володимирівна
ТОЛСТЯК Олена Дмитрівна

Відповідальний за випуск *Т.О. Ярхо*

В авторській редакції

Комп'ютерна верстка *О.І. Гладкої*

План 2013 р. Поз. 354.
Підписано до друку 11.07.2016 р. Формат 60×84 1/16. Папір газетний.
Гарнітура Times New Roman Cyr . Віддруковано на різографі.
Ум. друк. арк. 4,2. Обл.-вид. арк. 5,1.
Зам. № 383/16. Наклад 50 прим. Ціна договірна.

ВИДАВНИЦТВО
Харківського національного автомобільно-дорожнього університету

Видавництво ХНАДУ, 61002, Харків-МСП, вул. Петровського, 25.
Тел. /факс: (057)700-38-72; 707-37-03, e-mail: rio@khadi.kharkov.ua

Свідоцтво Державного комітету інформаційної політики, телебачення та радіомовлення України про внесення суб'єкта видавничої справи до Державного реєстру видавців, виготівників і розповсюджувачів видавничої продукції, серія ДК №897 від 17.04.2002 р.