

Міністерство освіти і науки, молоді та спорту України

ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ
АВТОМОБІЛЬНО-ДОРОЖНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Т. О. Ярхо
Т. В. Ємел'янова
О. В. Небратенко
Т. Б. Фастовська

ПРАКТИКУМ З ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ. НЕВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ

Навчально-методичний посібник

Затверджено методичною
радою університету,
протокол № 2 від 10.11.2010 р.

Харків
ХНАДУ
2011

УДК
ББК
Т

Рецензенти:

Гандель Ю.В.,

заслужений працівник освіти України,
доктор фізико-математичних наук, професор
кафери математичної фізики та обчислювальної математики
(ХНУ імені В.Н. Каразіна)

Гордевський В.Д.,

доктор фізико-математичних наук, професор,
завідувач кафедри математичного аналізу
(ХНУ імені В.Н. Каразіна)

Т. О. Ярхо

Практикум з вищої математики. Невизначений інтеграл :
Навчально-методичний посібник / Т. О. Ярхо, Т. В. Ємел'янова,
О. В. Небрatenко, Т. Б. Фастовська. – Харків: ХНАДУ, 2011. – 192 с.

Рекомендовано для поглибленої самостійної підготовки студентів з практичної частини одного з важливіших базових розділів загального курсу вищої математики – «Невизначений інтеграл».

Представлено основні методи інтегрування (табличний, заміни змінної, інтегрування частинами), прийоми інтегрування раціональних, ірраціональних та деяких трансцендентних виразів.

Наведено основні теоретичні положення, докладно розібрані приклади і завдання для самостійної роботи.

Призначений для студентів перших курсів усіх спеціальностей.

Бібліогр. 9 найм.

УДК
ББК

© Т. О. Ярхо, Т. В. Ємел'янова,
О. В. Небрatenко, Т. Б. Фастовська,
2011

© ХНАДУ, 2011

Навчально-методичний poradник зі змістового модуля «Невизначений інтеграл» видається кафедрою вищої математики ХНАДУ в складі нещодавно відкритої серії навчально-методичних видань «Практикум з вищої математики». Цю серію розпочато відповідно до Цільової програми удосконалення фундаментальної підготовки в університеті. Навчально-методичні видання «Практикум з вищої математики» призначені для поглибленої самостійної підготовки студентів з практичної частини змістових модулів курсу «Вища математика» в умовах кредитно-модульної технології навчання.

Даний poradник складено відповідно до робочих навчальних програм з дисципліни «Вища математика» (цільових, за вимогами кредитно-модульної технології навчання) для освітньо-кваліфікаційного рівня «бакалавр».

Кожен підрозділ poradника, що відповідає певній темі одного з важливіших базових розділів загального курсу вищої математики, містить викладання основних теоретичних положень з рекомендаціями щодо їх практичного застосування, а також значну кількість докладно розібраних прикладів, рівень складності яких зростає поступово.

В poradнику представлено в достатньому обсязі основні методи інтегрування (табличний, заміни змінної, інтегрування частинами), прийоми інтегрування деяких виразів, що містять квадратний тричлен, інтегрування раціональних, ірраціональних та деяких трансцендентних виразів.

Останній розділ посібника містить завдання для самостійної роботи студентів за змістовим модулем «Невизначений інтеграл» (за окремими підрозділами та модулю в цілому)

Порадник рекомендований для студентів пеших курсів усіх спеціальностей денної і заочної форм навчання.

1. ОСНОВНІ ОЗНАЧЕННЯ І ВЛАСТИВОСТІ ІНТЕГРУВАННЯ

1.1. Первісна і невизначений інтеграл

Означення. Функція $F(x)$ називається первісною функції $f(x)$ на інтервалі (a,b) (скінченному або нескінченному), якщо

1. $F(x)$ є диференційовною на (a,b) ;
2. $F'(x) = f(x)$, $x \in (a,b)$.

Приклад 1.1. Функція $F(x) = x^3$ є первісною функції $f(x) = 3x^2$ на всій числовій прямій, оскільки

$$(x^3)' = 3x^2, x \in R.$$

Теорема. Якщо функція $F(x)$ є первісною функції $f(x)$ на (a,b) , то довільна інша первісна $f(x)$ на тому ж інтервалі може бути представленою у вигляді

$$F(x) + C,$$

де C – деяка стала.

Таким чином, якщо відома тільки одна первісна $F(x)$ функції $f(x)$, можна знайти множину усіх первісних цієї функції, а саме:

$$F(x) + C,$$

де C – довільна стала.

Означення. Сукупність усіх первісних функції $f(x)$ на інтервалі (a,b) називається невизначеним інтегралом від функції $f(x)$.

Позначення $\int f(x)dx$ (читається: «інтеграл еф від ікс де ікс»).

Отже, за означенням

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

де $F'(x) = f(x)$, $x \in (a, b)$; C – довільна стала.

Знак $\int$ називається інтегралом, функція $f(x)$ – підінтегральна функція, $f(x)dx$ – підінтегральний вираз.

Означення. Операція знаходження невизначеного інтеграла від даної функції називається інтегруванням цієї функції.

Операція інтегрування полягає у відновленні функції $(F(x) + C)$ за значенням її похідної $(f(x))$. Таким чином, інтегрування є операцією, оберненою до диференціювання (тобто до операції знаходження похідної від даної функції). Для того, щоб перевірити правильність виконання інтегрування, достатньо продиференціювати результат і одержати при цьому підінтегральну функцію.

Приклад 1.2.

1) $\int \cos x dx = \sin x + C$, оскільки

$$(\sin x + C)' = (\sin x)' + (C)' = \cos x.$$

2) $\int x dx = \frac{x^2}{2} + C$, оскільки

$$\left(\frac{x^2}{2} + C\right)' = \left(\frac{x^2}{2}\right)' = \frac{1}{2}2x = x.$$

Виникає запитання: чи всяка функція $f(x)$ має первісну $F(x)$ на інтервалі (a, b) (інакше кажучи, чи для всякої функції $f(x)$ існує невизначений інтеграл)? Відповідь дає наступне *твердження*.

Твердження. Якщо функція $f(x)$ є неперервною на (a, b) , то для цієї функції існує первісна (а значить і невизначений інтеграл).

Надалі будемо вважати, що підінтегральні функції розглядаються лише на тих інтервалах, де вони є неперервними.

1.2. Таблиця основних інтегралів

$$1. \int 0 dx = C.$$

$$2. \int x^{\alpha} dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1).$$

$$2.1. \int dx = x + C.$$

$$2.2. \int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C.$$

$$2.3. \int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + C.$$

$$3. \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C.$$

$$4. \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (a > 0, a \neq 1).$$

$$5. \int e^x dx = e^x + C$$

$$6. \int \sin x dx = -\cos x + C.$$

$$7. \int \cos x dx = \sin x + C.$$

$$8. \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C.$$

$$9. \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C.$$

$$10. \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C.$$

$$11. \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C \quad (a \neq 0).$$

$$12. \int \frac{dx}{x^2 + 1} = \operatorname{arctg} x + C.$$

$$13. \int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C \quad (a \neq 0).$$

$$14. \int \frac{dx}{x^2 - 1} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C.$$

$$15. \int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C \quad (a \neq 0).$$

$$16. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 + a} \right| + C.$$

Зауваження. Іноді до списку основних інтегралів додають ще кілька інтегралів, у тому числі – інтеграли від гіперболічних функцій.

$$17. \int \operatorname{tg} x \, dx = -\ln |\cos x| + C.$$

$$18. \int \operatorname{ctg} x \, dx = \ln |\sin x| + C.$$

$$19. \int \frac{dx}{\sin x} = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C.$$

$$20. \int \frac{dx}{\cos x} = \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + C.$$

$$21. \int \operatorname{sh} x \, dx = \operatorname{ch} x + C.$$

$$22. \int \operatorname{ch} x \, dx = \operatorname{sh} x + C.$$

$$23. \int \frac{dx}{ch^2 x} = th x + C.$$

$$24. \int \frac{dx}{sh^2 x} = -cth x + C.$$

Приклад 1.3. Користуючись таблицею основних інтегралів, знайти наступні інтеграли:

$$1) \int x^5 dx;$$

$$2) \int \frac{dx}{x^3};$$

$$3) \int \frac{dx}{\sqrt[7]{x^2}};$$

$$4) \int 5^x dx;$$

$$5) \int \frac{dx}{\sqrt{7-x^2}};$$

$$6) \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-7}};$$

$$7) \int \frac{dx}{x^2+3};$$

$$8) \int \frac{dx}{x^2-3}.$$

Розв'язання.

1) Скористуємося табличним інтегралом 2 ($\alpha = 5$):

$$\int x^5 dx = \left| \int x^\alpha dx, \alpha = 5 \right| = \frac{x^{5+1}}{5+1} + C = \frac{x^6}{6} + C.$$

2) Аналогічно знаходимо

$$\int \frac{dx}{x^3} = \int x^{-3} dx = \left| \int x^\alpha dx, \alpha = -3 \right| = \frac{x^{-3+1}}{-3+1} = \frac{x^{-2}}{-2} + C = -\frac{1}{2x^2} + C.$$

3) Аналогічно знаходимо

$$\int \frac{dx}{\sqrt[7]{x^2}} = \int x^{-\frac{2}{7}} dx = \left| \int x^\alpha dx, \alpha = -\frac{2}{7} \right| = \frac{x^{-\frac{2}{7}+1}}{-\frac{2}{7}+1} + C = \frac{x^{\frac{5}{7}}}{\frac{5}{7}} + C = \frac{7}{5} \sqrt[7]{x^5} + C.$$

4) Скористуємося табличним інтегралом 4 ($a = 5$):

$$\int 5^x dx = \left| \int a^x dx, a = 5 \right| = \frac{5^x}{\ln 5} + C.$$

5) Скористуємося табличним інтегралом 11 ($a = \sqrt{7}$):

$$\int \frac{dx}{\sqrt{7-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(\sqrt{7})^2 - x^2}} = \left| \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}, a = \sqrt{7} \right| = \arcsin \frac{x}{\sqrt{7}} + C.$$

6) Скористуємося табличним інтегралом 16 ($a = -7$):

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 7}} = \left| \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}}, a = -7 \right| = \ln \left| x + \sqrt{x^2 - 7} \right| + C.$$

7) Скористуємося табличним інтегралом 13 ($a = \sqrt{3}$):

$$\int \frac{dx}{x^2 + 3} = \int \frac{dx}{x^2 + (\sqrt{3})^2} = \left| \int \frac{dx}{x^2 + a^2}, a = \sqrt{3} \right| = \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{3}} + C.$$

8) Скористуємося табличним інтегралом 15 ($a = \sqrt{3}$):

$$\int \frac{dx}{x^2 - 3} = \int \frac{dx}{x^2 - (\sqrt{3})^2} = \left| \int \frac{dx}{x^2 - a^2}, a = \sqrt{3} \right| = \frac{1}{2\sqrt{3}} \ln \left| \frac{x - \sqrt{3}}{x + \sqrt{3}} \right| + C.$$

1.3. Основні властивості невизначеного інтеграла

$$1. \left(\int f(x) dx \right)' = f(x).$$

$$2. d \left(\int f(x) dx \right) = f(x) dx.$$

$$3. \int dF(x) = F(x) + C.$$

4. $\int kf(x)dx = k \int f(x)dx$, де k – стала (сталий множник можна виносити за знак інтеграла).

5. $\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$ (інтеграл від алгебраїчної суми функцій дорівнює алгебраїчній сумі інтегралів від цих функцій).

6. Якщо $\int f(x)dx = F(x) + C$, то

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C \quad (a \neq 0).$$

$$6.1. \int f(x+b)dx = F(x+b) + C \quad (a=1).$$

$$6.2. \int f(ax)dx = \frac{1}{a}F(ax) + C \quad (b=0).$$

Приклад 1.4. Користуючись властивістю 6 та її окремими випадками 6.1 та 6.2, знайти наступні інтеграли:

1) $\int (x+2)^{15} dx$;

2) $\int (5x+3)^7$;

3) $\int \frac{dx}{x+7}$;

4) $\int \frac{dx}{5x-4}$;

5) $\int \sqrt{3x+5} dx$;

6) $\int 4^{2-3x} dx$;

7) $\int \cos 7x dx$;

8) $\int \sin 13x dx$;

9) $\int \frac{dx}{\sqrt{16-9x^2}}$;

10) $\int \frac{dx}{3x^2-25}$.

Розв'язання. Зауважимо, що інтеграли 1) – 10) відрізняються від табличних лінійним зсувом аргумента. Знайдемо ці інтеграли.

1) Скористуємось табличним інтегралом $\int x^{15} dx$ і властивістю 6.1 ($b = 2$):

$$\int (x+2)^{15} dx = \left| \int x^{15} dx = \frac{x^{16}}{16}; \right. \\ \left. \text{влас. 6.1}(b=2) \right| = \frac{(x+2)^{16}}{16} + C.$$

2) Скористуємось табличним інтегралом $\int x^7 dx$ і властивістю 6 ($a = 5, b = 3$):

$$\int (5x+3)^7 dx = \left| \int x^7 dx = \frac{x^8}{8} + C; \right. \\ \left. \text{влас. 6}(a=5, b=3) \right| = \frac{1}{5} \frac{(5x+3)^8}{8} + C = \\ = \frac{(5x+3)^8}{40} + C.$$

$$3) \int \frac{dx}{x+7} = \left| \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C; \right. \\ \left. \text{влас. 6.1}(b=7) \right| = \ln|x+7| + C.$$

$$4) \int \frac{dx}{5x-4} = \left| \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C; \right. \\ \left. \text{влас. 6}(a=5, b=-4) \right| = \frac{1}{5} \ln|5x-4| + C.$$

$$5) \int \sqrt{3x+5} dx = \left| \int \sqrt{x} dx = \int x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + C; \right. \\ \left. \text{влас. 6}(a=3, b=5) \right| = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} (3x+5)^{\frac{3}{2}} + C = \\ = \frac{2}{9} \sqrt{(3x+5)^3} + C.$$

$$6) \int 4^{2-3x} dx = \left| \int 4^x dx = \frac{4^x}{\ln 4} + C; \right. \\ \left. \text{власт. 6}(a = -3, b = 2) \right| = -\frac{1}{3} \frac{4^{2-3x}}{\ln 4} + C = -\frac{4^{2-3x}}{3 \ln 4} + C.$$

$$7) \int \cos 7x dx = \left| \int \cos x dx = \sin x + C; \right. \\ \left. \text{власт. 6.2}(a = 7) \right| = \frac{1}{7} \sin 7x + C = \frac{\sin 7x}{7} + C.$$

$$8) \int \sin 13x dx = \left| \int \sin x dx = -\cos x + C; \right. \\ \left. \text{власт. 6.2}(a = 13) \right| = \frac{1}{13} (-\cos 13x) + C = \\ = -\frac{\cos 13x}{13} + C.$$

9) Оскільки $\sqrt{16-9x^2} = \sqrt{16-(3x)^2}$, то даний інтеграл відрізняється від табличного $\int \frac{dx}{\sqrt{16-x^2}}$ заміною x на $3x$. Скористуємось властивістю 6.2 ($a = 3$):

$$\int \frac{dx}{\sqrt{16-(3x)^2}} = \left| \int \frac{dx}{\sqrt{16-x^2}} = \arcsin \frac{x}{4} + C; \right. \\ \left. \text{власт. 6.2}(a = 3) \right| = \frac{1}{3} \arcsin \frac{3x}{4} + C.$$

$$10) \int \frac{dx}{3x^2-25} = \int \frac{dx}{(\sqrt{3}x)^2-25} = \left| \int \frac{dx}{x^2-25} = \frac{1}{10} \ln \left| \frac{x-5}{x+5} \right| + C; \right. \\ \left. \text{власт. 6.2}(a = \sqrt{3}) \right| = \\ = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{1}{10} \ln \left| \frac{\sqrt{3}x-5}{\sqrt{3}x+5} \right| + C = \frac{\sqrt{3}}{30} \ln \left| \frac{x\sqrt{3}-5}{x\sqrt{3}+5} \right| + C.$$

2. ОСНОВНІ МЕТОДИ ІНТЕГРУВАННЯ

2.1. Метод безпосереднього (табличного) інтегрування

Безпосереднім (табличним) інтегруванням називається обчислення інтегралів за допомогою таблиці основних інтегралів і основних властивостей невизначеного інтеграла.

Розв'язані в розділі 1 приклади 1.3 – 1.4 ілюструють цей метод. Розглянемо ще певну кількість прикладів.

Приклад 2.1. Знайти інтеграли:

$$1) \int \frac{dx}{\sqrt{16-9x^2}}; \quad 2) \int \frac{dx}{3x^2-25}; \quad 3) \int \frac{dx}{10x^2+9}.$$

Розв'язання. Зауважимо, що приклади 1) і 2) було розв'язано в складі прикладів 1.4 (9 і 10) з використанням властивості 6 невизначеного інтеграла. Застосуємо до знаходження цих інтегралів інший підхід.

1) Наявність в підінтегральному виразі $\frac{dx}{\sqrt{16-9x^2}}$ множника 9 не дає змогу ототожнити його з табличним інтегралом 11. Слід в підкоренному виразі винести цей множник за дужки:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{16-9x^2}} &= \int \frac{dx}{\sqrt{9\left(\frac{16}{9}-x^2\right)}} = \int \frac{dx}{3\sqrt{\left(\frac{4}{3}\right)^2-x^2}} = \frac{1}{3} \int \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{4}{3}\right)^2-x^2}} = \\ &= \left| \begin{array}{l} \text{табл. інтеграл 11;} \\ a = \frac{4}{3} \end{array} \right| = \frac{1}{3} \arcsin \frac{x}{\frac{4}{3}} + C = \frac{1}{3} \arcsin \frac{3x}{4} + C. \end{aligned}$$

2) Наявність в підінтегральному виразі $\frac{dx}{3x^2-25}$ множника 3 не дає змогу ототожнити його з табличним інтегралом 15. Отже,

$$\int \frac{dx}{3x^2 - 25} = \int \frac{dx}{3\left(x^2 - \frac{25}{3}\right)} = \frac{1}{3} \int \frac{dx}{x^2 - \left(\frac{5}{\sqrt{3}}\right)^2} = \left| \begin{array}{l} \text{табл. інтеграл 15;} \\ a = \frac{5}{\sqrt{3}} \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{3} \frac{1}{2 \cdot \frac{5}{\sqrt{3}}} \ln \left| \frac{x - \frac{5}{\sqrt{3}}}{x + \frac{5}{\sqrt{3}}} \right| + C = \frac{\sqrt{3}}{30} \ln \left| \frac{x\sqrt{3} - 5}{x\sqrt{3} + 5} \right| + C.$$

$$3) \int \frac{dx}{10x^2 + 9} = \int \frac{dx}{10\left(x^2 + \frac{9}{10}\right)} = \frac{1}{10} \int \frac{dx}{x^2 + \left(\frac{3}{\sqrt{10}}\right)^2} =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \text{табл. інтеграл 13;} \\ a = \frac{3}{\sqrt{10}} \end{array} \right| = \frac{1}{10} \frac{1}{\frac{3}{\sqrt{10}}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\frac{3}{\sqrt{10}}} + C =$$

$$= \frac{\sqrt{10}}{30} \operatorname{arctg} \frac{x\sqrt{10}}{3} + C.$$

Приклад 2.2. Знайти інтеграли

$$1) \int \left(7 \cdot 3^x - \frac{2}{\sqrt[3]{x}} + 4 \right) dx; \quad 2) \int \left(7^x - \frac{8}{x} + 4 \cos x \right) dx.$$

Розв'язання

1) Спочатку застосуємо властивості невизначеного інтеграла 4 і 5, тобто представимо інтеграл від алгебраїчної суми функцій у вигляді алгебраїчної суми інтегралів і винесемо сталі множники за знаки інтегралів. Потім скористуємось табличними інтегралами 2 і 4:

$$\int \left(7 \cdot 3^x - \frac{2}{\sqrt[3]{x}} + 4 \right) dx = \int 7 \cdot 3^x dx - \int \frac{2}{\sqrt[3]{x}} dx + \int 4 dx =$$

$$\begin{aligned}
&= 7 \int 3^x dx - 2 \int x^{-\frac{1}{3}} dx + 4 \int dx = 7 \left(\frac{3^x}{\ln 3} + C_1 \right) - 2 \left(\frac{x^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1} + C_2 \right) + \\
&+ 4(x + C_3) = \frac{7 \cdot 3^x}{\ln 3} - 3\sqrt[3]{x^2} + 4x + (7C_1 - 2C_2 + 4C_3) = \\
&= \frac{7 \cdot 3^x}{\ln 3} - 3\sqrt[3]{x^2} + 4x + C.
\end{aligned}$$

Зауважимо, що на практиці не прийнято записувати проміжкові довільні сталі, що виникають при окремому інтегруванні доданків. В кінцевому результаті записують єдину довільну сталу C , позначаючи нею алгебраїчну суму всіх окремих довільних сталих.

2) Аналогічно попередньому прикладу спочатку застосуємо властивості невизначеного інтеграла 4 і 5, а потім скористуємось табличними інтегралами 3, 4 і 7:

$$\begin{aligned}
&\int \left(7^x - \frac{8}{x} + 4 \cos x \right) dx = \int 7^x dx - \int \frac{8}{x} dx + \int 4 \cos x dx = \\
&= \frac{7^x}{\ln 7} - 8 \int \frac{dx}{x} + 4 \int \cos x dx = \frac{7^x}{\ln 7} - 8 \ln |x| + 4 \sin x + C.
\end{aligned}$$

В наступних прикладах знаходження інтегралів розпочинається з перетворення підінтегральних виразів.

Приклад 2.3. Знайти інтеграли:

$$\begin{aligned}
1) & \int \frac{(x^4 - 1)(2x + 1)}{x^2} dx; & 2) & \int \left(\sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right)^2 dx;
\end{aligned}$$

$$3) \int \frac{\sqrt{2+x^2} - 5\sqrt{2-x^2}}{\sqrt{4-x^2}} dx;$$

$$4) \int \frac{x^2}{x^2+4} dx;$$

$$5) \int \frac{dx}{x^2(x^2+1)};$$

$$6) \int \frac{dx}{\sin^2 + \cos^2 x}.$$

Розв'язання.

$$\begin{aligned} 1) \int \frac{(x^4-1)(2x+1)}{x^2} dx &= \int \frac{2x^5 + x^4 - 2x - 1}{x^2} dx = \\ &= \int \left(2x^3 + x^2 - \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} \right) dx = 2 \int x^3 dx + \int x^2 dx - 2 \int \frac{dx}{x} - \int x^{-2} dx = \\ &= 2 \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - 2 \ln|x| - \frac{x^{-1}}{-1} + C = \frac{x^4}{2} + \frac{x^3}{3} - 2 \ln|x| + \frac{1}{x} + C. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \int \left(\sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right)^2 dx &= \int \left(\left(\sqrt[3]{x} \right)^2 + 2\sqrt[3]{x} \frac{1}{\sqrt{x}} + \left(\frac{1}{\sqrt{x}} \right)^2 \right) dx = \\ &= \int \left(x^{2/3} + 2x^{-1/6} + \frac{1}{x} \right) dx = \int x^{2/3} dx + 2 \int x^{-1/6} dx + \int \frac{1}{x} dx = \\ &= \frac{x^{2/3+1}}{2/3+1} + 2 \frac{x^{-1/6+1}}{-1/6+1} + \ln|x| + C = \frac{3}{5} x^{5/3} + \frac{12}{5} x^{5/6} + \ln|x| + C = \\ &= \frac{3}{5} \sqrt[3]{x^5} + \frac{12}{5} \sqrt[6]{x^5} + \ln|x| + C. \end{aligned}$$

$$3) \int \frac{\sqrt{2+x^2} - 5\sqrt{2-x^2}}{\sqrt{4-x^2}} dx = \int \frac{\sqrt{2+x^2} - 5\sqrt{2-x^2}}{\sqrt{(2+x^2)(2-x^2)}} dx =$$

$$= \int \frac{dx}{\sqrt{2-x^2}} - 5 \int \frac{dx}{\sqrt{2+x^2}} = \arcsin \frac{x}{\sqrt{2}} - 5 \ln \left| x + \sqrt{2+x^2} \right| + C.$$

$$\begin{aligned} 4) \int \frac{x^2}{x^2+4} dx &= \int \frac{x^2+4-4}{x^2+4} dx = \int \left(1 - \frac{4}{x^2+4} \right) dx = \\ &= \int dx - \int \frac{4}{x^2+4} dx = x - 4 \int \frac{dx}{x^2+4} = x - 4 \cdot \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x}{2} + C = \\ &= x - 2 \operatorname{arctg} \frac{x}{2} + C. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5) \int \frac{dx}{x^2(x^2+1)} &= \int \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2+1} \right) dx = \int \frac{dx}{x^2} - \int \frac{dx}{x^2+1} = \\ &= -\frac{1}{x} - \operatorname{arctg} x + C. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 6) \int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x} &= \left| \sin^2 x + \cos^2 x = 1 \right| = \int \frac{(\sin^2 x + \cos^2 x) dx}{\sin^2 x \cos^2 x} = \\ &= \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x} \right) dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int \frac{dx}{\sin^2 x} = \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x + C. \end{aligned}$$

2.2. Метод заміни змінної (підстановки)

Суть цього методу полягає у введенні нової змінної інтегрування, що дає змогу звести інтеграл, який не обчислюється безпосередньо, до табличного або відомого інтеграла. Метод ґрунтується на властивості інваріантності формул інтегрування.

2.2.1. Властивість інваріантності формул інтегрування

Теорема.

Будь-яка формула інтегрування зберігає свій вигляд при підстановці замість незалежної змінної x довільної функції $t = \varphi(x)$, що має неперервну похідну, тобто якщо

$$\int f(x) dx = F(x) + C,$$

то

$$\int f(t) dt = F(t) + C. \quad (2.1)$$

Зауваження

1. Твердження (2.1) теореми можна записати у розгорнутому вигляді:

$$\int f(\varphi(x)) d(\varphi(x)) = F(\varphi(x)) + C. \quad (2.2)$$

2. В основі доведення цієї теореми лежить властивість інваріантності форми першого диференціала.

Приклад 2.4.

$$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C \text{ (табличний інтеграл 2, } \alpha = 2 \text{)}.$$

На основі (2.1) справедливо:

$\int t^2 dt = \frac{t^3}{3} + C$, де $t = \varphi(x)$ – довільна функція з неперервною похідною $\varphi'(x)$.

Зокрема, підставляючи послідовно $t = \sin x$, $t = \ln x$, $t = \arcsin x$, маємо

$$\int \sin^2 x d(\sin x) = \frac{\sin^3 x}{3} + C;$$

$$\int \ln^2 x \, d(\ln x) = \frac{\ln^3 x}{3} + C;$$

$$\int \arcsin^2 x \, d(\arcsin x) = \frac{\arcsin^3 x}{3} + C \text{ і т.д.}$$

Отже, властивість інваріантності формул інтегрування значно розширює таблицю інтегралів.

З відомих формул для диференціалів

$$d(\sin x) = \cos x \, dx; \quad d(\ln x) = \frac{dx}{x}; \quad d(\arcsin x) = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

випливає справедливність наступних рівностей:

$$\int \sin^2 x \cos x \, dx = \int \sin^2 x \, d(\sin x) = \frac{\sin^3 x}{3} + C; \quad (2.3)$$

$$\int \ln^2 x \frac{1}{x} \, dx = \int \ln^2 x \, d(\ln x) = \frac{\ln^3 x}{3} + C; \quad (2.4)$$

$$\int \arcsin^2 x \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \int \arcsin^2 x \, d(\arcsin x) = \frac{\arcsin^3 x}{3} + C. \quad (2.5)$$

$$\text{Перехід } \underbrace{\int \sin^2 x}_{(\varphi(x))^2} \underbrace{\cos x \, dx}_{\varphi'(x) \, dx} = \underbrace{\int \sin^2 x}_{(\varphi(x))^2} \underbrace{d(\sin x)}_{d(\varphi(x))}$$

називають введенням функцій $\varphi(x) = \sin x$ під знак диференціала. В рівностях виразів (2.4) і (2.5) під знак диференціала введено $\varphi(x) = \ln x$ і $\varphi(x) = \arcsin x$, відповідно.

Операція введення функції під знак диференціала виконується з ціллю використання властивості інваріантності формул інтегрування у вигляді (2.2). Розглянемо умови їх застосування і наведемо приклади.

2.2.2. Операція введення функції під знак диференціала

Нехай треба знайти складний для безпосереднього інтегрування

$$\int g(x) dx, \quad (2.6)$$

в якому підінтегральний вираз $g(x)dx$ можливо представити у вигляді:

$$g(x) = f(\varphi(x))\varphi'(x)dx, \quad (2.7)$$

де для функції $f(x)$ відома первісна $F(x)$, а $\varphi'(x)$ є неперервною функцією. Тоді

$$\int g(x) dx = \int f(\varphi(x))\varphi'(x) dx = \int f(\varphi(x)) d(\varphi(x)) = F(\varphi(x)) + C$$

введення функції $\varphi(x)$
під знак диференціалавластивість інваріантності
формул інтегрування (2.2)

Приклад 2.5. Знайти інтеграли:

$$\begin{array}{lll} 1) \int \frac{\operatorname{arctg}^5 x}{1+x^2} dx; & 2) \int \frac{\cos x}{\sin x} dx; & 3) \int \frac{e^{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x} dx; \\ 4) \int \frac{dx}{x \sin^2(\ln x)}; & 5) \int x 5^{x^2} dx; & 6) \int 4^{2-3x} dx. \end{array}$$

Розв'язання.

$$\begin{aligned} 1) \int \frac{\operatorname{arctg}^5 x}{1+x^2} dx &= \int (\operatorname{arctg} x)^5 \frac{1}{1+x^2} dx = \int (\operatorname{arctg} x)^5 (\operatorname{arctg} x)' dx = \\ &= \int (\operatorname{arctg} x)^5 d(\operatorname{arctg} x) = \left| \int t^5 dt \right| = \frac{\operatorname{arctg}^6 x}{6} + C. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \int \frac{\cos x}{\sin x} dx &= \int \frac{1}{\sin x} \cos x dx = \int \frac{1}{\sin x} (\sin x)' dx = \int \frac{1}{\sin x} d(\sin x) = \left| \int \frac{dt}{t} \right| = \\ &= \ln |\sin x| + C. \end{aligned}$$

$$3) \int \frac{e^{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x} dx = \int e^{\operatorname{tg} x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} dx = \int e^{\operatorname{tg} x} \cdot (\operatorname{tg} x)' dx = \int e^{\operatorname{tg} x} d(\operatorname{tg} x) = \\ = \left| \int e^t dt \right| = e^{\operatorname{tg} x} + C.$$

$$4) \int \frac{dx}{x \sin^2(\ln x)} = \int \frac{1}{\sin^2(\ln x)} \frac{1}{x} dx = \int \frac{1}{\sin^2(\ln x)} (\ln x)' dx = \\ = \int \frac{1}{\sin^2(\ln x)} d(\ln x) = \left| \int \frac{dt}{\sin^2 t} \right| = -\operatorname{ctg}(\ln x) + C.$$

$$5) \int x \cdot 5^{x^2} dx = \int 5^{x^2} \cdot 2x \frac{1}{2} dx = \frac{1}{2} \int 5^{x^2} (x^2)' dx = \frac{1}{2} \int 5^{x^2} d(x^2) = \left| \int 5^t dt \right| = \\ = \frac{1}{2} \cdot \frac{5^{x^2}}{\ln 5} + C = \frac{5^{x^2}}{2 \ln 5} + C.$$

6) Звертаємо увагу, що інтеграл $\int 4^{2-3x} dx$ було знайдено (приклад 1.4; 6)) з використанням властивості 6 невизначеного інтеграла. Для знаходження цього інтегралу можна також застосувати операцію введення функції під знак диференціала:

$$\int 4^{2-3x} dx = \int 4^{2-3x} (-3) \left(-\frac{1}{3} \right) dx = -\frac{1}{3} \int 4^{2-3x} (2-3x)' dx = \\ = -\frac{1}{3} \int 4^{2-3x} d(2-3x) = \left| \int 4^t dt \right| = -\frac{1}{3} \frac{4^{2-3x}}{\ln 4} + C = -\frac{4^{2-3x}}{3 \ln 4} + C.$$

Зауваження.

1. На практиці часто користуються формулами, які є узагальненнями результатів прикладів 1) і 2), а саме:

$$\int \varphi^n(x) \cdot \varphi'(x) dx = \frac{\varphi(x)^{n+1}}{n+1} + C;$$

$$\int \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} dx = \ln |\varphi(x)| + C.$$

2. Доцільно пам'ятати наступні формули для диференціалів, що найбільш часто зустрічаються на практиці:

$$dx = \frac{1}{a} d(ax + b);$$

$$x dx = \frac{1}{2} d(x^2);$$

$$\frac{1}{x^2} dx = -d\left(\frac{1}{x}\right);$$

$$\frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2d(\sqrt{x});$$

$$\frac{1}{x} dx = d(\ln x);$$

$$e^x dx = d(e^x);$$

$$\cos x dx = d(\sin x);$$

$$\sin x dx = -d(\cos x);$$

$$\frac{1}{\cos^2 x} dx = d(\operatorname{tg} x);$$

$$\frac{1}{\sin^2 x} dx = -d(\operatorname{ctg} x).$$

Таким чином, у випадках, коли треба знайти $\int g(x) dx$, в якому підінтегральний вираз $g(x) dx$ можна представити у вигляді (2.7), застосовують властивість інваріантності формул інтегрування (2.2), що дозволяє одержати результат

$$\int g(x) dx = F(\varphi(x)) + C.$$

Можна користуватися записом (2.1) цієї властивості

$$\int f(t) dt = F(t) + C,$$

в якому $t = \varphi(x)$. Це передбачає введення нової змінної інтегрування t , тобто здійснення заміни змінної так званого першого типу.

2.2.3. Перший тип заміни змінної

Функція незалежної змінної $\varphi(x)$ замінюється новою змінною:

$$t = \varphi(x).$$

$$\int g(x) dx = \int f(\varphi(x)) \varphi'(x) dx = \left| \begin{array}{c} \text{Заміна} \\ t = \varphi(x) \\ dt = \varphi'(x) dx \end{array} \right| =$$

$$= \int f(t) dt = F(t) + C = F(\varphi(x)) + C.$$

властивість
інваріантності
формул інтегру-
вання (2.1)

$t = \varphi(x)$

Застосуємо заміну змінної до розв'язання прикладу 2.5.

Приклад 2.6. Знайти інтеграли:

$$1) \int \frac{\operatorname{arctg}^5 x}{1+x^2} dx; \quad 2) \int \frac{\cos x}{\sin x} dx; \quad 3) \int \frac{e^{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x} dx;$$

$$4) \int \frac{dx}{x \sin^2(\ln x)}; \quad 5) \int x \cdot 5^{x^2} dx; \quad 6) \int 4^{2-3x} dx.$$

Розв'язання.

$$1) \int \frac{\operatorname{arctg}^5 x}{1+x^2} dx = \int \operatorname{arctg}^5 x \cdot \frac{1}{1+x^2} dx = \left| \begin{array}{c} t = \operatorname{arctg} x \\ dt = \frac{dx}{1+x^2} \end{array} \right| =$$

$$= \int t^5 dt = \frac{t^6}{6} + C = \frac{\operatorname{arctg}^6 x}{6} + C.$$

$$2) \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \int \frac{1}{\sin x} \cos x dx = \left| \begin{array}{l} t = \sin x \\ dt = \cos x dx \end{array} \right| =$$

$$\int \frac{1}{t} dt = \ln |t| + C = \ln |\sin x| + C.$$

$$3) \int \frac{e^{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x} dx = \int e^{\operatorname{tg} x} \cdot \frac{dx}{\cos^2 x} = \left| \begin{array}{l} t = \operatorname{tg} x \\ dt = \frac{dx}{\cos^2 x} \end{array} \right| =$$

$$= \int e^t dt = e^t + C = e^{\operatorname{tg} x} + C.$$

$$4) \int \frac{dx}{x \sin^2(\ln x)} = \int \frac{1}{\sin^2(\ln x)} \frac{dx}{x} = \left| \begin{array}{l} t = \ln x \\ dt = \frac{dx}{x} \end{array} \right| = \int \frac{1}{\sin^2 t} dt =$$

$$= -\operatorname{ctg} t + C = -\operatorname{ctg}(\ln x) + C.$$

$$5) \int x \cdot 5^{x^2} dx = \int 5^{x^2} x dx = \left| \begin{array}{l} t = x^2 \\ dt = 2x dx \\ x dx = \frac{dt}{2} \end{array} \right| = \int 5^t \cdot \frac{dt}{2} = \frac{1}{2} \int 5^t dt =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{5^t}{\ln 5} + C = \frac{5^{x^2}}{2 \ln 5} + C.$$

$$6) \int 4^{2-3x} dx = \left| \begin{array}{l} t = 2-3x \\ dt = -3dx \\ dx = -\frac{dt}{3} \end{array} \right| = \int 4^t \left(-\frac{dt}{3} \right) = -\frac{1}{3} \int 4^t dt =$$

$$= -\frac{1}{3} \frac{4^{2-3x}}{\ln 4} + C = -\frac{4^{2-3x}}{3 \ln 4} + C.$$

Звертаємо увагу, що в прикладах 5) і 6) перетворення підінтегрального виразу $g(x)dx$ до вигляду

$$g(x)dx = f(\varphi(x))\varphi'(x)dx$$

не здійснювалось. Відповідну заміну змінної $t = \varphi(x)$ було спробовано в передбаченні, що таке представлення є можливим. В ітозі вдалося одержати вірні результати інтегрування.

Підкреслимо, що загального «рецепту» вибору тієї чи іншої заміни не існує. Однак, слід мати на увазі наступну рекомендацію: якщо в підінтегральному виразі є готовий диференціал функції $\varphi(x)$ (тобто $\varphi'(x)dx$), або вираз, що відрізняється від $\varphi'(x)dx$ лише сталим множником, то є сенс спробувати заміну $t = \varphi(x)$.

Приклад 2.7. Знайти інтеграли:

- | | |
|--|--|
| 1) $\int \frac{x^4 dx}{1-x^5};$ | 2) $\int x \cos(3-x^2) dx;$ |
| 3) $\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{1-e^{2x}}} dx;$ | 4) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-9x^2} \arcsin^2 3x};$ |
| 5) $\int \frac{3-2x}{5x^2+7} dx;$ | 6) $\int \frac{\sin 2x}{1+\sin^4 x} dx.$ |

Розв'язання.

$$\begin{aligned}
 1) \int \frac{x^4 dx}{1-x^5} &= \int \frac{1}{1-x^5} x^4 dx = \left| \begin{array}{l} t = 1-x^5 \\ dt = -5x^4 dx \\ x^4 dx = -\frac{dt}{5} \end{array} \right| = \int \frac{1}{t} \left(-\frac{dt}{5} \right) = \\
 &= -\frac{1}{5} \int \frac{dt}{t} = -\frac{1}{5} \ln|t| + C = -\frac{1}{5} \ln|1-x^5| + C.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2) \int x \cos(3-x^2) dx &= \int \cos(3-x^2) x dx = \left| \begin{array}{l} t = 3-x^2 \\ dt = -2x dx \\ x dx = -\frac{dt}{2} \end{array} \right| = \\
 &= \int \cos t \left(-\frac{dt}{2} \right) = -\frac{1}{2} \int \cos t dt = -\frac{1}{2} \sin t + C = -\frac{1}{2} \sin(3-x^2) + C.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3) \int \frac{e^{2x}}{\sqrt{1-e^{2x}}} dx &= \left| \begin{array}{l} t = 1-e^{2x} \\ dt = -2e^{2x} dx \\ e^{2x} dx = -\frac{dt}{2} \end{array} \right| = \int \frac{1}{\sqrt{t}} \left(-\frac{dt}{2} \right) = -\frac{1}{2} \int \frac{dt}{\sqrt{t}} = \\
 &= -\frac{1}{2} 2\sqrt{t} + C = -\sqrt{t} + C = -\sqrt{1-e^{2x}} + C.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 4) \int \frac{dx}{\sqrt{1-9x^2} \arcsin^2 3x} &= \int \frac{1}{\arcsin^2 3x} \frac{dx}{\sqrt{1-9x^2}} = \left| \begin{array}{l} t = \arcsin 3x \\ dt = \frac{3dx}{\sqrt{1-9x^2}} \\ \frac{dx}{\sqrt{1-9x^2}} = \frac{dt}{3} \end{array} \right| = \\
 &= \int \frac{1}{t^2} \frac{dt}{3} = \frac{1}{3} \int \frac{dt}{t^2} = -\frac{1}{3t} + C = -\frac{1}{3 \arcsin 3x} + C.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 5) \int \frac{3-2x}{5x^2+7} dx &= \int \left(\frac{3}{5x^2+7} - \frac{2x}{5x^2+7} \right) dx = \\
 &= 3 \int \frac{dx}{5x^2+7} - 2 \int \frac{x dx}{5x^2+7} = I_1 + I_2.
 \end{aligned}$$

В цьому прикладі після почленного ділення чисельника дробу підінтегральної функції на знаменник заданий інтеграл зведено до суми двох інтегралів: I_1 та I_2 .

Перший інтеграл знаходяться безпосередньо:

$$I_1 = 3 \int \frac{dx}{5x^2 + 7} = \frac{3}{5} \int \frac{dx}{x^2 + \left(\sqrt{\frac{7}{5}}\right)^2} = \frac{3}{5} \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{7}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{5}x}{\sqrt{7}} + C =$$

$$= \frac{3}{\sqrt{35}} \operatorname{arctg} \frac{x\sqrt{5}}{\sqrt{7}} + C.$$

Другий інтеграл береться заміною змінної:

$$I_2 = -2 \int \frac{x dx}{5x^2 + 7} = \left| \begin{array}{l} t = 5x^2 + 7 \\ dt = 10x dx \\ x dx = \frac{dt}{10} \end{array} \right| = -\frac{2}{10} \int \frac{dt}{t} = -\frac{1}{5} \ln|t| + C =$$

$$= -\frac{1}{5} \ln(5x^2 + 7) + C.$$

Отже, заданий інтеграл

$$\int \frac{3-2x}{5x^2+7} dx = \frac{3}{\sqrt{35}} \operatorname{arctg} \frac{x\sqrt{5}}{\sqrt{7}} - \frac{1}{5} \ln(5x^2 + 7) + C.$$

$$6) \int \frac{\sin 2x}{1 + \sin^4 x} dx = \int \frac{2 \sin x \cos x}{1 + \sin^4 x} dx = \left| \begin{array}{l} t = \sin x \\ dt = \cos x dx \end{array} \right| = \int \frac{2t dt}{1 + t^4} =$$

$$= \left| \begin{array}{l} z = t^2 \\ dz = 2t dt \end{array} \right| = \int \frac{dz}{1 + z^2} = \operatorname{arctg} z + C = \operatorname{arctg} t^2 + C = \operatorname{arctg} (\sin^2 x) + C.$$

В даному прикладі для досягнення результату довелося зробити заміну змінної двічі. Перша заміна дозволила спростити заданий інтеграл, а друга заміна звела проміжковий інтеграл $\int \frac{2t dt}{1+t^2}$ до табличного інтегралу: $\int \frac{dz}{1+z^2}$.

Зауваження. З формул (2.1) і (2.2) випливає справедливості рівності

$$\int f(t) dt = \int f(\varphi(x)) d(\varphi(x)), \quad (2.8)$$

де $t = \varphi(x)$ є функцією з неперервною похідною. Змінюючи місцями букви t і x в формулі (2.8), одержимо:

$$\int f(x) dx = \int f(\varphi(t)) d(\varphi(t)). \quad (2.9)$$

Отже формула (2.9) є основою другого типу заміни змінної – підстановки.

2.2.4. Другий тип заміни змінної (підстановка)

Незалежна змінна замінюється функцією нової змінної

$$x = \varphi(t),$$

де $\varphi(t)$ має обернену функцію $t = \varphi^{-1}(x)$.

Розглянемо у загальному вигляді умови застосування другого типу заміни змінної і наведемо приклади.

$$\underbrace{\int f(x) dx}_{\text{інтеграл}} = \left| \begin{array}{l} x = \varphi(t) \\ dx = \varphi'(t) dt \end{array} \right| = \int \underbrace{f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)}_{g(t)} dt = \int g(t) dt =$$

складний для безпосереднього інтегрування

формула

$g(t)$

для функції $g(t)$

(2.9)

відома первісна $G(t)$

$$= G(t) + C = G(\varphi^{-1}(x)) + C.$$

$$t = \varphi^{-1}(x)$$

Приклад 2.8. Знайти інтеграли

$$1) \int \frac{dx}{(5x+7)\sqrt{x}}; \quad 2) \int \frac{dx}{1+\sqrt{x+5}}; \quad 3) \int \sqrt{e^x-1} dx;$$

$$4) \int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}; \quad 5) \int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)^3}}; \quad 6) \int \frac{x^2 dx}{(x^2+1)^2}.$$

Розв'язання.

1) Розглянемо $\int \frac{dx}{(5x+7)\sqrt{x}}$. Підінтегральна функція визначена на інтервалі $(0, +\infty)$. Щоб позбутися ірраціональності у знаменнику підінтегральної функції, виконаємо підстановку:

$x = \varphi(t)$, де $\varphi(t) = t^2$, $t > 0$. Функція $\varphi(t)$ має неперервну похідну $\varphi'(t) = 2t$ в своїй області визначення і має обернену функцію $\varphi^{-1}(x) = \sqrt{x}$. Отже,

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(5x+7)\sqrt{x}} &= \left| \begin{matrix} x = t^2 \\ dx = 2t dt \end{matrix} \right| = \int \frac{2t dt}{(5t^2+7)\sqrt{t^2}} = \int \frac{2 dt}{(5t^2+7)} = \\ &= \frac{2}{5} \int \frac{dt}{t^2 + \left(\sqrt{\frac{7}{5}}\right)^2} = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{7}{5}}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{\frac{7}{5}}} + C = \frac{2}{\sqrt{35}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{5}{7}} t + C = \\ &= \frac{2}{\sqrt{35}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{5x}{7}} + C. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2) \int \frac{dx}{1+\sqrt{x+5}} &= \left| \begin{array}{l} x+5=t^2 \\ dx=2t dt \end{array} \right| = \int \frac{2t dt}{1+\sqrt{t^2}} = 2 \int \frac{t dt}{1+t} = 2 \int \frac{t+1-1}{t+1} dt = \\
&= 2 \int \left(1 - \frac{1}{t+1} \right) dt = 2(t - \ln|t+1|) + C = 2 \left(\sqrt{x+5} - \ln(\sqrt{x+5}+1) \right) + C. \\
&\quad t = \sqrt{x+5}
\end{aligned}$$

3) Розглянемо $\int \sqrt{e^x - 1} dx$. Підінтегральна функція визначена на інтервалі $(0, +\infty)$. Щоб позбутися ірраціональності, виконаємо підстановку

$$e^x - 1 = t^2, \quad t > 0 \quad (x = \varphi(t), \text{ де } \varphi(t) = \ln(t^2 + 1), \quad t > 0).$$

Функція $\varphi(t)$ має неперервну похідну $\varphi'(t) = \frac{2t}{t^2 + 1}$ в своїй області визначення і обернену функцію $\varphi^{-1}(x) = \sqrt{e^x - 1}$. Маємо

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{e^x - 1} dx &= \left| \begin{array}{l} e^x - 1 = t^2 \\ e^x = t^2 + 1 \\ e^x dx = 2t dt \\ dx = \frac{2t dt}{t^2 + 1} \end{array} \right| = \int \sqrt{t^2} \cdot \frac{2t dt}{t^2 + 1} = 2 \int t \frac{t dt}{t^2 + 1} = \\
&= 2 \int \frac{t^2 + 1 - 1}{t^2 + 1} dt = 2 \int \left(1 - \frac{1}{t^2 + 1} \right) dt = 2(t - \operatorname{arctg} t) + C = \\
&\quad t = \sqrt{e^x - 1} \\
&= 2 \left(\sqrt{e^x - 1} - \operatorname{arctg} \sqrt{e^x - 1} \right) + C.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
4) \int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}} &= \left| \begin{array}{l} x = \frac{1}{t}, \\ dx = -\frac{dt}{t^2} \\ 1+x^2 = \frac{t^2+1}{t^2} \end{array} \right| = -\int \frac{\frac{dt}{t^2}}{\frac{1}{t}\sqrt{\frac{t^2+1}{t^2}}} = -\int \frac{\frac{dt}{t^2}}{\frac{1}{t} \cdot \frac{\sqrt{t^2+1}}{t}} = \\
&= -\int \frac{dt}{\sqrt{t^2+1}} = -\ln \left| t + \sqrt{t^2+1} \right| + C = -\ln \left| \frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x^2}+1} \right| + C = \\
&\quad t = \frac{1}{x} \\
&= -\ln \left| \frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x} \right| + C = \ln \left| \frac{x}{1+\sqrt{1+x^2}} \right| + C.
\end{aligned}$$

5) Розглянемо $\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$. Підінтегральна функція визначена

на інтервалі $(-1;1)$. Дійсно, $1-x^2 > 0 \Leftrightarrow x^2 < 1 \Leftrightarrow |x| < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1$.

Щоб позбутися ірраціональності в знаменнику підінтегральної функції в результаті застосування основної тригонометричної тотожності, виконаємо підстановку: $x = \varphi(t)$, де $\varphi(t) = \sin t$. $\varphi'(t) = \cos t$ є неперервною функцією в області визначення $\varphi(t)$.

Функція $\varphi(t) = \sin t$ $t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ має обернену функцію

$\varphi^{-1}(x) = \arcsin x$, $x \in (-1;1)$. Отже

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)^3}} &= \left| \begin{array}{l} x = \sin t \\ dx = \cos t dt \end{array} \right| = \int \frac{\cos t dt}{\sqrt{(1-\sin^2 t)^3}} = \int \frac{\cos t dt}{\sqrt{(\cos^2 t)^3}} = \int \frac{\cos t dt}{\cos^3 t} = \\
&= \int \frac{dt}{\cos^2 t} = \operatorname{tg} t + C = \frac{\sin t}{\cos t} + C = \frac{\sin t}{\sqrt{1-\sin^2 t}} + C = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + C.
\end{aligned}$$

Зауважимо, що коли $t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ функція $\cos t > 0$. Тому при розв'язанні прикладу правомірний наступний перехід: $\sqrt{\cos^2 t} = \cos t$.

$$\begin{aligned} 6) \int \frac{x^2 dx}{(x^2 + 1)^2} &= \left| \begin{array}{l} x = \operatorname{tg} t \\ dx = \frac{dt}{\cos^2 t} \end{array} \right| = \int \operatorname{tg}^2 t \cdot \cos^2 t dt = \int \sin^2 t dt = \\ &= \frac{1}{2} \int (1 - \cos 2t) dt = \frac{1}{2} \left(t - \frac{\sin 2t}{2} \right) + C = \frac{1}{2} \left(t - \operatorname{tg} t \cdot \cos^2 t \right) + C = \\ &= \frac{1}{2} \left(x - \frac{x}{x^2 + 1} \right) + C \end{aligned}$$

Таким чином, на практиці застосують перший і другий типи заміни змінної. Заміну змінної підбирають так, щоб в результаті перетворень інтеграли були табличними або зводилися до відомих інтегралів.

Після застосування методу заміни змінної завжди необхідно повернутися до заданої змінної інтегрування.

2.3. Метод інтегрування частинами

2.3.1. Формула інтегрування частинами, її зміст та рекомендації щодо застосування.

Метод інтегрування частинами ґрунтується на використанні формули диференціала добутку двох функцій:

$$d(uv) = u \cdot dv + v \cdot du,$$

звідки випливає рівність

$$u \cdot dv = d(uv) - v \cdot du.$$

Інтегруючи обидві частини останньої рівності, одержимо

$$\int u dv = \int d(uv) - \int v du$$

або

$$\int u dv = uv + C - \int v du.$$

Оскільки до складу невизначеного інтеграла $\int v du$ вже входить довільна стала, то до неї можна приєднати і доданок C . Отже, одержуємо формулу інтегруванні частинами:

$$\int u dv = u \cdot v - \int v du. \quad (2.10)$$

Зміст цієї формули полягає у тому, що при обчисленні невизначеного інтегралу $\int f(x) dx$ підінтегральний вираз $f(x) dx$ деяким чином представляється у вигляді добутку двох множників: u і dv , тобто

$$f(x) dx = u \cdot dv.$$

Після цього обчислення інтегралу $\int f(x) dx$ виконується двома інтегруваннями:

1) при обчисленні v із виразу dv :

$$v = \int dv;$$

2) при обчисленні інтегралу в правій частині формули (2.10):

$$\int v du.$$

Замість одного складного інтегрування виконуються два, більш простих.

Таким чином, інтегрування виконується частинами.

Приклад 2.9. Знайти інтеграл $\int x e^x dx$.

Розв'язання. Представимо підінтегральний вираз $x e^x dx$ у вигляді добутку двох множників x і $e^x dx$. Нехай $u = x$ і $dv = e^x dx$. Продиференціюємо множник $u(x)$ і проінтегруємо множник dv :

$$du = dx; \quad v = \int dv = \int e^x dx = e^x.$$

Зауважимо, що в результаті останнього інтегрування достатньо знайти один множник v , тому вважають, що стала інтегрування $C = 0$.

Маємо

$$\int \underbrace{x e^x}_{f(x)} dx = \int \underbrace{x}_u \cdot \underbrace{e^x dx}_{dv} = \left| \begin{array}{l} u = x; \quad du = dx \\ dv = e^x dx; \quad v = \int e^x dx = e^x \end{array} \right| =$$

формула інтегрування частинами (2.10)

$$= x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x + C = e^x (x - 1) + C.$$

Звертаємо увагу на те, що при інтегруванні частинами треба намагатися, щоб інтеграл справа в формулі (2.10) був простішим, ніж інтеграл зліва.

В розглянутому прикладі, якщо зробити вибір множників u і dv навпаки, ми одержимо справа більш складний інтеграл, ніж зліва:

$$\int \underbrace{x e^x}_{f(x)} dx = \int \underbrace{e^x}_u \cdot \underbrace{x dx}_{dv} = \left| \begin{array}{l} u = e^x; \quad du = e^x dx \\ dv = x dx; \quad v = \int x dx = \frac{x^2}{2} \end{array} \right| =$$

$$= e^x \cdot \frac{x^2}{2} - \int \frac{x^2}{2} \cdot e^x dx.$$

Взагалі метод інтегрування частинами має більш обмежену область застосування, ніж метод заміни змінної. Але існують класи інтегралів, які обчислюються саме методом інтегрування частинами. Укажемо ці класи і надамо рекомендації щодо розбиття підінтегрального виразу на множники u і dv табл. 1.

Таблиця 1 – Деякі рекомендації щодо вибору множників u і dv в методі інтегрування частинами

№ класу	Вид інтегралу	u	dv
I	$\int P(x) \cdot \begin{cases} e^{ax} \\ \sin ax \\ \cos ax \end{cases} dx$ $P(x)$ – многочлен; a – дійсне число ($a \neq 0$)	$u = P(x)$	$dv = \begin{cases} e^{ax} \\ \sin ax \\ \cos ax \end{cases} dx$
II	$\int R(x) \begin{cases} \arcsin ax \\ \arccos ax \\ \operatorname{arctg} ax \\ \ln^m x \end{cases} dx$ $R(x)$ – алгебраїчна функція; a – дійсне число ($a \neq 0$); m – натуральне число	$u = \begin{cases} \arcsin ax \\ \arccos ax \\ \operatorname{arctg} ax \\ \ln^m x \end{cases}$	$dv = R(x) dx$
III	$\int e^{ax} \begin{cases} \sin bx \\ \cos bx \end{cases} dx$	Можливий довільний вибір множників u і dv . Після двократного застосування формули (2.10) одержується лінійне рівняння відносно шуканого інтегралу	
IV	$\int \begin{cases} \sin(\ln x) \\ \cos(\ln x) \end{cases} dx$	$u = \begin{cases} \sin(\ln x) \\ \cos(\ln x) \end{cases}$	$dv = dx$

Приклад 2.9. Знайти інтеграли.

1) $\int x \sin x dx$;

2) $\int x 5^x dx$;

3) $\int (2x-1)e^{3x} dx$;

4) $\int (7x-1)\cos 5x dx$.

При знаходженні всіх інтегралів даного прикладу будемо дотримуватися рекомендацій п. I таблиці 1, відповідно до яких за

$u(x)$ приймають многочлен, степінь якого при диференціюванні понижується.

Розв'язання.

$$1) \int x \sin x dx = \left| \begin{array}{l} u = x, \quad du = dx \\ dv = \sin x dx, \quad v = \int \sin x = -\cos x \end{array} \right| =$$

формула (2.10)

$$= x(-\cos x) - \int (-\cos x) dx = -x \cos x + \int \cos x dx =$$

$$= -x \cos x + \sin x + C.$$

$$2) \int x 5^x dx = \left| \begin{array}{l} u = x, \quad du = dx \\ dv = 5^x dx, \quad v = \int 5^x dx = \frac{5^x}{\ln 5} \end{array} \right| = x \frac{5^x}{\ln 5} - \int \frac{5^x}{\ln 5} dx =$$

формула (2.10)

$$= x \frac{5^x}{\ln 5} - \frac{1}{\ln 5} \int 5^x dx = x \frac{5^x}{\ln 5} - \frac{5^x}{\ln^2 5} + C = \frac{5^x}{\ln 5} \left(x - \frac{1}{\ln 5} \right) + C.$$

$$3) \int (2x-1)e^{3x} dx = \left| \begin{array}{l} u = 2x-1, \quad du = 2dx \\ dv = e^{3x} dx, \quad v = \int e^{3x} = \frac{e^{3x}}{3} \end{array} \right| = (2x-1) \frac{e^{3x}}{3} - \int \frac{e^{3x}}{3} 2dx =$$

формула (2.10)

$$= \frac{(2x-1)e^{3x}}{3} - \frac{2}{9} e^{3x} + C = \frac{(6x-3)e^{3x}}{9} - \frac{2}{9} e^{3x} + C = \frac{6x-5}{9} e^{3x} + C.$$

$$4) \int (7x-1) \cos 5x dx = \left| \begin{array}{l} u = 7x-1, \quad du = 7dx \\ dv = \cos 5x dx, \quad v = \int \cos 5x dx = \frac{\sin 5x}{5} \end{array} \right| =$$

формула (2.10)

$$\begin{aligned}
&= (7x-1) \frac{\sin 5x}{5} - \int \frac{\sin 5x}{5} 7 dx = \frac{7x-1}{5} \sin 5x - \frac{7}{25} (-\cos 5x) + C = \\
&= \frac{7x-1}{5} \sin 5x + \frac{7}{25} \cos 5x + C.
\end{aligned}$$

При знаходженні інтегралів наступного прикладу будемо дотримуватись рекомендацій п. II таблиці. За множник $u(x)$ приймають трансцендентну функцію $\arcsin ax$, $\arccos ax$, $\operatorname{arctg} ax$ або $\ln^m x$, яка спрощується при диференціюванні.

Приклад 2.10. Знайти інтеграли.

- 1) $\int (x^2 - 2x + 3) \ln x dx$;
- 2) $\int \frac{\ln x}{x^3} dx$;
- 3) $\int \operatorname{arctg} x dx$;
- 4) $\int x \cdot \operatorname{arctg} x dx$.

Розв'язання.

$$1) \int (x^2 - 2x + 3) \ln x dx = \left. \begin{array}{l} u = \ln x, \quad du = \frac{dx}{x} \\ dv = (x^2 - 2x + 3) dx, \quad v = \int (x^2 - 2x + 3) dx = \\ \qquad \qquad \qquad = \frac{x^3}{3} - x^2 + 3x \end{array} \right| =$$

$$= \ln x \cdot \left(\frac{x^3}{3} - x^2 + 3x \right) - \int \left(\frac{x^3}{3} - x^2 + 3x \right) \frac{dx}{x} =$$

$$= \ln x \cdot \left(\frac{x^3}{3} - x^2 + 3x \right) - \int \left(\frac{x^2}{3} - x + 3 \right) dx =$$

$$= \ln x \cdot \left(\frac{x^3}{3} - x^2 + 3x \right) - \frac{x^3}{9} + \frac{x^2}{2} - 3x + C.$$

$$2) \int \frac{\ln x}{x^3} dx = \left| \begin{array}{l} u = \ln x, \quad du = \frac{dx}{x} \\ dv = \frac{dx}{x^3}, \quad v = \int \frac{dx}{x^3} = \int x^{-3} dx = -\frac{1}{2x^2} \end{array} \right| = -\frac{\ln x}{2x^2} - \int \left(-\frac{1}{2x^2} \right) \frac{dx}{x} =$$

$$= -\frac{\ln x}{2x^2} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^3} = -\frac{\ln x}{2x^2} - \frac{1}{4x^2} + C.$$

$$3) \int \operatorname{arctg} x dx = \left| \begin{array}{l} u = \operatorname{arctg} x, \quad du = \frac{dx}{1+x^2} \\ dv = dx, \quad v = \int dx = x \end{array} \right| = x \cdot \operatorname{arctg} x - \int x \frac{dx}{1+x^2} =$$

$$= x \cdot \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \int \frac{d(1+x^2)}{1+x^2} = x \cdot \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C.$$

$$4) \int x \cdot \operatorname{arctg} x dx = \left| \begin{array}{l} u = \operatorname{arctg} x, \quad du = \frac{dx}{1+x^2} \\ dv = x dx, \quad v = \int x dx = \frac{x^2}{2} \end{array} \right| = \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{dx}{1+x^2} =$$

$$= \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \int \frac{x^2 + 1 - 1}{x^2 + 1} dx = \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \int \left(1 - \frac{1}{1+x^2} \right) dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \left(\int dx - \int \frac{dx}{1+x^2} \right) = \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x + C =$$

$$= \frac{1}{2} (x^2 \operatorname{arctg} x - x + \operatorname{arctg} x) + C.$$

2.3.2. Двократне застосування формули інтегрування частинами

Іноді для знаходження інтегралів формулу інтегрування частинами (2.10) доводиться застосовувати кілька разів. Розглянемо приклад щодо двократного застосування цієї формули.

Приклад 2.11. Знайти інтеграли.

1) $\int x^2 \cos x dx$;

2) $\int \ln^2 x dx$;

3) $\int \sqrt[3]{x} \ln^2 x dx$;

4) $\int e^{2x} \sin 3x dx$.

Розв'язання.

$$1) \int x^2 \cos x dx = \left| \begin{array}{l} u = x^2, \quad du = 2x dx \\ dv = \cos x dx, \quad v = \int \cos x dx = \sin x \end{array} \right| =$$

Клас I (табл. 1)

$$= x^2 \sin x - \int \sin x \cdot 2x dx = x^2 \sin x - 2 \int x \cdot \sin x dx =$$

Клас I (табл. 1)

$$= \left| \begin{array}{l} u = x, \quad du = dx \\ dv = \sin x dx, \quad v = \int \sin x dx = -\cos x \end{array} \right| =$$

$$= x^2 \cdot \sin x - 2(-x \cos x - \int (-\cos x) dx) = x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x + C.$$

$$2) \int \ln^2 x dx = \left| \begin{array}{l} u = \ln^2 x, \quad du = 2 \ln x \frac{dx}{x} \\ dv = dx, \quad v = \int dx = x \end{array} \right| = x \ln^2 x - \int x \cdot 2 \ln x \frac{dx}{x} =$$

Клас II (табл. 1)

$$= x \ln^2 x - 2 \int \ln x dx = \left| \begin{array}{l} u = \ln x, \quad du = \frac{dx}{x} \\ dv = dx, \quad v = \int dx = x \end{array} \right| = x \ln^2 x - 2 \left(x \cdot \ln x - \int x \cdot \frac{dx}{x} \right) =$$

Клас II (табл. 1)

$$= x \ln^2 x - 2x \ln x + 2x + C = x \ln x (\ln x - 2) + 2x + C.$$

$$3) \int \sqrt[3]{x} \ln^2 x dx = \left| \begin{array}{l} u = \ln^2 x, \quad du = 2 \ln x \frac{dx}{x} \\ dv = \sqrt[3]{x} dx, \quad v = \int x^{1/3} dx = \frac{3}{4} x^{4/3} \end{array} \right| = \frac{3}{4} x^{4/3} \ln^2 x -$$

Клас II (табл. 1)

$$- \int \frac{3}{4} x^{4/3} \cdot 2 \ln x \frac{dx}{x} = \frac{3}{4} x \sqrt[3]{x} \cdot \ln^2 x - \frac{3}{2} \int x^{1/3} \ln x dx = \left| \begin{array}{l} u = \ln x, \quad du = \frac{dx}{x} \\ dv = x^{1/3} dx, \quad v = \frac{3}{4} x^{4/3} \end{array} \right|$$

$$= \frac{3}{4} x \sqrt[3]{x} \cdot \ln^2 x - \frac{3}{2} x \left(\frac{3}{4} x^{4/3} \ln x - \int \frac{3}{4} x^{4/3} \frac{dx}{x} \right) =$$

$$= \frac{3}{4} x \sqrt[3]{x} \cdot \ln^2 x - \frac{9}{8} x \sqrt[3]{x} \cdot \ln x + \frac{9}{8} \int x^{1/3} dx = \frac{3}{4} x \sqrt[3]{x} \cdot \ln^2 x -$$

$$- \frac{9}{8} x \sqrt[3]{x} \cdot \ln x + \frac{9}{8} \cdot \frac{3}{4} x \sqrt[3]{x} + C = \frac{3}{4} x \sqrt[3]{x} \left(\ln^2 x - \frac{3}{2} \ln x \frac{9}{8} \right) + C.$$

$$4) \int e^{2x} \sin 3x dx = \left| \begin{array}{l} u = e^{2x}, \quad du = 2e^{2x} dx \\ dv = \sin 3x dx, \quad v = \int \sin 3x dx = -\frac{\cos 3x}{3} \end{array} \right| =$$

$$= -e^{2x} \frac{\cos 3x}{3} - \int \left(-\frac{\cos 3x}{3} \right) 2e^{2x} dx = -2e^{2x} \frac{\cos 3x}{3} + \frac{2}{3} \int e^{2x} \cos 3x dx =$$

$$= \left| \begin{array}{l} u = e^{2x}, \quad du = 2e^{2x} dx \\ dv = \cos 3x dx, \quad v = \int \cos 3x = \frac{\sin 3x}{3} \end{array} \right| =$$

вибір множників
u і dv тепер слід
обирати, як при
першому
інтегруванні

$$= -e^{2x} \frac{\cos 3x}{3} + \frac{2}{3} \left(e^{2x} \frac{\sin 3x}{3} - \int \frac{\sin 3x}{3} 2e^{2x} dx \right) =$$

$$\begin{aligned}
&= -e^{2x} \frac{\cos 3x}{3} + \frac{2}{3} \left(e^{2x} \frac{\sin 3x}{3} - \frac{2}{3} \int e^{2x} \sin 3x dx \right) = \\
&= -e^{2x} \frac{\cos 3x}{3} + \frac{2}{9} e^{2x} \sin 3x - \frac{4}{9} \int e^{2x} \sin 3x dx = \\
&= \frac{2 \sin 3x - 3 \cos 3x}{9} e^{2x} - \frac{4}{9} \int e^{2x} \cdot \sin 3x dx.
\end{aligned}$$

В результаті двократного інтегрування частинами в правій частині рівності одержано шуканий інтеграл $\int e^{2x} \cdot \sin 3x dx$. Позначимо цей інтеграл I . Отже, одержано лінійне рівняння відносно шуканого інтегралу I :

$$I = \frac{2 \sin 3x - 3 \cos 3x}{9} e^{2x} - \frac{4}{9} I. \quad (*)$$

$$I + \frac{4}{9} I = \frac{2 \sin 3x - 3 \cos 3x}{9} e^{2x} + C. \quad (**)$$

$$\frac{13}{9} I = \frac{2 \sin 3x - 3 \cos 3x}{9} e^{2x} + C.$$

$$I = \frac{2 \sin 3x - 3 \cos 3x}{13} e^{2x} + C.$$

$$I = \frac{2 \sin 3x - 3 \cos 3x}{13} e^{2x} + C.$$

Зауваження. Пояснимо появу сталого множника C в рівності (**). Справа в тому, що кожний з інтегралів I в лівій і правій частині рівності (*) являє собою вираз

$$F(x) + C,$$

де $F(x)$ – яка-небудь первісна для $e^{2x} \cdot \sin 3x$, а C – довільна стала, яка може обиратися для цих інтегралів по-різному. Тому інтеграл I в лівій і правій частині рівності (*) можуть відрізнятися на сталу.

2.3.3. Застосування методу інтегрування частинами в комбінації з методом заміни змінної.

Приклад 2.12. Знайти інтеграли.

1) $\int x^3 e^{x^2} dx$;

2) $\int \sin 2x \ln(\sin x) dx$;

3) $\int \arcsin^2 x dx$;

4) $\int x^2 \arccos 3x dx$.

Розв'язання.

$$\begin{aligned} 1) \int x^3 e^{x^2} dx &= \int x^2 \cdot x \cdot e^{x^2} dx = \left| \begin{array}{l} t = x^2 \\ dt = 2x dx \end{array} \right| = \frac{1}{2} \int t \cdot e^t dt = \\ &= \left| \begin{array}{l} u = t, \quad du = dt \\ dv = e^t dt, \quad v = \int e^t dt = e^t \end{array} \right| = \frac{1}{2} (te^t - \int e^t dt) = \frac{1}{2} (te^t - e^t + C) = \\ &= \frac{1}{2} (x^2 e^{x^2} - e^{x^2} + C) = \frac{e^{x^2}}{2} (x^2 - 1) + C. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \int \sin 2x \ln(\sin x) dx &= \int 2 \sin x \cos x \ln(\sin x) dx = \left| \begin{array}{l} t = \sin x \\ dt = \cos x dx \end{array} \right| = \\ &= 2 \int t \ln t dt = \left| \begin{array}{l} u = \ln t, \quad du = \frac{dt}{t} \\ dv = t dt, \quad v = \int t dt = \frac{t^2}{2} \end{array} \right| = \\ &= 2 \left(\frac{t^2}{2} \ln t - \int \frac{t^2}{2} \cdot \frac{dt}{t} \right) = 2 \left(\frac{t^2}{2} \ln t - \frac{1}{2} \int t dt \right) = t^2 \ln t - \frac{t^2}{2} + C = \\ &= \frac{t^2}{2} (2 \ln t - 1) + C = \frac{\sin^2 x}{2} (2 \ln(\sin x) - 1) + C. \end{aligned}$$

$$3) \int \arcsin^2 x \, dx = \left| \begin{array}{l} u = \arcsin^2 x, \, du = 2 \arcsin x \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ dv = dx, \, v = \int dx = x \end{array} \right| =$$

$$= x \cdot \arcsin^2 x - \int x \cdot 2 \arcsin x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= \left| \begin{array}{l} u = \arcsin x, \, du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ dv = \frac{x \, dx}{\sqrt{1-x^2}}, \, v = \int \frac{x \, dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{2} \int \frac{d(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{1-x^2} \end{array} \right| =$$

$$= x \cdot \arcsin^2 x - 2 \left(-\arcsin x \cdot \sqrt{1-x^2} - \int \left(-\sqrt{1-x^2} \cdot \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \right) \right) =$$

$$= x \cdot \arcsin^2 x + 2 \arcsin x \cdot \sqrt{1-x^2} - 2x + C.$$

$$4) \int x^2 \arccos 3x \, dx = \left| \begin{array}{l} u = \arccos 3x, \, du = -\frac{3dx}{\sqrt{1-9x^2}} \\ dv = x^2 dx, \, v = \int x^2 dx = \frac{x^3}{3} \end{array} \right| =$$

$$= \frac{x^3}{3} \arccos 3x - \int \frac{x^3}{3} \left(-\frac{3dx}{\sqrt{1-9x^2}} \right) = \frac{x^3}{3} \arccos 3x + \int \frac{x^3 dx}{\sqrt{1-9x^2}}.$$

Знайдемо $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{1-9x^2}}$ методом заміни змінної.

$$\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{1-9x^2}} = \int \frac{x^2 \cdot x \, dx}{\sqrt{1-9x^2}} = \left| \begin{array}{l} t = 1-9x^2, \, dt = -18x \, dx \\ x \, dx = -\frac{dt}{18}, \, x^2 = \frac{1-t}{9} \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{\frac{1-t}{9} \left(-\frac{dt}{18} \right)}{\sqrt{t}} = \frac{1}{162} \int \frac{t-1}{\sqrt{t}} dt = \frac{1}{162} \int \left(\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}} \right) dt =$$

$$\frac{1}{162} \left(\frac{2}{3} t^{3/2} - 2\sqrt{t} \right) + C = \frac{1}{81} \left(\frac{1}{3} t\sqrt{t} - \sqrt{t} \right) + C =$$

$$= \frac{1}{81} \left(\frac{1}{3} (1-9x^2) \sqrt{1-9x^2} - \sqrt{1-9x^2} \right) + C.$$

Отже,

$$\int x^2 \arccos 3x dx = \frac{x^3}{3} \arccos 3x + \frac{1}{243} (1-9x^2) \sqrt{1-9x^2} - \frac{1}{81} \sqrt{1-9x^2} + C.$$

3. ІНТЕГРУВАННЯ ДЕЯКИХ ВИРАЗІВ, ЩО МІСТЯТЬ КВАДРАТНИЙ ТРИЧЛЕН

На практиці часто зустрічаються інтеграли, що містять квадратний тричлен у знаменнику підінтегрального виразу, а саме

$$\int \frac{dx}{ax^2 + bx + c};$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}};$$

$$\int \frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c} dx;$$

$$\int \frac{Ax + B}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx.$$

Наведемо алгоритми знаходження кожного з цих інтегралів і розглянемо відповідні приклади.

3.1. Знаходження інтегралу

$$I_1 = \int \frac{dx}{ax^2 + bx + c} \quad (3.1)$$

Цей інтеграл знаходиться шляхом виділення повного квадрату з квадратного тричлену $ax^2 + bx + c$, що міститься в знаменнику підінтегрального виразу. В результаті одержується табличний інтеграл виду

$$\int \frac{dt}{t^2 - k^2} \quad \text{або} \quad \int \frac{dt}{t^2 + k^2}.$$

Дійсно, перетворимо квадратний тричлен у знаменнику так, щоб він уявляв собою суму або різницю квадратів:

$$ax^2 + bx + c = a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right) = a \left(x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \left(\frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{c}{a} - \left(\frac{b}{2a} \right)^2 \right) =$$

$$= a \left(\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \left(\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2} \right) \right).$$

Позначимо $\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2} = \begin{cases} k^2, & \text{якщо } \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2} > 0 \\ -k^2, & \text{якщо } \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2} < 0. \end{cases}$

Тоді $ax^2 + bx + c = a \left(\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 \pm k^2 \right).$

$$I_1 = \int \frac{dx}{a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 \pm k^2 \right]} = \frac{1}{a} \int \frac{dx}{\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 \pm k^2} =$$

$$= \left| \begin{array}{l} t = x + \frac{b}{2a} \\ dt = dx \end{array} \right| = \frac{1}{a} \int \frac{dt}{t^2 \pm k^2}.$$

Одержано табличні інтеграли:

$$\frac{1}{a} \int \frac{dt}{t^2 - k^2} = \frac{1}{2ak} \ln \left| \frac{t-k}{t+k} \right| + C$$

або

$$\frac{1}{a} \int \frac{dt}{t^2 + k^2} = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{k} \operatorname{arctg} \frac{t}{k} + C.$$

Приклад 3.1. Знайти інтеграли

1) $\int \frac{dx}{x^2 + 8x + 7};$

2) $\int \frac{dx}{x^2 - 8x + 25};$

$$3) \int \frac{dx}{2x^2 + 4x - 7};$$

$$4) \int \frac{dx}{3x^2 - 6x + 5}.$$

Розв'язання.

$$\begin{aligned} 1) \int \frac{dx}{x^2 + 8x + 7} &= \int \frac{dx}{x^2 + 2 \cdot 4x + 16 + 7 - 16} = \int \frac{dx}{(x+4)^2 - 9} = \\ &= \left| \begin{matrix} t = x + 4 \\ dt = dx \end{matrix} \right| = \int \frac{dt}{t^2 - 9} = \frac{1}{2 \cdot 3} \ln \left| \frac{t-3}{t+3} \right| + C = \frac{1}{6} \ln \left| \frac{x+4-3}{x+4+3} \right| + C = \\ &= \frac{1}{6} \ln \left| \frac{x+1}{x+7} \right| + C. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \int \frac{dx}{x^2 - 8x + 25} &= \int \frac{dx}{x^2 - 2 \cdot 4x + 16 + 25 - 16} = \int \frac{dx}{(x-4)^2 + 9} = \\ &= \left| \begin{matrix} t = x + 4 \\ dt = dx \end{matrix} \right| = \int \frac{dt}{t^2 + 9} = \frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{t}{3} + C = \frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{x+4}{3} + C. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3) \int \frac{dx}{2x^2 + 4x - 7} &= \int \frac{dx}{2 \left(x^2 + 2x - \frac{7}{2} \right)} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2 + 2x + 1 - \frac{7}{2} - 1} = \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{dx}{(x+1)^2 - \frac{9}{2}} = \left| \begin{matrix} t = x + 1 \\ dt = dx \end{matrix} \right| = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^2 - \frac{9}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2 \cdot \frac{3}{\sqrt{2}}} \ln \left| \frac{t - \frac{3}{\sqrt{2}}}{t + \frac{3}{\sqrt{2}}} \right| + C = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{12} \ln \left| \frac{t\sqrt{2} - 3}{t\sqrt{2} + 3} \right| + C = \frac{\sqrt{2}}{12} \ln \left| \frac{(x+1)\sqrt{2} - 3}{(x+1)\sqrt{2} + 3} \right| + C. \end{aligned}$$

$$4) \int \frac{dx}{3x^2 - 6x + 5} = \frac{1}{3} \int \frac{dx}{x^2 - 2x + \frac{5}{3}} = \frac{1}{3} \int \frac{dx}{x^2 - 2x + 1 + \frac{5}{3} - 1} =$$

$$= \frac{1}{3} \int \frac{dx}{(x-1)^2 + \frac{2}{3}} = \left| \begin{matrix} t = x-1 \\ dt = dx \end{matrix} \right| = \frac{1}{3} \int \frac{dt}{t^2 + \frac{2}{3}} = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{3}{2}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{3}{2}} t + C$$

$$= \frac{1}{\sqrt{6}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{3}{2}} (x-1) + C.$$

3.2. Знаходження інтегралу

$$I_2 = \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} \quad (3.2)$$

Аналогічно п. 3.1. перетворимо підкорінний вираз в знаменнику підінтегральної функції так, щоб він уявляв собою суму або різницю квадратів.

$$ax^2 + bx + c = a(t^2 \pm k^2).$$

Тоді

а) якщо $a > 0$, оскільки $ax^2 + bx + c > 0$, то $t^2 \pm k^2 > 0$.

Отже,

$$I_2 = \int \frac{dt}{\sqrt{a(t^2 \pm k^2)}} = \frac{1}{\sqrt{a}} = \int \frac{dt}{\sqrt{t^2 \pm k^2}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \ln |t + \sqrt{t^2 \pm k^2}| + C;$$

б) якщо $a < 0$, оскільки $ax^2 + bx + c > 0$, то $ax^2 + bx + c = a(t^2 - k^2)$,

де $t^2 - k^2 < 0$.

Отже,

$$I_2 = \int \frac{dt}{\sqrt{a(t^2 - k^2)}} = \int \frac{dt}{\sqrt{-a(k^2 - t^2)}} = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \int \frac{dt}{\sqrt{k^2 - t^2}} = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \arcsin \frac{t}{k} + C.$$

Приклад 3.2. Знайти інтеграли

$$1) \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 5x + 2}};$$

$$2) \int \frac{dx}{\sqrt{2 + 3x - 2x^2}}.$$

Розв'язання.

$$1) \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 5x + 2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2 \cdot \frac{5}{2}x + \frac{25}{4} + 2 - \frac{25}{4}}} = \int \frac{dx}{\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{17}{4}} =$$

$$= \left| \begin{array}{l} t = x + \frac{5}{2} \\ dt = dx \end{array} \right| = \int \frac{dt}{\sqrt{t^2 - \frac{17}{4}}} = \ln \left| t + \sqrt{t^2 - \frac{17}{4}} \right| + C =$$

$$= \ln \left| x + \frac{5}{2} + \sqrt{x^2 + 5x + 2} \right| + C.$$

$$2) \int \frac{dx}{\sqrt{2 + 3x - 2x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{-2 \left(x^2 - \frac{3}{2}x - 1 \right)}} =$$

$$= \int \frac{dx}{\sqrt{-2 \left(x^2 - 2 \cdot \frac{3}{4}x + \frac{9}{16} - 1 - \frac{9}{16} \right)}} = \int \frac{dx}{\sqrt{-2 \left(\left(x - \frac{3}{4} \right)^2 - \frac{25}{16} \right)}} =$$

$$= \left| \begin{array}{l} t = x - \frac{3}{4} \\ dt = dx \end{array} \right| = \int \frac{dt}{\sqrt{-2 \left(t^2 - \frac{25}{16} \right)}} = \int \frac{dt}{\sqrt{2 \left(\frac{25}{16} - t^2 \right)}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{dt}{\sqrt{\frac{25}{16} - t^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin \frac{4t}{5} + C = \frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin \frac{4 \left(x - \frac{3}{4} \right)}{5} + C =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin \frac{4x - 3}{5} + C.$$

3.3. Знаходження інтегралу

$$I_3 = \int \frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c} dx \quad (3.3)$$

Цей інтеграл знаходиться шляхом виділення в чисельнику $(Ax + B)$ підінтегрального виразу похідної $(2ax + b)$ знаменника $(ax^2 + bx + c)$. Після зазначеного перетворення інтеграл I_3 представляється у вигляді суми двох інтегралів, один з яких є інтегралом I_1 .

Дійсно перетворимо підінтегральний вираз в інтегралі I_3 :

$$\begin{aligned} I_3 &= \int \frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c} dx = \int \frac{\frac{A}{2a}(2ax + b) + \left(B - \frac{Ab}{2a}\right)}{ax^2 + bx + c} dx = \\ &= \frac{A}{2a} \int \frac{2ax + b}{ax^2 + bx + c} dx + \left(B - \frac{Ab}{2a}\right) \int \frac{dx}{ax^2 + bx + c} = \\ &= \frac{A}{2a} \int \frac{2ax + b}{ax^2 + bx + c} dx + \left(B - \frac{Ab}{2a}\right) I_1. \end{aligned}$$

Знайдемо

$$\begin{aligned} \frac{A}{2a} \int \frac{2ax + b}{ax^2 + bx + c} dx &= \left| \begin{array}{l} t = ax^2 + bx + c \\ dt = (2ax + b) dx \end{array} \right| = \\ \frac{A}{2a} \int \frac{dt}{t} &= \frac{A}{2a} \ln|t| + C = \frac{A}{2a} \ln|ax^2 + bx + c| + C. \end{aligned}$$

Отже,

$$I_3 = \frac{A}{2a} \ln|ax^2 + bx + c| + \left(B - \frac{Ab}{2a}\right) I_1.$$

Приклад 3.3. Знайти інтеграли.

$$1) \int \frac{x+3}{x^2-2x-5} dx;$$

$$2) \int \frac{x dx}{9+8x-x^2};$$

$$3) \int \frac{6x-1}{x^2-4x+13} dx;$$

$$4) \int \frac{12x+11}{9x^2-6x+2} dx.$$

Розв'язання.

$$\begin{aligned} 1) \int \frac{x+3}{x^2-2x-5} dx &= \int \frac{\frac{1}{2}(2x-2) + \left(3 + \frac{1}{2} \cdot 2\right)}{x^2-2x-5} dx = \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{2x-2}{x^2-2x-5} dx + 4 \int \frac{dx}{x^2-2x-5}. \end{aligned}$$

Знайдемо перший доданок суми:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int \frac{2x-2}{x^2-2x-5} dx &= \left| \begin{array}{l} t = x^2 - 2x - 5 \\ dt = (2x-2) dx \end{array} \right| = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t} = \\ &= \frac{1}{2} \ln|t| + C = \frac{1}{2} \ln|x^2 - 2x - 5| + C. \end{aligned}$$

Знайдемо другий доданок суми:

$$\begin{aligned} 4 \int \frac{dx}{x^2-2x-5} &= 4 \int \frac{dx}{x^2-2x+1-5-1} = 4 \int \frac{dx}{(x-1)^2-6} = \left| \begin{array}{l} t = x-1 \\ dt = dx \end{array} \right| = \\ &= 4 \int \frac{dt}{t^2-6} = \frac{4}{2\sqrt{6}} \ln \left| \frac{t-\sqrt{6}}{t+\sqrt{6}} \right| + C = \frac{2}{\sqrt{6}} \ln \left| \frac{x-1-\sqrt{6}}{x-1+\sqrt{6}} \right| + C. \end{aligned}$$

Отже, даний інтеграл

$$\int \frac{x+3}{x^2-2x-5} dx = \frac{1}{2} \ln|x^2-2x-5| + \frac{2}{\sqrt{6}} \ln \left| \frac{x-1-\sqrt{6}}{x-1+\sqrt{6}} \right| + C.$$

$$\begin{aligned}
 2) \int \frac{x dx}{9+8x-x^2} &= \int \frac{-\frac{1}{2}(-2x+8)+4}{9+8x-x^2} = \\
 &= -\frac{1}{2} \int \frac{-2x+8}{9+8x-x^2} dx + 4 \int \frac{dx}{9+8x-x^2}.
 \end{aligned}$$

Знайдемо перший доданок суми:

$$\begin{aligned}
 -\frac{1}{2} \int \frac{-2x+8}{9+8x-x^2} dx &= \left| \begin{array}{l} t = 9+8x-x^2 \\ dt = (-2x+8)dx \end{array} \right| = -\frac{1}{2} \int \frac{dt}{t} = \\
 &= -\frac{1}{2} \ln|t| + C = -\frac{1}{2} \ln|9+8x-x^2| + C.
 \end{aligned}$$

Знайдемо другий доданок суми:

$$\begin{aligned}
 4 \int \frac{dx}{9+8x-x^2} &= -4 \int \frac{dx}{x^2-8x-9} = -4 \int \frac{dx}{x^2-8x+16-9-16} = \\
 &= -4 \int \frac{dx}{(x-4)^2-25} = \left| \begin{array}{l} t = x-4 \\ dt = dx \end{array} \right| = -4 \int \frac{dt}{t^2-25} = \\
 &= -4 \frac{1}{2 \cdot 5} \ln \left| \frac{t-5}{t+5} \right| + C = -\frac{2}{5} \ln \left| \frac{x-4-5}{x-4+5} \right| + C = -\frac{2}{5} \ln \left| \frac{x-9}{x+1} \right| + C.
 \end{aligned}$$

Отже, даний інтеграл

$$\int \frac{x dx}{9+8x-x^2} = -\frac{1}{2} \ln|9+8x-x^2| - \frac{2}{5} \ln \left| \frac{x-9}{x+1} \right| + C.$$

$$3) \int \frac{6x-1}{x^2-4x+13} dx = \int \frac{\frac{6}{2}(2x-4) + (-1+12)}{x^2-4x+13} dx =$$

$$\begin{aligned}
&= 3 \int \frac{2x-4}{x^2-2 \cdot 2x+4+13-4} + 11 \int \frac{dx}{x^2-4x+13} = \\
&= 3 \int \frac{d(x^2-4x+13)}{x^2-4x+13} + 11 \int \frac{dx}{x^2-2 \cdot 2x+4+13-4} = 3 \ln|x^2-4x+13| + \\
&+ 11 \int \frac{dx}{(x-2)^2+9} = 3 \ln|x^2-4x+13| + 11 \int \frac{d(x-2)}{(x-2)^2+9} = \\
&= 3 \ln|x^2-4x+13| + 11 \cdot \frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{x-2}{3} + C = \\
&= 3 \ln|x^2-4x+13| + \frac{11}{3} \operatorname{arctg} \frac{x-2}{3} + C.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
4) \int \frac{12x+11}{9x^2-6x+2} dx &= \int \frac{\frac{12}{18}(18x-6) + (11+4)}{9x^2-6x+2} dx = \\
&= \frac{2}{3} \int \frac{18x-6}{9x^2-6x+2} dx + 15 \int \frac{dx}{9x^2-6x+2} = \frac{2}{3} \int \frac{d(9x^2-6x+2)}{9x^2-6x+2} + \\
&+ 15 \int \frac{dx}{9\left(x^2-\frac{6}{9}x+\frac{2}{9}\right)} = \frac{2}{3} \ln|9x^2-6x+2| + \frac{5}{3} \int \frac{dx}{x^2-2 \cdot \frac{1}{3}x+\frac{1}{9}+\frac{2}{9}-\frac{1}{9}} = \\
&= \frac{2}{3} \ln|9x^2-6x+2| + \frac{5}{3} \int \frac{dx}{\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{1}{9}} = \frac{2}{3} \ln|9x^2-6x+2| + \\
&+ \frac{5}{3} \int \frac{d\left(x-\frac{1}{3}\right)}{\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{1}{9}} = \frac{2}{3} \ln|9x^2-6x+2| + \frac{5}{3} \cdot \frac{1}{\frac{1}{3}} \operatorname{arctg} \frac{x-\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}} + C =
\end{aligned}$$

$$= \frac{2}{3} \ln |9x^2 - 6x + 2| + 5 \operatorname{arctg}(3x - 1) + C.$$

3.4. Знаходження інтегралу

$$I_4 = \int \frac{Ax + B}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx \quad (3.4)$$

Аналогічно п 3.3 для знаходження інтегралу застосують прийом виділення в чисельнику підінтегрального виразу похідної знаменника. Після зазначеного перетворення інтеграл I_4 представляється у вигляді суми двох інтегралів, один з яких є інтегралом I_2 .

Дійсно, перетворимо підінтегральний вираз в інтегралі I_4 :

$$\begin{aligned} I_4 &= \int \frac{Ax + B}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx = \int \frac{\frac{A}{2a}(2ax + b) + \left(B - \frac{Ab}{2a}\right)}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx = \\ &= \frac{A}{2a} \int \frac{2ax + b}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx + \left(B - \frac{Ab}{2a}\right) \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} = \\ &= \frac{A}{2a} \int \frac{2ax + b}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx + \left(B - \frac{Ab}{2a}\right) I_2. \end{aligned}$$

Знайдемо

$$\begin{aligned} \frac{A}{2a} \int \frac{2ax + b}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx &= \left| \begin{array}{l} t = ax^2 + bx + c \\ dt = (2ax + b) dx \end{array} \right| = \frac{A}{2a} \int \frac{dt}{\sqrt{t}} = \\ &= \frac{A}{2a} \cdot 2\sqrt{t} + C = \frac{A}{a} \sqrt{ax^2 + bx + c} + C. \end{aligned}$$

Отже,

$$I_4 = \frac{A}{a} \sqrt{ax^2 + bx + c} + \left(B - \frac{Ab}{2a} \right) I_2.$$

Приклад 3.4. Знайти інтеграли:

$$1) \int \frac{5x+3}{\sqrt{x^2+4x+10}} dx; \quad 2) \int \frac{8x-9}{\sqrt{5+2x-x^2}} dx.$$

Розв'язання.

$$\begin{aligned} 1) \int \frac{5x+3}{\sqrt{x^2+4x+10}} dx &= \int \frac{\frac{5}{2}(2x+4) + (3-10)}{\sqrt{x^2+4x+10}} dx = \\ &= \frac{5}{2} \int \frac{2x+4}{\sqrt{x^2+4x+10}} dx - 7 \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+10}}. \end{aligned}$$

Знайдемо

$$\begin{aligned} \frac{5}{2} \int \frac{2x+4}{\sqrt{x^2+4x+10}} dx &= \left| \begin{array}{l} t = x^2 + 4x + 10 \\ dt = (2x+4) dx \end{array} \right| = \frac{5}{2} \int \frac{dt}{\sqrt{t}} = \\ &= \frac{5}{2} \cdot 2\sqrt{t} + C = 5\sqrt{t} + C = 5\sqrt{x^2+4x+10} + C. \end{aligned}$$

Знайдемо

$$\begin{aligned} 7 \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+10}} &= 7 \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2 \cdot 2x+4+10-4}} = 7 \int \frac{dx}{\sqrt{(x+2)^2+6}} \\ &= \left| \begin{array}{l} t = x+2 \\ dt = dx \end{array} \right| = 7 \int \frac{dt}{\sqrt{t^2+6}} = 7 \ln \left| t + \sqrt{t^2+6} \right| + C = \\ &= 7 \ln \left| x+2 + \sqrt{x^2+4x+10} \right| + C. \end{aligned}$$

Таким чином, даний інтеграл

$$\int \frac{5x+3}{\sqrt{x^2+4x+10}} dx = 5\sqrt{x^2+4x+10} + C - 7\ln|x+2+\sqrt{x^2+4x+10}| + C.$$

$$2) \int \frac{8x-9}{\sqrt{5+2x-x^2}} dx = \int \frac{\frac{8}{-2}(-2x+2) + (-9+8)}{\sqrt{5+2x-x^2}} dx =$$

$$= -4 \int \frac{-2x+2}{\sqrt{5+2x-x^2}} dx - \int \frac{dx}{\sqrt{5+2x-x^2}} =$$

$$= -4 \int \frac{d(5+2x-x^2)}{\sqrt{5+2x-x^2}} - \int \frac{dx}{\sqrt{-(x^2-2x+1-5-1)}} =$$

$$= -8\sqrt{5+2x-x^2} - \int \frac{dx}{\sqrt{-((x-1)^2-6)}} =$$

$$= -8\sqrt{5+2x-x^2} - \int \frac{d(x-1)}{\sqrt{6-(x-1)^2}} =$$

$$= -8\sqrt{5+2x-x^2} - \arcsin \frac{x-1}{\sqrt{6}} + C.$$

4. ІНТЕГРУВАННЯ РАЦІОНАЛЬНИХ ФУНКЦІЙ

Раціональні функції складають важливий клас функцій, інтеграли від яких завжди виражаються через елементарні функції.

4.1. Деякі відомості про раціональні функції

4.1.1. Ціла раціональна функція

Означення. Многочленом (поліномом або цілою раціональною функцією) називається функція

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n, \quad (4.1)$$

де n – степінь многочлена (натуральне число);

$a_0, a_1, \dots, a_n$ – коефіцієнти многочлена (дійсні або комплексні числа).

Означення. Коренем многочлена (4.1) називається таке числове значення $x = c$ (дійсне або комплексне), при якому многочлен перетворюється в нуль, тобто $P_n(c) = 0$.

Теорема 4.1. (Безу). Остача від ділення многочлена $P_n(x)$ на різницю $x - c$ дорівнює $P_n(c)$.

Пояснимо зміст теореми Безу. При діленні многочлена n -го степеня на двочлен $x - c$ першого степеня дістанемо деякий многочлен $P_{n-1}(x)$ $(n-1)$ -го степеня і остачу R – певне число:

$$P_n(x) = P_{n-1}(x)(x - c) + R. \quad (4.2)$$

Теорема стверджує, що $R = P_n(c)$.

Зокрема, якщо $x = c$ – корінь многочлена $P_n(x)$, то

$$P_n(x) = P_{n-1}(x)(x - c). \quad (4.3)$$

Таким чином, з теореми Безу випливає

Наслідок. Якщо $x = c$ – корінь многочлена $P_n(x)$, то многочлен $P_n(x)$ можна представити у вигляді добутку

$$P_n(x) = P_{n-1}(x) \cdot (x - c). \quad (4.4)$$

Виникає запитання. Чи всякий многочлен має корені? Позитивну відповідь на це запитання дає основна теорема алгебри.

Теорема 4.2 (основна теорема алгебри). Всякий многочлен степеня $n > 0$ має хоча б один корінь (дійсний або комплексний).

З основної теореми алгебри випливає, що многочлен (4.1) завжди можна записати у вигляді (4.4). Неважко помітити (наприклад, з процедури ділення многочлена $P_n(x)$ на двочлен $x - a$ «у стовпчик»), що старший коефіцієнт многочлена $P_{n-1}(x)$, тобто коефіцієнт при x^{n-1} , дорівнює a_0 .

Приклад 4.1. Поділити многочлен $3x^2 - 2x - 1$ на двочлен $x + 1$ «у стовпчик».

Розв'язання.

$$\begin{array}{r|l} 3x^2 - 2x - 1 & x + 1 \\ \underline{3x^2 + 3x} & 3x - 5 \\ & -5x - 1 \\ & \underline{-5x - 5} \\ & 4 \end{array}$$

Якщо степінь многочлена $P_{n-1}(x)$ не дорівнює нулю, тобто $P_{n-1}(x) \neq a_0$, то до цього многочлена знов можна застосувати теорему 4.2 і наслідок з теореми Безу. Продовжуючи цей процес, приходимо до такого твердження.

Теорема 4.3. Всякий многочлен n -го степеня $P_n(x)$ можна подати у вигляді

$$P_n(x) = a_0(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n), \quad (4.5)$$

де $x_1, x_2, \dots, x_n$ – корені многочлена;

a_0 – старший коефіцієнт многочлена (коефіцієнт при x^n).

Вираз (4.5) називається *розкладом многочлена на лінійні множники* $((x - x_1), (x - x_2), \dots, (x - x_n))$.

Якщо деякі з лінійних множників у виразі (4.5) однакові, то їх можна об'єднати. Тоді розклад (4.5) матиме вигляд

$$P_n(x) = a_0 (x - x_1)^{k_1} (x - x_2)^{k_2} \dots (x - x_n)^{k_m}, \quad (4.6)$$

де m – число різних коренів;

$k_1, k_2, \dots, k_m$ – цілі числа, що називаються крайностями коренів

$$k_1 + k_2 + \dots + k_m = n.$$

Корінь кратності одиниця називається *простим*.

Будемо надалі розглядати тільки многочлени з дійсними коефіцієнтами.

Серед коренів представлення (4.6) можуть бути і комплексні числа. Справедливе наступне твердження.

Теорема 4.4. Нехай $\alpha + i\beta$ – комплексний корінь многочлена (4.1) з дійсними коефіцієнтами. Тоді комплексно-спряжене число $\alpha - i\beta$ також є коренем цього многочлена.

Перемножимо лінійні множники, що відповідають комплексно-спряженим кореням $\alpha + i\beta$ і $\alpha - i\beta$ у розкладі (4.6)

$$\begin{aligned} (x - (\alpha + i\beta))(x - (\alpha - i\beta)) &= ((x - \alpha) - i\beta)((x - \alpha) + i\beta) = \\ &= (x - \alpha)^2 - (i\beta)^2 = x^2 - 2x\alpha + \alpha^2 + \beta^2 = x^2 + px + q, \end{aligned}$$

де $p = -2\alpha$, $q = \alpha^2 + \beta^2$ – дійсні числа.

Одержано квадратний тричлен $x^2 + px + q$ з дійсними коефіцієнтами і від'ємним дискримінантом

$$D = p^2 - 4q = 4\alpha^2 - 4(\alpha^2 + \beta^2) = -4\beta^2 < 0.$$

Об'єднуючи у формулі (4.6) множники із комплексно-спряженими коренями, дістанемо

$$P_n(x) = a_0(x - x_1)^{k_1} \dots (x - x_r)^{k_r} \cdot (x^2 + p_1x + q_1)^{l_1} \cdot \dots \cdot (x^2 + p_sx + q_s)^{l_s}.$$

де k_i ($i = 1, 2, \dots, r$) – кратності дійсних коренів;

l_j ($j = 1, 2, \dots, s$) – кратності комплексно-спряжених коренів;

$$k_1 + k_2 + \dots + k_r + 2(l_1 + l_2 + \dots + l_s) = n;$$

a_0 ; $x_1, x_2, \dots, x_r$; $p_1, q_1, p_2, q_2, \dots, p_s, q_s$ – дійсні числа

Висновок. Всякий многочлен з дійсними коефіцієнтами можна розкласти (і притому єдиним способом) на лінійні та квадратичні (з від'ємним дискримінантом) множники з дійсними коефіцієнтами.

Приклад 4.2. Розкласти на множники з дійсними коефіцієнтами многочлени

$$1) 3x^2 - 5x + 2; \quad 2) x^3 - 5x^2 + 3x + 1; \quad 3) x^3 + 3x^2 + 5x + 3.$$

Розв'язання.

1) Розглянемо квадратний тричлен $3x^2 - 5x + 2$. Його дискримінант $D = 25 - 4 \cdot 3 \cdot 2 = 25 - 24 = 1 > 0$. При розкладанні на множники квадратного тричлена $ax^2 + bx + c$ у випадку $D \geq 0$ користуються формулою

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2),$$

де x_1, x_2 – корені рівняння $ax^2 + bx + c = 0$, що знаходяться за формулою

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Знайдемо корені рівняння $3x^2 - 5x + 2 = 0$.

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{6} = \frac{5 \pm 1}{6}, \quad x_1 = \frac{2}{3}; \quad x_2 = 1.$$

$$\text{Тому } 3x^2 - 5x + 2 = 3(x - 1)\left(x - \frac{2}{3}\right) = (x - 1)(3x - 2).$$

2) Розглянемо многочлен $x^3 - 5x^2 + 3x + 1$.

Для розкладання на множники застосуємо спосіб групування:

$$\begin{aligned}x^3 - 5x^2 + 3x + 1 &= x^3 - x^2 - 3x^2 + 3x - x^2 + 1 = \\&= (x^3 - x^2) - 3(x^2 - x) - (x^2 - 1) = x^2(x - 1) - 3x(x - 1) - (x - 1)(x + 1) = \\&= (x - 1)(x^2 - 3x - x - 1) = (x - 1)(x^2 - 4x - 1).\end{aligned}$$

Перевіримо, чи можна розкласти на лінійні множники з дійсними коефіцієнтами квадратний тричлен $x^2 - 4x - 1$. Обчислимо його дискримінант $D = (-4)^2 + 4 = 20$. Дискримінант додатний. Обчислимо дійсні корені квадратного тричлена

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{20}}{2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{5}}{2} = 2 \pm \sqrt{5}.$$

Таким чином, $x^2 - 4x - 1 = (x - 2 - \sqrt{5})(x - 2 + \sqrt{5})$.

Тому, $x^3 - 5x^2 + 3x + 1 = (x - 1)(x - 2 - \sqrt{5})(x - 2 + \sqrt{5})$.

3) Легко перевірити підстановкою у многочлен $x^3 + 5x^2 + 3x + 1$, що $x = 1$ є коренем многочлена. За наслідком з теореми Безу (4.4) даний многочлен ділиться без остачі на двочлен $(x - 1)$. Виконаємо це ділення «у стовпчик».

$$\begin{array}{r|l}
 x^3 + 3x^2 + 5x + 3 & x + 1 \\
 \hline
 x^3 + x^2 & x^2 + 2x + 3 \\
 \hline
 2x^2 + 5x + 3 & \\
 - & \\
 2x^2 + 2x & \\
 \hline
 3x + 3 & \\
 - & \\
 3x + 3 & \\
 \hline
 0 &
 \end{array}$$

Маємо:

$$x^3 + 3x^2 + 5x + 3 = (x + 1)(x^2 + 2x + 3).$$

Оскільки дискримінант квадратного тричлену $x^2 + 2x + 3$ $D = 2^2 - 4 \cdot 3 = -8 < 0$, то здійснити розклад квадратного тричлену на лінійні множники з дійсними коефіцієнтами неможливо.

Кінцевий результат: $x^3 + 3x^2 + 5x + 3 = (x + 1)(x^2 + 2x + 3)$.

Справедливі наступні твердження.

Твердження 4.1.

Якщо многочлен $P_n(x)$ тотожно дорівнює нулю (дорівнює нулю при довільних значеннях x), то всі його коефіцієнти дорівнюють нулю.

Твердження 4.2.

Якщо многочлени тотожно дорівнюють один одному, то вони мають рівні степені і рівні між собою коефіцієнти при однакових степенях x .

4.1.2. Дробово-раціональна функція

Означення. Дробово-раціональною функцією (раціональним дробом) називається відношення двох многочленів:

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{a_0x^m + a_1x^{m-1} + \dots + a_m}{b_0x^n + b_1x^{n-1} + \dots + b_n}. \quad (4.8)$$

Зауважимо, що клас раціональних функцій уявляє собою сукупність цілих раціональних і дробово раціональних функцій.

Означення. Дріб $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ називається правильним, якщо степінь чисельника $P_m(x)$ менше, ніж степінь знаменника $Q_n(x)$ ($m < n$). У протилежному випадку ($m \geq n$) дріб $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ називається неправильним.

Приклад 4.3.

$$\frac{x+1}{x^3-2x+6} \text{ — правильний дріб,}$$

$$\frac{x^2+x+9}{x-2} \text{ — неправильний дріб.}$$

Якщо раціональний дріб неправильний, то виконавши ділення, його можна представити у вигляді суми многочлену $W_k(x)$ і правильного раціонального дробу $\frac{R_p(x)}{Q_n(x)}$ ($p < n$):

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = W_k(x) + \frac{R_p(x)}{Q_n(x)}. \quad (4.9)$$

Приклад 4.4. Виділити цілу частину неправильного раціонального дробу

$$\frac{x^5 + x^3 - x^2 + 1}{x^3 - 2x + 1}.$$

Розв’язання. Виконаємо ділення чисельника на знаменник «у стовпчик».

$$\begin{array}{r|l}
 x^5 + x^3 - x^2 + 1 & x^3 - 2x + 1 \\
 \underline{x^5 - 2x^3 + x^2} & \\
 -3x^3 - 2x^2 + 1 & \\
 \underline{3x^3 - 6x + 3} & \\
 -2x^2 + 6x - 2 &
 \end{array}$$

Отже, $\frac{x^5 + x^3 - x^2 + 1}{x^3 - 2x + 1} = x^2 + 3 + \frac{-2x^2 + 6x - 2}{x^3 - 2x + 1}.$

Означення. Елементарними раціональними дробами називаються правильні раціональні дробі наступних чотирьох видів:

I. $\frac{A}{x - a};$

II. $\frac{A}{(x - a)^k}, \quad k = 2, 3, 4, \dots;$

(4.10)

III. $\frac{bx + c}{x^2 + px + q};$

IV. $\frac{Bx + c}{(x^2 + px + q)^k}, \quad k = 2, 3, 4, \dots$

де A, a, B, c, p, q – дійсні числа; $p^2 - 4q < 0$.

4.2. Розклад правильного раціонального дробу на елементарні дробі

Виявляється, що всякий правильний раціональний дріб може бути єдиним чином представленим у вигляді суми скінченної кількості елементарних дробів. Таке представлення безпосередньо пов’язане із розкладом знаменника дробу на множники.

4.2.1. Теоретичне обґрунтування

Теорема 4.5. Нехай дано правильний раціональний дріб $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ ($n < m$), причому многочлен $Q_m(x)$ має вигляд:

$$Q_m(x) = a_0(x - x_1)^{k_1} \dots (x - x_r)^{k_r} \times \\ \times (x^2 + p_1x + q_1)^{l_1} \dots (x^2 + p_sx + q_s)^{l_s}, \quad (4.11)$$

де $k_1, \dots, k_r$ – кратності дійсних коренів;

$l_1, \dots, l_s$ – кратності комплексно-спряжених коренів.

Тоді даний дріб можна єдиним чином представити у вигляді:

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \left(\frac{A_1}{x - x_1} + \frac{A_2}{(x - x_1)^2} + \dots + \frac{A_{k_1}}{(x - x_1)^{k_1}} \right) + \dots + \\ + \left(\frac{G_1}{x - x_r} + \frac{G_2}{(x - x_r)^2} + \dots + \frac{G_{k_r}}{(x - x_r)^{k_r}} \right) + \\ + \left(\frac{K_1x + L_1}{x^2 + p_1x + q_1} + \dots + \frac{K_{l_1}x + L_{l_1}}{(x^2 + p_1x + q_1)^{l_1}} \right) + \dots + \\ + \left(\frac{V_1x + W_1}{x^2 + p_sx + q_s} + \dots + \frac{V_{l_s}x + W_{l_s}}{(x^2 + p_sx + q_s)^{l_s}} \right), \quad (4.12)$$

де $A_1, A_2, \dots, A_{k_1}, \dots, G_1, G_2, \dots, G_{k_r}, \quad K_1, L_1, \dots, K_{l_1}, L_{l_1}, \dots, V_1, W_1, \dots, V_{l_s}, W_{l_s}$ – деякі дійсні числа

Вираз (4.12) називається розкладом правильного раціонального дробу на елементарні дробі.

Пояснимо зміст теореми 4.5.

1. Кожному множнику виду $(x - x_1)^{k_1}$ в розкладі (4.11) знаменника $Q_m(x)$ даного дробу відповідає сума k_1 елементарних дробів виду

$$\frac{A_1}{x - x_1} + \frac{A_2}{(x - x_1)^2} + \dots + \frac{A_{k_1}}{(x - x_1)^{k_1}}$$

в розкладі (4.12) даного дробу.

Аналогічні твердження справедливі для множників

$$(x - x_2)^{k_2}, \dots, (x - x_r)^{k_r}.$$

2. Кожному множнику виду $(x^2 + p_1x + q_1)^{l_1}$ в розкладі (4.11) знаменника $Q_m(x)$ даного дробу відповідає сума l_1 елементарних дробів виду

$$\frac{V_1x + W_1}{x^2 + p_1x + q_1} + \dots + \frac{V_{l_s}x + W_{l_s}}{(x^2 + p_sx + q_s)^{l_s}}$$

в розкладі (4.12) даного дробу.

Аналогічні твердження справедливі для множників

$$(x^2 + p_2x + q_2)^{l_2}, \dots, (x^2 + p_{l_s}x + q_{l_s})^{l_s}.$$

З теореми 4.5 випливає наступний алгоритм розкладу правильного раціонального дробу на елементарні дробу.

4.2.2. Алгоритм розкладу правильного раціонального дробу на елементарні дробу

1. Розкласти знаменник $Q_m(x)$ на лінійні і квадратичні множники з дійсними коефіцієнтами (квадратичні множники не мають дійсних коренів).

2. Записати розклад даного правильного раціонального дробу $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ на суму елементарних дробів з невідомими коефіцієнтами (за 4.12).

3. Одержану рівність помножити на знаменник $Q_m(x)$.

4. Знайти невідомі коефіцієнти одним з методів, що наведені в наступному п 4.2.3.

4.2.3. Методи знаходження невідомих коефіцієнтів у розкладі правильного раціонального дробу

Наведемо два найбільш розповсюджених методи знаходження невідомих коефіцієнтів в чисельниках елементарних дробів розкладу (4.12).

1. Метод окремих значень аргументу.

Помножимо обидві частини рівності (4.12) на знаменник даного дробу $Q_m(x)$, внаслідок чого дістанемо два тотожно рівних многочлени: зліва відомий многочлен $P_n(x)$, справа – многочлен з невідомими коефіцієнтами $A_1, A_2, \dots, V_{l_s}, W_{l_s}$. Будемо надавати змінній x конкретні числові значення стільки разів, скільки є невідомих коефіцієнтів. Дістанемо систему лінійних алгебраїчних рівнянь, з якої визначимо шукані коефіцієнти.

Зауважимо, що система рівнянь значно спрощується, якщо змінній x надавати значення дійсних коренів знаменника $Q_m(x)$.

Приклад 4.5. Розкласти на елементарні дробу правильний раціональний дріб

$$\frac{2x-1}{x(x-1)(x-2)}.$$

Розв'язання. Згідно до результату (4.12) теореми 4.5 запишемо розклад даного правильного раціонального дробу на елементарні дробу з невідомими коефіцієнтами:

$$\frac{2x-1}{x(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x-2} \quad (4.13)$$

Після множення обох частин рівності (4.13) на знаменник даного дробу $x(x-1)(x-2)$ одержимо тотожно рівні многочлени:

$$2x-1 = A(x-1)(x-2) + Bx(x-2) + Cx(x-1).$$

Надамо x по черзі значення дійсних коренів знаменника даного дробу: $x=0$, $x=1$, $x=2$.

$$\text{При } x=0 : -1 = A(-1)(-2), \text{ звідки } -1 = 2A, A = -\frac{1}{2}.$$

$$\text{При } x=1 : 1 = B \cdot 1(1-2), \text{ звідки } 1 = -B, B = -1.$$

$$\text{При } x=2 : 3 = C \cdot 2(2-1), \text{ звідки } C = \frac{3}{2}.$$

Маємо

$$\frac{2x-1}{x(x-1)(x-2)} = -\frac{1}{2x} - \frac{1}{x-1} + \frac{3}{2(x-2)}.$$

Приклад 4.6. Розкласти на елементарні дробы правильний раціональний дріб

$$\frac{x^2+6}{x(x-3)^2}.$$

Розв'язання. Запишемо розклад даного правильного раціонального дробу на елементарні дробы з невідомими коефіцієнтами (4.12):

$$\frac{x^2+6}{x(x-3)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B_1}{x-3} + \frac{B_2}{(x-3)^2}. \quad (4.14)$$

Після множення обох частин рівності (4.14) на знаменник даного дробу $x(x-3)^2$ одержимо тотожно рівні многочлени:

$$x^2 + 6 = A(x-3)^2 + B_1x(x-3) + B_2x.$$

Надамо x по черзі значення дійсних коренів знаменника даного дробу: ($x = 0$ і $x = 3$).

При $x = 0$: $6 = A(0-3)^2$, звідки $6 = 9A$, $A = \frac{2}{3}$.

При $x = 3$: $3^2 + 6 = B_2 \cdot 3$, звідки $15 = 3B_2$, $B_2 = 5$.

Залишається визначити коефіцієнт B_1 . Надамо x ще одне довільне числове значення, наприклад, $x = 1$.

При $x = 1$: $1^2 + 6 = A(1-3)^2 + B_1 \cdot 1(1-3) + B_2 \cdot 1$, звідки $7 = 4A - 2B_1 + B_2$.

Підставляючи знайдені значення коефіцієнтів A і B_2 , одержимо

$$7 = 4 \cdot \frac{2}{3} - 2B_1 + 5, \quad 2B_1 = \frac{8}{3} - 2, \quad 2B_1 = \frac{2}{3}, \quad B_1 = \frac{1}{3}.$$

Отже,

$$\frac{x^2 + 6}{x(x-3)^2} = \frac{2}{3x} + \frac{1}{3(x-3)} + \frac{5}{(x-3)^2}.$$

Зауваження. Застосування методу окремих значень аргументу є особливо зручним, коли знаменник даного дробу має тільки дійсні прості корені (приклад 4.5).

2. Метод невизначених коефіцієнтів.

Нехай після спрощення обох частин розкладу (4.12) маємо два тотожно рівних многочлени (зліва – з відомими коефіцієнтами, справа – з невідомими коефіцієнтами).

З тотожної рівності многочленів випливає, що вони мають рівні степені і рівні між собою коефіцієнти при однакових степенях x (Твердження 4.2). Прирівнюючи коефіцієнти многочленів при однакових степенях x , дістанемо систему лінійних рівнянь відносно невідомих коефіцієнтів.

Приклад 4.7. розкласти на елементарні дробі правильний раціональний дріб $\frac{2x-1}{x(x-1)(x-2)}$.

Розв’язання. В прикладі 4.5. було одержано розклад даного дробу методом окремих значень аргументу. Застосуємо метод невизначених коефіцієнтів. Після одержання тотожно рівних многочленів

$$2x-1 = A(x-1)(x-2) + Bx(x-2) + Cx(x-1)$$

за результатом алгебраїчних перетворень маємо

$$2x-1 = (A+B+C)x^2 + (-3A-2B-C)x + 2A.$$

Прирівняємо коефіцієнти при однакових степенях x в лівій і правій частинах рівності:

$$\begin{array}{l|l} x^2 & 0 = A + B + C \\ x & 2 = -3A - 2B - C \\ x^0 & -1 = 2A \end{array}$$

Розв’яжемо одержану системи лінійних рівнянь.

$$\begin{cases} A + B + C = 0 \\ -3A - 2B - C = 2; \\ 2A = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} -\frac{1}{2} + B + C = 0 \\ \frac{3}{2} - 2B - C = 2; \\ A = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} B + C = \frac{1}{2} \\ -2B - C = \frac{1}{2}; \\ A = -\frac{1}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} B + C = \frac{1}{2} \\ -B = 1; \\ A = -\frac{1}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} C = \frac{3}{2} \\ B = -1 \\ A = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Отже,

$$\frac{2x-1}{x(x-1)(x-2)} = -\frac{1}{2x} - \frac{1}{x-1} + \frac{3}{2(x-2)}.$$

Звертаємо увагу, що застосування методу окремих значень аргументу до розв'язання цього прикладу є зручнішим.

На практиці часто користуються так званим комбінованим методом, згідно до якого деякі з невідомих коефіцієнтів визначають методом окремих значень аргументу, а інші – методом невизначених коефіцієнтів.

Приклад 4.8. Розкласти на елементарні дробі правильний раціональний дріб $\frac{x^2 + 6}{x(x-3)^2}$.

Розв'язання. Цей розклад вже було одержано в прикладі 4.6 методом окремих значень аргументу.

Застосуємо для розв'язання цього прикладу комбінований метод. 3 (4.14)

$$\frac{x^2 + 6}{x(x-3)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B_1}{x-3} + \frac{B_2}{(x-3)^2},$$

звідки

$$x^2 + 6 = A(x-3)^2 + B_1x(x-3) + B_2x. \quad (4.15)$$

В прикладі 4.6 в результаті надання x значень дійсних коренів знаменника ($x = 0$ і $x = 3$) було одержано

$$A = \frac{2}{3}; \quad B_2 = 5.$$

Для знаходження коефіцієнта B_1 прирівняємо в (4.15) коефіцієнти при x^2 в лівій і правій частинах.

$$x^2|1 = B_1$$

Отже маємо кінцевий результат прикладу (4.6)

$$\frac{x^2 + 6}{x(x-3)^2} = \frac{2}{3x} + \frac{1}{3(x-3)} + \frac{5}{(x-3)^2}.$$

4.3. Інтегрування цілих раціональних функцій

Інтегрування многочлена $P_n(x)$ (4.1) утруднень не викликає. Воно зводиться до інтегрування алгебраїчної суми степеневих функцій (табличний інтеграл 2, п 1.2).

4.4. Інтегрування раціональних дробів

4.4.1. Інтегрування елементарних раціональних дробів

Розглянемо інтегрування елементарних раціональних дробів кожного з чотирьох видів (4.10)

$$\text{I. } \int \frac{A}{x-a} dx = A \ln|x-a| + C \text{ (табличний інтеграл 3, п. 1.2).}$$

$$\text{II. } \int \frac{A dx}{(x-a)^k} = \frac{A}{(1-k)(x-a)^{k-1}} + C \text{ (табличний інтеграл 2, п. 1.2).}$$

$$(k = 2, 3, 4, \dots)$$

$$\text{III. } \int \frac{(Bx+C)dx}{x^2+px+q} = \frac{B}{2} \ln|x^2+px+q| + \frac{C - \frac{Bp}{2}}{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}} \operatorname{arctg} \frac{x + \frac{p}{2}}{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}} + C.$$

Цей результат одержується за методикою знаходження інтегралу I_3 (п. 3.3).

$$\text{IV. З методами знаходження } \int \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^k} \quad (k = 2, 3, 4, \dots)$$

пропонуємо ознайомитися в літературі ([2]).

4.4.2. Інтегрування правильних раціональних дробів.

Правило. Для того, щоб проінтегрувати правильний раціональний дріб $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ треба

1. Розкласти правильний раціональний дріб на елементарні дробі (за алгоритмом п. 4.2.2).

2. Обчислити $\int \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} dx$ як суму інтегралів від знайдених дробів.

Розглянемо три випадки.

1. Знаменник дробу $Q_m(x)$ має тільки дійсні прості корені.

Приклад 4.9. Знайти $\int \frac{2x^2 + 2x - 6}{x(x-2)(x+1)} dx$.

Розв'язання. Запишемо розклад підінтегрального правильного раціонального дробу на суму елементарних дробів з невідомими коефіцієнтами (4.12):

$$\frac{2x^2 + 2x - 6}{x(x-2)(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+1}.$$

$$2x^2 + 2x - 6 = A(x-2)(x+1) + Bx(x+1) + Cx(x-2).$$

Знайдемо коефіцієнти A, B, C методом окремих значень аргументу

$$\text{При } x=0: \quad -6 = -2A, \text{ звідки } A=3.$$

$$\text{При } x=2: \quad 6 = 6B, \text{ звідки } B=1.$$

$$\text{При } x=-1: \quad -6 = 3C, \text{ звідки } C=-2.$$

Отже,

$$\frac{2x^2 + 2x - 6}{x(x-2)(x+1)} = \frac{3}{x} + \frac{1}{x-2} - \frac{2}{x+1}.$$

Тому

$$\int \frac{2x^2 + 2x - 6}{x(x-2)(x+1)} dx = \int \left(\frac{3}{x} + \frac{1}{x-2} - \frac{2}{x+1} \right) dx =$$

$$= 3\ln|x| + \ln|x-2| - 2\ln|x+1| + C.$$

2. Знаменник дробу $Q_n(x)$ має тільки дійсні корені, серед яких є кратні.

Приклад 4.10. Знайти інтеграли

$$1) \int \frac{x^2 + 1}{x^3 - x^2} dx;$$

$$2) \int \frac{3x^2 + 1}{(x-1)(x^2 - 1)}.$$

Розв'язання

1) Запишемо розклад підінтегрального правильного раціонального дробу $\frac{x^2 + 1}{x^3 - x^2}$ на суму елементарних дробів з невідомим коефіцієнтами (4.12):

$$\frac{x^2 + 1}{x^2(x-1)} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \frac{B}{x-1};$$

$$x^2 + 1 = A_1x(x-1) + A_2(x-1) + Bx^2; \quad (4.16)$$

Для знаходження коефіцієнтів A_1 , A_2 і B застосуємо комбінований метод (п. 4.2.3)

$$\text{При } x=0: \quad 1 = A_2(0-1) \Rightarrow A_2 = -1.$$

$$\text{При } x=1: \quad 2 = B \cdot 1^2 \Rightarrow B = 2.$$

Для знаходження A_1 прирівнюємо коефіцієнти при x^2 в лівій і правій частинах рівності (4.16)

$$x^2 \Big| \quad 1 = A_1 + B \Rightarrow A_1 = 1 - B = 1 - 2 = -1.$$

Маємо

$$\frac{x^2 + 1}{x^2(x-1)} = -\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x-1}.$$

Тому

$$\int \frac{x^2 + 1}{x^2(x-1)} dx = \int \left(-\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x-1} \right) dx = -\ln|x| + \frac{1}{x} + 2\ln|x-1| + C.$$

2) Запишемо розклад знаменника $(x-1)(x^2-1)$ на лінійні множники:

$$(x-1)(x^2-1) = (x-1)(x-1)(x+1) = (x-1)^2(x+1).$$

Корені знаменника: $x=1$ (двократний), $x=-1$ (простий).
За розкладом (4.12)

$$\frac{3x^2 + 1}{(x-1)^2(x+1)} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{B}{x+1}.$$

$$3x^2 + 1 = A_1(x-1)(x+1) + A_2(x+1) + B(x-1)^2.$$

Скористуємось комбінованим методом знаходження A_1 , A_2 , B .

$$\text{При } x=1: \quad 3 \cdot 1^2 + 1 = A_2(1+1) \Rightarrow 2A_2 = 2, \quad A_2 = 1.$$

$$\text{При } x=-1: \quad 3(-1)^2 + 1 = B(-1-1)^2 \Rightarrow 4B = 4, \quad B = 1.$$

Знайдемо A_1 :

$$x^2 \Big| 3 = A_1 + B \Rightarrow 3 = A_1 + 1; \quad A_1 = 2.$$

Отже,

$$\frac{3x^2 + 1}{(x-1)^2(x+1)} = \frac{2}{x-1} + \frac{2}{(x-1)^2} + \frac{1}{x+1}.$$

$$\int \frac{3x^2 + 1}{(x-1)^2(x+1)} dx = \int \left(\frac{2}{x-1} + \frac{2}{(x-1)^2} + \frac{1}{x+1} \right) dx = 2\ln|x-1| - \frac{2}{x-1} +$$

$$+ \ln|x+1| + C.$$

3. Знаменник дробу має комплексно-спряжені корені, серед яких нема кратних

Приклад 4.11. Знайти інтеграли

$$1) \int \frac{x^2 + 2}{x^3 - 1} dx; \quad 2) \int \frac{7x^2 + 18x - 14}{(x+6)(2x^2 + 2x + 5)} dx.$$

Розв'язання.

1) Розкладемо на множники з дійсними коефіцієнтами знаменник $x^3 - 1$ підінтегрального дробу $\frac{x^2 + 2}{x^3 - 1}$.

$$x^3 - 1 = (x-1)(x^2 + x + 1).$$

Дискримінант квадратного тричлена $x^2 + x + 1$ від'ємний ($D = 1 - 4 = -3$), тому за (4.12)

$$\frac{x^2 + 2}{(x-1)(x^2 + x + 1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx + C}{x^2 + x + 1}.$$

$$x^2 + 2 = A(x^2 + x + 1) + (Bx + C)(x-1).$$

Скористуємось комбінованим методом знаходження A, B, C .

При $x=1$: $1^2 + 2 = A(1+1+1)$; $3A=3$, $A=1$.

$$\left. \begin{array}{l} x^2 \\ x \end{array} \right| \begin{array}{l} 1 = A + B, \\ 0 = A - B + C \end{array} \quad \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} 1 = 1 + B \\ 0 = 1 - B + C \end{array} \right. ; \quad \left\{ \begin{array}{l} B = 0 \\ 0 = 1 - 0 + C \end{array} \right. ; \quad \left\{ \begin{array}{l} B = 0 \\ C = -1 \end{array} \right.$$

Маємо

$$\frac{x^2 + 2}{(x-1)(x^2 + x + 1)} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x^2 + x + 1}.$$

Отже,

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 + 2}{(x-1)(x^2 + x + 1)} dx &= \int \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x^2 + x + 1} \right) dx = \\ &= \int \frac{dx}{x-1} - \int \frac{dx}{x^2 + 2 \cdot \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} + 1 - \frac{1}{4}} = \ln|x-1| - \int \frac{dx}{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} = \\ &= \ln|x-1| - \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2\left(x + \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{3}} + C = \\ &= \ln|x-1| - \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C. \end{aligned}$$

2) Розглянемо $\int \frac{7x^2 + 18x - 14}{(x+6)(2x^2 + 2x + 5)} dx$.

Квадратний тричлен $2x^2 + 2x + 5$ в знаменнику підінтегрального дробу має від'ємний дискримінант ($D = 4 - 40 = -36$). Тому за (4.12) розклад підінтегрального дробу має вигляд

$$\frac{7x^2 + 18x - 14}{(x+6)(2x^2 + 2x + 5)} = \frac{A}{x+6} + \frac{Bx+C}{2x^2 + 2x + 5}.$$

$$7x^2 + 18x - 14 = A(2x^2 + 2x + 5) + (Bx + C)(x + 6)$$

При $x = -6$: $7 \cdot 36 + 18 \cdot 6 - 14 = A(2 \cdot 36 - 2 \cdot 6 + 5),$

$$130 = 65A \Rightarrow A = 2.$$

$$\left. \begin{array}{l} x^2 \mid 7 = 2A + B \\ x^0 \mid -14 = 5A + 6C \end{array} \right\}; \quad \left\{ \begin{array}{l} 7 = 4 + B \\ -14 = 10 + 6C \end{array} \right\}; \quad \left\{ \begin{array}{l} B = 3 \\ C = -4 \end{array} \right\}.$$

Таким чином,

$$\frac{7x^2 + 18x - 14}{(x+6)(2x^2 + 2x + 5)} = \frac{2}{x+6} + \frac{3x+4}{2x^2 + 2x + 5}.$$

$$\int \frac{7x^2 + 18x - 14}{(x+6)(2x^2 + 2x + 5)} dx = 2 \int \frac{dx}{x+6} + \int \frac{3x-4}{2x^2 + 2x + 5} dx =$$

$$= 2 \ln|x+6| + \int \frac{\frac{3}{4}(4x+2) - \frac{11}{2}}{2x^2 + 2x + 5} dx = 2 \ln|x+6| +$$

$$+ \frac{3}{4} \int \frac{d(2x^2 + 2x + 5)}{2x^2 + 2x + 5} - \frac{11}{2} \int \frac{dx}{2 \left(x^2 + 2 \cdot \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} + \frac{5}{2} - \frac{1}{4} \right)} =$$

$$= 2 \ln|x+6| + \frac{3}{4} \ln(2x^2 + 2x + 5) - \frac{11}{4} \int \frac{dx}{\left(x + \frac{1}{2} \right)^2 + \left(\frac{3}{2} \right)^2} =$$

$$= 2\ln|x+6| + \frac{3}{4}\ln(2x^2 + 2x + 5) - \frac{11}{6}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{3} + C.$$

4.4.3. Інтегрування неправильних раціональних дробів.

Правило. Для того, щоб про інтегрувати неправильний раціональний дріб $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, треба

1. Виділити цілу частину з неправильного раціонального дробу (п. 4.1.2).

2. Обчислити $\int \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} dx$ як суму інтегралів від цілої раціональної функції (п. 4.3) і правильного раціонального дробу (п. 4.4.2).

Приклад 4.12. Знайти інтеграл

$$\int \frac{5x^4 - x^3 + 4x^2 + 8}{x^3 - 8} dx.$$

Розв'язання. Підінтегральна функція – неправильний раціональний дріб (ступінь чисельника вищий за ступінь знаменника). Виділимо цілу частинну.

$$\begin{array}{r|l} 5x^4 - x^3 + 4x^2 + 8 & x^3 - 8 \\ \hline 5x^4 - 40x & 5x - 1 \\ \hline -x^3 + 4x^2 + 40x + 8 & \\ -x^3 + 8 & \\ \hline & 4x^2 + 40x \end{array}$$

Отже,

$$\int \frac{5x^4 - x^3 + 4x^2 + 8}{x^3 - 8} dx = \int (5x - 1) dx + \int \frac{4x^2 + 40x}{x^3 - 8} dx =$$

$$= \frac{5}{2}x^2 - x + \int \frac{4x^2 + 40x}{x^3 - 8} dx.$$

Перейдемо до інтегрування правильного раціонального дробу

$$\frac{4x^2 + 40x}{x^3 - 8}.$$

Розкладемо знаменник дробу на множники

$$x^3 - 8 = (x - 2)(x^2 + 2x + 4).$$

Квадратичний множник $x^2 + 2x + 4$ має від'ємний дискримінант. За (4.12)

$$\frac{4x^2 + 40x}{(x - 2)(x^2 + 2x + 4)} = \frac{A}{x - 2} + \frac{Bx + C}{x^2 + 2x + 4}.$$

$$4x^2 + 40x = A(x^2 + 2x + 4) + (Bx + C)(x - 2).$$

$$\text{При } x = 2: \quad 96 = A(4 + 4 + 4) \quad \Rightarrow \quad A = 8.$$

$$\left. \begin{array}{l} x^2 \\ x^0 \end{array} \right| \begin{array}{l} 4 = A + B \\ 0 = 4A - 2C \end{array}; \quad \begin{cases} 4 = 8 + B \\ 0 = 32 - 2C \end{cases}; \quad \begin{cases} B = -4 \\ C = 16 \end{cases}.$$

Таким чином,

$$\frac{4x^2 + 40x}{(x - 2)(x^2 + 2x + 4)} = \frac{8}{x - 2} + \frac{-4x + 16}{x^2 + 2x + 4}.$$

$$\int \frac{4x^2 + 40x}{(x-2)(x^2 + 2x + 4)} dx = 8 \int \frac{dx}{x-2} + \int \frac{-4x+16}{x^2 + 2x + 4} dx =$$

$$= 8 \ln|x-2| + \int \frac{-\frac{4}{2}(2x+2)+16+4}{x^2 + 2x + 4} dx =$$

$$= 8 \ln|x-2| - 2 \int \frac{d(x^2 + 2x + 4)}{x^2 + 2x + 4} dx + 20 \int \frac{dx}{x^2 + 2x + 4} =$$

$$= 8 \ln|x-2| - 2 \ln(x^2 + 2x + 4) + 20 \int \frac{dx}{(x+1)^2 + 3} =$$

$$= 8 \ln|x-2| - 2 \ln(x^2 + 2x + 4) + \frac{20}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{x+1}{\sqrt{3}} + C.$$

Кінцевий результат

$$\int \frac{5x^4 - x^3 + 4x^2 + 8}{x^3 - 8} dx = \frac{5}{2}x^2 - x +$$

$$+ 8 \ln|x-2| - 2 \ln(x^2 + 2x + 4) + \frac{20}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{x+1}{\sqrt{3}} + C.$$

5. ІНТЕГРУВАННЯ ДЕЯКИХ ТРАНСЦЕНДЕНТНИХ ФУНКЦІЙ

Насамперед зауважимо, що інтеграли від трансцендентних функцій не завжди обчислюються в елементарних функціях. Розглянемо деякі типи інтегралів, які за допомогою певних підстановок можна звести до інтегралів від раціональних функцій (п. 4) або до табличних інтегралів (п. 1).

5.1. Раціональна функція двох змінних

Означення. Раціональною функцією двох змінних $R(u, v)$ називається функція, що залежить від двох змінних u, v і деяких сталих, над якими виконується тільки скінченна кількість чотирьох арифметичних дій: додавання, віднімання, множення і ділення.

Приклад 5.1.

$$R(u, v) = \frac{3u^2v + u^5v^4}{u^3 + 4v^2} \text{ є раціональною функцією від } u \text{ і } v.$$

Якщо змінні u і v , в свою чергу, є функціями незалежної змінної x :

$$u = \varphi(x); \quad v = \psi(x),$$

то функція $R(\varphi(x), \psi(x))$ є раціональною функцією від $\varphi(x)$ і $\psi(x)$.

Приклад 5.2.

$$\text{Нехай } R(u, v) = \frac{u + v}{u^2 - 5v}$$

1) Якщо $u = x$, $v = \sqrt{x^2 + 1}$, то

$$f(x) = \frac{x + \sqrt{x^2 + 1}}{x^2 - 5\sqrt{x^2 + 1}} = R\left(x, \sqrt{x^2 + 1}\right).$$

2) Якщо $u = \sin x$, $v = \cos x$, то

$$f(x) = \frac{\sin x + \cos x}{\sin^2 x - 5 \cos x} = R(\sin x, \cos x).$$

5.2. Інтегрування тригонометричних функцій

Розглянемо інтеграл виду

$$\int R(\sin x, \cos x) dx. \quad (5.1)$$

Зауважимо, що підінтегральну функцію, яка раціонально залежить від будь-яких тригонометричних функцій, завжди можна вважати $R(\sin x, \cos x)$, оскільки всі тригонометричні функції раціонально виражаються через $\sin x$ і $\cos x$:

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}, \quad \sec x = \frac{1}{\cos x}, \quad \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}. \quad (5.2)$$

I. Універсальна тригонометрична підстановка

Інтеграли виду (5.1) завжди зводяться до інтегралів від раціональних функцій (раціоналізуються) за допомогою універсальної тригонометричної підстановки

$$t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}, \quad -\pi < x < \pi. \quad (5.3)$$

За відомими тригонометричними формулами

$$\sin x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}; \quad \cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}. \quad (5.4)$$

З (5.3) випливає

$$x = 2\operatorname{arctg} t, \text{ звідки } dx = \frac{2dt}{1+t^2}. \quad (5.5)$$

Тому

$$\int R(\sin x, \cos x) dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}; \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \cdot \frac{2dt}{1+t^2} = \int R_1(t) dt,$$

де $R_1(t)$ – раціональна функція від t .

За допомогою універсальної тригонометричної підстановки особливо зручно обчислювати інтеграли виду

$$\int \frac{dx}{a \cos x + b \sin x + c} \quad (a^2 + b^2 \neq 0).$$

Приклад 5.3. Знайти інтеграли

$$1) \int \frac{dx}{2 + \sin x}; \quad 2) \int \frac{dx}{3 + 5 \cos x}; \quad 3) \int \frac{5 + 6 \sin x}{\sin x (4 + 3 \cos x)} dx.$$

Розв'язання.

$$\begin{aligned} 1) \int \frac{dx}{2 + \sin x} &= \left| \begin{array}{l} t = \operatorname{tg} \frac{x}{2} \\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \\ dx = \frac{2dt}{1+t^2} \end{array} \right| = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{2 + \frac{2t}{1+t^2}} = \int \frac{2dt}{(1+t^2) \cdot \frac{2(t^2+t+1)}{1+t^2}} = \int \frac{dt}{t^2+t+1} = \\ &= \int \frac{dt}{\left(t + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{t + \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1}{\sqrt{3}} + C. \end{aligned}$$

$$2) \int \frac{dx}{3+5\cos x} = \left| \begin{array}{l} t = \operatorname{tg} \frac{x}{2} \\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ dx = \frac{2dt}{1+t^2} \end{array} \right| = \int \frac{2dt}{(1+t^2) \left(3+5 \cdot \frac{1-t^2}{1+t^2} \right)} =$$

$$= \int \frac{2dt}{8-2t^2} = \int \frac{dt}{4-t^2} = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{t+2}{t-2} \right| + C = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 2}{\operatorname{tg} \frac{x}{2} - 2} \right| + C.$$

$$3) \int \frac{5+6\sin x}{\sin x(4+3\cos x)} dx = \left| \begin{array}{l} t = \operatorname{tg} \frac{x}{2} \\ dx = \frac{2dt}{1+t^2} \\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{array} \right| = 2 \int \frac{5+6 \cdot \frac{2t}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2} \left(4+3 \cdot \frac{1-t^2}{1+t^2} \right)} dt =$$

$$= \int \frac{5t^2 + 12t + 5}{t(t^2 + 7)} dt.$$

Розклад підінтегральної функції на елементарні дроби має вигляд (4.12):

$$\frac{5t^2 + 12t + 5}{t(t^2 + 7)} = \frac{A}{t} + \frac{Bt + C}{t^2 + 7}.$$

Тому

$$5t^2 + 12t + 5 = A(t^2 + 7) + (Bt + C)t.$$

$$5t^2 + 12t + 5 = (A + B)t^2 + Ct + 7A.$$

Невідомі коефіцієнти A, B, C знайдемо за комбінованим методом (п. 4.2.3)

$$\begin{array}{l|l} t=0 & A=\frac{5}{7} \\ t^2 & A+B=5 \\ t & C=12 \end{array} \Leftrightarrow \begin{cases} A=\frac{5}{7} \\ B=\frac{30}{7} \\ C=12 \end{cases}.$$

Тому

$$\int \frac{5t^2 + 12t + 5}{t(t^2 + 7)} dt = \int \left(\frac{5}{7t} + \frac{\frac{30}{7}t + 12}{t^2 + 7} \right) dt = \frac{5}{7} \ln|t| + \frac{15}{7} \int \frac{2t + 12 \cdot \frac{7}{15}}{t^2 + 7} dt =$$

$$= \frac{5}{7} \ln|t| + \frac{15}{7} \int \frac{2t}{t^2 + 7} dt + 12 \int \frac{dt}{t^2 + 7} =$$

$$= \frac{5}{7} \ln|t| + \frac{15}{7} \int \frac{d(t^2 + 7)}{t^2 + 7} + \frac{12}{7} \int \frac{dt}{\left(\frac{t}{\sqrt{7}}\right)^2 + 1} =$$

$$= \frac{5}{7} \ln|t| + \frac{15}{7} \ln(t^2 + 7) + \frac{12}{\sqrt{7}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{7}} + C.$$

Повертаючись до змінної x , маємо

$$\int \frac{5 + 6 \sin x}{\sin x (4 + 3 \cos x)} dx = \frac{5}{7} \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + \frac{15}{7} \ln \left(\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} + 7 \right) +$$

$$+\frac{12}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{7}}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)+C.$$

Звертаємо увагу, що підстановка $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ зветься *універсальною*, оскільки вона завжди раціоналізує інтеграл (5.1). Однак вона часто приводить до надто громіздких обчислень. Тому корисно знати також інші прийоми інтегрування, застосування яких до інтегралів певного виду є ефективним.

II. Інтеграли виду

$$\int R(\sin x)\cos x dx, \quad \int R(\cos x)\sin x dx, \quad \int R(\operatorname{tg} x)dx \quad (5.6)$$

Для знаходження інтегралів (5.6) рекомендуються наступні заміни

$$\int R(\sin x)\cos x dx: \quad \text{заміна} \quad t = \sin x;$$

$$\int R(\cos x)\sin x dx: \quad \text{заміна} \quad t = \cos x;$$

$$\int R(\operatorname{tg} x)dx: \quad \text{заміна} \quad t = \operatorname{tg} x.$$

Приклад 5.4. Знайти інтеграли

$$1) \int \frac{\cos x dx}{(1 - \sin x)^2}; \quad 2) \int (1 - \cos^2 x)^2 \sin x dx; \quad 3) \int \frac{\operatorname{tg} x dx}{1 - \operatorname{ctg}^2 x}.$$

Розв'язання.

$$\begin{aligned} 1) \int \frac{\cos x dx}{(1 - \sin x)^2} &= \left| \begin{array}{l} t = \sin x \\ dt = \cos x dx \end{array} \right| = \int \frac{dt}{(1-t)^2} = \int \frac{dt}{(t-1)^2} = \\ &= -\frac{1}{t-1} + C = -\frac{1}{\sin x - 1} + C. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2) \int (1 - \cos^2 x)^2 \sin x \, dx &= \left| \begin{array}{l} t = \cos x \\ dt = -\sin x \, dx \end{array} \right| = -\int (1 - t^2)^2 \, dt = \\
&= -\int (1 - 2t^2 + t^4) \, dt = -t + \frac{2t^3}{3} - \frac{t^5}{5} + C = \\
&= -\frac{1}{5} \cos^5 x + \frac{2}{3} \cos^3 x - \cos x + C.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
3) \int \frac{\operatorname{tg} x \, dx}{1 - \operatorname{ctg}^2 x} &= \int \frac{\operatorname{tg} x}{1 - \frac{1}{\operatorname{tg}^2 x}} \, dx = \int \frac{\operatorname{tg}^3 x \, dx}{\operatorname{tg}^2 x - 1} = \int \left| \begin{array}{l} R(\operatorname{tg} x) = \frac{\operatorname{tg}^3 x}{\operatorname{tg}^2 x - 1} \\ t = \operatorname{tg} x \\ x = \operatorname{arctg} t \\ dx = \frac{dt}{1+t^2} \end{array} \right| = \\
&= \int \frac{t^3 \, dt}{(1+t^2)(t^2-1)} = \int \frac{t^3 \, dt}{t^4-1} = \frac{1}{4} \int \frac{d(t^4-1)}{t^4-1} = \\
&= \frac{1}{4} \ln |t^4-1| + C = \frac{1}{4} \ln |\operatorname{tg}^4 x - 1| + C.
\end{aligned}$$

Зокрема, при обчисленні інтегралів виду

$$\int \operatorname{tg}^m x \, dx; \quad \int \operatorname{ctg}^m x \, dx \quad (5.7)$$

($m \geq 2$ – натуральне число)

доцільно застосувати формули

$$1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad \text{звідки} \quad \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1; \quad (5.8)$$

$$1 + \operatorname{ctg}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}, \quad \text{звідки} \quad \operatorname{ctg}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} - 1. \quad (5.9)$$

Формули (5.8) та (5.9) дозволяють послідовно знизити степінь тангенса або котангенса.

Приклад 5.5. Знайти інтеграли

$$1) \int \operatorname{tg}^4 x \, dx; \quad 2) \int \operatorname{ctg}^5 x \, dx.$$

Розв'язання.

$$\begin{aligned} 1) \int \operatorname{tg}^4 x \, dx &= \int \operatorname{tg}^2 x \cdot \operatorname{tg}^2 x \, dx = \int \operatorname{tg}^2 x \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx = \int \frac{\operatorname{tg}^2 x}{\cos^2 x} dx - \\ &- \int \operatorname{tg}^2 x \, dx = \int \operatorname{tg}^2 x \, d(\operatorname{tg} x) - \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx = \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} - \int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int dx = \\ &= \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} - \operatorname{tg} x + x + C. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \int \operatorname{ctg}^5 x \, dx &= \int \operatorname{ctg}^3 x \operatorname{ctg}^2 x \, dx = \int \operatorname{ctg}^3 x \left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1 \right) dx = \\ &= \int \frac{\operatorname{ctg}^3 x}{\sin^2 x} dx - \int \operatorname{ctg}^3 x \, dx = - \int \operatorname{ctg}^3 x \, d(\operatorname{ctg} x) - \int \operatorname{ctg} x \left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1 \right) dx = \\ &= - \frac{\operatorname{ctg}^4 x}{4} - \int \frac{\operatorname{ctg} x}{\sin^2 x} dx + \int \operatorname{ctg} x \, dx = - \frac{\operatorname{ctg}^4 x}{4} + \int \operatorname{ctg} x \, d(\operatorname{ctg} x) + \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \\ &= - \frac{\operatorname{ctg}^4 x}{4} + \frac{\operatorname{ctg}^2 x}{2} - \ln |\sin x| + C. \end{aligned}$$

III. Інтеграли виду

$$\int R(\sin x, \cos x) dx \quad (5.10)$$

у випадках

$$\text{III.1. } \int R(-\sin x, \cos x) dx = -R(\sin x, \cos x) \quad (5.11)$$

$$\text{III.2. } \int R(\sin x, -\cos x) dx = -R(\sin x, \cos x) \quad (5.12)$$

$$\text{III.3. } \int R(-\sin x, -\cos x) dx = R(\sin x, \cos x) \quad (5.13)$$

III.1. $\int R(\sin x, \cos x) dx$, де $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$.

Підінтегральна функція змінює знак при заміні $\sin x$ на $-\sin x$ (тобто є непарною відносно $\sin x$).

Рекомендована заміна: $t = \cos x$. Зокрема, це відноситься до інтегралів виду

$$\int \sin^{2n+1} x \cdot \cos^{2m} x dx, \quad (n, m - \text{цілі числа}, n \geq 0).$$

Приклад 5.6. Знайти інтеграли

$$1) \int \sin^3 x dx; \quad 2) \int \frac{\sin^5 x}{\cos^4 x} dx; \quad 3) \int \frac{dx}{\sin^3 x}.$$

Розв'язання.

1) Підінтегральна функція містить $\sin x$ у непарному степені (тобто є непарною відносно $\sin x$), тому застосуємо заміну $t = \cos x$, звідки $dt = -\sin x dx$.

Зручно спочатку перетворити підінтегральний вираз так, щоб виділити $\cos x$ і диференціал нової змінної $-\sin x dx$.

$$\int \sin^3 x dx = \int \sin^2 x \cdot \sin x dx = \int (1 - \cos^2 x) \sin x dx = \left| \begin{array}{l} t = \cos x \\ dt = -\sin x dx \end{array} \right| =$$

$$= -\int (1 - t^2) dt = -t + \frac{t^3}{3} + C = -\cos x + \frac{\cos^3 x}{3} + C.$$

2) Підінтегральна функція є непарною відносно $\sin x$.

$$\sin^5 x = \sin^4 x \cdot \sin x = (\sin^2 x)^2 \sin x = (1 - \cos^2 x)^2 \sin x.$$

$$\int \frac{\sin^5 x}{\cos^4 x} dx = \int \frac{(1 - \cos^2 x)^2 \sin x dx}{\cos^4 x} = \left| \begin{array}{l} t = \cos x \\ dt = -\sin x dx \end{array} \right| = -\int \frac{(1 - t^2)^2 dt}{t^4} =$$

$$= -\int \frac{1 - 2t^2 + t^4}{t^4} dt = -\int \left(\frac{1}{t^4} - \frac{2}{t^2} + 1 \right) dt = \frac{1}{3t^3} - \frac{2}{t} - t + C =$$

$$= \frac{1}{3\cos^3 x} - \frac{2}{\cos x} - \cos x + C.$$

$$3) \int \frac{dx}{\sin^3 x} = \int \frac{\sin x dx}{\sin^4 x} = \int \frac{\sin x dx}{(1 - \cos^2 x)^2} = \left| \begin{array}{l} t = \cos x \\ dt = -\sin x dx \end{array} \right| =$$

$$= -\int \frac{dt}{(1 - t^2)^2} = -\int \frac{dt}{(t^2 - 1)^2} = -\int \frac{dt}{(t - 1)^2 (t + 1)^2}.$$

Розклад підінтегральної функції на елементарні дробі має вигляд:

$$\frac{1}{(t - 1)^2 (t + 1)^2} = \frac{A_1}{t - 1} + \frac{A_2}{(t - 1)^2} + \frac{B_1}{t + 1} + \frac{B_2}{(t + 1)^2}.$$

$$1 = A_1(t-1)(t+1)^2 + A_2(t+1)^2 + B_1(t+1)(t-1)^2 + B_2(t-1)^2.$$

$$t=1: \quad 1 = 4A_2, \quad \text{звідки } A_2 = \frac{1}{4}.$$

$$t=-1: \quad 1 = 4B_2, \quad \text{звідки } B_2 = \frac{1}{4}.$$

$$\left. \begin{array}{l} t^3 \\ t^0 \end{array} \right| \begin{array}{l} 0 = A_1 + B_1 \\ 1 = -A_1 + A_2 + B_1 + B_2 \end{array}; \quad \left\{ \begin{array}{l} 0 = A_1 + B_1 \\ 1 = -A_1 + \frac{1}{4} + B_1 + \frac{1}{4} \end{array} \right.;$$

$$\left\{ \begin{array}{l} A_1 + B_1 = 0 \\ -A_1 + B_1 = \frac{1}{2} \end{array} \right.; \quad \left\{ \begin{array}{l} 2B_1 = \frac{1}{2} \\ A_1 + B_1 = 0 \end{array} \right.; \quad \left\{ \begin{array}{l} B_1 = \frac{1}{4} \\ A_1 = -\frac{1}{4} \end{array} \right. .$$

Отже,

$$\frac{1}{(t-1)^2(t+1)^2} = -\frac{1}{4(t-1)} + \frac{1}{4(t-1)^2} + \frac{1}{4(t+1)} + \frac{1}{4(t+1)^2}.$$

$$-\int \frac{dt}{(t-1)^2(t+1)^2} = -\frac{1}{4} \int \left(-\frac{1}{t-1} + \frac{1}{(t-1)^2} + \frac{1}{t+1} + \frac{1}{(t+1)^2} \right) dt =$$

$$= -\frac{1}{4} \left(-\ln|t-1| - \frac{1}{t-1} + \ln|t+1| - \frac{1}{t+1} \right) + C =$$

$$= -\frac{1}{4} \ln \left| \frac{t+1}{t-1} \right| + \frac{1}{2} \frac{t}{t^2-1} + C.$$

Тому

$$\int \frac{dx}{\sin^3 x} = -\frac{1}{4} \ln \left| \frac{\cos x + 1}{\cos x - 1} \right| + \frac{1}{2} \cdot \frac{\cos x}{\cos^2 x - 1} + C = -\frac{1}{4} \ln \left| \frac{\cos x + 1}{\cos x - 1} \right| - \frac{1}{2} \cdot \frac{\cos x}{\sin^2 x} + C$$

III.2. $\int R(\sin x, \cos x) dx$, де $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$.

Підінтегральна функція змінює знак при заміні $\cos x$ на $-\cos x$ (тобто є непарною відносно $\cos x$).

Рекомендована заміна: $t = \sin x$. Зокрема, це відноситься до інтегралів виду

$$\int \cos^{2n+1} x \sin^{2m} x dx, \text{ де } (n, m - \text{цілі числа } n \geq 0).$$

Приклад 5.7. Знайти інтеграли

$$1) \int \sin^4 x \cdot \cos^3 x dx; \quad 2) \int \frac{\cos^5 x dx}{\sin^4 x}.$$

Розв'язання.

1. Підінтегральна функція є непарною відносно $\cos x$.

$$\begin{aligned} \int \sin^4 x \cos^3 x dx &= \int \sin^4 x \cos^2 x \cdot \cos x dx = \left| \begin{array}{l} t = \sin x \\ dt = \cos x dx \end{array} \right| = \\ &= \int t^4 (1 - t^2) dt = \int (t^4 - t^6) dt = \frac{t^5}{5} - \frac{t^7}{7} + C = \frac{\sin^5 x}{5} - \frac{\sin^7 x}{7} + C. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \int \frac{\cos^5 x dx}{\sin^4 x} &= \int \frac{\cos^4 x \cos x dx}{\sin^4 x} = \int \frac{(1 - \sin^2 x)^2 \cos x dx}{\sin^4 x} = \\ &= \left| \begin{array}{l} t = \sin x \\ dt = \cos x dx \end{array} \right| = \int \frac{(1 - t^2)^2 dt}{t^4} = \int \frac{1 - 2t^2 + t^4}{t^4} dt = \end{aligned}$$

$$= \int \left(\frac{1}{t^4} - \frac{2}{t^2} + 1 \right) dt = -\frac{1}{3t^3} + \frac{2}{t} + t + C = -\frac{1}{3\sin^3 x} + \frac{2}{\sin x} + \sin x + C.$$

III.3. $\int R(\sin x, \cos x) dx$, де $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$.

Підінтегральна функція не змінюється при заміні знаків у $\sin x$ і $\cos x$ одночасно (тобто є парною відносно $\sin x$ і $\cos x$ одночасно).

Рекомендована заміна: $t = \operatorname{tg} x$. Зокрема, це відноситься до інтегралів виду

$$\int \frac{\sin^n x}{\cos^m x} dx \quad \text{і} \quad \int \frac{\cos^n x}{\sin^m x} dx, \quad \text{де } m - n = 2k \geq 0 \quad (k - \text{ціле}).$$

Зауважимо, що умова $m - n = 2k$ означає: степені чисельника і знаменника є одночасно парними або непарними числами. Для інтегралів

$$\int \frac{\cos^n x}{\sin^m x} dx$$

більш ефективною є підстановка

$$t = \operatorname{ctg} x.$$

Для підстановки $t = \operatorname{tg} x$ з тригонометричних формул

$$1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad 1 + \operatorname{ctg}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$$

$$\text{випливає, що } \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}, \quad \sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}.$$

Аналогічно для підстановки $t = \operatorname{ctg} x$

$$\sin^2 x = \frac{1}{1+t^2}, \quad \cos^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}.$$

Отже, справедливо

$$\begin{cases} t = \operatorname{tg} x \\ \sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2} \\ \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2} \\ dx = \frac{dt}{1+t^2} \end{cases} \quad (5.14)$$

$$\begin{cases} t = \operatorname{ctg} x \\ \sin^2 x = \frac{1}{1+t^2} \\ \cos^2 x = \frac{t^2}{1+t^2} \\ dx = -\frac{dt}{1+t^2} \end{cases} \quad (5.15)$$

Приклад 5.8. Знайти інтеграли

1) $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x} dx;$

2) $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^7 x} dx;$

3) $\int \frac{\cos^4 x}{\sin^6 x} dx;$

4) $\int \frac{\sin x \cos x}{\sin^4 x + 4\cos^4 x} dx.$

Розв'язання.

1) Підінтегральна функція є парною відносно $\sin x$ і $\cos x$ одночасно:

$$\frac{(-\sin x)^2}{(-\cos x)^6} = \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x}.$$

Застосуємо підстановку $t = \operatorname{tg} x$.

$$\int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x} dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \cdot \frac{dx}{\cos^4 x} = \left. \begin{array}{l} t = \operatorname{tg} x \\ \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2} \\ dx = \frac{dt}{1+t^2} \end{array} \right| = \int t^2 (1+t^2)^2 \frac{dt}{1+t^2} =$$

$$= \int t^2 (1+t^2) dt = \int (t^2 + t^4) dt = \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} + C = \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} + \frac{\operatorname{tg}^5 x}{5} + C.$$

2) Підінтегральна функція є парною відносно $\sin x$ і $\cos x$ одночасно

$$\frac{(-\sin x)^3}{(-\cos x)^7} = \frac{-\sin^3 x}{-\cos^7 x} = \frac{\sin^3 x}{\cos^7 x}.$$

Застосуємо підстановку $t = \operatorname{tg} x$.

$$\int \frac{\sin^3 x}{\cos^7 x} dx = \int \frac{\sin^3 x}{\cos^3 x} \frac{dx}{\cos^4 x} = \int \operatorname{tg}^3 x \frac{dx}{\cos^4 x} = \left. \begin{array}{l} t = \operatorname{tg} x \\ \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2} \\ dx = \frac{dt}{1+t^2} \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{t^3 (1+t^2)^2}{1+t^2} dt = \int t^3 (1+t^2) dt = \int (t^3 + t^5) dt =$$

$$= \frac{t^4}{4} + \frac{t^6}{6} + C = \frac{\operatorname{tg}^4 x}{4} + \frac{\operatorname{tg}^6 x}{6} + C.$$

3) Підінтегральна функція є парною відносно $\sin x$ і $\cos x$ одночасно. Застосуємо підстановку $t = \operatorname{ctg} x$.

$$\int \frac{\cos^4 x}{\sin^6 x} dx = \int \frac{\cos^4 x}{\sin^4 x} \cdot \frac{dx}{\sin^2 x} = \int \operatorname{ctg}^4 x \frac{dx}{\sin^2 x} = \left. \begin{array}{l} t = \operatorname{ctg} x \\ \sin^2 x = \frac{1}{1+t^2} \\ dx = -\frac{dt}{1+t^2} \end{array} \right| =$$

$$= -\int t^4 dt = -\frac{t^5}{5} + C = -\frac{\operatorname{ctg}^5 x}{5} + C.$$

4) Підінтегральна функція не змінюється з одночасної заміни $\sin x$ на $-\sin x$ та $\cos x$ на $-\cos x$. Застосуємо підстановку $t = \operatorname{tg} x$ (5.14).

$$\sin x \cdot \cos x = \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \cos^2 x = \operatorname{tg} x \left(\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x} \right) = \frac{t}{1+t^2};$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}; \quad \sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}; \quad dx = \frac{dt}{1+t^2}$$

Отже,

$$\int \frac{\sin x \cos x}{\sin^4 x + 4\cos^4 x} dx = \int \frac{\frac{t}{1+t^2}}{\frac{t^4}{(1+t^2)^2} + \frac{4}{(1+t^2)^2}} \cdot \frac{dt}{1+t^2} =$$

$$= \int \frac{t dt}{t^4 + 4} = \frac{1}{2} \int \frac{d(t^2)}{t^4 + 4} = \frac{1}{4} \operatorname{arctg} \frac{t^2}{2} + C = \frac{1}{4} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} + C.$$

У випадку n – парне число для інтегралів виду $\int \frac{dx}{\cos^n x}$ застосовують заміну (5.14), а для інтегралів виду $\int \frac{dx}{\sin^n x}$ застосовують заміну (5.15).

Приклад 5.9. Знайти інтеграли

$$1) \int \frac{dx}{\cos^6 x};$$

$$2) \int \frac{dx}{\sin^4 x}.$$

Розв’язання.

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\cos^6 x} &= \int \frac{dx}{(\cos^2 x)^3} = \left| \begin{array}{l} t = \operatorname{tg} x \\ \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2} \\ dx = \frac{dt}{1+t^2} \end{array} \right| = \int \frac{(1+t^2)^3 dt}{1+t^2} = \int (1+t^2)^2 dt = \\ &= \int (1+2t^2+t^4) dt = t + \frac{2t^3}{3} + \frac{t^5}{5} + C = \operatorname{tg} x + \frac{2}{3} \operatorname{tg}^3 x + \frac{\operatorname{tg}^5 x}{5} + C. \end{aligned}$$

$$2) \int \frac{dx}{\sin^4 x} = \int \frac{dx}{(\sin^2 x)^2} = \left| \begin{array}{l} t = \operatorname{ctg} x \\ \sin^2 x = \frac{1}{1+t^2} \\ dx = -\frac{dt}{1+t^2} \end{array} \right| = -\int \frac{(1+t^2)^2 dt}{1+t^2} =$$

$$= -\int (1+t^2) dt = -t - \frac{t^3}{3} + C = -\operatorname{ctg} x - \frac{\operatorname{ctg}^3 x}{3} + C.$$

IV Інтеграли виду

$$\int \sin^{2m} x \cdot \cos^{2n} x dx \quad (5.16)$$

де m, n – цілі невід'ємні числа.

Підінтегральна функція має вигляд добутку парних невід'ємних степенів синуса і косинуса. В цьому випадку застосовують формули зниження степеня:

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}, \quad (5.17)$$

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}, \quad (5.18)$$

$$\sin x \cdot \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x \quad (5.19)$$

Приклад 5.10. Знайти інтеграли

$$1) \int \sin^4 x dx; \quad 2) \int \sin^2 x \cdot \cos^4 x dx; \quad 3) \int \sin^4 x \cdot \cos^2 x dx.$$

Розв'язання.

$$\begin{aligned} 1) \int \sin^4 x dx &= \int (\sin^2 x)^2 dx = \frac{1}{4} \int (1 - \cos 2x)^2 dx = \\ &= \frac{1}{4} \int (1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x) dx = \frac{1}{4} \int \left(1 - 2\cos 2x + \frac{1}{2}(1 + \cos 4x) \right) dx = \\ &= \frac{1}{8} \int (3 - 4\cos 2x + \cos 4x) dx = \frac{1}{8} \left(3x - 2\sin 2x + \frac{1}{4}\sin 4x \right) + C. \end{aligned}$$

2) Використовуючи тригонометричні формули зниження степеня (5.17) – (5.19), будемо послідовно зводити заданий інтеграл до табличного.

$$\begin{aligned}
 \int \sin^2 x \cdot \cos^4 x \, dx &= \int (\sin^2 x \cdot \cos^2 x) \cos^2 x \, dx = \\
 &= \int \left(\frac{\sin 2x}{2} \right)^2 \cdot \frac{1 + \cos 2x}{2} \, dx = \frac{1}{8} \left(\int \sin^2 2x \, dx + \int \sin^2 2x \cdot \cos 2x \, dx \right) = \\
 &= \frac{1}{8} \left(\int \frac{1 - \cos 4x}{2} \, dx + \frac{1}{2} \int \sin^2 2x \, d(\sin 2x) \right) = \frac{1}{8} \left(\frac{1}{2} \left(x - \frac{\sin 4x}{4} \right) + \frac{1}{2} \frac{\sin^3 2x}{3} \right) + C = \\
 &= \frac{x}{16} - \frac{\sin 4x}{64} + \frac{\sin^3 2x}{48} + C.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3) \int \sin^4 x \cdot \cos^2 x \, dx &= \int \sin^2 x (\sin^2 x \cdot \cos^2 x) \, dx = \\
 &= \int \frac{1 - \cos 2x}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} \sin 2x \right)^2 \, dx = \frac{1}{8} \int (1 - \cos 2x) \sin^2 2x \, dx = \\
 &= \frac{1}{8} \int \sin^2 2x \, dx - \frac{1}{8} \int \sin^2 2x \cdot \cos 2x \, dx = \\
 &= \frac{1}{8} \int \frac{1 - \cos 4x}{2} \, dx - \frac{1}{16} \int \sin^2 2x \, d(\sin 2x) = \\
 &= \frac{1}{16} \left(\int dx - \int \cos 4x \, dx - \frac{1}{16} \cdot \frac{\sin^3 2x}{3} \right) = \\
 &= \frac{1}{16} \left(x - \frac{\sin 4x}{4} - \frac{\sin^3 2x}{3} \right) + C.
 \end{aligned}$$

V. Інтеграли виду
 $\int \sin nx \cos mx dx, \int \cos nx \cos mx dx, \int \sin nx \sin mx dx$
де m і n – дійсні числа

Для обчислення інтегралів даного виду використовуються тригонометричні формули:

$$\sin nx \cos mx = \frac{1}{2} (\sin(n-m)x + \sin(n+m)x), \quad (5.20)$$

$$\cos nx \cos mx = \frac{1}{2} (\cos(n-m)x + \cos(n+m)x), \quad (5.21)$$

$$\sin nx \sin mx = \frac{1}{2} (\cos(n-m)x - \cos(n+m)x) \quad (5.21)$$

Приклад 5.11. Знайти інтеграли

$$1) \int \sin 6x \cos 7x dx; \quad 2) \int \sin 2x \cos 5x \sin 9x dx.$$

Розв'язання.

$$1) \int \sin 6x \cos 7x dx = \frac{1}{2} \int (-\sin x + \sin 13x) dx = \frac{1}{2} \left(\cos x - \frac{1}{13} \cos 13x \right) + C.$$

За формулою (5.20)

$$2) \text{ Розглянемо } \int \sin 2x \cos 5x \sin 9x dx.$$

Підінтегральний вираз перетворюється наступним чином:

$$\sin 2x \cos 5x \sin 9x = \frac{1}{2} (-\sin 3x + \sin 7x) \sin 9x =$$

За формулою (5.20)

$$= \frac{1}{2} (-\sin 3x \sin 9x + \sin 7x \sin 9x) = \frac{1}{4} (-\cos 6x + \cos 12x + \cos 2x - \cos 16x).$$

За формулою (5.22)

Тому

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \int \sin 2x \cos 5x \sin 9x dx &= \frac{1}{4} \int (-\cos 6x + \cos 12x + \cos 2x - \cos 16x) dx = \\ &= \frac{1}{4} \left(-\frac{\sin 6x}{6} + \frac{\sin 12x}{12} + \frac{\sin 2x}{2} - \frac{\sin 16x}{16} \right) + C.\end{aligned}$$

5.3. Інтеграл виду $\int R(e^x) dx$

Даний інтеграл раціоналізується заміною $t = e^x$. Дійсно

$$\int R(e^x) dx = \left| \begin{array}{l} t = e^x \\ dt = e^x dx \end{array} \right| = \int R(t) \frac{dt}{t} = \int R_1(t) dt,$$

де $R_1(t)$ – раціональна функція від t .

Приклад 5.12. Знайти інтеграли

$$1) \int \frac{e^x - 1}{e^x + 1} dx; \qquad 2) \int \frac{dx}{e^{2x} + e^x - 2}.$$

Розв'язання.

$$\begin{aligned}1) \int \frac{e^x - 1}{e^x + 1} dx &= \left| \begin{array}{l} t = e^x \\ dt = e^x dx \end{array} \right| = \int \frac{t-1}{t+1} \cdot \frac{dt}{t} = \int \frac{t-1}{(t+1)t} dt = \int \left(\frac{1}{t+1} - \frac{1}{(t+1)t} \right) dt =; \\ &= \int \left(\frac{1}{t+1} - \frac{t+1-t}{(t+1)t} \right) dt = \int \left(\frac{1}{t+1} - \frac{1}{t} + \frac{1}{t+1} \right) dt = 2 \int \frac{dt}{t+1} - \int \frac{dt}{t} = \\ &= 2 \ln|t+1| - \ln|t| + C = 2 \ln(e^x + 1) - \ln e^x + C = 2 \ln(e^x + 1) - x + C.\end{aligned}$$

$$2) \int \frac{dx}{e^{2x} + e^x - 2} = \left| \begin{matrix} t = e^x \\ dt = e^x dx \end{matrix} \right| = \int \frac{dt}{t(t^2 + t - 2)} = \int \frac{dt}{t(t-1)(t+2)}.$$

$$\frac{1}{t(t-1)(t+2)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t-1} + \frac{C}{t+2}.$$

$$1 = A(t-1)(t+2) + Bt(t+2) + Ct(t-1).$$

$$t = 0: \quad 1 = A(-1) \cdot 2, \quad \text{звідки} \quad A = -\frac{1}{2};$$

$$t = 1: \quad 1 = B \cdot 1 \cdot 3, \quad \text{звідки} \quad B = \frac{1}{3};$$

$$t = -2: \quad 1 = C(-2) \cdot (-3), \quad \text{звідки} \quad C = \frac{1}{6}.$$

Таким чином,

$$\frac{1}{t(t-1)(t+2)} = -\frac{1}{2t} + \frac{1}{3(t-1)} + \frac{1}{6(t+2)}.$$

Отже,

$$\int \frac{dx}{e^{2x} + e^x - 2} = \int \left(-\frac{1}{2t} + \frac{1}{3(t-1)} + \frac{1}{6(t+2)} \right) dt =$$

$$= -\frac{1}{2} \ln|t| + \frac{1}{3} \ln|t-1| + \frac{1}{6} \ln|t+2| + C =$$

$$= -\frac{1}{2} \ln e^x + \frac{1}{3} \ln|e^x - 1| + \frac{1}{6} \ln(e^x + 2) + C =$$

$$= -\frac{1}{2} x + \frac{1}{3} \ln|e^x - 1| + \frac{1}{6} \ln(e^x + 2) + C.$$

6. ІНТЕГРУВАННЯ ІРРАЦІОНАЛЬНИХ ФУНКЦІЙ

Розглянемо інтеграли від деяких простіших ірраціональних функцій, які за допомогою певних підстановок можна звести до інтегралів від раціональних функцій.

6.1. Інтеграли виду

$$\int R\left(x, x^{\frac{m_1}{n_1}}, x^{\frac{m_2}{n_2}}, \dots, x^{\frac{m_k}{n_k}}\right) dx, \quad (6.1)$$

де $m_1, n_1, \dots, m_k, n_k$ – натуральні числа;

R – раціональна функція аргументів $x, x^{\frac{m_1}{n_1}}, x^{\frac{m_2}{n_2}}, \dots, x^{\frac{m_k}{n_k}}$.

Такі інтеграли раціоналізуються підстановкою

$$x = t^n, \quad (6.2)$$

де n – найменше спільне кратне знаменників дробів $\frac{m_1}{n_1}, \frac{m_2}{n_2}, \dots, \frac{m_k}{n_k}$:

$$n = \text{НСК}(n_1, n_2, \dots, n_k).$$

Дійсно,

$$\begin{aligned} \int R\left(x, x^{\frac{m_1}{n_1}}, x^{\frac{m_2}{n_2}}, \dots, x^{\frac{m_k}{n_k}}\right) dx &= \left| \begin{array}{l} x = t^n \\ dx = nt^{n-1} dt \end{array} \right| = \\ &= \int R\left(t^n, t^{\frac{n}{n_1}m_1}, t^{\frac{n}{n_2}m_2}, \dots, t^{\frac{n}{n_k}m_k}\right) n \cdot t^{n-1} dt = \int R_1(t) dt, \end{aligned}$$

де $R_1(t)$ – раціональна функція від t (оскільки $\frac{n}{n_1} \cdot m_1, \frac{n}{n_2} \cdot m_2, \dots, \frac{n}{n_k} \cdot m_k$ – цілі числа).

Приклад 6.1. Знайти інтеграли

$$1) \int \frac{dx}{\left(1+x^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}};$$

$$2) \int \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt[4]{x^3+1}};$$

$$3) \int \frac{\sqrt[6]{x}dx}{x(\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x})};$$

$$4) \int \frac{\sqrt{x}-2}{x(\sqrt[3]{x}+1)}dx.$$

Розв'язання.

1) Найменшим спільним кратним знаменників дробів $\frac{1}{3}$ і $\frac{1}{2}$ є 6:

НСК(2,3) = 6. Тому застосуємо підстановку $x = t^6$.

$$\int \frac{dx}{\left(1+x^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}} = \left| \begin{array}{l} x = t^6 \\ dx = 6t^5 dt \end{array} \right| = \int \frac{6t^5 dt}{(1+t^2)t^3} = 6 \int \frac{t^2 dt}{1+t^2} = 6 \int \frac{t^2+1-1}{1+t^2} dt =$$

$$= 6 \int \left(1 - \frac{1}{1+t^2}\right) dt = 6t - 6 \arctg t + C = 6x^{\frac{1}{6}} - 6 \arctg x^{\frac{1}{6}} + C =$$

$t = x^{\frac{1}{6}}$

$$= 6\sqrt[6]{x} - 6 \arctg \sqrt[6]{x} + C.$$

2) Представимо даний інтеграл у вигляді:

$$\int \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt[4]{x^3+1}} = \int \frac{x^{\frac{1}{2}}dx}{x^{\frac{3}{4}}+1}.$$

Найменшим спільним кратним знаменників дробів $\frac{1}{2}$ і $\frac{3}{4}$ є 4.

Тому застосуємо підстановку $x = t^4$.

$$\int \frac{x^{\frac{1}{2}} dx}{x^{\frac{3}{4}} + 1} = \left| \begin{array}{l} x = t^4 \\ dx = 4t^3 dt \end{array} \right| = \int \frac{t^2 \cdot 4t^3 dt}{t^3 + 1} = 4 \int \frac{t^5 dt}{t^3 + 1}.$$

Виділимо цілу частину

$$\frac{t^5}{t^3 + 1} = \frac{t^2(t^3 + 1) - t^2}{t^3 + 1} = t^2 - \frac{t^2}{t^3 + 1}$$

$$\begin{aligned} 4 \int \frac{t^5 dt}{t^3 + 1} &= 4 \int \left(t^2 - \frac{t^2}{t^3 + 1} \right) dt = 4 \left(\frac{t^3}{3} - \frac{1}{3} \int \frac{d(t^3 + 1)}{t^3 + 1} \right) = \\ &= 4 \left(\frac{t^3}{3} - \frac{1}{3} \ln |t^3 + 1| \right) + C = \frac{4}{3} \left(\sqrt[4]{x^3} - \ln |\sqrt[4]{x^3} + 1| \right) + C. \end{aligned}$$

$t = \sqrt[4]{x}$

$$\begin{aligned} 3) \int \frac{\sqrt[6]{x} dx}{x(\sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x})} &= \int \frac{x^{\frac{1}{6}} dx}{x(x^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{1}{4}})} = \left| \begin{array}{l} \text{НСК}(3, 4, 6) = 12 \\ x = t^{12} \\ dx = 12t^{11} dt \end{array} \right| = \\ &= \int \frac{t^2}{t^{12}(t^4 + t^3)} 12t^{11} dt = 12 \int \frac{dt}{t^2(t+1)}. \end{aligned}$$

Запишемо розклад підінтегральної функції на елементарні дробі:

$$\frac{1}{t^2(t+1)} = \frac{A_1}{t} + \frac{A_2}{t^2} + \frac{B}{t+1}.$$

$$1 = A_1 t(t+1) + A_2(t+1) + Bt^2.$$

$$\left. \begin{array}{l} t^2 \\ t \\ t^0 \end{array} \right| \begin{array}{l} 0 = A_1 + B \\ 0 = A_1 + A_2 \\ 1 = A_2 \end{array} ; \left\{ \begin{array}{l} A_1 = -1 \\ A_2 = 1 \\ B = 1 \end{array} \right.$$

Таким чином,

$$12 \int \frac{dt}{t^2(t+1)} = 12 \int \left[-\frac{1}{t} + \frac{1}{t^2} + \frac{1}{t+1} \right] dt = -12 \left(\ln|t| + \frac{1}{t} - \ln|t+1| \right) + C.$$

Повернемося до змінної x ($t = \sqrt[12]{x}$):

$$\int \frac{\sqrt[6]{x} dx}{x(\sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x})} = -12 \left(\ln \sqrt[12]{x} + \frac{1}{\sqrt[12]{x}} - \ln|\sqrt[12]{x} + 1| \right) + C =$$

$$= \ln \frac{(\sqrt[12]{x} + 1)^{12}}{x} - \frac{12}{\sqrt[12]{x}} + C.$$

$$4) \int \frac{\sqrt{x} - 2}{x(\sqrt[3]{x} + 1)} dx = \left| \begin{array}{l} \text{НСК}(2,3) = 6 \\ x = t^6 \\ dx = 6t^5 dt \end{array} \right| = \int \frac{t^3 - 2}{t^6(t^2 + 1)} 6t^5 dt = 6 \int \frac{t^3 - 2}{t(t^2 + 1)} dt.$$

Одержано інтеграл від неправильного раціонального дробу. Виділяючи цілу частину, маємо

$$I = 6 \int \frac{t^3 - 2}{t(t^2 + 1)} dt = 6 \int \left(1 - \frac{t+2}{t^3 + t} \right) dt = 6 \left(t - \int \frac{t+2}{t(t^2 + 1)} dt \right).$$

Для знаходження останнього інтегралу запишемо розклад підінтегральної функції на елементарні дробі:

$$\frac{t+2}{t(t^2+1)} = \frac{A}{t} + \frac{Bt+C}{t^2+1},$$

звідки

$$t+2 = A(t^2+1) + (Bt+C)t.$$

$$\left. \begin{array}{l} t^2 \\ t^1 \\ t^0 \end{array} \right| \begin{array}{l} 0 = A+B \\ 1 = C \\ 2 = A \end{array} ; \quad \left\{ \begin{array}{l} A=2 \\ B=-2 \\ C=1 \end{array} \right.$$

Маємо,

$$I = 6 \left(t - \int \left(\frac{2}{t} + \frac{1-2t}{t^2+1} \right) dt \right) = 6 \left(t - 2 \ln|t| + \ln(t^2+1) - \arctg t \right) + C.$$

Повертаючись до змінної x ($t = \sqrt[6]{x}$), одержимо кінцевий результат:

$$\int \frac{\sqrt{x}-2}{x(\sqrt[3]{x}+1)} dx = 6 \left(\sqrt[6]{x} - 2 \ln \sqrt[6]{x} + \ln(\sqrt[3]{x}+1) - \arctg \sqrt[6]{x} \right) + C.$$

6.2. Інтеграли виду

$$\int R \left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d} \right)^{\frac{m_1}{n_1}}, \left(\frac{ax+b}{cx+d} \right)^{\frac{m_2}{n_2}}, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d} \right)^{\frac{m_k}{n_k}} \right) dx \quad (6.3)$$

де $m_1, n_1, \dots, m_k, n_k$ – натуральні числа;

R – раціональна функція своїх аргументів.

Такі інтеграли раціоналізуються підстановкою

$$\frac{ax+b}{cx+d} = t^n, \quad (6.4)$$

де n – найменше спільне кратне знаменників дробів $\frac{m_1}{n_1}, \frac{m_2}{n_2}, \dots, \frac{m_k}{n_k}$:

$$n = \text{НСК}(n_1, n_2, \dots, n_k).$$

Приклад 6.2. Знайти інтеграли

$$1) \int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \cdot \frac{dx}{1-x}; \quad 2) \int \frac{1}{(x-1)^2} \cdot \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} dx; \quad 3) \int \sqrt{\frac{x-2}{x+2}} \cdot \frac{dx}{x}.$$

Розв'язання.

$$1) \text{ Введемо підстановку } \frac{1+x}{1-x} = t^2 \quad \left(t = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \right).$$

Виразимо x через t :

$$1+x = t^2 - xt^2;$$

$$x(1+t^2) = t^2 - 1;$$

$$x = \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1}.$$

$$dx = \frac{2t(t^2 + 1) - 2t(t^2 - 1)}{(t^2 + 1)^2} dt = \frac{4t}{(t^2 + 1)^2} dt.$$

$$1-x = 1 - \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1} = \frac{t^2 + 1 - t^2 + 1}{t^2 + 1} = \frac{2}{t^2 + 1}.$$

Тому

$$\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \cdot \frac{dx}{1-x} = 2 \int \frac{t^2(t^2 + 1)}{(t^2 + 1)^2} dt = 2 \int \frac{t^2}{t^2 + 1} dt = 2 \int \frac{t^2 + 1 - 1}{t^2 + 1} dt =$$

$$= 2 \int \left(1 - \frac{1}{t^2 + 1} \right) dt = 2t - 2 \operatorname{arctg} t + C = 2 \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} - 2 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + C.$$

2) Застосуємо підстановку

$$\frac{x+1}{x-1} = t^3,$$

звідки $x+1 = t^3(x-1)$; $x = \frac{t^3+1}{t^3-1}$.

$$dx = \frac{3t^2(t^3-1) - (t^3+1)3t^2}{(t^3-1)^2} dt = \frac{-6t^2 dt}{(t^3-1)^2}.$$

$$x-1 = \frac{t^3+1}{t^3-1} - 1 = \frac{2}{t^3-1}.$$

Отже,

$$\int \frac{1}{(x-1)^2} \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} dx = \int \frac{\cancel{(t^3-1)^2}}{4} \cdot t \frac{(-6t^2) dt}{\cancel{(t^3-1)^2}} = -\frac{3}{2} \int t^3 dt = -\frac{3}{2} \cdot \frac{t^4}{4} + C =$$

$$= -\frac{3}{8} t^4 + C = -\frac{3}{8} \sqrt[3]{\left(\frac{x+1}{x-1} \right)^4} + C.$$

$$t = \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}$$

3) Застосуємо підстановку

$$\frac{x-2}{x+2} = t^2,$$

звідки $x = \frac{2(1+t^2)}{1-t^2}$, $dx = \frac{8t}{(1-t^2)^2} dt$. Тому

$$\int \sqrt{\frac{x-2}{x+2}} \cdot \frac{dx}{x} = \int \frac{8t^2}{(1-t^2)^2} \cdot \frac{1-t^2}{2(1+t^2)} dt = 4 \int \frac{t^2 dt}{(1-t^2)(1+t^2)}.$$

Представимо підінтегральну функцію у вигляді

$$\frac{t^2}{(1-t^2)(1+t^2)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(1+t^2) - (1-t^2)}{(1-t^2)(1+t^2)}.$$

Після почленного ділення чисельника дробу на знаменник одержуємо

$$\begin{aligned} 4 \int \frac{t^2 dt}{(1-t^2)(1+t^2)} &= 4 \cdot \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{1-t^2} - \frac{1}{1+t^2} \right) dt = \\ &= \ln \left| \frac{1+t}{1-t} \right| - 2 \operatorname{arctg} t + C, \text{ де } t = \sqrt{\frac{x-2}{x+2}}. \end{aligned}$$

Зауважимо, що інтеграли виду

$$\int R \left(x, (ax+b)^{\frac{m_1}{n_1}}, (ax+b)^{\frac{m_2}{n_2}}, \dots, (ax+b)^{\frac{m_k}{n_k}} \right) dx \quad (6.5)$$

є окремим випадком інтегралів (6.3) коли ($c=0$, $d=1$).

Інтеграли (6.5) раціоналізуються підстановкою

$$ax+b=t^n \quad (6.6)$$

Приклад 6.3. Знайти інтеграл

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2x-1} - \sqrt[4]{2x-1}}.$$

Розв'язання.

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sqrt{2x-1}-\sqrt[4]{2x-1}} &= \left| \frac{2x-1=t^4}{dx=2t^3 dt} \right| = \int \frac{2t^3 dt}{t^2-t} = 2 \int \frac{t^2 dt}{t-1} = 2 \int \frac{t^2-1+1}{t^2-t} = \\&= 2 \int \left(t+1+\frac{1}{t-1} \right) dt = 2 \cdot \frac{(t+1)^2}{2} + 2 \ln|t-1| + C = \\&= \left(1+\sqrt[4]{2x-1} \right)^2 + \ln \left(\left(\sqrt[4]{2x-1}-1 \right)^2 \right) + C.\end{aligned}$$

6.3. Інтеграли виду

$$\int R\left(x, \sqrt{a^2-x^2}\right) dx \quad (6.7)$$

$$\int R\left(x, \sqrt{x^2+a^2}\right) dx \quad (6.8)$$

$$\int R\left(x, \sqrt{x^2-a^2}\right) dx, \quad (6.9)$$

a – дійсне число.

Кожен з інтегралів (6.7) – (6.9) можна звести до інтегралу від раціональної функції за допомогою тригонометричних підстановок. Укажемо ці підстановки

$$\text{I. } \int R\left(x, \sqrt{a^2-x^2}\right) dx: \quad x = a \sin t \quad \text{або} \quad x = a \cos t \quad (6.10)$$

$$\text{II. } \int R\left(x, \sqrt{x^2+a^2}\right) dx: \quad x = a \operatorname{tg} t \quad \text{або} \quad x = a \operatorname{ctg} t \quad (6.11)$$

$$\text{III. } \int R\left(x, \sqrt{x^2-a^2}\right) dx: \quad x = \frac{a}{\cos t} \quad \text{або} \quad x = \frac{a}{\sin t}. \quad (6.12)$$

Приклад 6.4. Знайти інтеграли

$$1) \int \frac{dx}{\sqrt{(5-x^2)^3}}; \quad 2) \int \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2} dx; \quad 3) \int \frac{\sqrt{x^2-4}}{x^3} dx.$$

Розв'язання.

$$1) \int \frac{dx}{\sqrt{(5-x^2)^3}} = \left| \begin{array}{l} x = \sqrt{5} \sin t \\ dx = \sqrt{5} \cos t dt \\ 5 - x^2 = 5 - 5 \sin^2 t = 5 \cos^2 t \\ t = \arcsin \frac{x}{\sqrt{5}} \end{array} \right| = \int \frac{\sqrt{5} \cos t dt}{5 \sqrt{5} \cos^3 t} =$$

$$= \frac{1}{5} \int \frac{dt}{\cos^2 t} = \frac{1}{5} \operatorname{tg} t + C = \frac{1}{5} \operatorname{tg} \left(\arcsin \frac{x}{\sqrt{5}} \right) + C =$$

$$= \frac{1}{5} \frac{\sin \left(\arcsin \frac{x}{\sqrt{5}} \right)}{\cos \left(\arcsin \frac{x}{\sqrt{5}} \right)} + C = \frac{1}{5} \frac{\frac{x}{\sqrt{5}}}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{5}}} + C = \frac{1}{5} \frac{x}{\sqrt{5-x^2}} + C.$$

$$2) \int \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2} dx = \left| \begin{array}{l} x = \operatorname{tg} t \\ dx = \frac{dt}{\cos^2 t} \\ x^2 + 1 = \operatorname{tg}^2 t + 1 = \frac{1}{\cos^2 t} \\ t = \operatorname{arctg} x \end{array} \right| = \int \frac{1}{\cos t \cdot \operatorname{tg}^2 t} \cdot \frac{dt}{\cos^2 t} =$$

$$= \int \frac{dt}{\cos^3 t \cdot \operatorname{tg}^2 t} = \int \frac{dt}{\cos t \cdot \sin^2 t} = \int \frac{\cos t dt}{\cos^2 t \cdot \sin^2 t} = \int \frac{\cos t dt}{(1 - \sin^2 t) \sin^2 t} =$$

$$\begin{aligned}
&= \left| \begin{array}{l} \text{Інтеграл є інтегралом} \\ \text{виду } \int R(\sin t) \cos t \, dt, \\ \text{тому зробимо заміну} \\ u = \sin t \end{array} \right| = \left| \begin{array}{l} u = \sin t \\ du = \cos t \, dt \\ t = \arcsin u \end{array} \right| = \int \frac{du}{(1-u^2)u^2} = \\
&= \int \frac{1-u^2+u^2}{(1-u^2)u^2} du = \int \frac{1-u^2}{(1-u^2)u^2} du + \int \frac{u^2}{(1-u^2)u^2} du = \int \frac{du}{u^2} + \int \frac{du}{1-u^2} = \\
&= -\frac{1}{u} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{u+1}{u-1} \right| + C = -\frac{1}{\sin t} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sin t + 1}{\sin t - 1} \right| + C = \\
&= -\frac{1}{\sin(\operatorname{arctg} x)} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sin(\operatorname{arctg} x) + 1}{\sin(\operatorname{arctg} x) - 1} \right| + C.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
3) \int \frac{\sqrt{x^2-4}}{x^3} dx &= \left| \begin{array}{l} x = \frac{2}{\cos t} \\ dx = \frac{2 \sin t}{\cos^2 t} dt \\ x^2 - 4 = \frac{4}{\cos^2 t} - 4 = \frac{4 - 4 \cos^2 t}{\cos^2 t} = 4 \frac{\sin^2 t}{\cos^2 t} \\ t = \arccos \frac{2}{x} \end{array} \right| = \\
&= \int \frac{2 \frac{\sin t}{\cos t} \cdot 2 \frac{\sin t}{\cos^2 t}}{\frac{8}{\cos^3 t}} dt = \frac{1}{2} \int \sin^2 t \, dt = \frac{1}{2} \int \frac{1 - \cos 2t}{2} dt = \frac{1}{4} \left(t - \frac{\sin 2t}{2} \right) + C = \\
&= \frac{1}{4} \left(\arccos \frac{2}{x} - \sin \left(\arccos \frac{2}{x} \right) \cos \left(\arccos \frac{2}{x} \right) \right) + C = \\
&= \frac{1}{4} \left(\arccos \frac{2}{x} - \sqrt{1 - \frac{4}{x^2}} \cdot \frac{2}{x} \right) + C = \frac{1}{4} \left(\arccos \frac{2}{x} - \frac{2\sqrt{x^2-4}}{x^2} \right) + C.
\end{aligned}$$

6.4. Інтеграли виду

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\right) dx \quad (6.13)$$

$$(a \neq 0, \quad c - \frac{b^2}{4a} \neq 0).$$

Даний інтеграл за допомогою підстановки

$$x = t - \frac{b}{2a} \quad (6.14)$$

зводиться до одного з інтегралів виду (6.7) – (6.9).

Дійсно,

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(c - \frac{b^2}{4a}\right)} = \left|x = t - \frac{b}{2a}\right| = \sqrt{at^2 + \left(c - \frac{b^2}{4a}\right)}.$$

Наведемо всі можливі випадки, коли підкорінний вираз існує.

1. Нехай $a > 0, \quad c - \frac{b^2}{4a} > 0$.

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{t^2 + \frac{1}{a}\left(c - \frac{b^2}{4a}\right)} = \left| \begin{array}{l} \frac{1}{a}\left(c - \frac{b^2}{4a}\right) > 0 \\ \frac{1}{a}\left(c - \frac{b^2}{4a}\right) = k^2 \end{array} \right| = \sqrt{a} \cdot \sqrt{t^2 + k^2}.$$

2. Нехай $a > 0, \quad c - \frac{b^2}{4a} < 0$.

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{t^2 + \frac{1}{a}\left(c - \frac{b^2}{4a}\right)} = \left| \begin{array}{l} \frac{1}{a}\left(c - \frac{b^2}{4a}\right) < 0 \\ \frac{1}{a}\left(c - \frac{b^2}{4a}\right) = -k^2 \end{array} \right| = \sqrt{a} \cdot \sqrt{t^2 - k^2}.$$

3. Нехай $a < 0$, $c - \frac{b^2}{4a} > 0$.

$$\begin{aligned}\sqrt{ax^2 + bx + c} &= \sqrt{-a \left(-t^2 - \frac{1}{a} \left(c - \frac{b^2}{4a} \right) \right)} = \sqrt{|a|} \cdot \sqrt{-t^2 - \frac{1}{a} \left(c - \frac{b^2}{4a} \right)} = \\ &= \left| \begin{array}{l} -\frac{1}{a} \left(c - \frac{b^2}{4a} \right) > 0 \\ -\frac{1}{a} \left(c - \frac{b^2}{4a} \right) = k^2 \end{array} \right| = \sqrt{|a|} \cdot \sqrt{k^2 - t^2} .\end{aligned}$$

Відповідні приклади рекомендуємо розв'язати самостійно при виконанні завдань п. 7.6 (інтегрування ірраціональних функцій).

7. ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

7.1. Варіанти завдання I. Метод безпосереднього інтегрування

Варіант 1.

1. $\int (2 + x\sqrt{x}) dx.$

2. $\int \left(\frac{1}{u} + \sqrt{5u} \right)^3 du.$

3. $\int \frac{4^x - 2^x}{3^x} dx.$

4. $\int \operatorname{tg}^2 x dx.$

5. $\int \frac{dx}{x^2(1+x^2)}.$

6. $\int \frac{dx}{4x^2 + 7}.$

7. $\int \sin 3x dx.$

8. $\int \frac{dx}{\sqrt{5x^2 - 13}}.$

Варіант 2.

1. $\int \left(5x - \frac{1}{\sqrt{3x}} \right) dx.$

2. $\int (t - \sqrt{2t})^3 dt.$

3. $\int \frac{2^z - 3^z}{3^z} dz.$

4. $\int \sin^2 \frac{x}{2} dx.$

5. $\int \frac{x^2 dx}{1+x^2}.$

6. $\int \frac{2dx}{9x^2 + 5}.$

7. $\int \cos 5x dx.$

8. $\int \frac{dx}{\sqrt{8-13x^2}}.$

Варіант 3.

1. $\int \left(\frac{1}{2x} + x\sqrt[3]{x} \right) dx.$

2. $\int \frac{1-u}{1+\sqrt{u}} du.$

3. $\int \frac{2^z + 1 - 3^{2z}}{3^z} dz.$

4. $\int \frac{1+2x^2}{x^2(1+x^2)} dx.$

5. $\int \frac{dx}{5x^2 + 3}.$

6. $\int e^{2x} dx.$

7. $\int \frac{dx}{\sqrt{15x^2 - 19}}.$

8. $\int \frac{dx}{\sin^2 11x}.$

Варіант 4.

1. $\int \frac{1+x}{\sqrt{3x}} dx.$

2. $\int \left(\frac{1-t}{1+\sqrt{t}} \right)^2 dt.$

3. $\int \frac{3 \cdot 5^x - 5 \cdot 3^x + 1}{5^x \cdot 3^x} dx.$

4. $\int \frac{1+3x^2}{x^2(1+x^2)} dx.$

5. $\int \frac{2dx}{7x^2 + 5}.$

6. $\int \frac{dx}{\cos^2 4x}.$

7. $\int e^{-9x} dx.$

8. $\int \frac{dx}{\sqrt{8-15x^2}}.$

Варіант 5.

1. $\int \frac{x-1}{\sqrt{2x}} dx.$

2. $\int \left(\frac{2}{\sqrt{u}} - 3u \right)^2 du.$

3. $\int e^{2x} dx.$

4. $\int \frac{2+x^2}{x^2(1+x^2)} dx.$

5. $\int \frac{dx}{3x^2+4}.$

6. $\int \frac{dx}{\sin^2 3x}.$

7. $\int \cos 4x dx.$

8. $\int \frac{dx}{\sqrt{15x^2+4}}.$

Варіант 6.

1. $\int \left(\sqrt{3x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx.$

2. $\int \left(\frac{1-u}{\sqrt{u}} \right)^3 du.$

3. $\int \frac{4^z - 5^z + 1}{5^z} dz.$

4. $\int \sin^2 \frac{\pi-x}{2} dx.$

5. $\int \frac{2-x^2}{x^2(1+x^2)} dx.$

6. $\int \frac{dx}{4x^2+7}.$

7. $\int e^{-8x} dx.$

8. $\int \frac{dx}{\sqrt{8-11x}}.$

Варіант 7.

$$1. \int \left(2 + \frac{5}{\sqrt{3x}} \right) dx.$$

$$2. \int \left(\frac{1-u}{1-\sqrt[3]{u}} + u \right) du.$$

$$3. \int \frac{5^x - 3^x}{2^x} dx.$$

$$4. \int \operatorname{tg}^2(\pi - x) dx.$$

$$5. \int \frac{1-3x^2}{x^2(1+x^2)} dx.$$

$$6. \int \frac{dx}{8x^2 + 7}.$$

$$7. \int \sin 8x dx.$$

$$8. \int \frac{dx}{\sqrt{9x^2 + 14}}.$$

Варіант 8.

$$1. \int \left(\frac{2}{\sqrt{x}} - 3x \right) dx.$$

$$2. \int \left(\frac{1-x}{1+\sqrt{x}} \right)^3 dx.$$

$$3. \int (2^x - 3^x) 4^x dx.$$

$$4. \int \operatorname{ctg}^2(\pi - x) dx.$$

$$5. \int \frac{x^4 dx}{1+x^2}.$$

$$6. \int \frac{dx}{10x^2 + 3}.$$

$$7. \int \cos 5x dx.$$

$$8. \int \frac{dx}{\sqrt{9-14x^2}}.$$

Варіант 9.

1. $\int \left(2x^2 + \frac{1}{\sqrt{2x}} \right) dx.$

2. $\int \left(\frac{1-x}{\sqrt{x}} \right)^2 dx.$

3. $\int (2^x e^x + 1) dx.$

4. $\int \frac{1 + \cos^2 x}{\sin^2 x} dx.$

5. $\int \frac{\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^4}} dx.$

6. $\int \frac{dx}{11x^2 + 5}.$

7. $\int \cos 5x dx.$

8. $\int \frac{dx}{\sqrt{7x^2 + 8}}.$

Варіант 10.

1. $\int (2 + 3x^2 \sqrt{x}) dx.$

2. $\int \frac{1+u}{1+\sqrt[3]{u}} du.$

3. $\int \frac{2^u + 3^u - 1}{2^u \cdot 3^u} du.$

4. $\int \frac{\sqrt{1+x^2} - \sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^4-1}} dx.$

5. $\int \frac{dx}{12x^2 + 7}.$

6. $\int 2^{4x} dx.$

7. $\int \frac{dx}{\sin^2 5x}$

8. $\int \frac{dx}{\sqrt{6-5x^2}}.$

Варіант 11.

1. $\int (x^3 \sqrt{x} - 5) dx.$

2. $\int \left(2u + \frac{3}{u} \right)^3 du.$

3. $\int \frac{5^x - 3^x + 1}{2^x} dx.$

4. $\int \frac{\sqrt{x^2 + 4} - \sqrt{x^2 - 4}}{\sqrt{x^4 - 16}} dx.$

5. $\int \frac{dx}{8x^2 + 3}.$

6. $\int \frac{dx}{\cos^2 3x}.$

7. $\int 7^{-2x} dx.$

8. $\int \frac{dx}{\sqrt{5x^2 + 6}}.$

Варіант 12.

1. $\int \frac{1 + \sqrt{5x}}{x^2} dx.$

2. $\int (\sqrt{x-1}) \cdot x dx.$

3. $\int e^{3x} dx.$

4. $\int \frac{\cos 2x dx}{\sin^2 x \cos^2 x}.$

5. $\int \frac{x^4 - 1}{1 + x^2} dx.$

6. $\int \frac{dx}{16x^2 + 5}.$

7. $\int \frac{dx}{\sin^2 4x}.$

8. $\int \frac{dx}{\sqrt{5-19x^2}}.$

Варіант 13.

1. $\int \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt{2x}}{x} dx.$

2. $\int (2 - \sqrt{3z})^3 dz.$

3. $\int \frac{2^u - 3^u + 1}{5^u} du.$

4. $\int \frac{(1+x)^2}{1+x^2} dx.$

5. $\int \frac{dx}{9x^2 + 2}$

6. $\int (2 + \operatorname{tg}^2 x) dx.$

7. $\int 3^{-2x} dx.$

8. $\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2 - 5}}.$

Варіант 14.

1. $\int \frac{\sqrt[4]{x} - \sqrt[3]{2x}}{\sqrt{x}} dx.$

2. $\int (1 - \sqrt{u})(u + \sqrt{u} + 1) du.$

3. $\int \frac{2^x - 3^x + 3}{6^x} dx.$

4. $\int \frac{(1-x)^2}{x^2(1+x^2)} dx.$

5. $\int \frac{dx}{14x^2 + 5}.$

6. $\int \frac{dx}{\sqrt{4 - 3x^2}}.$

7. $\int e^{-5x} dx$

8. $\int \frac{dx}{\sin^2 8x}.$

Варіант 15.

1. $\int \left(x^2 + \frac{1}{3x^2} \right) dx.$

2. $\int \left(\frac{1 + \sqrt{z}}{z^2} \right)^2 dz.$

3. $\int \frac{2^x - 3^x}{e^x} dx.$

4. $\int \frac{2 \cos^2 x + 3 \sin^2 x}{\cos^2 x} dx.$

5. $\int \frac{(1+x)^2}{x(1+x^2)} dx.$

6. $\int \frac{dx}{7x^2 + 9}.$

7. $\int \cos 6x dx.$

8. $\int \frac{dx}{\sqrt{8-9x^2}}.$

Варіант 16.

1. $\int \left(\frac{2}{x} + \frac{3}{\sqrt{x}} \right) dx.$

2. $\int \left(\sqrt{t} + \frac{1}{\sqrt{t}} \right)^3 dt.$

3. $\int \frac{2^x - 3^x}{6^x} dx.$

4. $\int \frac{3(1 + \sqrt{x} + x^2)}{\sqrt{x}(1+x^2)} dx.$

5. $\int \frac{dx}{15x^2 + 4}.$

6. $\int \sin 4x dx.$

7. $\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2 + 7}}.$

8. $\int \frac{dx}{\cos^2 10x}.$

Варіант 17.

1. $\int \frac{2+5x}{x\sqrt{x}} dx.$

2. $\int \frac{1-z}{2-2\sqrt{z}} dz.$

3. $\int \frac{2^z \cdot 3^z - 2}{2^z} dz.$

4. $\int (4 + \operatorname{tg}^2 x) dx.$

5. $\int \frac{1+x^3+x^2}{x^3(1+x^2)} dx.$

6. $\int \frac{dx}{6x^2+11}.$

7. $\int e^{-3x} dx.$

8. $\int \frac{dx}{\sqrt{5-3x^2}}.$

Варіант 18.

1. $\int \left((2x)^2 - \frac{1}{\sqrt{3x}} \right) dx.$

2. $\int \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2t}} \right)^3 dt.$

3. $\int \frac{6^z - 1}{3^z} dz.$

4. $\int \frac{1+3x+x^2 dx}{x(1+x^2)}.$

5. $\int \frac{2dx}{8x^2+9}.$

6. $\int \frac{dx}{\cos^2 3x}.$

7. $\int e^{-11x} dx.$

8. $\int \frac{dx}{\sqrt{8x^2-1}}.$

Варіант 19.

1. $\int \left(2\sqrt{x} + \frac{1}{2z} \right) dx.$

2. $\int \left(\sqrt{4x} - \frac{1}{x} \right)^3 dx.$

3. $\int \frac{3 \cdot 5^x - 2 \cdot 3^x}{6^x} dx.$

4. $\int \frac{2 - 3x + 2x^2}{(1 + x^2)x} dx.$

5. $\int \frac{dx}{\sin^2 7x}.$

6. $\int e^{-5x} dx.$

7. $\int \frac{dx}{5x^2 + 7}.$

8. $\int \frac{dx}{\sqrt{11 - 3x^2}}.$

Варіант 20.

1. $\int \frac{x-1}{x^3 \sqrt{x}} dx.$

2. $\int \left(\frac{1-u}{1+\sqrt{u}} \right)^3 du.$

3. $\int e^{x/2} dx.$

4. $\int \frac{dx}{\operatorname{tg}^2(\pi - x)}.$

5. $\int \frac{3x^2 + 1}{1 + x^2} dx.$

6. $\int \frac{2dx}{13x^2 + 2}.$

7. $\int \sin 7x dx$

8. $\int \frac{dx}{\sqrt{5x^2 + 8}}.$

Варіант 21.

1. $\int (\sqrt{2x} + \sqrt[3]{x}) dx.$

2. $\int \left(z + \frac{1}{2\sqrt{z}} \right)^2 dz.$

3. $\int \frac{2^z - 3^z - 3}{2^z} dz.$

4. $\int \sin^2 \frac{3\pi - x}{2} dx.$

5. $\int \frac{1 + x^2 + x^4}{x^2(1 + x^2)} dx.$

6. $\int \frac{dx}{7x^2 + 3}.$

7. $\int \frac{dx}{\sqrt{16 - 5x^2}}.$

8. $\int e^{-3x} dx.$

Варіант 22.

1. $\int \left(2x + \frac{5}{\sqrt{3x}} \right) dx.$

2. $\int \left(\frac{1+u}{2\sqrt{u}} \right)^2 du.$

3. $\int \frac{2^u - 5^u}{10^u} du.$

4. $\int \operatorname{tg}^2 \left(\frac{\pi}{2} - x \right) dx.$

5. $\int \frac{4 + 2x^2 + 4x^4}{(1 + x^2)x^2} dx.$

6. $\int \frac{dx}{8x^2 + 11}.$

7. $\int \sin 10x dx.$

8. $\int \frac{dx}{\sqrt{7 - 2x^2}}.$

Варіант 23.

1. $\int \frac{2+3\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}} dx.$

2. $\int \left(\sqrt{u} - \frac{3}{u} \right)^3 du.$

3. $\int 5^x \left(3^{-x} + e^{\frac{x}{2}} \right) dx.$

4. $\int \operatorname{ctg}^2(2\pi - x) dx.$

5. $\int \frac{1+4x^2}{x^2(1+x^2)} dx.$

6. $\int \frac{dx}{5x^2+3}.$

7. $\int \cos 9x dx.$

8. $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2-5}}.$

Варіант 24.

1. $\int \left(\frac{1}{\sqrt{2x}} - \frac{1}{\sqrt[4]{x^3}} \right) dx.$

2. $\int \frac{5^x - 2^{-x}}{3^{2x}} 4 dx.$

3. $\int \sin \left(\frac{\pi}{4} + x \right) dx.$

4. $\int \frac{3\sqrt{3+x^2} - 2\sqrt{x^2-3}}{5\sqrt{x^4-9}} dx.$

5. $\int \frac{dx}{19x^2+7}.$

6. $\int 3^{5x} dx.$

7. $\int \frac{dx}{\sin^2 7x}.$

8. $\int \frac{dx}{\sqrt{9-5x^2}}.$

Варіант 25.

1. $\int \frac{10x^2 + 3x}{x^4} dx.$

2. $\int (3^x + 2^{-x}) e^x dx.$

3. $\int \frac{3 + \cos^2 x}{\sin^2 x} dx.$

4. $\int \frac{1 + 3x^2 + 2x^4}{x^2(1 + x^2)} dx.$

5. $\int \frac{dx}{4x^2 + 11}.$

6. $\int \frac{dx}{\cos^2 5x}.$

7. $\int \sin 13x dx.$

8. $\int \frac{dx}{\sqrt{15 - 6x^2}}.$

Варіант 26.

1. $\int \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} \right) dx.$

2. $\int \left(\sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2} \right)^2 dx.$

3. $\int 2^{-x} \left(1 + \frac{2^x}{3^x} \right) dx.$

4. $\int (3 + \operatorname{ctg}^2 x) dx.$

5. $\int \frac{2 - 3x^2 dx}{x^2(1 + x^2)}.$

6. $\int \frac{dx}{3x^2 + 13}.$

7. $\int e^{8x} dx.$

8. $\int \frac{dx}{\sqrt{8x^2 - 4}}.$

Варіант 27.

1. $\int \left(2x + \frac{1}{3x} + \frac{1}{2x^2} \right) dx.$

2. $\int \left(\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} \right)^2 dx.$

3. $\int (1 - \operatorname{tg}^2 x) dx.$

4. $\int \frac{5 + x^2 + x^4}{x^2(1 + x^2)} dx.$

5. $\int \frac{dx}{2x^2 + 3}.$

6. $\int \frac{dx}{\sin^2 7x}.$

7. $\int e^{-3} dx$

8. $\int \frac{dx}{\sqrt{5 - 4x^2}}.$

Варіант 28.

1. $\int \left(x^2 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right) dx.$

2. $\int (1 - \sqrt{2u})^3 du.$

3. $\int 4^{-x} (3^x + 2^{3x}) dx.$

4. $\int \frac{2\sin^2 x + 3\cos^2 x}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} dx.$

5. $\int \frac{2x^4 + 5x^2 + 5}{1 + x^2} dx.$

6. $\int \frac{2dx}{6x^2 + 1}.$

7. $\int 3^{15x} dx.$

8. $\int \frac{dx}{\sqrt{10 + 3x^2}}.$

Варіант 29.

1. $\int \left(\sqrt{5x} - \frac{1}{\sqrt{3x}} \right) dx.$

2. $\int \left(\frac{2}{z} + z\sqrt{z} \right)^2 dz.$

3. $\int \frac{3^x - 2^x + 2}{6^x} dx.$

4. $\int (2 + \operatorname{ctg}^2 x) dx.$

5. $\int \frac{1+x^4}{x^2+x^4} dx.$

6. $\int \frac{dx}{9x^2+8}.$

7. $\int \sin 8x dx.$

8. $\int \frac{dx}{\sqrt{5-13x^2}}.$

Варіант 30.

1. $\int \left(x^2 + x + 2 + \frac{1}{x} \right) dx.$

2. $\int \frac{1-\sqrt{z}}{1+\sqrt[4]{z}} dz.$

3. $\int \frac{3^x - 2^x}{e^{2x}} dx.$

4. $\int (2 - \operatorname{ctg}^2 x) dx.$

5. $\int \frac{2x^4 + 5x^2 + 7}{1+x^2} dx.$

6. $\int \frac{dx}{19x^2+3}.$

7. $\int \cos 11x dx.$

8. $\int \frac{dx}{\sqrt{9+2x^2}}.$

7.2. Варіанти завдання II. Метод заміни змінної

Варіант 1.

1. $\int \sqrt[3]{5+2x} dx.$

2. $\int \cos x (4-7 \sin x)^5 dx.$

3. $\int \frac{5^x}{\sqrt{3 \cdot 5^{2x} - 4}} dx.$

4. $\int \frac{\cos \sqrt[4]{x} dx}{\sqrt[4]{x^3}}.$

5. $\int \frac{dx}{x^2 + 4x + 5}.$

Варіант 3.

1. $\int 4e^{7x} dx.$

2. $\int 2 \sin 6x (5-4 \cos 6x)^3 dx.$

3. $\int \frac{x^3}{\sqrt{7x^8 + 3}} dx.$

4. $\int \sin\left(\frac{3}{x^2}\right) \cdot \frac{dx}{x^3}.$

5. $\int \frac{\cos x dx}{\sqrt{1-2 \sin^2 x}}.$

Варіант 2.

1. $\int 7 \sin 4x dx.$

2. $\int 3^x (5-4 \cdot 3^x)^{5/2} dx.$

3. $\int \frac{\sin 5x dx}{\sqrt{3-5 \cos^2 5x}}.$

4. $\int \frac{\arcsin^3 x dx}{\sqrt{1-x^2}}.$

5. $\int \frac{\cos x dx}{\sin^3 x}.$

Варіант 4.

1. $\int 3 \cos 9x dx.$

2. $\int \frac{x^5 dx}{\sqrt[5]{4-3x^6}}.$

3. $\int \frac{7 \cos 8x dx}{\sqrt{3 \sin^2 8x - 4}}.$

4. $\int 7^{\operatorname{ctg} x} \frac{dx}{\sin^2 x}.$

$$5. \int \frac{dx}{x \ln^2 x}.$$

Варіант 5.

$$1. \int \frac{3dx}{(5x-3)\sqrt{5x-3}}.$$

$$2. \int \cos 15x \cdot \sqrt[4]{1-\sin 15x} dx.$$

$$3. \int \frac{4^x dx}{\sqrt{2 \cdot 16^x + 13}}.$$

$$4. \int x^4 \cos(x^5) dx.$$

$$5. \int \frac{dx}{\sqrt{1-4x^2} \arccos 2x}.$$

Варіант 7.

$$1. \int 4e^{-5x} dx.$$

$$2. \int 12 \sin 9x \sqrt[5]{3+2 \cos 9x} dx.$$

$$3. \int \frac{x\sqrt{x}}{\sqrt{2x^5-7}} dx.$$

$$4. \int \sin(\cos x) \cdot \sin x dx.$$

$$5. \int \frac{(x-2)dx}{\sqrt{x^2-4x+5}}.$$

Варіант 6.

$$1. \int \sin 31x dx.$$

$$2. \int \frac{7^x dx}{(5-4 \cdot 7^x)^2}.$$

$$3. \int \frac{\sin 15x dx}{\sqrt{3-5 \cos^2 15x}}.$$

$$4. \int \sqrt[4]{\operatorname{tg}^2 x} \cdot \frac{dx}{\cos^2 x}.$$

$$5. \int \sin x e^{-\cos x} dx.$$

Варіант 8.

$$1. \int 10 \cos 13x dx.$$

$$2. \int \frac{2x^5 dx}{(3+4x^6)^3}.$$

$$3. \int \frac{\cos 1,5x dx}{\sqrt{4-9 \sin^2 1,5x}}.$$

$$4. \int 3^{\sqrt[3]{x}} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}.$$

$$5. \int e^{-x^3} x^2 dx.$$

Варіант 9.

$$1. \int \frac{5dx}{(7-12x)^5}.$$

$$2. \int \cos 4x (3-10\sin 4x)^{1,5} dx.$$

$$3. \int \frac{6^x dx}{\sqrt{4 \cdot 36^x - 5}} dx.$$

$$4. \int \cos(x^5) x^4 dx.$$

$$5. \int \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}.$$

Варіант 11.

$$1. \int 3e^{-7x} dx.$$

$$2. \int \frac{\sin 11x dx}{\sqrt[7]{(3+6\cos 11x)^5}}.$$

$$3. \int \frac{x^4 dx}{\sqrt{5-8x^{10}}}.$$

$$4. \int \sin \operatorname{ctg} x \frac{dx}{\sin^2 x}.$$

Варіант 10.

$$1. \int \sin 18x dx.$$

$$2. \int \frac{7^x dx}{\sqrt[3]{(3-5 \cdot 7^x)^2}}.$$

$$3. \int \frac{\sin 16x dx}{\sqrt{3\cos^2 16x + 10}}.$$

$$4. \int (x^{10}\sqrt{x} + 1)^5 \sqrt[10]{x} dx.$$

$$5. \int \frac{\arccos^2 x dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$5. \int \frac{\sqrt{1 - \arcsin(x^2)} x dx}{\sqrt{1-x^4}}.$$

Варіант 12.

1. $\int \cos(-8x) dx.$

2. $\int \frac{x^8 dx}{\sqrt[3]{(2-11x^9)^5}}.$

3. $\int \frac{\cos 13x dx}{\sqrt{10 \sin^2 13x - 4}}.$

4. $\int e^{4x^4} x^3 dx.$

5. $\int \sin 3x e^{2 \cos 3x} dx.$

Варіант 13.

1. $\int \frac{dx}{(7x-15)^3}.$

2. $\int \cos 4x \sqrt[5]{2-3 \sin 4x} dx.$

3. $\int \frac{7^x}{\sqrt{5-12 \cdot 49^x}} dx.$

4. $\int 10 \cos \sqrt[5]{x^4} \frac{dx}{\sqrt[5]{x}}.$

5. $\int e^{-x} \cos e^{-x} dx.$

Варіант 15.

1. $\int e^{12x} dx.$

2. $\int 4 \sin 8x (5 \cos 8x - 10)^4 dx.$

Варіант 14.

1. $\int 11 \sin 16x dx.$

2. $\int \frac{3^{-5x} dx}{7+8 \cdot 3^{-5x}}.$

3. $\int \frac{\sin 7x dx}{\sqrt{12 \cos^2 7x + 3}}.$

4. $\int \sqrt{3+\cos^2 x} \sin 2x dx.$

5. $\int \frac{\cos^2 e^{-x} dx}{e^{-x}}.$

3. $\int \frac{x^2 \sqrt{x} dx}{\sqrt{8x^7+5}}.$

4. $\int x^5 \sin(1+x^6) dx.$

5. $\int \frac{\sin x dx}{\cos^4 x}.$

Варіант 16.

1. $\int \cos 20x dx.$

2. $\int x^7 \sqrt[9]{4+12x^8} dx.$

3. $\int \frac{\cos 17x dx}{\sqrt{3-8\sin^2 17x}}.$

Варіант 17.

1. $\int (10-3x)^7 dx.$

2. $\int \cos 6x \sqrt[7]{10-8\sin 6x} dx.$

3. $\int \frac{10^x}{\sqrt{10-3 \cdot 100^x}} dx.$

4. $\int \cos(x^3 + 5x)(3x^2 + 5) dx.$

5. $\int \frac{dx}{x^3 \sqrt{\ln x}}.$

Варіант 19.

1. $\int 7^{3x} dx.$

2. $\int \sin 9x (8-3\cos 9x)^{3/2} dx.$

4. $\int 5^{\cos 3x} \sin 3x dx.$

5. $\int \frac{\cos 2x dx}{\sin^4 2x}.$

Варіант 18.

1. $\int \sin 17x dx.$

2. $\int 8^{-x} (1-5 \cdot 8^{-x})^4 dx.$

3. $\int \frac{\sin 10x dx}{\sqrt{6+5\cos^2 10x}}.$

4. $\int \frac{(5-2\operatorname{arctg} x)^2 dx}{1+x^2}.$

5. $\int 2^x \cos 2^x dx.$

3. $\int \frac{x^{11}}{\sqrt{5x^{24}-10}} dx.$

4. $\int \sin(5\sin 3x) \cos 3x dx.$

5. $\int \sin 5x \cdot \cos^3 5x dx.$

Варіант 20.

1. $\int \cos 23x dx.$

2. $\int \frac{x^7 dx}{(3x^8 - 14)^4}.$

3. $\int \frac{\cos 18x dx}{\sqrt{5 - 14 \sin^2 18x}}.$

4. $\int 4^{\cos 3x} \cdot \sin 3x dx.$

5. $\int \frac{dx}{(1 + x^2) \operatorname{arctg} x}.$

Варіант 21.

1. $\int \frac{2dx}{(5 - 17x)^4}.$

2. $\int \frac{\cos 4x dx}{\sqrt{(3 + 5 \sin 4x)^3}}.$

3. $\int \frac{9^x}{\sqrt{2 \cdot 81^x - 5}} dx.$

4. $\int 7^x \cdot \cos 7^x dx.$

5. $\int \frac{\sqrt[3]{\operatorname{arctg} x}}{1 + x^2} dx.$

Варіант 23.

1. $\int 4^{3x} dx.$

2. $\int \sin 5x (3 + 10 \cos 5x)^{-5} dx.$

Варіант 22.

1. $\int \sin 14x dx.$

2. $\int \frac{9^x dx}{(5 + 4 \cdot 9^x)^5}.$

3. $\int \frac{\sin 18x dx}{\sqrt{3 \cos^2 18x + 19}}.$

4. $\int \sqrt{\frac{7 + 2 \arcsin x}{1 - x^2}} dx.$

5. $\int x \operatorname{ctg}(3x^2) dx.$

3. $\int \frac{x^9}{\sqrt{12 - 7 \cdot x^{20}}} dx.$

4. $\int \frac{\sin \operatorname{arctg} x}{1 + x^2} dx.$

$$5. \int \frac{x \cos(x^2) dx}{\sqrt{\sin(x^2)}}.$$

Варіант 24.

$$1. \int \cos 19x dx.$$

$$2. \int \frac{4x^{13} dx}{\sqrt[9]{(5x^{14} - 18)^{10}}}.$$

$$3. \int \frac{\cos 21x dx}{\sqrt{10 \sin^2 21x - 2}}.$$

$$4. \int 8^{\sqrt[3]{x^4}} \cdot \sqrt[3]{x} dx.$$

$$5. \int \frac{x^2 \sin(x^3) dx}{\sqrt[4]{\cos(x^3)}}.$$

Варіант 25.

$$1. \int \sqrt[7]{(3 + 4x)^2} dx.$$

$$2. \int \cos 13x (5 + 8 \sin 13x)^{-3} dx.$$

$$3. \int \frac{15^x dx}{\sqrt{7 \cdot 225^x + 16}}.$$

$$4. \int \frac{\cos \sqrt[6]{x^5} dx}{\sqrt[6]{x}}.$$

$$5. \int \frac{x^2 dx}{2^{x^3}}$$

Варіант 26.

$$1. \int 5 \sin 14x dx.$$

$$2. \int 6^x (6 - 5 \cdot 6^x)^{-5/2} dx.$$

$$3. \int \frac{\sin 12x dx}{\sqrt{4 - 6 \cos^2 12x}}.$$

$$4. \int \frac{\arcsin^4 x}{\sqrt{1 - x^2}} dx.$$

$$5. \int (x - 1) \sqrt{2 - 2x + x^2} dx$$

Варіант 27.

$$1. \int 5e^{-8x} dx.$$

$$2. \int 3\sin 7x(6-5\cos 7x)^4 dx.$$

$$3. \int \frac{x^4}{\sqrt{8x^{10}+4}} dx.$$

$$4. \int \sin(4x^{-3}) \cdot \frac{dx}{x^4}.$$

$$5. \int \frac{\sin 2x dx}{2+\cos^2 x}$$

Варіант 29.

$$1. \int \frac{4dx}{(6x-4)\sqrt{6x-4}}.$$

$$2. \int \cos 16x \sqrt[5]{1-\sin 16x} dx.$$

$$3. \int \frac{5^x dx}{\sqrt{3 \cdot 25^x - 14}}.$$

$$4. \int x^5 \cos(x^6) dx.$$

$$5. \int (x+1) \operatorname{tg}(x^2+2x+5) dx$$

Варіант 28.

$$1. \int 4\cos 10x dx.$$

$$2. \int \frac{x^6 dx}{\sqrt[6]{5-4x^7}}.$$

$$3. \int \frac{8\cos 9x dx}{\sqrt{4\sin^2 9x+5}}.$$

$$4. \int 8^{\operatorname{ctg} x} \frac{dx}{\sin^2 x}.$$

$$5. \int \frac{\cos \sqrt[4]{x}}{\sqrt[4]{x^3}} dx$$

Варіант 30.

$$1. \int \sin 32x dx.$$

$$2. \int \frac{8^x dx}{(6-5 \cdot 8^x)^3}.$$

$$3. \int \frac{\sin 16x dx}{\sqrt{4-6\cos^2 16x}}.$$

$$4. \int \sqrt[8]{\operatorname{tg}^3 x} \cdot \frac{dx}{\cos^2 x}.$$

5. $\int \frac{2^{\cos x} - 3^{\cos x}}{5^{\cos x}} \cdot \sin x \, dx$

7.3. Варіанти завдання III. Метод інтегрування частинами

Варіант 1.

1. $\int e^{3x} \cdot x^2 dx$.

2. $\int x \arccos 2x dx$.

3. $\int x \sin 2x dx$.

4. $\int \frac{x dx}{\sin^2 x}$.

5. $\int 2^x \sin x dx$.

Варіант 3.

1. $\int x \cos 4x dx$.

2. $\int x^3 \ln x dx$.

3. $\int x e^{-2x} dx$.

4. $\int \ln(1+x^2) dx$.

5. $\int e^x \sin 3x dx$.

Варіант 2.

1. $\int x^2 \sin 2x dx$.

2. $\int x \operatorname{arctg} x dx$.

3. $\int x \cdot e^{2x} dx$.

4. $\int \frac{x dx}{\cos^2 x}$.

5. $\int \frac{\sin x dx}{e^x}$.

Варіант 4.

1. $\int x \cdot e^{-5x} dx$.

2. $\int x^2 \arcsin x dx$.

3. $\int x \cos \frac{x}{2} dx$.

4. $\int \frac{\ln x}{x^3} dx$.

5. $\int 3^x \cos x dx$.

Варіант 5.

1. $\int x \sin 6x dx.$

2. $\int x^2 \operatorname{arcctg} x dx.$

3. $\int x \cdot 2^x dx.$

4. $\int \frac{\ln \cos x}{\cos^2 x} dx.$

5. $\int 3^{-x} \cos x dx.$

Варіант 7.

1. $\int x^2 e^{4x} dx.$

2. $\int x^4 \ln x dx.$

3. $\int x \operatorname{arcctg} 2x dx.$

4. $\int \frac{\arcsin \frac{x}{2}}{\sqrt{2+x}} dx.$

5. $\int e^{-2x} \sin 3x dx.$

Варіант 6.

1. $\int x^2 \cos 5x dx.$

2. $\int x \arccos 3x dx.$

3. $\int x \cdot 2^{-x} dx.$

4. $\int x^2 \sin^2 x dx.$

5. $\int 2^{-x} \cos x dx.$

Варіант 8.

1. $\int x \sin 3x dx.$

2. $\int x^2 \arcsin 9x dx.$

3. $\int \ln x dx.$

4. $\int \frac{\arccos \frac{x}{2}}{\sqrt{3-x}} dx.$

5. $\int 2^x \sin \frac{x}{2} dx.$

Варіант 9.

1. $\int x \cos 7x dx.$

2. $\int x^2 \operatorname{arctg} 3x dx.$

3. $\int e^{\sqrt{x}} dx.$

4. $\int \frac{\arccos x}{\sqrt{1-x}} dx.$

5. $\int e^{-x} \sin 2x dx.$

Варіант 11.

1. $\int x^2 \sin 7x dx.$

2. $\int x \operatorname{arcctg} 2x dx.$

3. $\int x \ln \frac{x}{2} dx.$

4. $\int \frac{\arcsin \frac{x}{3}}{\sqrt{3+x}} dx.$

5. $\int e^x \sin 3x dx.$

Варіант 10.

1. $\int x^2 e^{-4x} dx.$

2. $\int x \arccos 5x dx.$

3. $\int \ln^2 2x dx.$

4. $\int \frac{\ln \sin x}{\sin^2 x} dx.$

5. $\int e^x \cos \frac{x}{2} dx.$

Варіант 12.

1. $\int x^2 \cos 6x dx.$

2. $\int x \arcsin 6x dx.$

3. $\int x \cdot 2^{-x} dx.$

4. $\int \frac{\arccos \frac{x}{2}}{\sqrt{2+x}} dx.$

5. $\int e^{-x} \cos 3x dx.$

Варіант 13.

1. $\int x e^{-7x} dx.$
2. $\int x^8 \ln x dx.$
3. $\int \operatorname{arctg} 2x dx.$
4. $\int (x^2 + x + 1) \sin x dx.$
5. $\int e^x \sin^2 x dx.$

Варіант 15.

1. $\int x \cos 9x dx.$
2. $\int x^2 \arccos x dx.$
3. $\int x \operatorname{tg}^2 x dx.$
4. $\int (x^2 - x + 1) \ln x dx.$
5. $\int e^{2x} \sin 2x dx.$

Варіант 14.

1. $\int x \sin 10x dx.$
2. $\int x^2 \operatorname{arctg} 7x dx.$
3. $\int x \ln 2x dx.$
4. $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x}} dx.$
5. $\int e^x \cos^2 x dx.$

Варіант 16.

1. $\int x^2 e^{-7x} dx.$
2. $\int x \operatorname{arcctg} 16x dx.$
3. $\int x \operatorname{ctg}^2 x dx.$
4. $\int \sqrt{x} \ln x dx.$
5. $\int e^{2x} \cos 2x dx.$

Варіант 17.

1. $\int x^2 \sin 8x dx.$

2. $\int x \arcsin 5x dx.$

3. $\int \frac{x dx}{\operatorname{ctg}^2 x}.$

4. $\int \frac{\ln x dx}{x^3}.$

5. $\int e^{-3x} \sin x dx.$

Варіант 19.

1. $\int x e^{-10x} dx.$

2. $\int x^2 \arcsin 10x dx.$

3. $\int \frac{\ln x}{x^2} dx.$

4. $\int x \cos 2x dx.$

5. $\int e^{-3x} \cos 2x dx.$

Варіант 18.

1. $\int x^2 \cos 7x dx.$

2. $\int x^9 \ln x dx.$

3. $\int \frac{x dx}{\operatorname{tg}^2 x}.$

4. $\int \operatorname{arctg} \frac{x}{3} dx.$

5. $\int e^{3x} \cos x dx.$

Варіант 20.

1. $\int x \sin 12x dx.$

2. $\int x^2 \operatorname{arctg} 8x dx.$

3. $\int \ln \frac{x}{5} dx.$

4. $\int x \sin^2 x dx.$

5. $\int e^{-x} \cos 3x dx.$

Варіант 21.

1. $\int x \cos 13x dx.$

2. $\int x^2 \arccos 5x dx.$

3. $\int \frac{x dx}{2^x}.$

4. $\int x \cos^2 x dx.$

5. $\int e^{-x} \sin 2x dx.$

Варіант 23.

1. $\int x^2 \sin 12x dx.$

2. $\int x \operatorname{arctg} 8x dx.$

3. $\int x^2 \ln(1+x) dx.$

4. $\int e^{\sqrt{\cos x}} \cdot \sin x dx.$

5. $\int e^{-x} \cos \frac{x}{3} dx.$

Варіант 22.

1. $\int e^{-3x} x^2 dx.$

2. $\int x^2 \arcsin 12x dx.$

3. $\int \ln(1+x^2) dx.$

4. $\int x \cos \frac{x}{3} dx.$

5. $\int e^x \sin 5x dx.$

Варіант 24.

1. $\int x \cos 14x dx.$

2. $\int x^4 \ln x dx.$

3. $\int \frac{\arcsin 5x}{\sqrt{5+x}} dx.$

4. $\int e^{\sqrt{\sin x}} \cos x dx.$

5. $\int e^{3x} \sin \frac{x}{2} dx.$

Варіант 25.

1. $\int x e^{-15x} dx.$

2. $\int x^2 \arcsin 6x dx.$

3. $\int \ln^2 3x dx.$

4. $\int x \sin \cos x dx.$

5. $\int e^{2x} \cos x dx$

Варіант 27.

1. $\int x^2 \cos 15x dx.$

2. $\int x \arccos 13x dx.$

3. $\int \frac{x \sin x dx}{\cos^3 x}.$

4. $\int x \cdot e^{-2x} dx.$

5. $\int e^{-2x} \sin x dx$

Варіант 26.

1. $\int x \sin 16x dx.$

2. $\int x^2 \operatorname{arctg} 3x dx.$

3. $\int x 3^{-x} dx.$

4. $\int \ln^3 x dx.$

5. $\int e^{-x} \cos 2x dx$

Варіант 28.

1. $\int x^2 e^{-11x} dx.$

2. $\int x^5 \ln x dx.$

3. $\int \frac{\arccos x}{\sqrt{1+x}} dx.$

4. $\int x \sin 3x dx.$

5. $\int e^{3x} \sin 2x dx$

Вариант 29.

1. $\int x \sin 15x dx.$

2. $\int x \arcsin 4x dx.$

3. $\int \frac{x \cos x dx}{\sin^3 x}.$

4. $\int x 5^x dx.$

5. $\int e^{-3x} \sin 5x dx.$

Вариант 30.

1. $\int x \cos 7x dx.$

2. $\int x^2 \operatorname{arctg} 9x dx.$

3. $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{1+x^2}}.$

4. $\int x^2 \cos^2 x dx.$

5. $\int e^{-5x} \sin 2x dx.$

7.4. Варіанти завдання IV. Метод інтегрування раціональних дробів

Варіант 1.

1. $\int \frac{x^5 + 3x + 4}{x^2 - 2x - 3} dx.$

2. $\int \frac{(2x + 2)dx}{(x^2 + 7x + 12)(x + 2)}.$

3. $\int \frac{(x^2 + 7x + 4)dx}{(x + 1)^2(x + 3)}.$

4. $\int \frac{(x^2 + 2x - 19)dx}{(x + 3)(x^2 + 2x + 5)}.$

5. $\int \frac{2x^3 - 5x^2 - x - 2}{(x - 2)^2(x^2 + x + 2)} dx.$

Варіант 3.

1. $\int \frac{x^4 - x^3 + x + 4}{x^2 + 2x - 3} dx.$

2. $\int \frac{6x^2 + 11x - 14}{(x^2 + 5x + 6)(x - 4)} dx.$

3. $\int \frac{16dx}{(x - 3)^2(x + 1)}.$

4. $\int \frac{x^2 + 9x + 8}{(x - 1)(x^2 + x + 4)} dx.$

5. $\int \frac{x^3 + x^2 + 5x + 1}{(x + 1)^2(x^2 + x + 2)} dx.$

Варіант 2.

1. $\int \frac{3x^4 + x^2 + 5}{x^2 - x - 6} dx.$

2. $\int \frac{3x^2 - 9x + 16}{(x^2 + x - 6)(x - 4)} dx.$

3. $\int \frac{x^2 + 11}{(x - 3)^2(x - 1)} dx.$

4. $\int \frac{x^2 - 5x + 8}{(x + 2)(x^2 - x + 5)} dx.$

5. $\int \frac{4x^2 - 22x - 6}{(x - 3)^2(x^2 + 2x + 3)} dx.$

Варіант 4.

1. $\int \frac{3x^5 + 4x - 2}{x^2 - 3x + 2} dx.$

2. $\int \frac{2x^2 - 5x - 10}{(x^2 + 2x - 8)(x - 3)} dx.$

3. $\int \frac{x^2 + 12x + 19}{(x + 3)^2(x - 1)} dx.$

4. $\int \frac{(8 + 3x - x^2)dx}{(x - 3)(x^2 - 2x + 5)}.$

5. $\int \frac{4x^2 + 5x + 4}{(x + 2)^2(x^2 + x + 3)} dx.$

Варіант 5.

$$1. \int \frac{4x^4 + x + 4}{x^2 + 3x + 2} dx.$$

$$2. \int \frac{(5x + 46)dx}{(x^2 + 7x + 12)(x - 2)}.$$

$$3. \int \frac{4dx}{(x + 3)^2(x - 1)}.$$

$$4. \int \frac{(x^2 + 8x + 4)dx}{(x - 2)(x^2 + 2x + 4)}.$$

$$5. \int \frac{3x^3 + 14x^2 + 31x + 20}{(x + 3)^2(x^2 - x + 2)} dx.$$

Варіант 7.

$$1. \int \frac{4x^5 + x^3 + 7}{x^2 + x - 6} dx.$$

$$2. \int \frac{(2x^2 + 4x + 6)dx}{(x^2 + 7x + 10)(x + 1)}.$$

$$3. \int \frac{70 - 10x}{(x - 2)^2(x + 3)} dx.$$

$$4. \int \frac{(x^2 - 22x + 3)dx}{(x + 3)(x^2 - 4x + 5)}.$$

$$5. \int \frac{3x^2 - 11x + 22}{(x - 2)^2(x^2 - x + 2)} dx.$$

Варіант 6.

$$1. \int \frac{2x^3 - 4x^2 + x + 10}{x^2 + x - 2} dx.$$

$$2. \int \frac{(x^2 + 6x - 34)dx}{(x^2 - 5x + 6)(x + 4)}.$$

$$3. \int \frac{2x^2 - 5x - 2}{(x - 2)^2(x - 3)} dx.$$

$$4. \int \frac{3x^2 + 2x + 5}{(x + 1)(x^2 - x + 4)} dx.$$

$$5. \int \frac{3x^3 - 4x^2 + 4x - 10}{(x - 1)^2(x^2 + x + 3)} dx.$$

Варіант 8.

$$1. \int \frac{x^5 + 3x^4 + 6}{x^2 - 4x + 3} dx.$$

$$2. \int \frac{(2x^2 + 7x + 9)dx}{(x^2 + 6x + 5)(x + 2)}.$$

$$3. \int \frac{(7x + 22)dx}{(x + 1)^2(x + 4)}.$$

$$4. \int \frac{(19 - 2x)dx}{(x - 3)(x^2 - 2x + 10)}.$$

$$5. \int \frac{2x^3 + 4x^2 + 6x + 7}{(x + 2)^2(x^2 + 2x + 3)} dx.$$

Варіант 9.

$$1. \int \frac{2x^3 + 4x + 5}{x^2 - x - 2} dx.$$

$$2. \int \frac{(14 - 5x)dx}{(x^2 - 6x + 8)(x - 3)}.$$

$$3. \int \frac{(19 - 14x)dx}{(x - 1)^2(x + 4)}.$$

$$4. \int \frac{3x^2 - x + 7}{(x - 1)(x^2 - x + 4)} dx.$$

$$5. \int \frac{(6x^2 - x + 5)dx}{(x + 1)^2(x^2 - x + 2)}.$$

Варіант 11.

$$1. \int \frac{3x^5 + 4x^2 + 9}{x^2 - 5x + 4} dx.$$

$$2. \int \frac{3x^2 - 12x + 21}{(x^2 - x - 2)(x - 5)} dx.$$

$$3. \int \frac{6 - 7x - x^2}{(x + 1)^2(x + 4)} dx.$$

$$4. \int \frac{x^2 - 11x + 4}{(x - 2)(x^2 + 3x + 4)} dx.$$

$$5. \int \frac{8x^2 + 16x + 9}{(x + 3)^2(x^2 - x + 1)} dx.$$

Варіант 10.

$$1. \int \frac{x^4 + x - 5}{x^2 - x - 12} dx.$$

$$2. \int \frac{(2x^2 + 7x + 9)dx}{(x^2 + 6x + 5)(x + 2)}.$$

$$3. \int \frac{(7x + 22)dx}{(x + 1)^2(x - 4)}.$$

$$4. \int \frac{(19 - 2x)dx}{(x - 3)(x^2 - 2x + 7)}.$$

$$5. \int \frac{2x^3 + 4x^2 + 6x + 7}{(x + 2)^2(x^2 + 2x + 3)} dx.$$

Варіант 12.

$$1. \int \frac{x^4 + 2x + 5}{x^2 - 2x - 8} dx.$$

$$2. \int \frac{(17x + 29)dx}{(x^2 - x - 2)(x + 5)}.$$

$$3. \int \frac{7 + 3x - x^2}{(x - 4)^2(x - 1)} dx.$$

$$4. \int \frac{(6 - 8x)dx}{(x + 1)(x^2 - 2x + 4)}.$$

$$5. \int \frac{x^3 + 2x^2 - 12x + 12}{(x - 1)^2(x^2 - x + 13)} dx.$$

Варіант 13.

$$1. \int \frac{2x^5 + x^3 + 4x}{x^2 + 2x - 8} dx.$$

$$2. \int \frac{2x^2 - 7x + 7}{(x^2 - 7x + 10)(x - 1)} dx.$$

$$3. \int \frac{(43 - 7x)dx}{(x - 4)^2(x + 1)}.$$

$$4. \int \frac{(x^2 + 10x + 8)dx}{(x + 3)(x^2 - 2x + 2)}.$$

$$5. \int \frac{20dx}{(x - 2)^2(x^2 + x + 4)}.$$

Варіант 15.

$$1. \int \frac{2x^4 - x + 3}{x^2 + 3x - 4} dx.$$

$$2. \int \frac{2x^2 - 19x - 20}{(x^2 + 3x - 4)(x + 2)} dx.$$

$$3. \int \frac{9dx}{(x + 4)^2(x + 1)}.$$

$$4. \int \frac{(2x^2 + 5)dx}{(x - 1)(x^2 + 2x + 4)}.$$

$$5. \int \frac{x^3 - 5x^2 + 13x + 7}{(x + 1)^2(x^2 - 2x + 3)} dx.$$

Варіант 14.

$$1. \int \frac{3x^4 + x + 2}{x^2 - 6x + 5} dx.$$

$$2. \int \frac{(x^2 - x + 34)dx}{(x^2 - 6x + 5)(x + 2)}.$$

$$3. \int \frac{x^2 - 4x - 22}{(x + 4)^2(x - 1)} dx.$$

$$4. \int \frac{6 - 10x - x^2}{(x + 2)(x^2 - 2x + 3)} dx.$$

$$5. \int \frac{x^3 + 6x^2 - 7x - 96}{(x - 3)^2(x^2 + 2x + 3)} dx.$$

Варіант 16.

$$1. \int \frac{x^5 + x^3 + 4x}{x^2 + 4x + 3} dx.$$

$$2. \int \frac{(8x + 2)dx}{(x^2 + 3x - 4)(x - 2)}.$$

$$3. \int \frac{(x - 7)dx}{(x - 1)^2(x + 2)}.$$

$$4. \int \frac{(x^2 + 6x + 18)dx}{(x - 3)(x^2 + 2x + 3)}.$$

$$5. \int \frac{13x^2 + 12x + 5}{(x + 2)^2(x^2 - 2x + 3)} dx.$$

Варіант 17.

1. $\int \frac{2x^4 + 5x^3 - 3}{x^2 - 3x - 4} dx.$
2. $\int \frac{3x^2 + 2x - 17}{(x^2 + 6x + 5)(x - 1)} dx.$
3. $\int \frac{x^2 - 5x + 18}{(x + 2)(x - 2)^2} dx.$
4. $\int \frac{14 + 5x - x^2}{(x - 2)(x^2 + x + 4)} dx.$
5. $\int \frac{5x^3 + 18x^2 + 23x + 8}{(x + 3)^2(x^2 - 2x + 2)} dx.$

Варіант 19.

1. $\int \frac{2x^4 - x^2 + 4}{x^2 - 4x - 5} dx.$
2. $\int \frac{5x^2 + x - 10}{(x^2 - x - 2)(x + 2)} dx.$
3. $\int \frac{9 - x - x^2}{(x - 2)^2(x + 1)} dx.$
4. $\int \frac{(5x - 2)dx}{(x + 3)(x^2 - x + 1)}.$
5. $\int \frac{2x^3 + 4x^2 - 12x - 36}{(x - 2)^2(x^2 + 3x + 4)} dx.$

Варіант 18.

1. $\int \frac{3x^5 - 4x^3 + 2}{x^2 + 5x + 4} dx.$
2. $\int \frac{(x^2 - 14x + 3)dx}{(x^2 - 6x + 5)(x + 1)}.$
3. $\int \frac{(7x + 1) dx}{(x^2 - 1)(x + 1)}.$
4. $\int \frac{(5 - 7x)dx}{(x + 1)(x^2 - 2x + 3)}.$
5. $\int \frac{(3x^2 + 9x + 2)dx}{(x - 1)^2(x^2 + 2x + 4)}.$

Варіант 20.

1. $\int \frac{x^4 + 3x^2 + x + 4}{x^2 - 5x + 6} dx.$
2. $\int \frac{2x^2 + 7x + 11}{(x^2 + 3x - 4)(x + 1)} dx.$
3. $\int \frac{(5x^2 + x - 2)dx}{(x + 2)^2(x - 3)}.$
4. $\int \frac{(5 - x - x^2)dx}{(x + 2)(x^2 + 2x + 3)}.$
5. $\int \frac{(5x^2 + 8x - 30)dx}{(x - 3)^2(x^2 - 2x + 10)}.$

Варіант 21.

$$1. \int \frac{4x^5 - x^3 + 2}{x^2 + x - 6} dx.$$

$$2. \int \frac{(2 - 8x)dx}{(x^2 - 5x + 4)(x + 1)}.$$

$$3. \int \frac{(x^2 + x - 3)dx}{(x - 1)^2(x - 2)}.$$

$$4. \int \frac{(2x + 1)dx}{(x - 1)(x^2 - x + 3)}.$$

$$5. \int \frac{x^3 - 12x^2 - 3x + 17}{(x + 1)^2(x^2 - 2x + 4)} dx.$$

Варіант 23.

$$1. \int \frac{x^3 + 4x^2 + x + 5}{x^2 - 7x + 10} dx.$$

$$2. \int \frac{(13x - 23)dx}{(x^2 - 2x - 3)(x - 2)}.$$

$$3. \int \frac{(x^2 + x - 3)dx}{(x + 1)^2(x + 2)}.$$

$$4. \int \frac{(x^2 - 3x + 10)dx}{(x - 2)(x^2 - x + 2)}.$$

$$5. \int \frac{(26x^2 + 58x - 8)dx}{(x + 3)^2(x^2 - 4x + 5)}.$$

Варіант 22.

$$1. \int \frac{x^5 + x + 14}{x^2 - 6x + 8} dx.$$

$$2. \int \frac{(x^2 - 7)dx}{(x^2 - 3x + 2)(x + 1)}.$$

$$3. \int \frac{9x dx}{(x + 1)^2(x - 2)}.$$

$$4. \int \frac{(x^2 + 2x + 11)dx}{(x - 3)^2(x^2 + x + 1)}.$$

$$5. \int \frac{6x^3 + 15x^2 + 37x + 20}{(x + 2)^2(x^2 - 3x + 4)} dx.$$

Варіант 24.

$$1. \int \frac{x^4 + x^3 + x + 2}{x^2 - 2x - 15} dx.$$

$$2. \int \frac{(2x + 14)dx}{(x^2 + 4x + 3)(x - 1)}.$$

$$3. \int \frac{x dx}{(x - 2)^2(x - 1)}.$$

$$4. \int \frac{x^2 - 7x + 4}{(x + 1)(x^2 - x + 2)} dx.$$

$$5. \int \frac{x^3 + x^2 - 3x + 9}{(x - 1)^2(x^2 - x + 4)} dx.$$

Варіант 25.

$$1. \int \frac{4x^5 + x^2 + 3x}{x^2 + 5x + 6} dx.$$

$$2. \int \frac{4x^2 + 5x + 11}{(x^2 + 4x + 3)(x - 2)} dx.$$

$$3. \int \frac{x^2 + 9x + 17}{(x + 2)^2 (x - 1)} dx.$$

$$4. \int \frac{(x^2 - 6x + 1)dx}{(x + 3)(x^2 - x + 2)}.$$

$$5. \int \frac{12 + 10x - 3x^2}{(x - 2)^2 (x^2 + 2x + 4)} dx.$$

Варіант 27.

$$1. \int \frac{(x^5 + 1)dx}{x^2 + 6x + 8}.$$

$$2. \int \frac{2x^2 - 10x - 10}{(x^2 - 2x - 8)(x - 1)} dx.$$

$$3. \int \frac{(x + 14)dx}{(x + 2)^2 (x - 2)}.$$

$$4. \int \frac{(x^2 + x + 8)dx}{(x - 1)(x^2 + x + 3)}.$$

$$5. \int \frac{5x^3 + 6x^2 + 18x - 1}{(x + 1)^2 (x^2 - x + 4)} dx.$$

Варіант 26.

$$1. \int \frac{x^4 + x^3 + 3}{x^2 - 2x - 8} dx.$$

$$2. \int \frac{(6x - 1)dx}{(x^2 - 4x + 3)(x + 2)}.$$

$$3. \int \frac{(3 - x^2)dx}{(x + 2)^2 (x + 1)}.$$

$$4. \int \frac{2x dx}{(x + 2)(x^2 + x + 2)}.$$

$$5. \int \frac{-2x^3 + 15x^2 - 24x + 15}{(x - 3)^2 (x^2 - 2x + 5)} dx.$$

Варіант 28.

$$1. \int \frac{x^4 + 3x + 2}{x^2 + 7x + 12} dx.$$

$$2. \int \frac{(3x - 7)dx}{(x - 1)(x^2 - 5x + 6)}.$$

$$3. \int \frac{x^2 - 2x + 17}{(x - 1)^2 (x + 3)} dx.$$

$$4. \int \frac{(x^2 + 5x + 12)dx}{(x - 3)(x^2 + 2x + 3)}.$$

$$5. \int \frac{14x^2 + 14x + 16}{(x + 2)^2 (x^2 - x + 5)} dx.$$

Варіант 29.

$$1. \int \frac{2x^5 + x + 6}{x^2 - 3x - 10} dx.$$

$$2. \int \frac{(2x + 11)dx}{(x^2 - 2x - 3)(x - 1)}.$$

$$3. \int \frac{8dx}{(x - 1)^2(x - 3)}.$$

$$4. \int \frac{(x + 7)dx}{(x - 2)(x^2 + x + 3)}.$$

$$5. \int \frac{x^3 + 4x^2 + 5x - 10}{(x + 3)^2(x^2 + 2x + 5)} dx.$$

Варіант 30.

$$1. \int \frac{x^4 + 3}{x^2 - x - 20} dx.$$

$$2. \int \frac{x^2 + 9x - 6}{(x^2 - 1)(x + 2)} dx.$$

$$3. \int \frac{x^2 + 14x - 3}{(x + 1)^2(x - 3)} dx.$$

$$4. \int \frac{(3x^2 + 2x + 3)dx}{(x + 1)(x^2 + x + 2)}.$$

$$5. \int \frac{x^3 - 2x^2 + 4x}{(x - 1)^2(x^2 + x + 4)} dx$$

7.5. Варіанти завдання V. Інтегрування тригонометричних функцій

Варіант 1.

1. $\int \sin^3 x dx.$

2. $\int \frac{dx}{1+2\cos x}.$

3. $\int \frac{\operatorname{tg} x dx}{1-\operatorname{tg}^2 x}.$

4. $\int \sin^2 x dx.$

5. $\int \sin x \cdot \cos 3x dx.$

Варіант 3.

1. $\int \cos^3 x dx.$

2. $\int \frac{dx}{2-3\sin x}.$

3. $\int \frac{\operatorname{ctg} x dx}{\operatorname{ctg}^2 x - 1}.$

4. $\int (1+\cos x)^2 dx.$

5. $\int \sin 9x \cdot \sin x dx.$

Варіант 2.

1. $\int \sin^5 x dx.$

2. $\int \frac{dx}{1-3\cos x}.$

3. $\int \operatorname{tg}^4 x dx.$

4. $\int \cos^2 x dx.$

5. $\int \sin 3x \cdot \sin 5x dx.$

Варіант 4.

1. $\int \cos^5 x dx.$

2. $\int \frac{\sin x dx}{1+\sin x}.$

3. $\int \operatorname{tg}^3 x dx.$

4. $\int (1+2\sin x)^2 dx.$

5. $\int \sin 10x \cdot \sin 15x dx.$

Варіант 5.

1. $\int \frac{\sin x dx}{\cos x (1 + \cos^2 x)}.$
2. $\int \frac{\cos x dx}{1 + \cos x}.$
3. $\int \operatorname{ctg}^5 x dx.$
4. $\int \sin^3 x \cdot \cos^3 x dx.$
5. $\int \sin x \cdot \cos \left(x + \frac{\pi}{3} \right) dx.$

Варіант 7.

1. $\int \frac{\sin^3 x dx}{\cos^4 x - \cos^2 x}.$
2. $\int \frac{dx}{5 - 4 \sin x}.$
3. $\int \frac{dx}{1 + \cos^2 x}.$
4. $\int \frac{dx}{\cos^4 x}.$
5. $\int \sin \left(x + \frac{\pi}{3} \right) \cdot \cos x dx.$

Варіант 6.

1. $\int \frac{\sin^3 x dx}{\cos x}.$
2. $\int \frac{dx}{1 + \cos x}.$
3. $\int \operatorname{ctg}^3 x dx.$
4. $\int \frac{dx}{\sin^4 x}.$
5. $\int \sin x \cdot \cos \left(x - \frac{\pi}{3} \right) dx.$

Варіант 8.

1. $\int \frac{\sin x dx}{\cos 2x}.$
2. $\int \frac{dx}{2 \sin x - \cos x + 5}.$
3. $\int \frac{dx}{1 + \sin^2 x}.$
4. $\int \frac{dx}{\sin x}.$
5. $\int \sin \left(x - \frac{\pi}{3} \right) \cdot \cos x dx.$

Варіант 9.

1. $\int \frac{\cos x dx}{\cos 2x}.$

2. $\int \frac{dx}{(3-5\cos x)^2}.$

3. $\int \frac{dx}{3\sin^2 x + \cos^2 x}.$

4. $\int \frac{dx}{\cos x}.$

5. $\int \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \cdot \cos x dx.$

Варіант 11.

1. $\int \frac{\sin x dx}{1 + \cos^2 x}.$

2. $\int \frac{dx}{5-3\cos x}.$

3. $\int \frac{\cos^2 x dx}{\sin^2 x (\cos^2 x + 1)}.$

4. $\int \frac{dx}{\cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right)}.$

5. $\int \sin^2 x \cdot \cos 3x dx.$

Варіант 10.

1. $\int \frac{\sin 2x dx}{\cos^4 x - 3\cos^2 x + 2}.$

2. $\int \frac{dx}{5+4\sin x}.$

3. $\int \frac{dx}{\sin^2 x + \operatorname{tg}^2 x}.$

4. $\int \frac{dx}{\sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right)}.$

5. $\int \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \cdot \cos x dx.$

Варіант 12.

1. $\int \frac{\sin 2x dx}{1 + \cos^3 x}.$

2. $\int \frac{dx}{5-4\sin x + 3\cos x}.$

3. $\int \frac{dx}{2 + \cos^2 x}.$

4. $\int \frac{dx}{\sin^3 x}.$

5. $\int \cos^2 x \sin 3x dx.$

Варіант 13.

$$1. \int \frac{\sin^3 x \cos x dx}{(1 + \cos^2 x)(\cos x - 1)}.$$

$$2. \int \frac{dx}{\sin x + 1}.$$

$$3. \int \frac{dx}{4\sin^2 x + \cos^2 x}.$$

$$4. \int \frac{dx}{\cos^3 x}.$$

$$5. \int \sin^2 x \cdot \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) dx.$$

Варіант 15.

$$1. \int \frac{\cos^2 x \cdot \sin x dx}{(1 + \cos^2 x)(\cos x - 1)}.$$

$$2. \int \frac{dx}{(3 - 4\cos x)^2}.$$

$$3. \int \frac{dx}{2 + \sin^2 x}.$$

$$4. \int \frac{dx}{\cos^3\left(\frac{\pi}{3} - x\right)}.$$

$$5. \int \sin^2 x \cdot \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) dx.$$

Варіант 14.

$$1. \int \cos 2x \cdot \sin x dx.$$

$$2. \int \frac{dx}{\cos x + 1}.$$

$$3. \int \frac{\cos^2 x dx}{\sin^2 x (\cos^2 x + 2)}.$$

$$4. \int \frac{dx}{\sin^3\left(\frac{\pi}{3} - x\right)}.$$

$$5. \int \sin^2 x \cdot \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) dx.$$

Варіант 16.

$$1. \int \frac{\sin^2 x \cos x}{(2 - \cos^2 x)(\sin x + 1)} dx.$$

$$2. \int \frac{dx}{4 - 3\cos x}.$$

$$3. \int \frac{dx}{2\sin^2 x + \operatorname{tg}^2 x}.$$

$$4. \int \sin^4 x dx.$$

$$5. \int \sin^2 x \cdot \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) dx.$$

Варіант 17.

$$1. \int \frac{\sin x dx}{\cos x \ln \cos x}.$$

$$2. \int \frac{dx}{3 \sin x + 4 \cos x}.$$

$$3. \int \frac{dx}{1 + 2 \cos^2 x}.$$

$$4. \int \cos^4 x dx.$$

$$5. \int \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \cos^2 x dx.$$

Варіант 19.

$$1. \int \frac{\sin x dx}{\cos^2 x - 4}.$$

$$2. \int \frac{\cos x dx}{1 + \cos x}.$$

$$3. \int \frac{dx}{1 + 2 \sin^2 x}.$$

$$4. \int \sin^4 x \cdot \cos^4 x dx.$$

$$5. \int \sin^2 x \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) dx.$$

Варіант 18.

$$1. \int \frac{\sin 2x dx}{(1 + \cos x)^2}.$$

$$2. \int \frac{dx}{3 + 4 \cos x}.$$

$$3. \int \frac{dx}{\sin^2 x + 4 \cos^2 x}.$$

$$4. \int \sin^2 x \cos^2 x dx.$$

$$5. \int \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \cos^2 x dx.$$

Варіант 20.

$$1. \int \frac{\cos^2 x \cdot \sin x dx}{(2 - \sin^2 x)(\cos x + 1)}.$$

$$2. \int \frac{dx}{5 + 4 \cos x}.$$

$$3. \int \frac{dx}{\sin^2 x + 2 \operatorname{tg}^2 x}.$$

$$4. \int \sin^2 x \cdot \cos 2x dx.$$

$$5. \int \sin^2 x \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right) dx.$$

Варіант 21.

$$1. \int \frac{\sin x dx}{9 - \cos^2 x}.$$

$$2. \int \frac{\sin x dx}{1 + \sin x}.$$

$$3. \int \frac{\cos^2 x dx}{\sin^2 x (2 \cos^2 x + 1)}.$$

$$4. \int \sin^2 x \cdot \cos^3 x dx.$$

$$5. \int \sin^2 x \cdot \cos^4 x dx.$$

Варіант 23.

$$1. \int \frac{\cos^2 x + 1}{\sin 2x} dx.$$

$$2. \int \frac{dx}{1 - 4 \sin x}.$$

$$3. \int \frac{dx}{3 + 2 \cos^2 x}.$$

$$4. \int (1 + 3 \cos x)^2 dx.$$

$$5. \int \sin \left(x + \frac{\pi}{3} \right) \cdot \cos^2 x dx.$$

Варіант 22.

$$1. \int \frac{\sin 2x dx}{1 - \cos^3 x}.$$

$$2. \int \frac{dx}{\sin x - 4 \cos x}.$$

$$3. \int \frac{dx}{2 + 3 \sin^2 x}.$$

$$4. \int \cos^2 x \cdot \sin^3 x dx.$$

$$5. \int \cos^2 x \cdot \sin^4 x dx.$$

Варіант 24.

$$1. \int \frac{\cos x}{\sin x} \ln \sin x dx.$$

$$2. \int \frac{dx}{1 - 4 \cos x}.$$

$$3. \int \frac{dx}{\sin^2 x + 9 \cos^2 x}.$$

$$4. \int (1 - 3 \cos x)^2 dx.$$

$$5. \int \sin \left(x - \frac{\pi}{3} \right) \cdot \cos^2 x dx.$$

Варіант 25.

$$1. \int \frac{\cos x dx}{\sin^2 x - 9}.$$

$$2. \int \frac{dx}{(4 - 5\cos x)^2}.$$

$$3. \int \frac{dx}{2\sin^2 x + 3\operatorname{tg}^2 x}.$$

$$4. \int (1 - \cos x)^2 dx.$$

$$5. \int \sin x \cdot \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) dx.$$

Варіант 27.

$$1. \int \frac{(\cos^3 x + 1)\sin x dx}{\cos^2 x (\cos x - 1)}.$$

$$2. \int \frac{dx}{2 - \cos x}.$$

$$3. \int \frac{dx}{1 + 3\cos^2 x}.$$

$$4. \int \frac{dx}{\sin^4\left(\frac{\pi}{3} - x\right)}.$$

$$5. \int \sin\left(x - \frac{3\pi}{4}\right) \cos x dx.$$

Варіант 26.

$$1. \int \frac{\sin 2x dx}{(1 + \sin x)^2}.$$

$$2. \int \frac{dx}{2\sin x - \cos x}.$$

$$3. \int \frac{\cos^2 x dx}{\sin^2 x (2\cos^2 x + 3)}.$$

$$4. \int (1 - \sin x)^2 dx.$$

$$5. \int \sin x \cdot \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) dx.$$

Варіант 28.

$$1. \int \frac{\sin x dx}{\cos 2x + 2}.$$

$$2. \int \frac{dx}{\sin x - 2\cos x}.$$

$$3. \int \frac{dx}{\sin^2 x + 3\operatorname{tg}^2 x}.$$

$$4. \int \frac{dx}{\cos^4\left(\frac{\pi}{3} - x\right)}.$$

$$5. \int \sin\left(x + \frac{3\pi}{4}\right) \cos x dx.$$

Варіант 29.

$$1. \int \frac{(2 \cos^2 x - 5) \sin x dx}{\cos^4 x + 5 \sin^2 x - 1}.$$

$$2. \int \frac{dx}{1 - 2 \sin x}.$$

$$3. \int \frac{dx}{4 \sin^2 x + 9 \cos^2 x}.$$

$$4. \int (1 - 2 \sin x)^3 dx.$$

$$5. \int \sin x \cdot \cos \left(x - \frac{3\pi}{4} \right) dx.$$

Варіант 30.

$$1. \int \frac{\cos x dx}{9 + \sin^2 x}.$$

$$2. \int \frac{dx}{(1 - 2 \cos x)^2}.$$

$$3. \int \frac{dx}{1 + 5 \sin^2 x}.$$

$$4. \int (1 - 2 \cos x)^3 dx.$$

$$5. \int \sin x \cdot \cos \left(x + \frac{3\pi}{4} \right) dx.$$

7.6. Варіанти завдання VI. Інтегрування ірраціональних функцій

Варіант 1.

$$1. \int \frac{dx}{\sqrt{x}(\sqrt[4]{x} + 2\sqrt[3]{x})}.$$

$$2. \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-4x^2}}.$$

$$3. \int \frac{\sqrt{1+x^2} dx}{x^2}.$$

$$4. \int \frac{2x dx}{\sqrt{x^2+3x+2}}.$$

$$5. \int (x+1)\sqrt{x^2+4x+8} dx.$$

Варіант 3.

$$1. \int \frac{\sqrt{x} dx}{\sqrt[4]{x^3} - \sqrt{x}}.$$

$$2. \int \frac{\sqrt{x^2-4} dx}{x}.$$

$$3. \int \frac{dx}{\left(\sqrt{4-x^2}\right)^3}.$$

$$4. \int \frac{(x+1) dx}{\sqrt{x^2+x+2}}.$$

$$5. \int (x+2)\sqrt{x^2+6x+13} dx.$$

Варіант 2.

$$1. \int \frac{\sqrt[3]{x^2} dx}{\left(\sqrt{x} - \sqrt[6]{x}\right)x}.$$

$$2. \int \frac{\sqrt{1-4x^2} dx}{x^2}.$$

$$3. \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1+x^2}}.$$

$$4. \int \frac{(x+7) dx}{\sqrt{x^2+4x+3}}.$$

$$5. \int (x+3)\sqrt{x^2-6x+13} dx.$$

Варіант 4.

$$1. \int \frac{\sqrt{x^3} - \sqrt[3]{x}}{6\sqrt[4]{x}} dx.$$

$$2. \int \frac{\sqrt{9-4x^2}}{x^2} dx.$$

$$3. \int \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}}.$$

$$4. \int \frac{(x+2) dx}{\sqrt{x^2-x-2}}.$$

$$5. \int (x-2)\sqrt{x^2+6x+13} dx.$$

Варіант 5.

$$1. \int \frac{\sqrt[6]{x} + 1}{\sqrt[6]{x^7} + \sqrt[4]{x^5}} dx.$$

$$2. \int \frac{\sqrt{4 + 9x^2}}{x^2} dx.$$

$$3. \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{4x^2 - 1}}.$$

$$4. \int \frac{(2x + 1) dx}{\sqrt{x^2 + 2x - 3}}.$$

$$5. \int (x + 2) \sqrt{x^2 - 6x + 10} dx.$$

Варіант 7.

$$1. \int \frac{\sqrt[6]{x} dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}.$$

$$2. \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{9 - 25x^2}}.$$

$$3. \int \frac{x^3 dx}{\left(\sqrt{16x^2 + 9}\right)^3}.$$

$$4. \int \frac{(3x - 1) dx}{\sqrt{x^2 - 4x + 3}}.$$

$$5. \int (x + 2) \sqrt{x^2 - 4x + 5} dx.$$

Варіант 6.

$$1. \int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2} (\sqrt{x} + \sqrt[6]{x})}.$$

$$2. \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{4 - 9x^2}}.$$

$$3. \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{1 + 9x^2}}.$$

$$4. \int \frac{(2x + 3) dx}{\sqrt{x^2 - 3x + 2}}.$$

$$5. \int (x - 1) \sqrt{x^2 + 6x + 10} dx.$$

Варіант 8.

$$1. \int \frac{dx}{\sqrt{x} (\sqrt[4]{x} + \sqrt[3]{x})}.$$

$$2. \int x^3 \sqrt{4 - 25x^2} dx.$$

$$3. \int \frac{x^2 dx}{(1 + 16x^2)^{3/2}}.$$

$$4. \int \frac{(3x + 1) dx}{\sqrt{x^2 - 5x + 6}}.$$

$$5. \int (x + 1) \sqrt{x^2 + 4x + 5} dx.$$

Варіант 9.

$$1. \int \frac{\sqrt[3]{x^2} dx}{(\sqrt{x} - \sqrt[6]{x})x}.$$

$$2. \int \frac{\sqrt{25 - 4x^2} dx}{x^2}.$$

$$3. \int \frac{x^3 dx}{(\sqrt{16x^2 + 9})^3}.$$

$$4. \int \frac{(x+3)dx}{\sqrt{x^2 - 5x + 6}}.$$

$$5. \int (x+1)\sqrt{x^2 - 2x + 5} dx.$$

Варіант 11.

$$1. \int \frac{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}}{\sqrt[4]{x^5}} dx.$$

$$2. \int \frac{x^2 dx}{(4 - x^2)^{3/2}}.$$

$$3. \int \frac{\sqrt{9 + x^2}}{x^3} dx.$$

$$4. \int \frac{(x+1)dx}{\sqrt{2 - x - x^2}}.$$

Варіант 10.

$$1. \int \frac{\sqrt{x} dx}{\sqrt[4]{x^3} + \sqrt{x}}.$$

$$2. \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{25 - x^2}}.$$

$$3. \int \frac{x^3 dx}{\sqrt{x^2 + 16}}.$$

$$4. \int \frac{(x+3)dx}{\sqrt{x^2 - 2x - 3}}.$$

$$5. \int (x+1)\sqrt{x^2 - 2x + 2} dx.$$

$$5. \int (x+2)\sqrt{x^2 + 2x + 2} dx.$$

Варіант 12.

$$1. \int \frac{\sqrt[6]{x} dx}{\sqrt{x} + 3\sqrt[3]{x}}.$$

$$2. \int \frac{(9 - 4x^2)^{3/2}}{x} dx.$$

$$3. \int \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{x} dx.$$

$$4. \int \frac{(x + 2) dx}{\sqrt{2 + x - x^2}}.$$

$$5. \int (x - 2) \sqrt{5 + 4x - x^2} dx.$$

Варіант 13.

$$1. \int \frac{dx}{\sqrt{x}(\sqrt[4]{x} + 3\sqrt[3]{x})}.$$

$$2. \int \frac{x^3 dx}{\left(\sqrt{9 - x^2}\right)^3}.$$

$$3. \int \frac{\left(\sqrt{x^2 - 1}\right)^3}{x^2} dx.$$

$$4. \int \frac{(x - 3) dx}{\sqrt{3 - 2x - x^2}}.$$

$$5. \int (x - 1) \sqrt{4 + 3x - x^2} dx.$$

Варіант 14.

$$1. \int \frac{\sqrt[3]{x^2} dx}{\sqrt{x} - 2\sqrt[6]{x}}.$$

$$2. \int \frac{\sqrt{4 - 9x^2}}{x^3} dx.$$

$$3. \int \frac{\sqrt{x^2 + 16}}{x^2} dx.$$

$$4. \int \frac{(x + 1) dx}{\sqrt{6 + x - x^2}}.$$

$$5. \int (x - 3) \sqrt{8 + 2x - x^2} dx.$$

Варіант 15.

$$1. \int \frac{\sqrt{x} dx}{\sqrt[4]{x^3} + 3\sqrt{x}}.$$

$$2. \int \frac{dx}{\left(\sqrt{9 - 4x^2}\right)^3}.$$

$$3. \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1 + 25x^2}}.$$

$$4. \int \frac{(x + 2) dx}{\sqrt{3 + 2x - x^2}}.$$

$$5. \int (x + 2) \sqrt{8 - 2x - x^2} dx.$$

Варіант 16.

$$1. \int \frac{3\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}}{\sqrt[4]{x^5}} dx.$$

$$2. \int \frac{\left(\sqrt{9x^2 - 1}\right)^3}{x^2} dx.$$

$$3. \int \frac{x^3 dx}{\sqrt{4 - x^2}}.$$

$$4. \int \frac{(x+1)dx}{\sqrt{4 - 3x - x^2}}.$$

$$5. \int (x+1)\sqrt{4 - 3x - x^2} dx.$$

Варіант 17.

$$1. \int \frac{\sqrt[5]{x} dx}{\sqrt[3]{x^4} + \sqrt[5]{x^6}}.$$

$$2. \int x^3 \sqrt{9 - x^2} dx.$$

$$3. \int \frac{\sqrt{25x^2 - 4}}{x^2} dx.$$

$$4. \int \frac{(x+3)dx}{\sqrt{4 + 3x - x^2}}.$$

$$5. \int (x+2)\sqrt{3 + 2x - x^2} dx.$$

Варіант 18.

$$1. \int \frac{\sqrt{x} dx}{\sqrt{x^3} + \sqrt[7]{x^8}}.$$

$$2. \int \frac{\sqrt{4 - 9x^2} dx}{x}.$$

$$3. \int \frac{x^2 dx}{\left(\sqrt{x^2 - 4}\right)^3}.$$

$$4. \int \frac{(x+4)dx}{\sqrt{8 - 2x - x^2}}.$$

$$5. \int (x+1)\sqrt{6 + x - x^2} dx.$$

$$2. \int \frac{\sqrt{9 - 4x^2}}{x^2} dx.$$

Варіант 19.

$$1. \int \frac{\sqrt[6]{x} dx}{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}}.$$

$$3. \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2 - 25}}.$$

$$4. \int \frac{(x+1)dx}{\sqrt{8+2x-x^2}}.$$

$$5. \int (x+1)\sqrt{x^2+x-2}dx.$$

Варіант 21.

$$1. \int \frac{\sqrt[3]{x^2}dx}{(\sqrt{x}+\sqrt[6]{x})x}.$$

$$2. \int \frac{\sqrt{x^2+4}dx}{x}.$$

$$3. \int \frac{x^2dx}{\sqrt{x^2-1}}.$$

$$4. \int \frac{(x+2)dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}.$$

$$5. \int (x+2)\sqrt{x^2-2x-3}dx.$$

Варіант 20.

$$1. \int \frac{dx}{\sqrt{x}(\sqrt[4]{x}-\sqrt[3]{x})}.$$

$$2. \int \frac{x^2dx}{\sqrt{4-9x^2}}.$$

$$3. \int \frac{\sqrt{25x^2-1}}{x^2}dx.$$

$$4. \int \frac{(x-2)dx}{\sqrt{x^2+4x+5}}.$$

$$5. \int (x+2)\sqrt{3-2x-x^2}dx.$$

Варіант 22.

$$1. \int \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt[4]{x^3}-\sqrt{x}}.$$

$$2. \int \frac{(\sqrt{x^2-9})^3}{x^2}dx.$$

$$3. \int \frac{x^2dx}{(\sqrt{x^2+1})^3}.$$

$$4. \int \frac{xdx}{\sqrt{x^2-2x+2}}.$$

$$5. \int (x-2)\sqrt{x^2-x-6}dx.$$

Варіант 23.

$$1. \int \frac{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}{\sqrt[4]{x^5}} dx.$$

$$2. \int \frac{x^2 dx}{\left(\sqrt{x^2 + 4}\right)^3}.$$

$$3. \int \frac{\sqrt{x^2 - 1} dx}{x^2}.$$

$$4. \int \frac{x dx}{\sqrt{x^2 - 2x + 5}}.$$

$$5. \int (x + 2) \sqrt{x^2 - 4x + 3} dx.$$

Варіант 25.

$$1. \int \frac{\sqrt{x} dx}{\sqrt{x^3} - \sqrt[7]{x^8}}.$$

$$2. \int \frac{\sqrt{x^2 - 4} dx}{x^2}.$$

$$3. \int \frac{x^3 dx}{\left(\sqrt{1 + x^2}\right)^3}.$$

$$4. \int \frac{(x + 1) dx}{\sqrt{x^2 - 4x + 5}}.$$

$$5. \int (x + 2) \sqrt{x^2 + 2x - 3} dx.$$

Варіант 24.

$$1. \int \frac{\sqrt[5]{x} dx}{\sqrt[3]{x^4} - \sqrt[5]{x^6}}.$$

$$2. \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2 - 9}}.$$

$$3. \int \frac{\sqrt{9 + x^2} dx}{x}.$$

$$4. \int \frac{(x + 1) dx}{\sqrt{x^2 + 4x + 5}}.$$

$$5. \int (x + 2) \sqrt{x^2 - 5x + 6} dx.$$

Варіант 26.

$$1. \int \frac{\sqrt[6]{x} dx}{\sqrt[3]{x} - \sqrt{x}}.$$

$$2. \int \frac{\sqrt{4 + x^2} dx}{x}.$$

$$3. \int \frac{x^2 dx}{\left(\sqrt{4 - x^2}\right)^3}.$$

$$4. \int \frac{(x - 1) dx}{\sqrt{x^2 - 4x + 5}}.$$

$$5. \int (x + 2) \sqrt{x^2 - 3x + 2} dx.$$

Варіант 27.

$$1. \int \frac{\sqrt[3]{x} dx}{\sqrt[3]{x^4} + \sqrt[7]{x^8}}.$$

$$2. \int \frac{x^3 dx}{\left(\sqrt{9+x^2}\right)^3}.$$

$$3. \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{1-x^2}}.$$

$$4. \int \frac{(x+2) dx}{\sqrt{x^2+6x+10}}.$$

$$5. \int (x+1) \sqrt{x^2+x-2} dx.$$

Варіант 28.

$$1. \int \frac{dx}{\sqrt{x} \left(\sqrt[4]{x} - 3\sqrt[3]{x}\right)}.$$

$$2. \int \frac{x^2 dx}{\left(\sqrt{4-x^2}\right)^3}.$$

$$3. \int \frac{x^3 dx}{\sqrt{1+x^2}}.$$

$$4. \int \frac{(2x+1) dx}{\sqrt{x^2-6x+10}}.$$

$$5. \int (x-1) \sqrt{x^2-x-2} dx.$$

Варіант 29.

$$1. \int \frac{\sqrt[3]{x^2} dx}{(3\sqrt{x} - \sqrt[6]{x})\sqrt{x}}.$$

$$2. \int \frac{x^3 dx}{\sqrt{9 + x^2}}.$$

$$3. \int \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x^2} dx.$$

$$4. \int \frac{(x+1)dx}{\sqrt{x^2 + 6x + 13}}.$$

$$5. \int x\sqrt{x^2 + 3x + 2} dx.$$

Варіант 30.

$$1. \int \frac{\sqrt{x} dx}{\sqrt{x} - \sqrt[4]{x^3}}.$$

$$2. \int \frac{\sqrt{x^2 - 4} dx}{x^3}.$$

$$3. \int \frac{\sqrt{25 - x^2}}{x^2} dx.$$

$$4. \int \frac{(x-1)dx}{\sqrt{x^2 + 4x + 8}}.$$

$$5. \int (x+4)\sqrt{x^2 + 4x + 3} dx.$$

7.7. Варіанти завдання VII. Різні приклади.

Варіант 1.

$$1. \int \left(3x^2 + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx.$$

$$2. \int \frac{(2 \ln x + 3)^3}{x} dx.$$

$$3. \int \operatorname{arctg} x dx.$$

$$4. \int \frac{x+1}{5x^2 + 2x + 1} dx.$$

$$5. \int \frac{dx}{\sqrt{1-2x} - \sqrt[4]{1-2x}}.$$

$$6. \int \sqrt{1 + \sin x} dx.$$

$$7. \int \frac{dx}{\sqrt{2-3x^2}}.$$

$$8. \int \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx.$$

$$9. \int \frac{dx}{x^4 + x}.$$

$$10. \int \frac{\cos^2 x}{e^x} dx.$$

$$11. \int \frac{\sqrt{2-x}}{x} dx.$$

$$12. \int x^4 \arcsin \frac{x}{3} dx.$$

Варіант 2.

$$1. \int \left(2x + \frac{1}{\sqrt[4]{x}} \right) dx.$$

$$2. \int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)}.$$

$$3. \int x \ln^2(x^2 + 4) dx.$$

$$4. \int \frac{x+2}{x(x^2 + x - 6)} dx.$$

$$5. \int \frac{\sqrt[6]{x} dx}{1 + \sqrt[3]{x}}.$$

$$6. \int \frac{dx}{\operatorname{tg} x \cos 2x}.$$

$$7. \int \frac{dx}{\sqrt{2+3x^2}}.$$

$$8. \int \frac{x dx}{\sqrt{x^2 - 1}}.$$

$$9. \int \frac{dx}{x^4 - 1}.$$

$$10. \int x \operatorname{ctg}^2 x dx.$$

$$11. \int \frac{\sqrt{3-x^2}}{x^2} dx.$$

$$12. \int e^{4x} \sin^2 x dx.$$

Варіант 3.

$$1. \int \left(x + \frac{1}{\sqrt[5]{x}} \right)^2 dx.$$

$$2. \int \sin^2 x \cos x dx.$$

$$3. \int x^3 \cdot 3^x dx.$$

$$4. \int \frac{dx}{(x+1)^2 (x^2 + 4)}.$$

$$5. \int \frac{(x+1)dx}{\sqrt{x^2 + 4x + 13}}.$$

$$6. \int \frac{\sqrt{\operatorname{tg} x}}{\sin x \cos x} dx.$$

$$7. \int \frac{x dx}{\sqrt{2 - 8x^2}}.$$

$$8. \int \frac{x dx}{4x^2 + 7}.$$

$$9. \int \frac{\arcsin x}{x^2} dx.$$

$$10. \int \sqrt{1 - \sin x} dx.$$

$$11. \int \frac{\sqrt{4 - x^2} dx}{x^5}.$$

$$12. \int e^{5x} \cos^2 x dx.$$

Варіант 4.

$$1. \int \left(\frac{1}{x^2} - 3\sqrt[3]{x} \right)^2 dx.$$

$$2. \int \frac{dx}{x\sqrt{1 - \ln x}}.$$

$$3. \int x \cos^2 x dx.$$

$$4. \int \frac{x^4 dx}{x^3 - x^2 + x - 1}.$$

$$5. \int \frac{1 - 3x}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}} dx.$$

$$6. \int \frac{dx}{\sin^2 x + \operatorname{tg}^2 x}.$$

$$7. \int \frac{dx}{2 + 3x^2}.$$

$$8. \int \frac{\sin x dx}{\sqrt{\cos^2 x + 4}}.$$

$$9. \int \frac{x^2}{(x^2 + 5)^2} dx.$$

$$10. \int \frac{dx}{\cos x \sqrt{\sin x}}.$$

$$11. \int \frac{\sqrt{(4 - x^2)^3}}{x^5} dx.$$

$$12. \int e^{3x} \cdot \sin^2 x dx.$$

Варіант 5.

$$1. \int \left(x\sqrt{x} - \sqrt[2]{4}\sqrt{x} \right)^2 dx.$$

$$2. \int x \cdot 5^{-x^2} dx.$$

$$3. \int \cos(\ln x) dx.$$

$$4. \int \frac{x^4 + 1}{x^3 - 2x^2} dx.$$

$$5. \int \frac{dx}{x\sqrt{2+x-x^2}}.$$

$$6. \int \frac{dx}{\sin^3 x}.$$

$$7. \int \sqrt{1-x}(1-2x) dx.$$

$$8. \int \frac{dx}{x + \sqrt{x}}.$$

$$9. \int \frac{x-1}{\sin^2 x} dx.$$

$$10. \int \sqrt{\operatorname{ctg} x} dx.$$

$$11. \int x^2 \cos^2 x dx.$$

$$12. \int \frac{\sqrt{x^2 - 3}}{x^2} dx.$$

Варіант 6.

$$1. \int \left(\frac{5}{\sin^2 x} - \frac{3}{2\sqrt{x}} \right) dx.$$

$$2. \int \frac{\ln^3}{x^2} dx.$$

$$3. \int \frac{dx}{(x+3)\sqrt{x}}.$$

$$4. \int \frac{(x^3 + 8x + 9)dx}{(x-1)(x^2 + 4x + 5)}.$$

$$5. \int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} dx.$$

$$6. \int \frac{1 - \operatorname{ctg} x}{1 + \operatorname{ctg} x} dx.$$

$$7. \int (1-2x)\sqrt{1-3x} dx.$$

$$8. \int \frac{x+2}{\sqrt{x+1}+1} dx.$$

$$9. \int x \ln(x^2 + 3) dx.$$

$$10. \int \frac{\sqrt{1 + \cos x}}{\sin x} dx.$$

$$11. \int x^3 \cos^2 x dx.$$

$$12. \int \frac{\sqrt{(x^6 - 6)^5}}{x^3} dx.$$

Варіант 7.

$$1. \int \left(\frac{1}{3\sqrt{x-x}} \right)^2 dx.$$

$$2. \int \frac{dx}{x \ln x}.$$

$$3. \int x^2 \ln(1+x) dx.$$

$$4. \int \frac{x^3+1}{x^3-x^2} dx.$$

$$5. \int \frac{x dx}{\sqrt{4+3x-2x^2}}.$$

$$6. \int \frac{dx}{\sqrt{1-\sin^4 x}}.$$

$$7. \int (2-3x)\sqrt{3-2x} dx.$$

$$8. \int \frac{dx}{\sqrt{3+e^x}}.$$

$$9. \int x \operatorname{arctg}^2 x dx.$$

$$10. \int \frac{\sqrt{x^2+9}}{x^2} dx.$$

$$11. \int x^4 \cos x dx.$$

$$12. \int x^4 \sqrt{(4-x^2)^3} dx.$$

Варіант 8.

$$1. \int \left(\frac{5}{\cos^2 x} - \frac{3}{\sqrt{x}} \right) dx.$$

$$2. \int \frac{dx}{x \ln^3 x}.$$

$$3. \int x^2 \sin x dx.$$

$$4. \int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x} dx.$$

$$5. \int \frac{\sqrt{x^2+4x}}{x^2} dx.$$

$$6. \int \frac{dx}{\sin x \cos^5 x}.$$

$$7. \int (1-3x)\sqrt{x+2} dx.$$

$$8. \int \frac{dx}{x\sqrt{1-4\ln x}}.$$

$$9. \int \sin(\ln x) dx.$$

$$10. \int \frac{\sqrt{x^2-16}}{x^2} dx.$$

$$11. \int x^3 e^{2x} dx.$$

$$12. \int x^4 \sqrt{6-x^2} dx.$$

Варіант 9.

$$1. \int \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x} - x\sqrt{x} \right) dx$$

$$2. \int \frac{x dx}{\sqrt{2x^2 + 3}}$$

$$3. \int \frac{\ln^5 x}{x} dx$$

$$4. \int \frac{x^4 + 1}{x^2 + 5x - 8} dx$$

$$5. \int \sin^6 x dx$$

$$6. \int \frac{x^2 + x - 1}{(x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1}} dx$$

$$7. \int \sqrt{\frac{1-x}{x}} dx$$

$$8. \int \frac{dx}{x\sqrt{1-4\ln x}}$$

$$9. \int x \cos^2 x dx$$

$$10. \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - x + 3}}$$

$$11. \int x^5 \ln(x^2 + 6) dx$$

$$12. \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{(x^2 + 8)^3}}$$

Варіант 10.

$$1. \int \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - 5\sqrt{x} \right) dx$$

$$2. \int \frac{\sin x dx}{\cos^5 x}$$

$$3. \int \frac{2x^2}{(1+x^2)^2} dx$$

$$4. \int \frac{x dx}{(x+1)(x^2 + x + 1)}$$

$$5. \int \frac{(x+1) dx}{(x^2 - 4x + 1)}$$

$$6. \int \frac{dx}{\sqrt{1 - \cos^4 x}}$$

$$7. \int (2^x + 3^x) \cdot 5^x dx$$

$$8. \int \frac{dx}{x\sqrt{1+4\ln^2 x}}$$

$$9. \int \frac{x dx}{\cos^2 x}$$

$$10. \int \frac{dx}{x - \sqrt{x^2 - 1}}$$

$$11. \int x^4 \ln(x^2 + 3) dx$$

$$12. \int \frac{x^4 dx}{\sqrt{x^2 + 9}}$$

Варіант 11.

$$1. \int \left(6e^x - 5\sqrt{x} + \frac{1}{\sin^2 x} \right) dx$$

$$2. \int \sqrt{6-x^2} dx$$

$$3. \int x^2 e^{-x} dx$$

$$4. \int \frac{x^3 - 1}{x^3 - 2x^2} dx$$

$$5. \int \frac{x^3 + \sqrt{1+x}}{\sqrt[3]{1+x}} dx$$

$$6. \int \frac{dx}{\cos^4 x}$$

$$7. \int \left(\frac{1+2x}{x} \right)^2 dx$$

$$8. \int \sin \ln x \cdot \frac{dx}{x}$$

$$9. \int \sqrt{1+x^2} dx$$

$$10. \int \frac{\sqrt{x^2+5}}{x^2} dx$$

$$11. \int \frac{dx}{x(2x^2 - x + 1)}$$

$$12. \int x^3 \ln(x^2 + 3) dx$$

Варіант 12.

$$1. \int \frac{\sqrt{x} - xe^x + x^{5/3}}{x} dx$$

$$2. \int \frac{x dx}{5x^2 + 8}$$

$$3. \int \frac{x \sin x}{\cos^2 x} dx$$

$$4. \int \frac{(x^4 + 1) dx}{x^3 - x^2 + x - 1}$$

$$5. \int \frac{\sqrt{x^2 - 2x}}{x^2} dx$$

$$6. \int \frac{\cos x dx}{\sqrt{2 \sin x + 1}}$$

$$7. \int \frac{\sqrt{x} - 2\sqrt[3]{x} + 1}{\sqrt[4]{x}} dx$$

$$8. \int \frac{x dx}{\sqrt{3-x}}$$

$$9. \int x \operatorname{tg}^2 x dx$$

$$10. \int \frac{\sqrt{2x-1}}{x} dx$$

$$11. \int \frac{dx}{x(3x^2 - x + 2)}$$

$$12. \int x^3 \cos^2 x dx$$

Варіант 13.

$$1. \int \left(3\sqrt{x} + \frac{1}{x} \right) dx$$

$$2. \int \frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$$

$$3. \int \frac{3x-2}{\sin^2 x} dx$$

$$4. \int \frac{x^2 - 3x + 2}{x(x^2 + 2x + 1)} dx$$

$$5. \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - x + 3}}$$

$$6. \int \frac{dx}{\sin^3 x}$$

$$7. \int (3+x)\sqrt{2x-1} dx$$

$$8. \int \sqrt{2-x^2} dx$$

$$9. \int x \cdot 3^{x^2} dx$$

$$10. \int \cos \ln x \cdot \frac{dx}{x}$$

$$11. \int \frac{dx}{x(5x^2 - 2x + 1)}$$

$$12. \int x \cos^3 x dx$$

Варіант 14.

$$1. \int (2 \operatorname{ctg} x - \sqrt[4]{x}) dx$$

$$2. \int \frac{x - \operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx$$

$$3. \int \sqrt{x} \ln x dx$$

$$4. \int \frac{(7x^3 - 9) dx}{x^4 - 5x^3 + 6x^2}$$

$$5. \int \frac{(1-x) dx}{\sqrt{1+x+x^2}}$$

$$6. \int \cos^4 x dx$$

$$7. \int \left(\frac{5}{\sin x} - x^5 \sqrt{x} \right) dx$$

$$8. \int \frac{x^2 dx}{5-x^6}$$

$$9. \int \frac{x \cos x}{\sin^3 x} dx$$

$$10. \int x \ln(2x^2 + 1) dx$$

$$11. \int \frac{dx}{x^2(4x^2 - x + 1)}$$

$$12. \int e^{2x} \cos^2 x dx.$$

Варіант 15.

$$1. \int \left(\frac{2}{\sqrt{9-x^2}} + \frac{3}{\sin^2 x} \right) dx.$$

$$2. \int x(x^2+3)^{5/2} dx.$$

$$3. \int x^2 e^x dx.$$

$$4. \int \frac{(2x^2+6x+6)dx}{(x+3)(x^2+4x+5)}.$$

$$5. \int \frac{\sqrt{2x+3}}{x^2} dx.$$

$$6. \int \frac{dx}{3-2\sin x + \cos x}.$$

$$7. \int \frac{dx}{x \ln^2 x}.$$

$$8. \int \left(\frac{1}{\sqrt{7-x^2}} \right) dx.$$

$$9. \int \frac{2x-3}{\cos^2 x} dx.$$

$$10. \int \frac{x dx}{(x+1)(x^2+x+1)}.$$

$$11. \int \frac{\cos x dx}{3+2\sin x}.$$

$$12. \int e^{3x} \sin x dx.$$

Варіант 16.

$$1. \int (2 \operatorname{ctg} x - \sqrt[4]{x}) dx.$$

$$2. \int \frac{x^2 dx}{8-x^6}.$$

$$3. \int x^4 \ln x dx.$$

$$4. \int \frac{(x^3+1)dx}{4x^3-x}.$$

$$5. \int \frac{dx}{x^2(x+\sqrt{1+x^2})}.$$

$$6. \int \left(\frac{1}{\sqrt{3-x^2}} + \frac{1}{7x-2} \right) dx.$$

$$7. \int \frac{\sin x dx}{\cos^2 x}.$$

$$8. \int \operatorname{tg}^5 x dx.$$

$$9. \int \sqrt{x} \ln x dx.$$

$$10. \int \frac{x dx}{x^3-1}.$$

$$11. \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{7x^2-x+1}}.$$

$$12. \int e^{-2x} \sin^2 x dx.$$

Варіант 17.

$$1. \int \left(\frac{5}{\sqrt{1+x^2}} + 3\sqrt{x} + \frac{9}{x} \right) dx$$

$$2. \int 3 \operatorname{tg} \sqrt{x} \frac{dx}{x}.$$

$$3. \int \frac{\ln^2 x}{x^3} dx.$$

$$4. \int \frac{x dx}{(x+1)^2 (x^2+1)}.$$

$$5. \int \sqrt{\frac{2+3x}{x-3}} dx.$$

$$6. \int \frac{1+\cos^2 x}{1+\cos 2x} dx.$$

$$7. \int \frac{5dx}{\sqrt{3-x^2}}.$$

$$8. \int \frac{x^3+x^7}{x^8+1} dx.$$

$$9. \int x \operatorname{arctg}^2 x dx.$$

$$10. \int \frac{dx}{x^4-x^2}.$$

$$11. \int \frac{dx}{x\sqrt{8x^2-2x+1}}.$$

$$12. \int x^2 \ln^2 x dx.$$

Варіант 18.

$$1. \int \left(x + \frac{5}{\sqrt{x}} \right) dx.$$

$$2. \int \frac{\cos^5 x}{\sin^2 x} dx.$$

$$3. \int x^4 \ln x dx.$$

$$4. \int \frac{5x-13}{x^2-5x+6} dx.$$

$$5. \int \frac{\sqrt{x^2+9}}{x^2} dx.$$

$$6. \int (2 \operatorname{ctg} x - \sqrt[4]{x}) dx.$$

$$7. \int \frac{\cos x dx}{\sqrt[3]{\sin x}}.$$

$$8. \int \frac{3 \ln^2 x}{x^2} dx.$$

$$9. \int \frac{(2 \ln x + 3)^3}{x} dx.$$

$$10. \int \frac{dx}{(x^2+1)(x^x+x)}.$$

$$11. \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{9x^2 - x + 2}}.$$

$$12. \int x^4 \ln(x^2 + 6) dx.$$

Варіант 19.

$$1. \int \left(\frac{\sqrt{x}}{2} - x \right)^2 dx.$$

$$2. \int x \cdot 2^{-x^2} dx.$$

$$3. \int \sqrt{4 - x^2} dx.$$

$$4. \int \frac{(2x^2 + 6x + 8) dx}{(x + 3)(x^2 + 4x + 5)}.$$

$$5. \int \frac{\sqrt{x^2 + 5} dx}{x^2}.$$

$$6. \int \sin^4 x dx.$$

$$7. \int (8^x + x^2) x^x dx.$$

$$8. \int \frac{dx}{\sin x \cdot \cos x}.$$

$$9. \int x \cos 3x dx.$$

$$10. \int \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{x^2} dx.$$

$$11. \int \frac{dx}{x \sqrt{10x^2 - x + 3}}.$$

$$12. \int x^3 \ln(x + \sqrt{x^2 + 3}) dx.$$

Варіант 20.

$$1. \int \left(\frac{28}{\sqrt{4 - x^2}} - \frac{1}{x} \right) dx.$$

$$2. \int \sqrt{18 - x^2} dx.$$

$$3. \int \ln^3 x dx.$$

$$4. \int \frac{(2x + 2) dx}{(x + 2)(x^2 + 2x + 2)}.$$

$$5. \int \frac{x dx}{x - \sqrt{x^2 - 1}}.$$

$$6. \int \frac{\cos x dx}{1 + \cos x}.$$

$$7. \int x^2 e^{-2x} dx.$$

$$8. \int x(x^2 + 1)^{7/2} dx.$$

$$9. \int \frac{0,5x + 2}{\sin^2 x} dx.$$

$$10. \int \frac{\sqrt{x^2 + 9}}{x^2} dx.$$

$$11. \int \frac{dx}{x\sqrt{11x^2 - x + 4}}.$$

$$12. \int x^4 \ln(x + \sqrt{x^2 + 4}) dx.$$

Варіант 21.

$$1. \int \left(\frac{7}{\sin^2 x} - \frac{1}{\sqrt{3-x^2}} \right) dx.$$

$$2. \int x e^{x^2+1} dx.$$

$$3. \int x \ln(x^2 + 3) dx.$$

$$4. \int \frac{x^6 + 1}{x^7 + 7x - 2} dx.$$

$$5. \int \frac{1-x}{\sqrt{1+x-x^2}} dx.$$

$$6. \int \sqrt{1 - \sin^4 x} dx.$$

$$7. \int x \sin 5x dx.$$

$$8. \int \frac{\cos^2 \sqrt{3x-2}}{\sqrt{3x-2}} dx.$$

$$9. \int \frac{x \cos x dx}{\sin^2 x}.$$

$$10. \int \frac{\sqrt{x^2 + 4} dx}{x^2}.$$

$$11. \int \frac{x dx}{\sqrt{(x^2 + 2)^3}}.$$

$$12. \int \frac{1}{x^3} \operatorname{arctg} \frac{x}{2} dx.$$

Варіант 22.

$$1. \int \left(\frac{11}{x} - \frac{x}{11} + 11e^x \right) dx.$$

$$2. \int \frac{\sin x dx}{\cos^4 x}.$$

$$3. \int \frac{3 \ln^3 x}{x^2} dx.$$

$$4. \int \frac{x^4 dx}{x^5 - 7}.$$

$$5. \int \frac{(x-1) dx}{\sqrt{2x^2 - 2x + 1}}.$$

$$6. \int \frac{\cos x dx}{\sin x - \cos x}.$$

$$7. \int \left(\frac{5}{\sin^2 3x} - \sqrt{x} \right) dx.$$

$$8. \int x^2 3^{2x} dx.$$

$$9. \int x^2 \ln^2 x dx.$$

$$10. \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - x + 1}}.$$

$$11. \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{(x^2 + 3)^3}}.$$

$$12. \int x^5 \operatorname{arctg} \frac{x}{2} dx.$$

Вариант 23.

$$1. \int \left(\frac{5}{\cos x} - \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx.$$

$$2. \int \frac{dx}{\sqrt{x}(x+5)}.$$

$$3. \int \frac{2x dx}{\cos^2 x}.$$

$$4. \int \frac{x dx}{x - \sqrt{x^2 - 1}}.$$

$$5. \int \frac{x^3 - 1}{x^3 - 2x^2} dx.$$

$$6. \int \frac{dx}{\sin x \sqrt{\cos x}}.$$

$$7. \int \frac{5 \cos x dx}{\sqrt{8 - \sin^2 x}}.$$

$$8. \int \sin^2 2x \cdot \cos 2x dx.$$

$$9. \int x^2 e^{-5x} dx.$$

$$10. \int \sqrt{4x - x^2} dx.$$

$$11. \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{(x^2 + 4)^3}}.$$

$$12. \int \frac{1}{x^5} \operatorname{arctg} x dx.$$

Вариант 24.

$$1. \int \left(\sqrt{x} + \frac{3}{\sqrt{x}} \right) dx.$$

$$2. \int x \cdot 5^{-x^2} dx.$$

$$3. \int 2x \cos^2 x dx.$$

$$4. \int \frac{x^2}{1 - x^4} dx.$$

$$5. \int \frac{dx}{(x+2)\sqrt{x^2 + 2x}}.$$

$$6. \int \sqrt{\operatorname{tg} x} dx.$$

$$7. \int \frac{\sin^2 x dx}{1 - \operatorname{tg} x}.$$

$$8. \int 3^x \operatorname{arctg} 3^x dx.$$

$$9. \int (x+5)\sqrt{x-3} dx.$$

$$10. \int \frac{dx}{x - \sqrt{x^2 - 4}}.$$

$$11. \int \frac{\sqrt{(x^2 + 4)^3}}{x^3} dx$$

$$12. \int 5^x \cos 2x dx$$

Вариант 25.

$$1. \int \left(\frac{7}{\sin^2 x} + \sqrt[3]{x} \right) dx$$

$$2. \int \frac{dx}{\sqrt{5x^2 + 1}}$$

$$3. \int \sqrt{5 + x^2} dx$$

$$4. \int \frac{(2x + 7) dx}{(x - 2)(x^2 + 2x + 7)}$$

$$5. \int \frac{\sqrt{x} dx}{\sqrt[4]{x^3 + 1}}$$

$$6. \int \frac{\sqrt{1 - \cos x}}{\sin x} dx$$

$$7. \int \frac{\sqrt{x^3}}{1 + x^5} dx$$

$$8. \int x(x^2 + 3)^{1/8} dx$$

$$9. \int (x + 3)e^{2x} dx$$

$$10. \int \frac{x + 1}{5x^2 + x + 1} dx$$

$$11. \int x^2 \ln(x^2 + 2) dx$$

$$12. \int \frac{\sqrt{(3 - x^2)^3}}{x^5} dx$$

Вариант 26.

$$1. \int \left(\frac{2}{\cos^2 x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx$$

$$2. \int \sin^4 2x \cdot \cos 2x dx$$

$$3. \int x^2 \ln(x - 2) dx$$

$$4. \int \frac{(x^3 + 1) dx}{(x^3 - 5x^2 + 6)}$$

$$5. \int \sqrt{\frac{2 - x}{2x}} dx$$

$$6. \int \left(\frac{1}{\sqrt{6 - 3x^2}} - \frac{x}{\sqrt{x^2 - 2}} \right) dx$$

$$7. \int \frac{dx}{1 + \sin^2 x}$$

$$8. \int \frac{dx}{\sqrt{x}(x + 3)}$$

$$9. \int \frac{2x dx}{\cos^2 2x}$$

$$10. \int \frac{(x^2+1)dx}{(x+1)^2(x+2)^2}.$$

$$11. \int x^2 \ln(x^2+3)dx.$$

$$12. \int \frac{\sqrt{5-x^2}}{x^4} dx.$$

Варіант 27.

$$1. \int \left(\frac{3}{\sqrt{8-x}} + \frac{5}{x} + \frac{x}{5} \right) dx.$$

$$2. \int \frac{dx}{\sqrt{x}(x+6)}.$$

$$3. \int \frac{3x-1}{\sin^2 3x} dx.$$

$$4. \int \frac{x^5 dx}{(x-1)^2(x^2-1)}.$$

$$5. \int \frac{x dx}{(x-1)^2(x^2-1)}.$$

$$6. \int \frac{\cos^4 x + \sin^4 x}{\cos^2 x - \sin^2 x} dx.$$

$$7. \int (x^2 + x)e^{-3x} dx.$$

$$8. \int \frac{\sin 2x dx}{\cos^6 2x}.$$

$$9. \int \arctg 3x dx.$$

$$10. \int \frac{x^3 + x^2}{x^2 - 6x + 5} dx.$$

$$11. \int x^2 \ln(x^2 - 5) dx.$$

$$12. \int x^4 \sqrt{(3-x^2)^3} dx.$$

Варіант 28.

$$1. \int \left(3^x + x\sqrt{x} - \frac{2}{x} \right) dx.$$

$$2. \int \sqrt{4-x^2} dx.$$

$$3. \int x \ln(x^2 - 8) dx.$$

$$4. \int \frac{x dx}{x^4 - 1}.$$

$$5. \int \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x^2} dx.$$

$$6. \int \frac{dx}{1 + \sin x + \cos x}.$$

$$7. \int \frac{dx}{4 + e^x}.$$

$$8. \int (2 \ln x + \sqrt[3]{x}) dx.$$

$$9. \int \frac{\ln(x+1)}{x^3} dx.$$

$$10. \int x \cdot 4^x dx.$$

$$11. \int x^2 \ln(x^2 + 5) dx.$$

$$12. \int x^4 \sqrt{4 - x^2} dx.$$

$$10. \int \frac{(x+1)dx}{(x^2+1)(x^2+9)}.$$

$$11. \int x^2 \cos^2 2x dx.$$

$$12. \int x^5 \sqrt{(9 - x^2)^3} dx.$$

Варіант 29.

$$1. \int \left(\frac{3}{9+x^2} - \frac{3}{x} + \sqrt{3x} \right) dx.$$

$$2. \int \frac{dx}{(x+10)\sqrt{x}}.$$

$$3. \int \frac{3x-5}{\cos^2 4x} dx.$$

$$4. \int \frac{x^2 + 8x + 9}{x-1} dx.$$

$$5. \int \frac{x dx}{x - \sqrt{x^2 - 3}}.$$

$$6. \int \operatorname{ctg}^4 x dx.$$

$$7. \int (x+5)2^{-x} dx.$$

$$8. \int \frac{x dx}{(4+x^2)^2}.$$

$$9. \int \arcsin x dx.$$

Варіант 30.

$$1. \int \left(\frac{5}{\sqrt{9-2x^2}} + x\sqrt{x} \right) dx.$$

$$2. \int \frac{\ln^3(x+1)dx}{x+1}.$$

$$3. \int x \ln(x+1) dx.$$

$$4. \int \frac{(x+1)dx}{(x^2+1)(x^2+9)}.$$

$$5. \int \frac{dx}{(x-2)\sqrt{x^2+2}}.$$

$$6. \int \frac{\sqrt{\operatorname{tg} x}}{\sin x \cos x} dx.$$

$$7. \int x^2 2^{-3x} dx.$$

$$8. \int \frac{dx}{\sqrt{4-e^{2x}}}.$$

$$9. \int \ln^3 x dx.$$

$$10. \int \frac{(x+4)dx}{x^3+x^2+x+1}.$$

$$11. \int \frac{x dx}{\cos^2 4x}.$$

$$12. \int \sqrt{(x^2-4)^3} dx.$$

ЛІТЕРАТУРА

1. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика. – К: А.С.К., 2006. – 648 с.
2. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления : в 2 т. – М: Интеграл-Пресс, 2004. – Т 1. – 416 с.; Т 2. – 529 с. 2003.
3. Щипачев В.С. Высшая математика. – М: Высшая школа, 1990. – 480 с.
4. Задачи и упражнения по математическому анализу для втузов. / Под ред. Б.П. Демидовича. – М.: Наука, – 1966. – 472 с.
5. Подольский В.А., Суходский А.М., Мироненко Е.С. Сборник задач по математике. М.: Высшая школа, – 1999. – 495 с.
6. Сборник задач по математике для втузов: В 2 ч./ Под ред. А.В. Ефимова и Б.П. Демидовича. – М: Наука, 1981. – Ч 1 – 464 с.; 1986. – Ч 2. – 368 с.
7. Герасимчук В.С., Васильченко Г.С., Кравцов В.І. Вища математика. Повний курс у прикладах і задачах. Визначений, невизначений та невластні інтеграли. Звичайні диференціальні рівняння. Прикладні задачі. Навч. посіб. – К: Книги України ЛТД, 2010. – 470 с.
8. Каплан И.А. Пустынников В.И. Практикум по высшей математике в 2 томах. Том 2. Учебное пособие. М: ЭКСМО, 2006. – 511 с.
9. Лунгу Г.Н., Письменный Д.Т., Федин С.Н., Шевченко Ю.А. Сборник задач по высшей математике. 1 курс. – Москва, Айрис-Пресс, 2008. – 575 с.

Навчальне видання

Ярхо Тетяна Олександрівна
Ємел'янова Тетяна Вікторівна
Небратенко Олег В'ячеславович
Фастовська Тамара Борисівна

ПРАКТИКУМ З ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ. НЕВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ

Навчально-методичний посібник

Відповідальний за випуск *І. І. Мороз*

В авторській редакції

Комп'ютерна верстка *О. В. Веретільника*

Дизайн обкладинки *О. В. Веретільника*

План 2011 р. Поз. 4.

Підписано до друку .2011 р. Формат 60×84 1/16. Папір офсетний.

Гарнітура Times New Roman Cyr . Віддруковано на ризографі.

Ум. друк. арк. 11.2. Обл.-вид. арк. 12.0.

Зам. № /10. Наклад пр. Ціна договірна.

ВИДАВНИЦТВО

Харківського національного автомобільно-дорожнього університету

**Видавництво ХНАДУ, 61002, Харків-МСП, вул. Петровського, 25.
Тел. /факс: (057)700-38-72; 707-37-03, e-mail: rio@khadi.kharkov.ua**

*Свідоцтво Державного комітету інформаційної політики, телебачення
та радіомовлення України про внесення суб'єкта видавничої справи
до Державного реєстру видавців, виготівників і розповсюджувачів
видавничої продукції, серія ДК №897 від 17.04 2002 р.*