Міністерство освіти і науки, молоді та спорту України

ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ АВТОМОБІЛЬНО-ДОРОЖНІЙ УНІВЕРСИТЕТ

Т. О. ЯРХО
О. В. НЕБРАТЕНКО
І. І. МОРОЗ

ПРАКТИКУМ З ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ. ВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ ТА ЙОГО ЗАСТОСУВАННЯ

Навчально-методичний порадник

Харків
ХНАДУ
2011

УДК 517.3
ББК 22.1
Я 79

Рецензенти:

Кириченко І. К., доктор фізико-математичних наук, проф., завідувач кафедри вищої математики (УІПА)

Тарапова О. І., кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри математичного аналізу (ХНУ ім. В.Н. Каразіна)

Ярхо Т.О.

Я 79 Практикум з вищої математики. Визначений інтеграл та його застосування : навчально методичний порадник / Т.О. Ярхо, О.В. Небратенко, І.І. Мороз – Харків: ХНАДУ, 2011. – 88 с.

ISBN 978-966-303-379-2

Містить стисле викладання основних теоретичних положень за матеріалом модуля «Визначений інтеграл та його застосування» з наголошенням на змістовній частині понять та їх якісному уявленню. Розв’язання великої кількості прикладів, а також задач з геометричних та прикладних застосувань супроводжено докладними поясненнями. Наведено варіанти завдань типового розрахунку.

Призначено для поглибленої самостійної роботи студентів 1-го кусу всіх спеціальностей в умовах кредитно-модульної системи навчання.

Бібліогр. 6 найм.

УДК 5173
ББК 22.1

ISBN 978-966-303-379-2

Навчально-методичний порадник «Визначений інтеграл та його застосування» видається кафедрою вищої математики ХНАДУ в складі нещодавно відкритої серії навчально-методичних видань «Практикум з вищої математики». Цю серію розпочато відповідно до Цільової програми удосконалення фундаментальної підготовки в університеті. Навчально-методичні видання «Практикум з вищої математики» призначені для поглибленої самостійної підготовки студентів з практичної частини змістовних модулів курсу «Вища математика» в умовах кредитно-модульної системи навчання.

Даний порадник складено відповідно до робочих навчальних програм з дисципліни «Вища математика» (цільових, за вимогами кредитно-модульної системи навчання) для освітньо-кваліфікаційного рівня «Бакалавр». Порадник містить стисле викладання основних теоретичних положень за матеріалом модуля «Визначений інтеграл та його застосування» з наголошенням на змістовній частині понять та їх якісному уявленню.

Розв’язання великої кількості прикладів щодо обчислення визначених інтегралів, а також задач з геометричних та прикладних застосувань супроводжуються докладними поясненнями з аналізом правильності застосування на практиці теоретичних положень. Це формує вдумливий, неформальний підхід студентів до виконання практичних завдань. Останній розділ порадник містить 30 варіантів завдань для самостійної роботи – типового розрахунку з зазначеного модуля.

Порадник рекомендований студента 1-го курсу всіх спеціальностей денної і заочної форм навчання.

1. ВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ ТА ЙОГО ВЛАСТИВОСТІ

1.1. Означення визначеного інтеграла

Нехай на відрізку $[a,b]$ задано функцію $f(x)$.

Виконаємо наступні операції з відрізком $[a,b]$ і функцією $f(x)$:

1) Розіб'ємо відрізок $[a,b]$ на n довільних частин точками x_1, $x_2,\ldots, x_{n-1}$:

$$a<x_1<x_2<\ldots<x_{n-1}<b,$$

покладемо $x_0=a$, $x_n=b$.

2) В кожному з одержаних частинних відрізків $\left[x_{i-1}, x_i\right]$ $(i=\overline{1,n})$ оберемо довільну точку α_i:

$$x_{i-1}\le\alpha_i\le x_i$$

і обчислимо значення $f(\alpha_i)$ функції $f(x)$ в цій точці.

3) Знайдемо добуток $f(\alpha_i)$ на довжину Δx_i відрізка $\left[x_{i-1}, x_i\right]$:

$$f(\alpha_i)\cdot\Delta x_i\text{, де }\Delta x_i=x_i-x_{i-1}\ (i=\overline{1,n}).$$

4) Складемо суму σ усіх одержаних добутків:

$$\sigma=f(\alpha_1)\Delta x_1+f(\alpha_2)\Delta x_2+\ldots+f(\alpha_n)\Delta x_n$$

або

$$\sigma=\sum_{i=1}^{n}f(\alpha_i)\Delta x_i\,.$$

Сума σ називається інтегральною сумою функції $f(x)$, що відповідає даному розбиттю відрізка $[a,b]$ на частинні відрізкі і даному вибіру проміжкових точок α_i.

5) Будемо подрібнювати розбиття відрізку $[a,b]$, змушуючи найбільшу з довжин частинних відрізків ($\max\Delta x_i$) прямувати до нуля.

Означення. Якщо існує скінченна границя інтегральної суми σ, коли $\max \Delta x_i \to 0$, що не залежить ні від способу розбиття відрізку $[a,b]$ на частинні відрізки, ні від вибору точок α_i, то ця границя називається визначеним інтегралом від функції $f(x)$ на відрізку $[a,b]$.

Позначення: $\int\limits_a^b f(x)dx$.

(читається: інтеграл від a до b $f(x)dx$).

В цьому випадку функція $f(x)$ називається інтегровною на відрізку $[a,b]$.

Таким чином, за означенням $\lim\limits_{\max \Delta x_i \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} f(\alpha_i)\Delta x_i = \int\limits_a^b f(x)dx$.

Тут $f(x)$ – підинтегральна функція;
$f(x)dx$ – підинтигральний вираз;
x – змінна інтегрування;
$[a,b]$ – проміжок інтегрування;
a – нижня межа інтегрування;
b – верхня межа інтегрування.

Зауваження. З означення випливає, що визначений інтеграл є певним числом, яке однозначно визначається функцією $f(x)$ і межами інтегрування a і b. Тому визначений інтеграл не залежить від позначення змінної інтегрування:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^b f(t)dt = \int\limits_a^b f(z)dz \text{ і т.п.}$$

Теорема (достатня умова інтегрування функції).

Якщо функція $f(x)$ є неперервною на відрізку $[a,b]$, то інтеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ існує.

Поняття визначеного інтеграла, яке було введено у випадку $a < b$, узагальнюється на випадки $a = b$ і $a > b$.

Означення. Визначений інтеграл з однаковими межами інтегрування дорівнює нулю:

$$\int\limits_a^a f(x)dx = 0.$$

Означення. Якщо $a > b$ і $\int_a^b f(x)dx$ існує,

тоді

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$$

1.2. Основні властивості визначеного інтеграла

Властивості, що виражаються рівностями

1. Сталий множник можна виносити за знак визначеного інтеграла:

$$\int_a^b k \cdot f(x)dx = k \cdot \int_a^b f(x)dx, k = \text{const}.$$

2. Визначений інтеграл від алгебраїчної суми інтегровних функцій дорівнює алгебраїчній сумі інтегралів від цих функцій:

$$\int_a^b (f(x) + g(x) - h(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx - \int_a^b h(x)dx.$$

Ця властивість має місце для будь-якого скінченого числа доданків.

3. Аддитивність визначеного інтеграла.

Нехай функція $y = f(x)$ є інтегровною на найбільшому з відрізків $[a,b], [a,c], [c,b]$.Тоді вона є інтегровною на двох інших відрізках, і має місце рівність:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

при будь-якому взаємному розташуванні точок a,b, і c.

4. Теорема про середнє значення для визначеного інтеграла.

Нехай функція $f(x)$ є неперервною на відрізку $[a,b]$. Тоді на інтервалі (a,b) існує точка с $(a<c<b)$ така, що

$$\int_a^b f(x)dx = f(c) \cdot (b - a) \text{ або}$$

$$f(c)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx.$$

Значення $f(c)$ називається середнім значенням функції $f(x)$ на відрізку $[a,b]$.

Властивості, що виражаються нерівностями

1. Теорема про інтегрування нерівностей.
Нехай функції $y=f(x)$ і $y=g(x)$ є інтегровними на відрізку $[a,b]$ і $f(x)\le g(x),\ x\in[a,b]$.

Тоді

$$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx.$$

2. Нехай функція $y=f(x)$ є інтегровною на відрізку $[a,b]$. Тоді функція $y=|f(x)|$ також є інтегровною на цьому відрізку і має місце нерівність:

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx.$$

3. Теорема про оцінку визначеного інтеграла.

Нехай функція $y=f(x)$ є інтегровною на відрізку $[a,b]$ і в кожній точці цього відрізка виконується нерівність

$$m\le f(x)\le M,\ x\in[a,b].$$

Тоді

$$m(b-a)\le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a).$$

2. ІНТЕГРАЛ ЗІ ЗМІННОЮ ВЕРХНЬОЮ МЕЖЕЮ. ФОРМУЛА НЬЮТОНА-ЛЕЙБНИЦЯ

Нехай функція $y = f(x)$ є неперервною на відрізку $[a,b]$. Тоді вона є інтегровною на будь-якому відрізку $[a,x] \subset [a,b]$. Отже, для довільного $x \in [a,b]$ існує інтеграл $\int\limits_a^x f(x)dx$ із сталою нижньою межею інтегрування a і змінного верхньою межею інтегрування x. Цей інтеграл є функцією верхньої межі:

$$\Phi(x) = \int\limits_a^x f(t)dt.$$

Означення. Функція $\Phi(x) = \int\limits_a^x f(t)dt$ називається інтегралом із змінною верхньою межею інтегрування.

Теорема Барроу.

Похідна інтеграла від неперервної функції по змінній верхній межі існує і дорівнює значенню підинтегральної функції в точці, рівній верхній межі:

$$\Phi'(x) = \left(\int\limits_a^x f(t)dt \right)' = f(x).$$

Таким чином, функція $\Phi(x)$ є однією з первісних для підинтегральної функції $f(x)$.

Теорема Барроу вказує на зв’язок між невизначеним і визначеним інтегралами і дає можливість встановити простий метод обчислення визначених інтегралів за формулою Ньютона-Лейбниця.

Формула Ньютона-Лейбниця.

Нехай $F(x)$ – будь-яка первісна неперервної функції $y = f(x)$ на відрізку $[a,b]$. Тоді має місце формула

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b.$$

Таким чином, встановлено

Правило. Щоб обчислити визначений інтеграл від будь-якої неперервної функції, треба знайти для неї первісну і скласти різницю значень цієї первісної при верхній та нижній межах інтегрування.

Приклад 2.1. Користуючись формулою Ньютона-Лейбниця, обчислити інтеграли:

$$1)\int_0^1 e^{3x}dx;\ 2)\int_{-1}^1 (2x+3)dx;\ 3)\int_0^{\pi/4}\frac{x^2}{x^2+1}dx;\ 4)\int_{\pi/6}^{\pi/2}\frac{\cos dx}{\sin^3 x}.$$

Розв'язання.

$$1)\int_0^1 e^{3x}dx=\left.\frac{e^{3x}}{3}\right|_0^1=\frac{1}{3}(e^3-e^0)=\frac{1}{3}(e^3-1).$$

$$2)\int_{-1}^1 (2x+3)dx=\left.(x^2+3x)\right|_{-1}^1=(1+3)-(1-3)=6.$$

$$3)\int_0^{\pi/4}\frac{x^2}{x^2+1}dx=\int_0^{\pi/4}\frac{(x^2+1)-1}{x^2+1}dx=\int_0^{\pi/4}\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)dx=$$

$$=\left.\left(x-\operatorname{arctg}x\right)\right|_0^{\pi/4}=\left(\frac{\pi}{4}-\operatorname{arctg}\frac{\pi}{4}\right)-\left(0-\operatorname{arctg}0\right)=\frac{\pi}{4}-1.$$

$$4)\int_{\pi/6}^{\pi/2}\frac{\cos x dx}{\sin^3 x}=\int_{\pi/6}^{\pi/2}\sin^{-3}x\, d(\sin x)=\left.\frac{\sin^{-2}x}{-2}\right|_{\pi/6}^{\pi/2}=$$

$$=-\left.\frac{1}{2\sin^2 x}\right|_{\pi/6}^{\pi/2}=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sin^2\frac{\pi}{2}}-\frac{1}{\sin^2\frac{\pi}{6}}\right)=-\frac{1}{2}(1-4)=\frac{3}{2}.$$

3. МЕТОДИ ОБЧИСЛЕННЯ ВИЗНАЧЕНИХ ІНТЕГРАЛІВ

При обчисленні визначених інтегралів, так же само, як і невизначених інтегралів, використовують методи заміни змінної (підстановки) та інтегрування частинами. Звертаємо увагу на те, що застосування цих двох методів до визначених інтегралів має певні особливості.

3.1. Метод заміни змінної (підстановки)

3.1.1. Підстановка $x = \psi(t)$

Теорема 1. Нехай потрібно обчислити інтеграл $\int_a^b f(x)dx$, $f(x)$ є неперервною функцією на $[a,b]$.

Якщо функція $x = \psi(t)$ задовольняє наступні умови:

1. Функція $x = \psi(t)$ та її похідна $x' = \psi'(t)$ є неперервними функціями на відрізку $[\alpha,\beta]$.

2. При зміні t у проміжку $[\alpha,\beta]$ значення функції $x = \psi(t)$ не виходять за межі відрізка $[a,b]$:

$$a \le \psi(t) \le b, t \in [\alpha,\beta].$$

3. $\psi(\alpha) = a, \psi(\beta) = b,$

то справедлива рівність

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\psi(t))\psi'(t)dt. \qquad (3.1)$$

Ця формула називається формулою заміни змінної (підстановки) у визначеному інтегралі.

Зауваження

1. Підкреслимо, що відповідно до теореми 1, у визначеному інтегралі крім безпосередньої заміни змінної інтегрування потрібно змінити також межі інтегрування. У зв'язку із цим відпадає необхідність повернення до первісної змінної, обов'язкового у випадку невизначеного інтеграла.

2. Нові межі інтегрування знаходяться наступним чином:

– нижня межа α знаходиться як розв'язок рівняння $a=\psi(t)$ відносно невідомого t;

– верхня межа β знаходиться як розв'язок рівняння $b=\psi(t)$ відносно t.

Якщо функція $x=\psi(t)$ не є монотонною, то може статися, що зазначені рівняння дадуть кілька різних пар α і β, які задовольняють умови теореми 1. В цьому випадку можна взяти будь-яку з таких пар.

3. Якщо користуватися формулою (3.1) при невиконанні будь-якої з умов 1–3 теореми 1, то можна одержати неправильний результат.

Приклад 3.1. Обчислити інтеграли

$$1)\int_0^2\sqrt{4-x^2}\,dx;\ \ 2)\int_2^4\frac{\sqrt{x^2-4}}{x^4}\,dx;\ \ 3)\int_1^2\frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}}.$$

Розв'язання.

1) Обчислимо $\int\limits_0^2\sqrt{4-x^2}\,dx.$

Застосуємо підстановку $x=2\sin t$.

Тоді $dx=2\cos t dt$. Визначимо нові межі інтегрування.

Якщо нижня межа $a=0$, то $0=2\sin t$.

З рівняння $\sin t=0$ випливає $t=0$, тобто $\alpha=0$.

Якщо верхня межа інтегрування $b=2$, то $2=2\sin t$. З рівняння $\sin t=1$ випливає $t=\frac{\pi}{2}$, тобто $\beta=\frac{\pi}{2}$.

Переконаємось в законності цієї підстановки, перевіряючи виконання умов теореми 1.

1. Функція $\psi(t)=2\sin t$ та її похідна $\psi'(t)=2\cos t$ є неперервними на відрізку $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

2. При зміні t на проміжку $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ значення функції $\psi(t)=2\sin t$ не виходять за межі $[0,2]$: $0\le 2\sin t\le 2$.

3. При цьому $\psi(0)=2\sin 0=0=a$; $\psi\left(\frac{\pi}{2}\right)=2\sin\frac{\pi}{2}=2=b$.

Тепер заданий інтеграл $\int_0^2\sqrt{4-x^2}dx$ зі змінною інтегрування x зведемо до інтеграла зі змінною t і виконаємо інтегрування:

$$\int_0^2\sqrt{4-x^2}dx=\left|\begin{array}{l} x=2\sin t \\ dx=2\cos t dt \\ x=0 \Leftrightarrow t=0 \\ x=2 \Leftrightarrow t=\frac{\pi}{2} \end{array}\right|=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{4-4\sin^2 t}\cdot 2\cos t dt=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\cos^2 t dt=$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2t)dt=2\left(t+\frac{\sin 2t}{2}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=2\left(\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\sin\pi}{2}\right)-\left(0+\frac{\sin 0}{2}\right)\right)=$$

$$=2\cdot\frac{\pi}{2}=\pi.$$

2) Обчислимо $\int_2^4\frac{\sqrt{x^2-4}}{x^4}dx$.

Застосуємо тригонометричну підстановку:

$$x=\frac{2}{\cos t},\ dx=\frac{2\sin t}{\cos^2 t}dt.$$

Визначмо нові межі інтегрування.

Якщо нижня межа $a=2$, то $2=\frac{2}{\cos t}$, $\cos t=1$, звідки $t=0$, тобто $\alpha=0$.

Якщо верхня межа $b=4$, то $4=\frac{2}{\cos t}$, $\cos t=\frac{1}{2}$, звідки $t=\frac{\pi}{3}$, тобто $\beta=\frac{\pi}{3}$.

Переконаємось у законності цієї підстановки.

1. Функція $\psi(t)=\dfrac{2}{\cos t}$ та її похідна $\psi'(t)=\dfrac{2\sin t}{\cos^2 t}$ є неперервними на відрізку $\left[0,\dfrac{\pi}{3}\right]$.

2. При зміні t на проміжку $\left[0,\dfrac{\pi}{3}\right]$ значення функції $\psi(t)=\dfrac{2}{\cos t}$ не виходять за межі $[2,4]$:

$\dfrac{1}{2}\le\cos t\le 1,\ 1\le\dfrac{1}{\cos t}\le 2,\ 2\le\dfrac{2}{\cos t}\le 4$.

3. При цьому $\psi(0)=\dfrac{2}{\cos 0}=2$; $\psi\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{2}{\cos\dfrac{\pi}{3}}=4.$

Отже заданий інтеграл зі змінною інтегрування x зведемо до інтеграла зі змінною t і виконаємо інтегрування:

$$\int_2^4\frac{\sqrt{x^2-4}}{x^4}dx=\left|\begin{array}{l} x=\dfrac{2}{\cos t}\\ dx=\dfrac{2\sin t}{\cos^2 t}dt\\ x=2\Leftrightarrow t=0\\ x=4\Leftrightarrow t=\dfrac{\pi}{3}\end{array}\right|=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sqrt{\dfrac{4}{\cos^2 t}-4}}{\dfrac{16}{\cos^4 t}}\cdot\frac{2\sin t}{\cos^2 t}dt=$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{2\sqrt{1-\cos^2 t}\cdot}{\cancel{\cos t}\cdot\dfrac{16}{\cos^{\cancel{4}} t}}\cdot\frac{2\sin t}{\cancel{\cos^2} t}dt=\frac{1}{4}\int_0^{\pi/3}\sin^2 t\cdot\cos t dt=\frac{1}{4}\int_0^{\pi/3}\sin^2 t\, d(\sin t)=$$

$$=\frac{1}{4}\cdot\frac{\sin^3 t}{3}\Bigg|_0^{\pi/3}=\frac{1}{12}\sin^3\frac{\pi}{3}=\frac{1}{12}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3=\frac{3\sqrt{3}}{12\cdot 8}=\frac{\sqrt{3}}{32}.$$

3) Обчислимо $\int\limits_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}}$.

$$\int\limits_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}} = \left| \begin{array}{l} x=\frac{1}{t} \\ dx=-\frac{dt}{t^2} \\ x=1 \Leftrightarrow t=1 \\ x=2 \Leftrightarrow t=\frac{1}{2} \end{array} \right| = \int\limits_1^{1/2} \frac{-\frac{dt}{t^2}}{\frac{1}{t}\sqrt{\frac{1}{t^2}+\frac{1}{t}+1}} = -\int\limits_1^{1/2} \frac{dt}{t^2\cdot\frac{1}{t}\sqrt{t^2+t+1}\cdot\frac{1}{t}} =$$

$$= \int\limits_{1/2}^{1} \frac{dt}{\sqrt{t^2+t+1}} = \int\limits_{1/2}^{1} \frac{dt}{\sqrt{t^2+2\cdot\frac{1}{2}t+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+1}} = \int\limits_{1/2}^{1} \frac{d\left(t+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}} =$$

$$= \ln\left|t+\frac{1}{2}+\sqrt{t^2+t+1}\right|\Bigg|_{1/2}^{1} = \ln\left(1+\frac{1}{2}+\sqrt{1+1+1}\right) - \ln\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+1}\right) =$$

$$= \ln\frac{\frac{3+2\sqrt{3}}{2}}{\frac{2+\sqrt{7}}{2}} = \ln\frac{3+2\sqrt{3}}{2+\sqrt{7}}.$$

В цьому прикладі обґрунтування законності застосування підстановки слід провести самостійно.

3.1.2. Підстановка $t=\varphi(x)$

Часто застосовують також підстановку $t=\varphi(x)$. У цьому випадку нові межі інтегрування визначаються безпосередньо: $\alpha=\varphi(a), \beta=\varphi(b)$. Слід мати на увазі, що функція $x=\psi(t)$, обернена до функції $t=\varphi(x)$, має задовольняти всі умови теореми 1.

Приклад 3.2. Обчислити інтеграли

$$1) \int\limits_3^8 \frac{xdx}{\sqrt{1+x}}; \quad 2) \int\limits_0^{\ln 5} \frac{e^x\sqrt{e^x-1}}{e^x+3}dx; \quad 3) \int\limits_0^{\pi/2} \frac{dx}{3+2\cos x}.$$

Розв'язання

1) Обчислимо $\int\limits_3^8 \frac{xdx}{\sqrt{1+x}}$.

Виконаємо підстановку (заміну змінної): $t=\sqrt{1+x}$. Нові межі інтегрування визначаються так: $\alpha=\sqrt{1+3}=2,\ \beta=\sqrt{1+8}=3.$

Нова змінна $t\in[2,3]$.

Дійсно, якщо $3\le x\le 8$, то $\sqrt{1+3}\le\sqrt{1+x}\le\sqrt{1+8}$ (в силу монотонного зростання функції $t=\sqrt{1+x}$). Тобто $2\le t\le 3$.

Функція $\psi(t)=t^2-1$, обернення до функції $t=\sqrt{1+x}$, та її похідна $\psi'(t)=2t$, є неперервними на відрізку $[2,3]$. Отже умови теореми 1 дотримані.

Інтегруючи одержуємо:

$$\int\limits_3^8 \frac{xdx}{\sqrt{1+x}}=\left|\begin{array}{l} t=\sqrt{1+x}\\ x=t^2-1\\ dx=2tdt\\ x=3\Leftrightarrow t=2\\ x=8\Leftrightarrow t=3\end{array}\right|=\int\limits_2^3\frac{(t^2-1)2\cancel{t}dt}{\cancel{t}}=2\int\limits_2^3(t^2-1)dt=2\left(\frac{t^3}{3}-t\right)\Bigg|_2^3=$$

$$=2\left((9-3)-\left(\frac{8}{3}-2\right)\right)=2\left(9-3-\frac{8}{3}+2\right)=\frac{32}{3}.$$

2) Обчислимо $\int\limits_0^{\ln 5}\frac{e^x\sqrt{e^x-1}}{e^x+3}dx$.

Застосуємо підстановку (заміну змінної) $t=\sqrt{e^x-1}$.

Визначимо нові межі інтегрування: $\alpha=\sqrt{e^0-1}=0;\ \beta=\sqrt{e^{\ln 5}-1}=2$.

Нова змінна $t\in[0,2]$. Дійсно, якщо $0\le x\le\ln 5$, то $\sqrt{e^0-1}\le\sqrt{e^x-1}\le\sqrt{e^{\ln 5}-1}$ (в силу монотонного зростання функції $t=\sqrt{e^x-1}$), тобто $0\le t\le 2$.

Функція $\psi(t)=\ln(t^2+1)$, обернена до функції $t=\sqrt{e^x-1}$, та її похідна $\psi'(t)=\dfrac{2t}{t^2+1}$ є неперервними на відрізку $[0,2]$. Отже умови теореми 1 дотримані. Переходячи до нової змінної, знайдемо:

$$\int_0^{\ln 5}\frac{e^x\sqrt{e^x-1}}{e^x+3}dx=\left|\begin{array}{l} t=\sqrt{e^x-1}\\ e^x=t^2+1\\ e^x dx=2tdt\\ x=0\Leftrightarrow t=0\\ x=\ln 5\Leftrightarrow t=2\end{array}\right|=\int_0^2\frac{t\cdot 2tdt}{t^2+4}=2\int_0^2\frac{t^2dt}{t^2+4}=2\int_0^2\frac{(t^2+4)-4}{t^2+4}dt=$$

$$=2\int_0^2\left(1-\frac{4}{t^2+4}\right)dt=2\cdot\left(t-2\operatorname{arctg}\frac{t}{2}\right)\Bigg|_0^2=2\big((2-2\operatorname{arctg}1)-(0-2\operatorname{arctg}0)\big)=$$

$$=2\left(2-2\cdot\frac{\pi}{4}\right)=4-\pi.$$

3) Обчислимо $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{3+2\cos x}$.

$$\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{3+2\cos x}=\left|\begin{array}{ll} t=\operatorname{tg}\dfrac{x}{2} & \\ x=2\operatorname{arctg}t & \left|\begin{array}{l} x=0\Leftrightarrow t=0\\ x=\dfrac{\pi}{2}\Leftrightarrow t=1\end{array}\right. \\ dx=\dfrac{2dt}{1+t^2} & \\ \cos x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2} & \end{array}\right|=\int_0^1\frac{\dfrac{2dt}{1+t^2}}{3+2\dfrac{1-t^2}{1+t^2}}=\int_0^1\frac{2}{t^2+5}dt=$$

$$=\frac{2}{\sqrt5}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt5}\Bigg|_0^1=\frac{2}{\sqrt5}\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt5}.$$

В цьому прикладі обґрунтування законності застосування підстановки слід провести самостійно.

3.1.3. Інтегрування по симетричному проміжку

Застосування метода підстановки дозволяє довести справедливість наступних важливих формул щодо інтегрування парних і непарних функцій по симетричним проміжкам:

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \begin{cases} 0, \text{ якщо } f(x) - \text{непарна функція;} \\ 2\int_{0}^{a} f(x)dx, \text{ якщо } f(x) - \text{парна функція.} \end{cases}$$

Отже тепер можна зразу, не виконуючи обчислень, сказати що наприклад, $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\pi/4} \sin^5 x \cos^4 x dx = 0,$ $\int_{-\pi}^{\pi} x^7 \sin^4 x dx = 0,$ оскільки це інтеграли по симетричним проміжкам від непарних функцій.

3.2. Метод інтегрування частинами

Формула інтегрування частинами для визначеного інтеграла має вигляд

$$\int_a^b u(x)d\nu(x) = u(x)\cdot \nu(x)\Big|_a^b - \int_a^b \nu(x)du(x).$$

Передбачається, що функції $u(x) i\ \nu(x)$ мають на відрізку $[a,b]$ неперервні похідні.

Принцип розбиття підинтегрального виразу на множники $u(x)\ і\ d\nu(x)$ такий самий, як і для невизначеного інтеграла.

Приклад 3.3. Обчислити інтеграли

$$1) \int_0^1 xe^x dx;\ 2) \int_0^1 x\mathrm{arctg} x dx;\ 3) \int_0^{\pi/4} x^2 \sin 2x dx.$$

Розв'язання

1) Обчислимо $\int_0^1 xe^x dx$

$$\int_0^1 xe^x dx = \begin{vmatrix} u = x, & du = dx \\ e^x dx = dv, & v = e^x \end{vmatrix} = xe^x\Big|_0^1 - \int_0^1 e^x dx = xe^x\Big|_0^1 - e^x\Big|_0^1 = e-(e-1) = 1.$$

2) Обчислимо $\int_0^1 x\operatorname{arctg}x\,dx.$

$$\int_0^1 x\operatorname{arctg}x\,dx = \left| \begin{matrix} u = \operatorname{arctg}x,\ du = \dfrac{dx}{1+x^2} \\ dv = xdx,\ \ v = \dfrac{x^2}{2} \end{matrix} \right| = \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg}x\Big|_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}dx =$$

$$= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{(x^2+1)-1}{1+x^2} = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\int_0^1\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)dx = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}(x-\operatorname{arctg}x)\Big|_0^1 =$$

$$= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} + \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}.$$

3) Обчислити $\int_0^{\pi/4} x^2 \sin 2x dx.$

$$\int_0^{\pi/4} x^2 \sin 2x dx = \left| \begin{matrix} u = x^2,\ du = 2xdx \\ dv = \sin 2xdx,\ \ v = -\dfrac{\cos 2x}{2} \end{matrix} \right| = -\frac{x^2\cos 2x}{2}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} +$$

$$+\int_0^{\pi/4} \frac{\cos 2x}{2}\cdot 2xdx = -\frac{1}{2}\left(\frac{\pi^2}{16}\cdot\cos\frac{\pi}{2} - 0\right) + \int_0^{\pi/4} x\cos 2xdx =$$

$$= 0 + \int_0^{\pi/4} x\cos 2xdx = \left| \begin{matrix} u = x,\ du = dx \\ dv = \cos 2xdx,\ v = \dfrac{\sin 2x}{2} \end{matrix} \right| = \frac{x\sin 2x}{2}\Bigg|_0^{\pi/4} - \int_0^{\pi/4}\frac{\sin 2x}{2}dx =$$

$$= \frac{\pi}{8}\cdot\sin\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\frac{\cos 2x}{2}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}\left(\cos\frac{\pi}{2} - \cos 0\right) = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}.$$

4. ОСНОВНІ ГЕОМЕТРИЧНІ ЗАСТОСУВАННЯ ВИЗНАЧЕНОГО ІНТЕГРАЛА

4.1. Обчислення площ плоских фігур

4.1.1. Декартова система координат

Геометричний зміст визначеного інтеграла.

Якщо функція $y = f(x)$ є неперервною на відрізку $[a,b]$ і $f(x) \geq 0,\ x \in [a,b]$, то визначений інтеграл $\int_a^b f(x)dx$ являє собою площу криволінійної трапеції – фігури, обмеженої лініями $y = f(x),\ y = 0,\ x = a$ і x=b (рис 1):

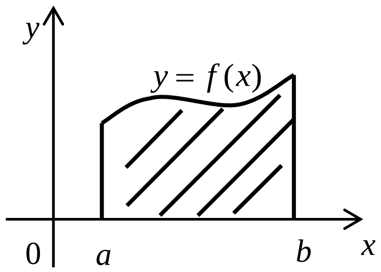


Рис. 1

$$S = \int_a^b f(x)dx. \qquad (4.1)$$

Якщо $f(x) \leq 0$, то фігура, обмежена лініями $y = f(x), y = 0,$ $x = a$ і $x = b$ (рис. 2) не є криволінійною трапецією. Площа цієї фігури дорівнює $y = -f(x)$.

Тоді за формулою (4.1) маємо

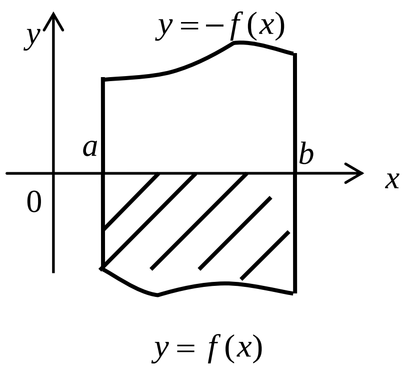


Рис. 2

$$S = -\int_a^b f(x)dx. \qquad (4.2)$$

Формули (4.1) і (4.2) можна об'єднати в одну:

$$S = \int_a^b \left| f(x) \right| dx. \qquad (4.3)$$

Якщо функція $y = f(x)$ на відрізку $[a,b]$ скінченне число разів змінює знак (рис. 3), то за формулою (4.3) маємо:

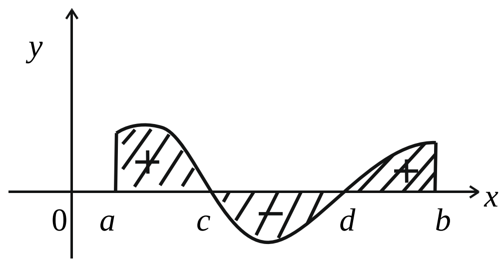


Рис. 3

$$S = \int_a^b \left| f(x) \right| dx = \int_a^c f(x)dx - \int_c^d f(x)dx + \int_d^b f(x)dx. \qquad (4.4)$$

Приклад 4.1. Знайти площі фігур, обмежених даними лініями:

а) параболою $y = x^2 + 1$, прямими $x = -1$, $x = 2$ і віссю абсцис $y = 0$;

б) параболою $y = -x^2 - 2x + 3$, прямою $x = 2$ і осями координат $x = 0$, $y = 0$.

Розв'язання

а) Виконаємо (рис. 4).

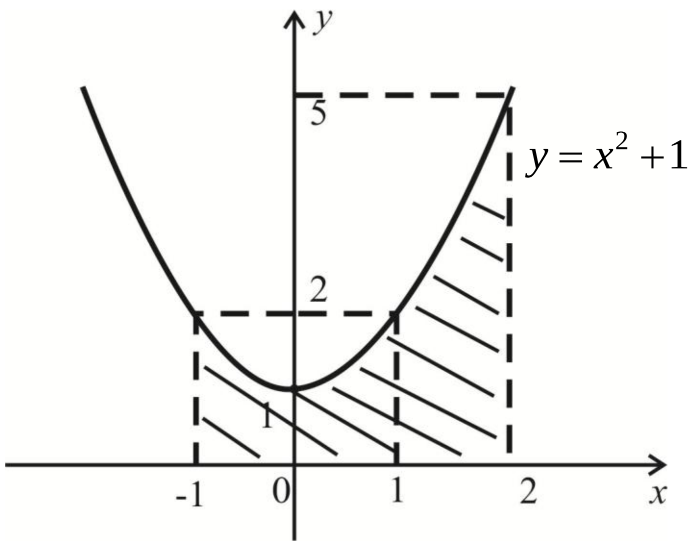


Рис. 4

Застосуємо формулу (4.1). Одержимо

$$S=\int_{-1}^{2}(x^2+1)dx=\left(\frac{x^3}{3}+x\right)\Bigg|_{-1}^{2}=\left(\frac{8}{3}+2\right)-\left(-\frac{1}{3}-1\right)=6(\text{кв.од}).$$

б) Виконаємо рисунок (рис. 5).

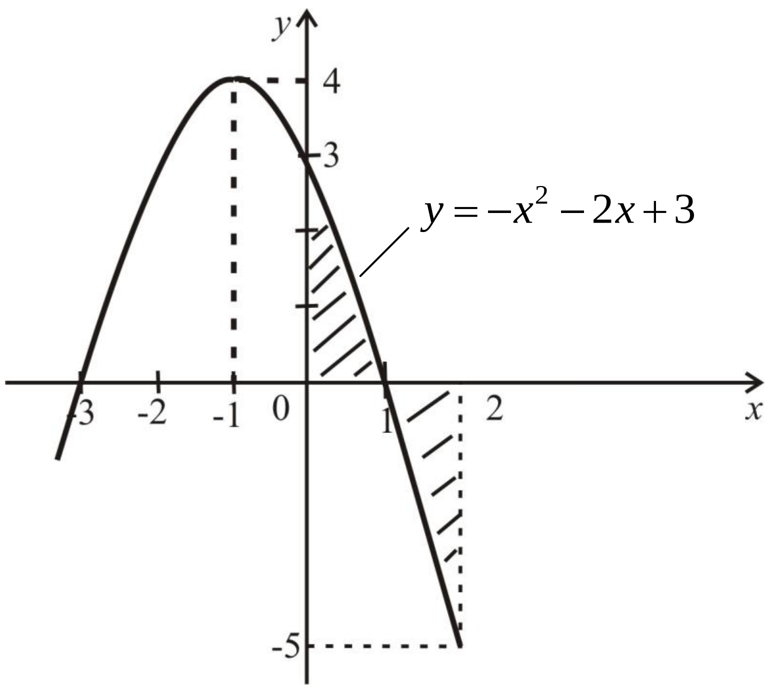


Рис. 5

Функція $f(x)=-x^2-2x+3$ на відрізку $[0,2]$ змінює знак, а саме: $f(x)\geq 0,$ коли $x\in[0,1]$ і $f(x)\leq 0,$ коли $x\in[1,2]$. Для знаходження шуканої площі S скористаємося формулою (4.4):

$$S=\int_0^2\left|-x^2-2x+3\right|dx=\int_0^1\left|-x^2-2x+3\right|dx+\int_1^2\left|-x^2-2x+3\right|dx=$$

$$=\int_0^1\left(-x^2-2x+3\right)dx-\int_1^2\left(-x^2-2x+3\right)dx=\left(-\frac{x^3}{3}-x^2+3x\right)\Bigg|_0^1-$$

$$-\left(-\frac{x^3}{3}-x^2+3x\right)\Bigg|_1^2=\left(-\frac{1}{3}-1+3\right)-0-\left(-\frac{8}{3}-4+6\right)+\left(-\frac{1}{3}-1+3\right)=$$

$$=4\ (\text{кв.од}).$$

Якщо плоска фігура обмежена двома неперервними кривими $y=f_1(x)$ і $y=f_2(x)$ $\left(f_1(x)\leq f_2(x)\right)$ и двома вертикальними прямими $x = a, x = b$ (рис. 4), то її площа обчислюється за формулою (4.5):

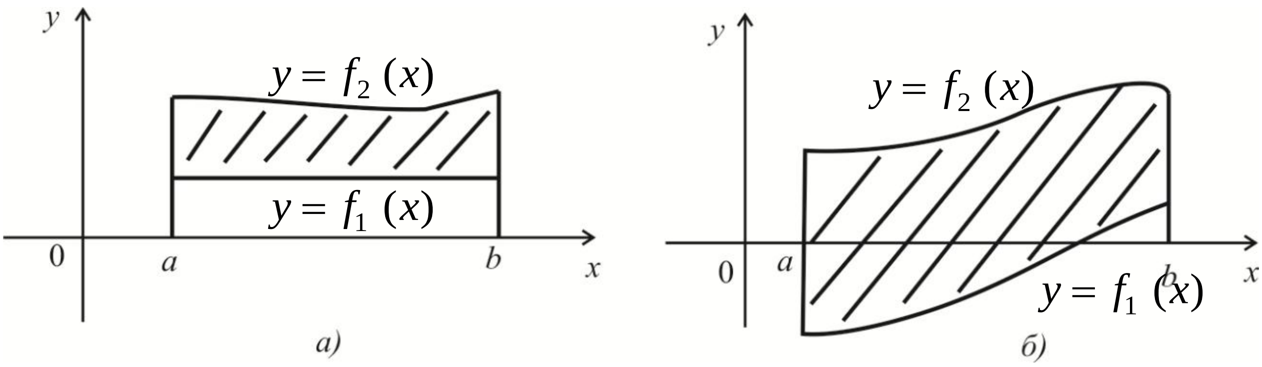


Рис. 6

$$S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))dx. \qquad (4.5)$$

Приклад 4.2. Знайти площу фігури, обмеженої даними лініями:

$$y = x^2, \; y = x + 2.$$

Розв'язання. Для того, щоб обчислити площу заданої фігури, необхідно:

а) побудувати плоску фігуру, обмежену заданими лініями;

б) визначити межі інтегрування;

в) обчислити відповідний визначений інтеграл.

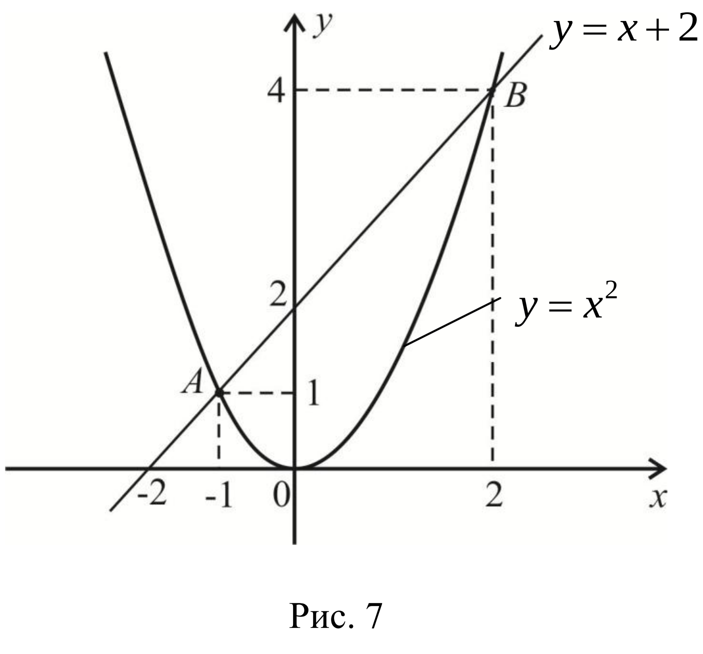


Рис. 7

Виконаємо рисунок (рис. 7). Рівняння верхньої лінії $f_2(x) = x + 2$ нижньої лінії $f_1(x) = x^2$. Визначимо межі інтегрування. Для цього обчислимо абсциси точок перетину прямої $y = x + 2$ і параболи $y = x^2$.

$$\begin{cases} y = x + 2 \\ y = x^2 \end{cases} \Rightarrow x + 2 = x^2 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = -1;\ x_2 = 2\,.$$

За формулою (4.5):

$$S = \int_{-1}^{2} \left[f_2(x) - f_1(x) \right] dx = \int_{-1}^{2} (x + 2 - x^2)\, dx = \left(\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{x^3}{3} \right) \Bigg|_{-1}^{2} =$$

$$= \left(4 + 4 - \frac{8}{3} \right) - \left(\frac{1}{2} - 2 + \frac{1}{3} \right) = 4{,}5 \text{ (кв.од).}$$

Якщо плоска фігура має складнішу форму (рис. 8), то прямими, паралельними осі OY, її треба розбити на скінченну суму фігур, площі яких знаходяться за формулою (4.5). Тоді площа S дорівнюватиме сумі знайдених площ фігур (на рис. 8 $S = S_1 + S_2 + S_3 + S_4$).

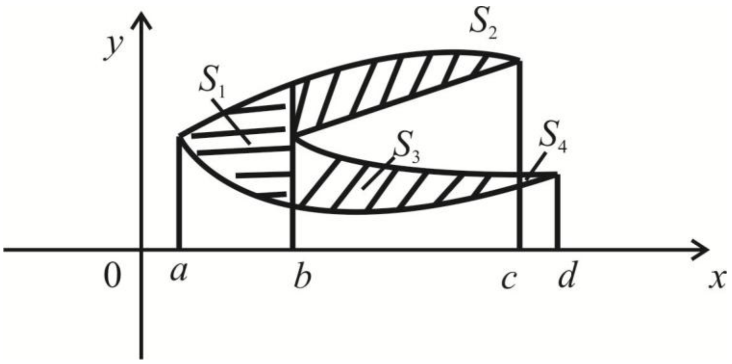


Рис. 8

Приклад 4.3. Знайти площу фігури, обмеженої даними лініями:

$$y = \sqrt{x},\ y = -x^3,\ y = x - 2.$$

Розв'язання

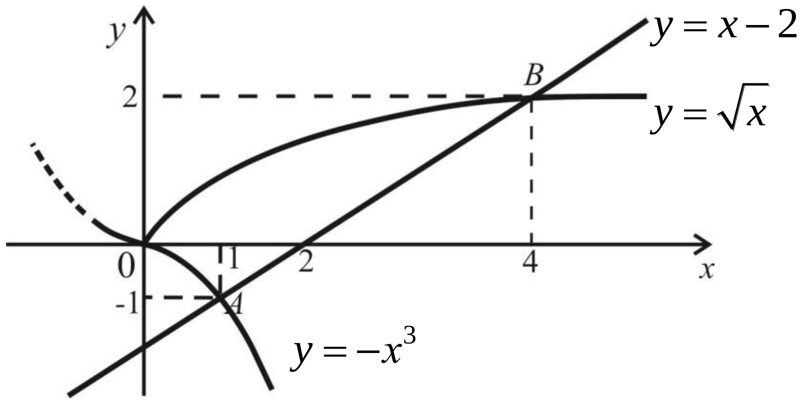


Рис. 9

Виконаємо рисунок (рис. 9). Знайдемо абсциси точок перетину ліній, що обмежують фігуру.

Лінії $y=\sqrt{x}$ і $y=-x^3$ перетинаються у точці (0;0).

Щоб знайти абсцису точки перетину ліній $y=\sqrt{x}$ і $y=x-2$, розв'яжемо рівняння

$$\sqrt{x}=x-2 \Leftrightarrow \begin{cases} x=x^2-4x+4, \\ x\ge 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-5x+4=0, \\ x\ge 2 \end{cases} \Leftrightarrow x=4.$$

Отже абсциса точки перетину цих ліній x=4.

Абсциса точки перетину ліній $y=-x^3$ і $y=x-2$ визначається з рівняння:

$$-x^3=x-2 \Leftrightarrow x^3+x-2=0 \Leftrightarrow (x^3-1)+(x-1)=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x-1)(x^2+x+2)=0 \Leftrightarrow x=1.$$

Запишемо рівняння верхньої ліній що обмежують фігуру:

$$f_2(x)=\sqrt{x};\ f_1(x)=\begin{cases} -x^3, & 0\le x\le 1, \\ x-2, & 1<x\le 4 \end{cases}$$

Оскільки нижня лінія задається при різних значеннях x різними аналітичними виразами, розіб'ємо фігуру на дві частини прямою $x=1$. Застосовуючи формулу (4.5), одержимо:

$$S=\int_0^1(\sqrt{x}-(-x^3))dx+\int_1^4(\sqrt{x}-(x-2))dx=\frac{2}{3}x^{3/2}\Big|_0^1+\frac{x^4}{4}\Big|_0^1+\frac{2}{3}x^{3/2}\Big|_1^4-$$

$$-\frac{x^2}{2}\Big|_1^4+2x\Big|_1^4=\frac{1}{4}+\frac{16}{3}-\frac{15}{2}+6=4\frac{1}{12}(\text{кв.од}).$$

Якщо криволінійна трапеція обмежена лініями $x=g(y)$; $x=0$; $y=c$; $y=d$ (рис. 10) то формула для обчислення її площі має вигляд (4.6):

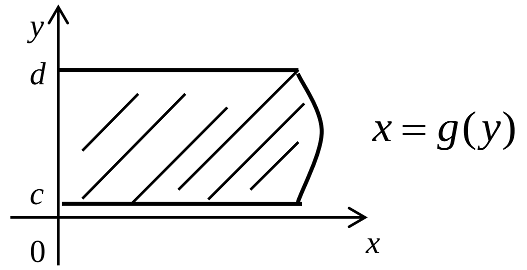


Рис. 10

$$S=\int_c^d g(y)dy. \qquad (4.6)$$

Приклад 4.4. Знайти площу фігури, обмеженої лініями $x=\frac{1}{2}y^2$; $y=-2$; $y=3$; $x=0$.

Розв'язання. Виконаємо рисунок (рис. 11).

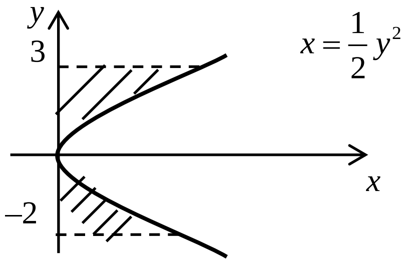


Рис. 11

$x=\frac{1}{2}y^2$ – парабола.

$$S=\int_{-2}^{3}\frac{1}{2}y^2dy=\frac{y^3}{6}\Big|_{-2}^{3}=\frac{27}{6}-\left(-\frac{8}{6}\right)=\frac{35}{6}(\text{кв.од}).$$

4.1.2. Параметричне задання кривої

Площа криволінійної трапеції, обмеженої кривою з параметричними рівняннями

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \; y(t) \geq 0,\; t \in [\alpha, \beta],$$

де $x(t),\, x'(t),\, y(t),\, y'(t)$ є неперервними функціями на відрізку $[\alpha, \beta]$, обчислюється за формулою

$$S = \int\limits_{\alpha}^{\beta} y(t) \cdot x'(t)\,dt \tag{4.7}$$

Межі інтегрування α і β знаходяться як корні рівнянь:

$$\alpha : x(t) = a;\; \beta : x(t) = b.$$

Приклад 4.5. Знайти площу фігури, обмеженої однією аркою циклоїди

$$\begin{cases} x = 2(t - \sin t) \\ y = 2(1 - \cos t) \end{cases} \qquad \text{і віссю } Ox.$$

Розв'язання: Першу арку циклоїди матимемо при зміні параметра t від 0 до 2π. Складемо таблицю значень t, x і y:

t	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3}{4}\pi$	π	$\frac{5}{4}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$	$\frac{7}{4}\pi$	2π
x	0	0,16	1,14	3,3	6,28	9,26	11,42	12,40	12,56
y	0	0,59	2	3,41	4	3,41	2	0,59	0

$\pi \approx 3{,}14$

За знайденими значеннями побудуємо криву

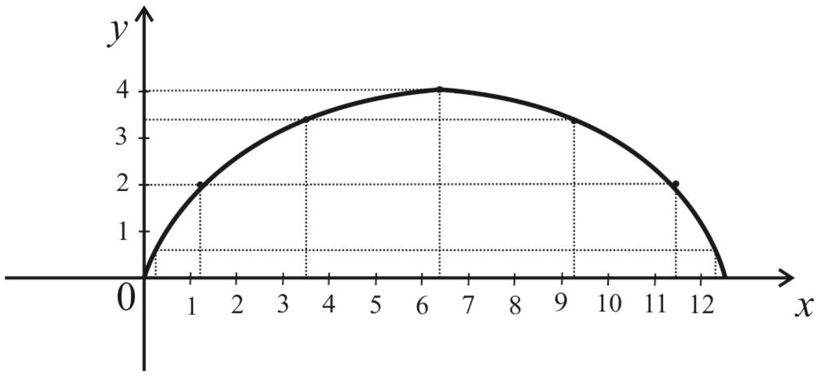


Рис. 12

Скористуємось формулою (4.7).

$$S=\int_0^{2\pi}2(1-\cos t)\cdot(2(t-\sin t))'dt=4\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^2dt=$$

$$=4\int_0^{2\pi}(1-2\cos t+\cos^2 t)dt=4\int_0^{2\pi}(1-2\cos t+\frac{1+\cos 2t}{2})dt=$$

$$=4\int_0^{2\pi}\left(\frac{3}{2}-2\cos t+\frac{\cos 2t}{2}\right)dt=4\left(\frac{3}{2}t-2\sin t+\frac{\sin 2t}{4}\right)\Bigg|_0^{2\pi}=$$

$$=4\cdot\frac{3}{2}\cdot 2\pi=12\pi\ (\text{кв.од})$$

Приклад 4.6. Знайти площу фігури, обмеженої кривою $\begin{cases}x=1-t^2,\\ y=t-t^3.\end{cases}$

Розв'язання. Дослідимо криву. Оскільки $x(-t)=x(t)$, $y=(-t)=-y(t)$, то криву розташовано симетрично відносно осі Ox.

Складемо таблицю значень t, x, y.

t	–2	$-\frac{3}{2}$	–1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2
x	–3	$-\frac{5}{4}$	0	$\frac{3}{4}$	1	$\frac{3}{4}$	0	$-\frac{5}{4}$	–3
y	6	$\frac{15}{8}$	0	$-\frac{3}{8}$	0	$\frac{3}{8}$	0	$-\frac{15}{8}$	–6

При $t \to -\infty : x \to -\infty,\ y \to +\infty$
При $t \to +\infty : x \to -\infty,\ y \to -\infty$

Побудуємо криву за знайденими значеннями.

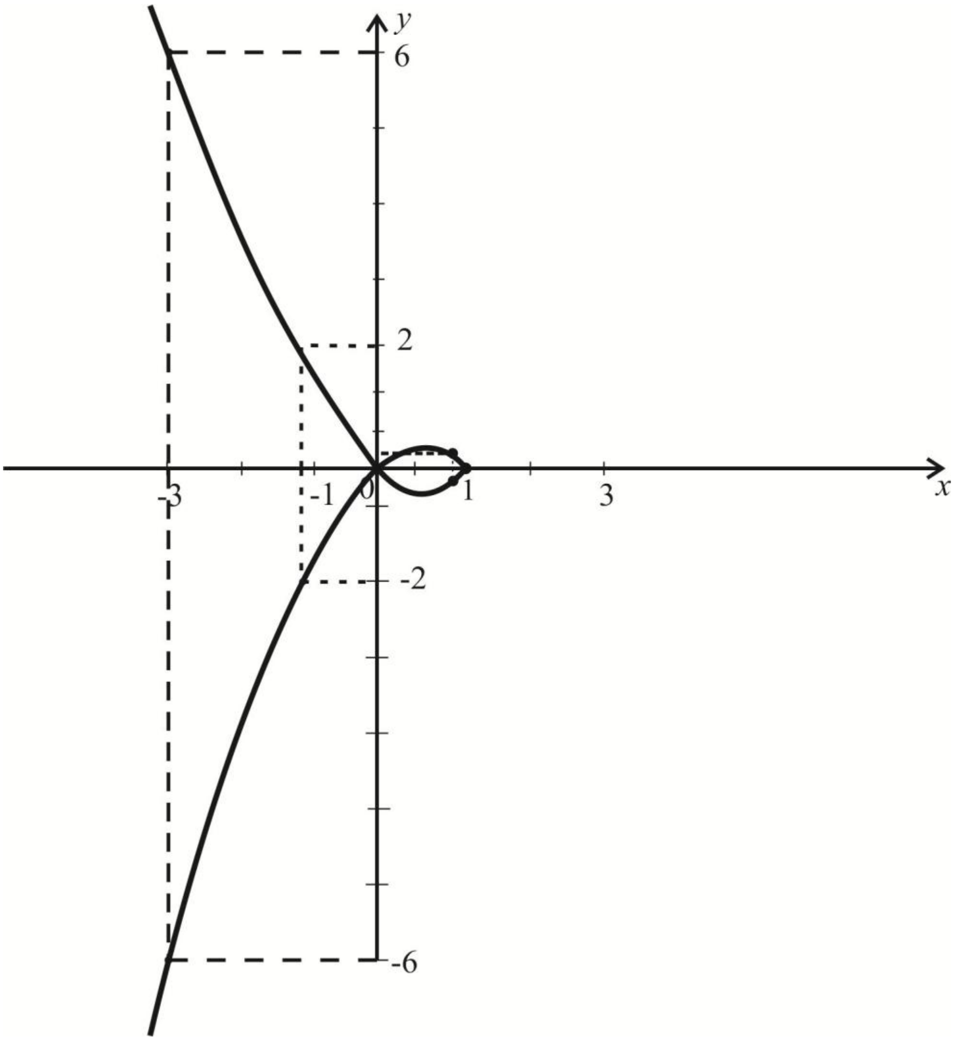


Рис. 13

Площа петлі одержаної кривої

$$S = 2\int_1^0 (t - t^3)(1 - t^2)' dt = 2\int_1^0 (t - t^3)(-2t)dt = 4\int_0^1 (t^2 - t^4)dt = 4\left(\frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5}\right)\Bigg|_0^1 =$$

$$= 4\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) = \frac{8}{15}(\text{кв.од}).$$

4.1.3 Задання кривої в полярній системі координат

Площа криволінійного сектора (рис. 14), обмеженого дугою кривої $\rho = \rho(\varphi)$, де $\rho(\varphi)$ – неперервна функція, а також відрізками променів $\varphi = \alpha$ і $\varphi = \beta (0 < \beta - \alpha \le 2\pi)$ у полярних координатах виражається формулою (4.8):

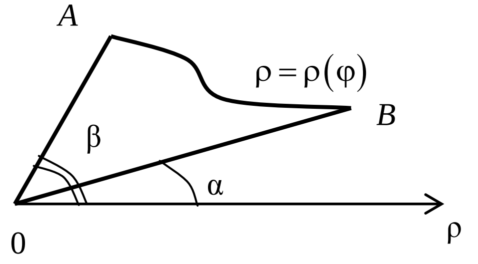


Рис. 14

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\varphi) d\varphi. \quad (4.8)$$

Приклад 4.7. Знайти площу фігури, обмеженої лемніскатою Бернуллі: $\rho^2 = 9\cos 2\varphi$.

Розв'язання. Оскільки $\rho^2 \ge 0$, то $\cos 2\varphi \ge 0$. Знайдемо ті значення φ, для яких виконується ця нерівність.

$$2\pi k - \frac{\pi}{2} \le 2\varphi \le \frac{\pi}{2} + 2\pi k \Leftrightarrow \pi k - \frac{\pi}{4} \le \varphi \le \frac{\pi}{4} + \pi k \ \ (k \in Z).$$

При $k = 0: -\frac{\pi}{4} \le \varphi \le \frac{\pi}{4}$;

при $k = 1: \frac{3}{4}\pi \le \varphi \le \frac{5}{4}\pi$;

при $k = 2: 2\pi - \frac{\pi}{4} \le \varphi \le \frac{\pi}{4} + 2\pi$ – зроблено повний зворот, і значення функції повторюються.

Отже $\left[\begin{array}{l} -\frac{\pi}{4} \le \varphi \le \frac{\pi}{4}, \\ \frac{3}{4}\pi \le \varphi \le \frac{5}{4}\pi. \end{array}\right.$

Складемо таблицю значень φ, ρ^2, ρ для $0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{4}$ ($\rho \ge 0$ як відстань від точки кривої до полюса):

φ	0	$\dfrac{\pi}{12}$	$\dfrac{\pi}{8}$	$\dfrac{\pi}{6}$	$\dfrac{\pi}{4}$
ρ^2	9	$\dfrac{9\sqrt{3}}{2}$	$\dfrac{9\sqrt{2}}{2}$	$\dfrac{9}{2}$	0
ρ	3	2,79	2,52	2,12	0

Побудуємо графік кривої, враховуючи симетрію відносно координатних осей (в силу парності та π – періодичності функції $\cos 2\varphi$):

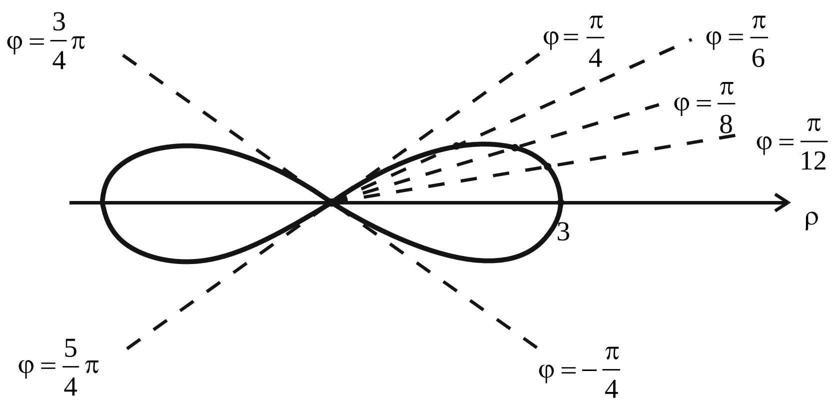


Рис. 15

$$S = 4 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\pi/4} \rho^2 d\varphi = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} 9\cos 2\varphi d\varphi = 18 \frac{\sin 2\varphi}{2} \bigg|_0^{\pi/4} =$$

$$= 9\left(\sin\frac{\pi}{2} - 0\right) = 9 \text{ (кв.од).}$$

Приклад 4.8. Знайти площу фігури, обмеженої чотирипелюстковою розою $\rho = 2\sin 4\varphi$

Розв'язання

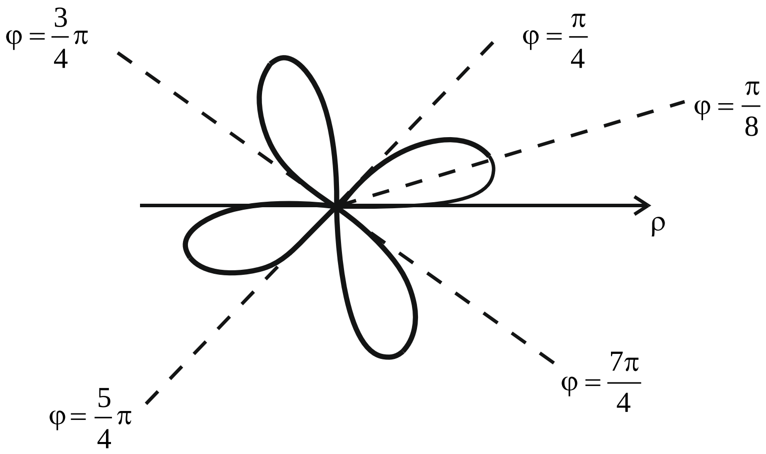


Рис. 16

Знайдемо такі значення кута φ, за яких крива $\rho = 2\sin 4\varphi$ існує. Оскільки ρ – це відстань від точки кривої до полюса, то $\rho \geq 0$. Тому

$$\rho \geq 0 \Leftrightarrow 2\sin 4\varphi \geq 0 \Leftrightarrow \sin 4\varphi \geq 0 \Leftrightarrow 2\pi\kappa \leq 4\varphi \leq \pi + 2\pi\kappa (\kappa \in Z) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi\kappa}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi\kappa}{2} (\kappa \in Z).$$

При: $\kappa = 0$: $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$;

$\kappa = 1$: $\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{3}{4}\pi$;

$\kappa = 2$: $\pi \leq \varphi \leq \frac{5}{4}\pi$;

$\kappa = 3$: $\frac{3}{2}\pi \leq \varphi \leq \frac{7}{4}\pi$;

$\kappa = 4$: $2\pi \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4} + 2\pi$; – зроблено повний зворот, і значення функції повторюється.

Функція $\sin 4\varphi$ зростає, коли $\varphi \in (0; \frac{\pi}{8})$, і спадає, коли $\varphi \in (\frac{\pi}{8}; \frac{\pi}{4})$.

Функція $\sin 4\varphi$ має період $\frac{\pi}{2}$. Тому крива у кожному з проміжков $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3}{4}\pi\right]$, $\left[\pi, \frac{5}{4}\pi\right], \left[\frac{3}{2}\pi, \frac{7}{4}\pi\right]$ одержується з кривої, розташованої у $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ зворотом на $\frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3}{2}\pi$, відповідно. Виконаємо рисунок (рис. 16). Щоб знайти площу фігури, яка обмежена кривою, $\rho = 2\sin 4\varphi$, достатньо обчислити площу пелюстка, розташованого в $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, а потім цей результат помножити на 4.

Отже $S = 4 \cdot \frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} (2\sin 4\varphi)^2 d\varphi = 4\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} (1-\cos 8\varphi) d\varphi = 4(\varphi - \frac{1}{8}\sin 8\varphi)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \pi$(кв.од)

4.2. Обчислення довжин дуг кривих

4.2.1. Декартова система координат

Якщо криву задано рівняннями $y = f(x)$, де $f(x), f'(x)$ є неперервними функціями на відрізку $[a,b]$, то довжина дуги цієї кривої, що міститься між прямими $x = a, x = b \ (a < b)$ обчислюється за формулою (4.9)

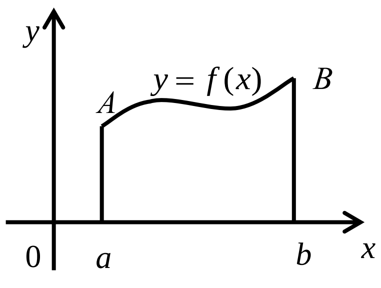


Рис. 17

$$L = \int\limits_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx. \qquad (4.9)$$

Приклад 4.9. Знайти довжину дуги кривої $y=2\sqrt{x}$ від точки A(1;2) до точки B (4;4).

Розв'язання. Рівняння кривої задано у декартовій системі координат. Функція $y=2\sqrt{x}$ є визначеною і неперервною разом із своєю похідною $y'=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ на відрізку $[a,b]=[1,4]$. Тому можна застосувати формулу (4.9).

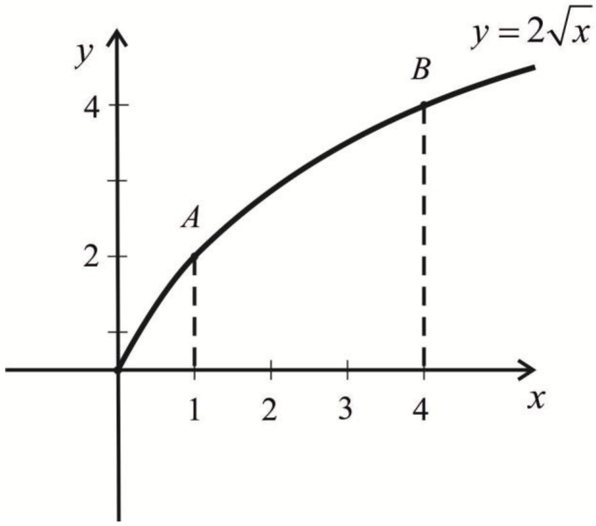


Рис. 18

Складемо вираз $\sqrt{1+(f'(x))^2}=\sqrt{1+(y'(x))^2}=\sqrt{1+\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^2}=$ $=\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}$.

$$L=\int_1^4\sqrt{1+\frac{1}{x}}dx=\int_1^4\sqrt{\frac{1+x}{x}}dx=\int_1^4\frac{1+x}{\sqrt{x^2+x}}dx=$$

$$=\int_1^4\frac{1+x}{\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}}}dx=\left|\begin{array}{l} t=x+\dfrac{1}{2} \\ dt=dx \\ x=1\Leftrightarrow t=\dfrac{3}{2} \\ x=4\Leftrightarrow t=\dfrac{9}{2}\end{array}\right|=\int_{\frac{3}{2}}^{\frac{9}{2}}\frac{t+\frac{1}{2}}{\sqrt{t^2-\frac{1}{4}}}dt=$$

$$=\int\limits_{\frac{3}{2}}^{\frac{9}{2}}\frac{t}{\sqrt{t^2-\frac{1}{4}}}dt+\frac{1}{2}\int\limits_{\frac{3}{2}}^{\frac{9}{2}}\frac{dt}{\sqrt{t^2-\frac{1}{4}}}=\sqrt{t^2-\frac{1}{4}}\Bigg|_{\frac{3}{2}}^{\frac{9}{2}}+\frac{1}{2}\ln\left|t+\sqrt{t^2-\frac{1}{4}}\right|\Bigg|_{\frac{3}{2}}^{\frac{9}{2}}=$$

$$=\sqrt{20}-\sqrt{2}+\frac{1}{2}\ln\frac{\frac{9}{2}+\sqrt{20}}{\frac{3}{2}+\sqrt{2}}\text{(од).}$$

Приклад 4.10. Знайти довжину дуги кривої $y=\arcsin(e^{-x})$ від точки з абсцисою $x_1=0$ до точки з абсцисою $x_2=1$.

Розв'язання

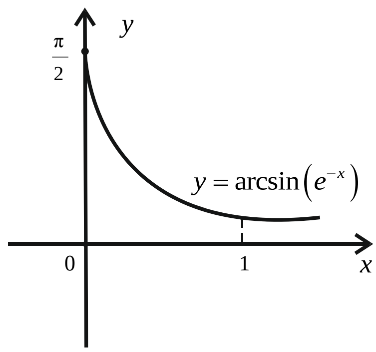


Рис. 19

Знайдемо похідну $y'=-\dfrac{e^{-x}}{\sqrt{1-e^{-2x}}}$.

Обчислимо вираз $\sqrt{1+(f'(x))^2}=\sqrt{1+(y'(x))^2}=\sqrt{1+\dfrac{e^{-2x}}{1-e^{-2x}}}=$

$$=\frac{1}{\sqrt{1-e^{-2x}}}=\frac{e^x}{\sqrt{e^{2x}-1}}.$$

Застосуємо формулу (4.9)

$$L=\int\limits_0^1\frac{e^x dx}{\sqrt{e^{2x}-1}}=\int\limits_0^1\frac{d(e^x)}{\sqrt{(e^x)^2-1}}=\ln\left(e^x+\sqrt{e^{2x}-1}\right)\Bigg|_0^1=\ln\left(e+\sqrt{e^2-1}\right)\text{(од).}$$

4.2.2. Параметричне задання кривої

Якщо криву задано рівняннями в параметричній формі

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \ t_1 \le t \le t_2,$$

де $x(t)$, $y(t)$ є неперервно диференційованими функціями на відрізку $\left[t_1, t_2\right]$, то довжина дуги кривої дорівнює

$$L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(x'\left(t\right)\right)^2 + \left(y'\left(t\right)\right)^2}\,dt, \tag{4.10}$$

де t_1, t_2 – значення параметра t, що відповідають кінцям дуги $\left(t_1 < t_2\right)$.

Приклад 4.11. Обчислити довжину дуги однієї арки циклоїди

$$\begin{cases} x = 2(t - \sin t) \\ y = 2(1 - \cos t) \end{cases}$$

Розв'язання. Циклоїду (рис. 12) задано в параметричній формі, тому скористаємось формулою (4.10). Продиференцюємо по t параметричні рівняння циклоїди

$$x'(t) = (2(t - \sin t))' = 2(1 - \cos t);$$
$$y'(t) = (2(1 - \cos t))' = 2\sin t$$

і обчислимо підинтегральну функцію:

$$\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} = \sqrt{4(1-\cos t)^2 + 4\sin^2 t} = 2\sqrt{1 - 2\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t} =$$
$$= 2\sqrt{2(1-\cos t)} = 2\sqrt{2 \cdot 2\sin^2\frac{t}{2}} = 4\left|\sin\frac{t}{2}\right|.$$

Одна арка утворюється при зміні параметра t від 0 до 2π. Отже $\sin\dfrac{t}{2} \ge 0$. Маємо

$$L=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}dt=4\int_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}dt=-8\cos\frac{t}{2}\Bigg|_0^{2\pi}=$$

$$=-8(\cos\pi-\cos 0)=16(\text{од}).$$

Приклад 4.12. Знайти довжину дуги кривої

$$\begin{cases} x=t^2+3t+2 \\ y=t^2-3t+4 \end{cases},\ t\in[0,2].$$

Розв'язання. Продиференцюємо по t параметричні рівняння кривої:

$$x'(t)=2t+3;\ y'(t)=2t-3.$$

і обчислимо підинтегральну функцію:

$$\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2)}=\sqrt{(2t+3)^2+(2\mathrm{t}-3)^2}=\sqrt{4t^2+12t+9+4t^2-12t+9}=$$

$$=\sqrt{8t^2+18}.$$

$$L=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{(x'(t))^2+(y'(\mathrm{t}))^2}=\int_0^2\sqrt{8t^2+18}dt=\begin{vmatrix} u=\sqrt{8t^2+18}, & du=\dfrac{8t}{\sqrt{8t^2+18}} \\ dv=dt, & v=t \end{vmatrix}=$$

$$=t\sqrt{8t^2+18}\Big|_0^2-\int_0^2\frac{8t^2dt}{\sqrt{8t^2+18}}=2\sqrt{50}-\int_0^2\frac{8t^2+18-18}{\sqrt{8t^2+18}}dt=$$

$$=10\sqrt{2}-\int_0^2\sqrt{8t^2+18}dt+18\int_0^2\frac{dt}{\sqrt{8t^2+18}}.$$

Отже

$$L=\int_0^2\sqrt{8t^2+18}dt=\frac{1}{2}\left(10\sqrt{2}+\frac{9}{\sqrt{2}}\int_0^2\frac{dt}{\sqrt{t^2+\frac{9}{4}}}\right)=\frac{1}{2}(10\sqrt{2}+\frac{9}{\sqrt{2}}\ln(t+\sqrt{t^2+\frac{9}{4}})\Bigg|_0^2$$

$$=5\sqrt{2}+\frac{9}{2\sqrt{2}}\ln\frac{2+\sqrt{\frac{25}{4}}}{\sqrt{\frac{9}{4}}}=5\sqrt{2}+\frac{9}{2\sqrt{2}}\ln 3(\text{од}).$$

4.2.3. Задання кривої в полярній системі координат

Якщо криву задано рівнянням $\rho=\rho(\varphi)$ в полярній системі координат, де функція $\rho(\varphi)$ є неперервна диференційованою на відрізку $[\alpha,\beta]$, то довжина дуги кривої дорівнює

$$L=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{\rho^2(\varphi)+(\rho'(\varphi))^2}\,d\varphi, \qquad (4.11)$$

де α і β є значеннями кута на кінцях дуги $(\alpha<\beta)$.

Приклад 4.13. Знайти довжину кардіоїди $\rho=3(1+\cos\varphi),\ 0\le\varphi\le 2\pi.$

Розв'язання. Побудуємо графік кривої, рівняння якої задано у полярних координатах. Зазначимо, що у разі заміни φ на $-\varphi$ рівняння не змінюється. Отже крива розташована симетрично відносно полярної осі. Якщо φ змінюється від 0 до π, то ρ спадає від 6 до 0. Складемо таблицю значень аргументна φ і функції ρ:

φ	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π
ρ	6	3	0	3	6

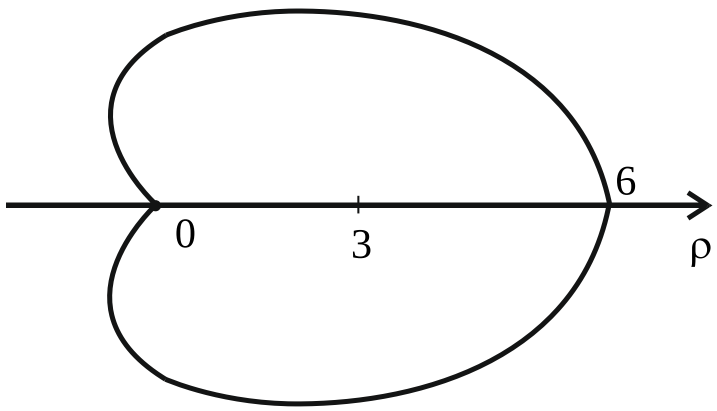


Рис. 20

Для обчислення довжини дуги L застосуємо формулу (4.11).

$$\rho'(\varphi)=(3(1+\cos\varphi))'=-3\sin\varphi,$$

тому

$$\sqrt{\rho^2(\varphi)+(\rho'(\varphi))^2}=\sqrt{9(1+\cos\varphi)^2+9\sin^2\varphi}=3\sqrt{1+2\cos\varphi+\cos^2\varphi+\sin^2\varphi}=$$

$$=3\sqrt{2(1+\cos\varphi)}=3\sqrt{2}\sqrt{2\cos^2\frac{\varphi}{2}}=6\left|\cos\frac{\varphi}{2}\right|.$$

Кардіоїда симетрична відносно полярної осі, тому знайдемо довжину її верхньої половини і помножимо на 2. Оскільки $\cos\frac{\varphi}{2}>0$ при $\varphi\in(0,\pi)$, то $\left|\cos\frac{\varphi}{2}\right|=\cos\frac{\varphi}{2}$.

Маємо

$$L=\int_\alpha^\beta\sqrt{\rho^2(\varphi)+(\rho'(\varphi))^2}\,d\varphi=2\cdot 6\int_0^\pi\cos\frac{\varphi}{2}d\varphi=24\sin\frac{\varphi}{2}\Big|_0^\pi=24(\text{од}).$$

Приклад 4.14. Знайти довжину дуги кривої

$$\rho=2\sin^4\frac{\varphi}{4},\ 0\le\varphi\le\pi.$$

Розв'язання. $\rho'(\varphi)=2\sin^3\frac{\varphi}{4}\cos\frac{\varphi}{4}$

$$L=\int_\alpha^\beta\sqrt{\rho^2(\varphi)+(\rho'(\varphi))^2}\,d\varphi=\int_0^\pi\sqrt{4\sin^8\frac{\varphi}{4}+4\sin^6\frac{\varphi}{4}\cos^2\frac{\varphi}{4}}\,d\varphi=2\int_0^\pi\sqrt{\sin^6\frac{\varphi}{4}}\,d\varphi=$$

$$=2\int_0^\pi\sin^3\frac{\varphi}{4}d\varphi=2\int_0^\pi(1-\cos^2\frac{\varphi}{4})\sin\frac{\varphi}{4}d\varphi=2\left(-4\cos\frac{\varphi}{4}+\frac{4}{3}\cos^3\frac{\varphi}{4}\right)\Bigg|_0^\pi=$$

$$=2\left(4-4\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{4}{3}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3-\frac{4}{3}\right)=\frac{2}{3}(8-5\sqrt{2})\,(\text{од}).$$

Зауваження. Формули (4.9), (4.10)., (4.11) можна об'єднати в одну

$$L=\int_A^B dL$$

де dL – диференціал дуги, причому

$$dL = \begin{cases} \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx, & y = f(x); \\ \sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\,dt & \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}; \\ \sqrt{(\rho(\varphi))^2+(\rho'(\varphi')^2}\,d\varphi, & \rho = \rho(\varphi). \end{cases}$$

4.3. Обчислення об'ємів тіл обертання

4.3.1 Декартова система координат

Об'єм тіла, утвореного обертанням криволінійної трапеції, обмеженої кривою $y = f(x)\ (f(x) \geq 0)$, віссю Оx і прямими $x = a,\ x = b\ (a < b)$ навколо осей Оx і Оy виражається відповідно, формулами

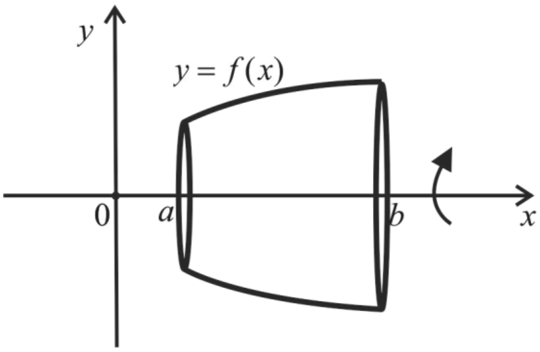


Рис. 21

$$V_x = \pi\int_a^b f^2(x)dx. \qquad (4.12)$$

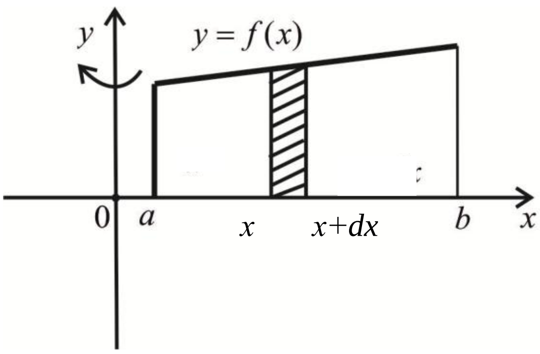


Рис. 22

$$V_y = 2\pi\int_a^b xf(x)dx. \qquad (4.13)$$

Зауваження. На рис. 22 елемент тіла обертання утворюється обертанням навколо осі Оy прямокутника зі сторонами y і dx, що відстоїть від осі Оy на величину x. Тоді елемент об'єму

$$dV_y = 2\pi xydx\,.$$

Приклад 4.15. Обчислити об'єми тіл, утворених обертанням фігури, обмеженої однією півхвилею синусоїди $y = \sin x$ і відрізком $0 \le x \le \pi$ осі Оx навколо
а) осі Ox; б) осі Оy.

Розв'язання.

$$a)\ V_x = \pi\int_a^b f^2(x)dx = \pi\int_0^b y^2 dx = \pi\int_0^\pi \sin^2 xdx = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi (1-\cos 2x)dx =$$

$$= \frac{\pi}{2}\left(x - \frac{\sin 2x}{2}\right)\Bigg|_0^\pi = \frac{\pi}{2}\cdot\pi = \frac{\pi^2}{2}(\text{куб.од}).$$

$$б)\ V_y = 2\pi\int_a^b xf(x)dx = 2\pi\int_0^\pi xydx = 2\pi\int_0^\pi x\sin xdx = \begin{vmatrix} u = x,\ du = dx \\ d\nu = \sin xdx,\ \nu = -\cos x \end{vmatrix} =$$

$$= 2\pi\left(-x\cos x\Bigg|_0^\pi + \int_0^\pi \cos xdx\right) = 2\pi^2(\text{куб.од}).$$

Якщо тіло утворюється обертанням фігури, обмеженої кривими $y = f_1(x)$; $y = f_2(x)$ $(0 \le f_1(x) \le f_2(x))$ і прямими $x = a$ і $x = b$, відповідно, навколо осей Оx і Оy, то об'єми тіл обертання виражаються формулами:

$$V_x = \pi\int_a^b (f_2^2(x) - f_1^2(x))dx, \qquad (4.14)$$

$$V_y = 2\pi\int_a^b x(f_2(x) - f_1(x))dx. \qquad (4.15)$$

Приклад 4.16. Знайти об’єм тіла, утвореного обертанням фігури, обмеженої кривими $y = 2x^2$, $y = x^3$, навколо осі Оx.

Розв’язання. Знайдемо абсциси точок, в яких перетинаються графіки функцій $y = 2x^2$, $y = x^3$, розв’язуючи систему рівнянь.

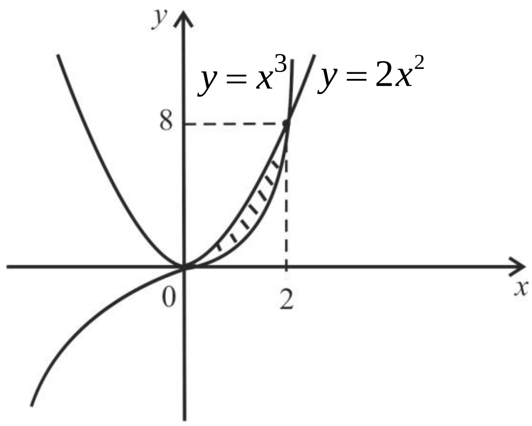


Рис 23

$$\begin{cases} y = 2x^2, \\ y = x^3 \end{cases} . \Rightarrow 2x^2 = x^3;\ x^2(2-x) = 0,\ x_1 = 0,\ x_2 = 2.$$

Застосуємо формулу (4.14):

$$V_x = \pi\int_0^2((2x)^2 - (x^3)^2)dx = \pi\int_0^2(4x^4 - x^6)dx = \pi\left(\frac{4x^5}{5} - \frac{x^7}{7}\right)\Bigg|_0^2 =$$

$$= \pi\left(\frac{128}{5} - \frac{128}{7}\right) = 128\pi\cdot\frac{2}{35} = \frac{256}{35}\pi(\text{куб.од})$$

Приклад 4.17. Знайти об’єм тіла, утвореного обертанням фігури, обмеженої кривими $xy = 4$ і $x + y = 5$, навколо осі Оy.

Розв’зання.

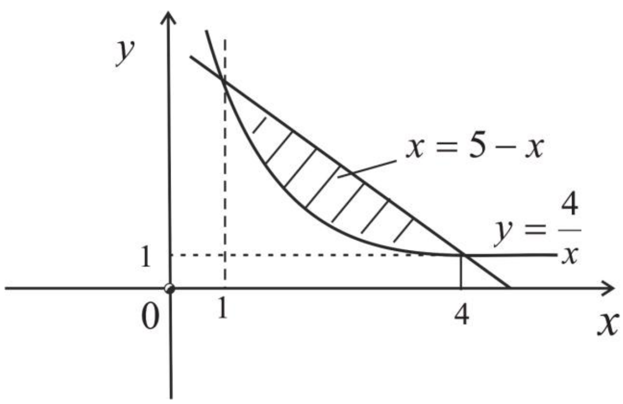


Рис. 24

Знайдемо абсциси точок перетину гіперболи $y = \dfrac{4}{x}$ і прямої $y = 5 - x$, розв'язуючи систему рівнянь, $\begin{cases} xy = 4, \\ x + y = 5. \end{cases}$

Маємо $\begin{cases} x(5 - x) = 4, \\ x + y = 5 \end{cases} \Rightarrow x^2 - 5x + 4 = 0,\ x_1 = 1,\ x_2 = 4.$

Застосуємо формулу (4.15):

$$V_y = 2\pi\int_a^b x(f_2(x) - f_1(x))dx = 2\pi\int_1^4 x(5 - x - \frac{4}{x})dx = 2\pi\int_1^4 \left(5x - x^2 - 4\right)dx =$$

$$= 2\pi\left(\frac{5}{2}x^2 - \frac{x^3}{3} - 4x\right)\Bigg|_1^4 = 2\pi\left(\frac{75}{2} - \frac{63}{3} - 12\right) = 9\pi(\text{куб.од}).$$

Якщо тіло утворюється обертанням навколо осі Оу криволінійної трапеції, обмеженої кривою $x = g(y)\ \left(g(y) \geq 0\right)$, віссю О$y$ і прямими $y=c$, $y=d(c<d)$ то об'єм тіла обертання (рис. 25) виражається формулой (4.16)

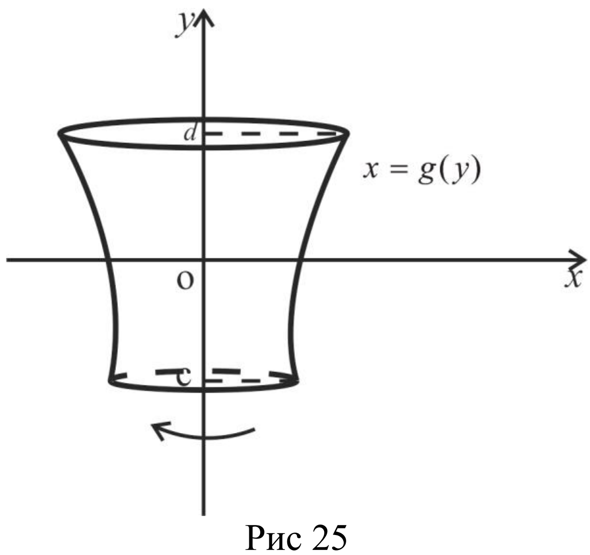


Рис 25

$$V_y = \pi\int_c^d g^2(y)dy. \tag{4.16}$$

Приклад 4.18. Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Оy фігури, обмеженої віссю Оy, кривою $x=\sqrt{y}$ і прямою $y=1$.

Розв'язання.

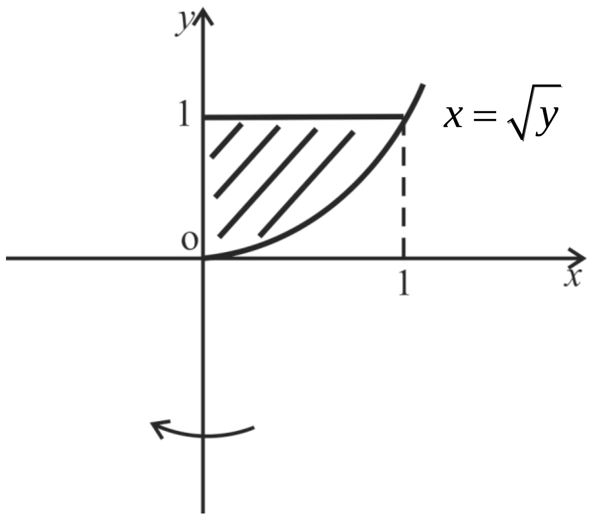


Рис 26

$$V_y = \pi\int_c^d g^2(y)dy = \pi\int_c^d x^2 dy = \pi\int_0^1 y dy = \pi \left.\frac{y^2}{2}\right|_0^1 = \frac{\pi}{2} \text{(куб.од)}$$

Якщо тіло утворюється обертанням навколо осі Оy фігури, обмеженої кривими $x=g_1(y)$, $x=g_2(y)(0\le g_1(y)\le g_2(y))$ і прямими $y=c;\ y=d\ (c<d)$, то об'єм тіла обертання дорівнює

$$V_y = \pi\int_c^d (g_2^2(y) - g_1^2(y))dy. \tag{4.17}$$

Приклад 4.19. Знайти об'єм тіла, утвореного при обертанні навколо осі Oy фігури, обмеженої кривою $x^2-4x+y^2+3=0$.

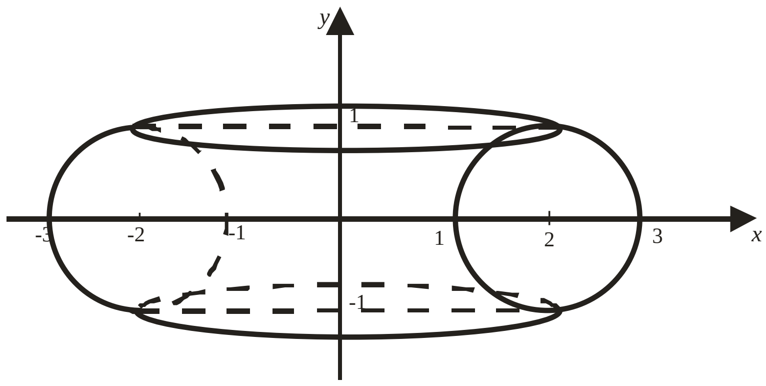


Рис. 27

Розв'язання. Виконаємо (рис. 27). Оскільки $x^2-4x+y^2+3=$ $=0 \Leftrightarrow (x-2)^2+y^2=1$, маємо коло радіуса 1 с центром в точці (2;0). Об'єм тіла обертання (об'єм шини) є різницею об'ємів тіл, що утворюється обертанням двох криволінійних трапецій навколо осі Oy. Одна з трапецій обмежена лініями x = 0, y = – 1, y =1, $x=2-\sqrt{1-y^2}$. Друга трапеція обмежена лініями – $x=0$, $y=-1$, $y=1$, $x=2+\sqrt{1-y^2}$

Інакше кажучи, в данному прикладі тіло утворене обертанням навколо осі Oy фігури, обмеженої кривими $x=g_1(y)=2-\sqrt{1-y^2}$, $x=g_2(y)=2+\sqrt{1-y^2}$ і прямими $y=-1$, $y=1$.

Тому за формулою (4.17) маємо

$$V_y=\pi\int_{-1}^{1}(g_2^2(y)-g_1^2(y))dy=\pi\int_{-1}^{1}\left[(2+\sqrt{1-y^2})^2-(2-\sqrt{1-y^2})^2\right]dy=$$

$$=8\pi\int_{-1}^{1}\sqrt{1-y^2}\,dy.$$

Інтеграл $\int_{-1}^{1}\sqrt{1-y^2}\,dy=\dfrac{\pi}{2}$, оскільки він дорівнює площі півкола радіуса 1, тому $V_y=4\pi^2$(куб.од).

Зауваження.

1. Якщо тіло утворене обертанням навколо осі Оx або Оy кривої, заданої в параметричному вигляді, то в формулах (4.12) – (4.15) слід виконати відповідну заміну змінної.

2. Якщо тіло утворене обертанням навколо полярної осі криволінійного сектора, обмеженого кривою $\rho = \rho(\varphi) \geq 0$ і променями $\varphi = \alpha, \varphi = \beta \; (0 \leq \alpha \leq \beta \leq \pi)$, то об’єм тіла

$$V = \frac{2\pi}{3}\int_{\alpha}^{\beta}\rho^3 \sin\varphi d\varphi. \qquad (4.18)$$

4.4. Обчислення площ поверхонь тіл обертання

Площа поверхні, утвореної обертанням навколо осі Ох дуги кривої $y = f(x), x \in [a,b]$, де $f(x) \geq 0$ є неперервно диференційованою функцією на відрізку [a,b], виражається інтегралом

$$P_x = 2\pi\int_{a}^{b} f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}dx. \qquad (4.19)$$

Площа поверхні, утвореної обертанням навколо осі Оy дуги кривої $x = g(y), y \in [c,d]$, де $g(y) \geq 0$ є неперервно диференційовною на відрізку [c,d], виражається інтегралом

$$P_y = 2\pi\int_{c}^{d} g(y)\sqrt{1+(g'(y))^2}dy. \qquad (4.20)$$

Приклад 4.20. Знайти площу поверхні, утвореної обертанням навколо осі Ох однієї півхвилі синусоїди $y = \sin x, x \in [0,\pi]$

Розв’язання. Виконаємо рисунок (рис. 28).

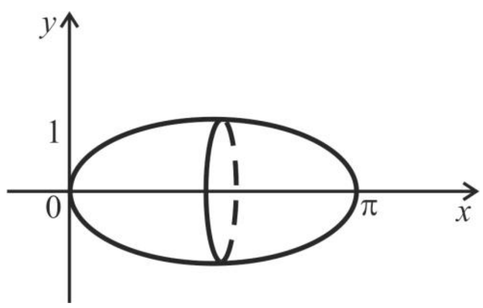


Рис. 28

Застосуємо формулу (4.19):

$$P_x = 2\pi\int_0^{\pi} \sin x\sqrt{1+\cos^2 x}dx = \left| \begin{array}{l} t=\cos x \\ dt=-\sin x dx \\ x=0 \Leftrightarrow t=1 \\ x=\pi \Leftrightarrow t=-1 \end{array} \right| = -2\pi\int_1^{-1}\sqrt{1+t^2}dt =$$

$$= 4\pi\int_0^1\sqrt{1+t^2}dt.$$

Обчислимо інтеграл $\int_0^1\sqrt{1+t^2}dt$, застосовуючи метод інтегрування частинами:

$$\int_0^1\sqrt{1+t^2}dt = \left| \begin{array}{ll} u=\sqrt{1+t^2}, & du=\dfrac{tdt}{\sqrt{1+t^2}} \\ dv=dt, & v=t \end{array} \right| =$$

$$= t\sqrt{1+t^2}\Big|_0^1 - \int_0^1\frac{t^2}{\sqrt{1+t^2}}dt = \sqrt{2} - \int_0^1\frac{t^2+1-1}{\sqrt{1+t^2}}dt =$$

$$= \sqrt{2} - \int_0^1\sqrt{1+t^2}dt + \int_0^1\frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} = \sqrt{2} - \int_0^1\sqrt{1+t^2}dt +$$

$$+\ln\left|t+\sqrt{1+t^2}\right|\Big|_0^1 = \sqrt{2} - \int_0^1\sqrt{1+t^2}dt + \ln(1+\sqrt{2})$$

Тому

$$\int_0^1\sqrt{1+t^2}dt = \frac{\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2})}{2}$$

Отже

$$P_x = 4\pi\cdot\frac{\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2})}{2} = 2\pi(\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2}))\left(\text{кв.од}\right).$$

Приклад 4.21. Знайти площу поверхні, утвореної обертанням навколо осі Oy кривої $x^2 = y+2,\ y \in [-2,1]$.

Розв'язання. Виконаємо рисунок (рис. 29).

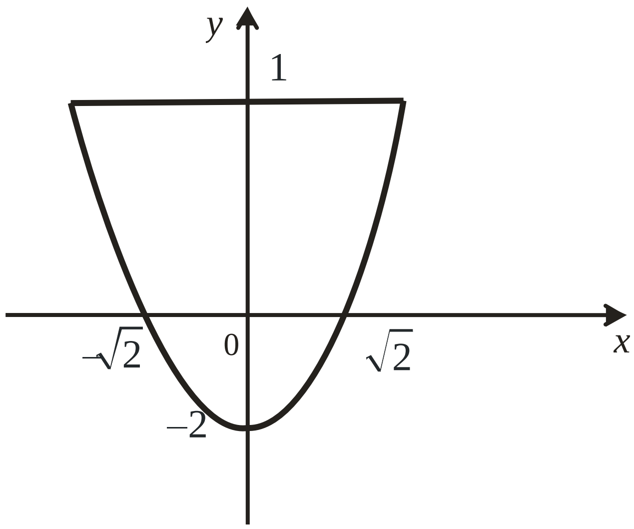


Рис. 29

Застосуємо формулу (4.20).

Тут $g(y) = \sqrt{y+2};\ g'(y) = \dfrac{1}{2\sqrt{y+2}};$

$1 + (g'(y))^2 = 1 + \dfrac{1}{4(y+2)} = \dfrac{4y+9}{4(y+2)}.$

$$P_y = 2\pi \int_{-2}^{1} \sqrt{y+2}\sqrt{\frac{4y+9}{4(y+2)}}dy = \pi \int_{-2}^{1} \sqrt{4y+9}dy = \frac{\pi}{4}\int_{-2}^{1} \sqrt{4y+9}d(4y+9)$$

$$= \frac{\pi}{4}\cdot\frac{2}{3}(4y+9)^{3/2}\Bigg|_{-2}^{1} = \frac{\pi}{6}(13\sqrt{13}-1)(\text{кв.од})$$

Зауваження

1. Якщо криву задано рівняннями в параметричній формі: $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases},\ t \in [t_1, t_2]$, де $x(t),\ y(t)$ є неперервно диференційовними функціями на відрізку $[t_1, t_2]$, то площі поверхонь, утворених обертанням кривої навколо осей Оx і Оy, обчислюється з формулами:

$$P_x = 2\pi\int_{t_1}^{t_2} |y(t)|\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,dt; \tag{4.21}$$

$$P_y = 2\pi\int_{t_1}^{t_2} |x(t)|\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,dt. \tag{4.22}$$

2. Якщо криву задано рівнянням $\rho = \rho(\varphi)$ в полярній системі координат і функція $\rho(\varphi)$ є неперервно диференційованою на $[\alpha, \beta]$, то площа поверхні, утвореної обертанням навколо полярної осі кривої

$$\rho = \rho(\varphi), \quad 0 \le \alpha \le \varphi \le \beta \le \pi$$

виражається формулою:

$$P = 2\pi\int_{\alpha}^{\beta} \rho(\varphi)\sqrt{\rho^2(\varphi) + (\rho'(\varphi))^2}\,\sin\varphi\, d\varphi. \tag{4.23}$$

5. ЗАСТОСУВАННЯ ВИЗНАЧЕНОГО ІНТЕГРАЛА ДО РОЗВ'ЯЗАННЯ ПРИКЛАДНИХ ЗАДАЧ

В п. 4 розглянуто застосування визначеного інтеграла до розв'язання геометричних задач, а саме: обчислення площ плоских фігур, довжин дуг кривих, об'ємів тіл обертання, площ поверхонь обертання. Відповідні формули (4.1) – (4.23) в теоретичному курсі виводяться на основі означення визначеного інтеграла.

Застосуємо цей підхід до розв'язання деяких фізичних і механічних задач. Спочатку наведемо загальну схему застосування визначеного інтеграла.

5.1. Загальна схема застосування визначеного інтеграла

Нехай необхідно знайти значення якої-небудь геометричної або фізичної величини А, що відповідає зміни незалежної змінної x від a до b. Будемо передбачати величину А адитивною, тобто такою, що при розбитті відрізка $[a,b]$ точкою с ($a<c<b$) на частини $[a,c]$ і $[c,b]$ значення А, яке відповідає відрізкові $[a,b]$, дорівнює сумі значень, що відповідають $[a,c]$ і $[c,b]$.

Розіб'ємо відрізок $[a,b]$ на n частинних відрізків $\left[x_{i-1}, x_i\right] (i=\overline{1,n})$ точками $x_1, x_2, ..., x_{n-1}$:

$$a < x_1 < x_2 < ... < x_{n-1} < b, \text{ поклавши } x_0 = a,\ x_n = b.$$

Відповідно до цього величина А розіб'ється на *n* доданків

$$A = \sum_{i=1}^{n} \Delta A_i .$$

Нехай існує така функція *f*(*x*), що «елементарний» доданок ΔA_i, який відповідає відрізкові $\left[x_{i-1}, x_i\right]$, можна представити у вигляді

$$\Delta A_i \approx f(\alpha_i) \cdot \Delta x_i , \tag{5.1}$$

де $x_{i-1} < \alpha_i < x_i$,

причому точність наближеної рівності (5.1) тим вище, чим меншою є найбільша з довжин Δx_i частинних відрізків $\left[x_{i-1}, x_i\right]$. В цьому випадку одержуємо наближену рівність для А:

$$A \approx \sum_{i=1}^{n} f(\alpha_i) \Delta x_i \tag{5.2}$$

тим більш точну, чим меншим є значення $\max \Delta x_i$.

Тоді природно вважати

$$A = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\alpha_i) \Delta x_i = \int_a^b f(x) dx . \tag{5.3}$$

На практиці наведені міркування формулюють в більш компактній формі. Якщо елемент ΔA величини А, що відповідає елементарному відрізкові $[x, x+\Delta x]$, з точністю до малих вищого порядку можна представити у вигляді

$$\Delta A \approx f(x) \cdot \Delta x, \tag{5.4}$$

$$\text{то } A = \int_a^b f(x)dx. \qquad (5.5)$$

5.2. Задача про пройдений шлях

Нехай точка рухається вздовж прямій зі швидкістю $v(t)$, де $v(t)$ є неперервною функцією часу t. Треба визначити шлях s, який пройде точка за проміжок часу $[a,b]$: від моменту $t = a$ до моменту $t = b$ ($a<b$).

Розв'язання.

Розіб'ємо відрізок $[a,b]$ точками

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < ... < t_{n-1} < t_n = b$$

на n частинних відрізків $\left[t_{i-1}, t_i\right]\left(i = \overline{1,n}\right)$. Припустимо, що відрізок $\left[t_{i-1}, t_i\right]$ є таким малим, що швидкість $v(t)$ на цьому відрізку можна вважати сталою і рівною, наприклад $v(\alpha_i)$ де $\alpha_i \in \left[t_{i-1}, t_i\right]$. Це означає, що рух точки на проміжку $\left[t_{i-1}, t_i\right]$ вважається рівномірним. Тому шлях Δs_i пройдений точкою за час $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$ наближено дорівнює

$$\Delta s_i \approx v(\alpha_i)\Delta t_i,$$

а шлях s, пройдений за час $[a,b]$, виражається наближеною формулою

$$s \approx \sum_{i=1}^{n} v(\alpha_i) \cdot \Delta t_i. \qquad (5.6)$$

Ця наближена рівність тим точніша, чим менші величини Δt_i. Тому природно за шлях S вважати границю знайденої суми

$$s = \lim_{\max \Delta t_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} v(\alpha_i)\Delta t_i = \int_a^b v(t)dt. \qquad (5.7)$$

Приклад 5.1. Знайти шлях, що буде пройденим автомобілем за 2 години від початку руху, якщо його швидкість в довільний момент часу дорівнює

$$v(t) = t + \sin \pi t \text{ км/год.}$$

Розв'язання.

$$s = \int_a^b v(t)dt = \begin{vmatrix} a = 0 \\ b = 2 \end{vmatrix} = \int_0^2 (t + \sin \pi t)dt = \left(\frac{t^2}{2} - \frac{1}{\pi}\cos \pi t\right)\Bigg|_0^2 = (2 - \frac{1}{\pi}\cos 2\pi) -$$

$$-(0 - \frac{1}{\pi}\cos 0) = 2(\text{км}).$$

5.3. Задача про масу неоднорідного стержня і координати центра мас

Нехай прямолінійний стержень лежить на осі Ох в межах відрізка $[a,b]$. Треба знайти масу m цього стержня, якщо його густина γ є деякою неперервною функцією від $x: \gamma = \gamma(x)$.

Розв'язання

Розіб'ємо стержень на n довільних частин $\left[x_{i-1}, x_i\right] (i = \overline{1,n})$ точками

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b.$$

Якщо відрізок $\left[x_{i-1}, x_i\right]$ достатньо малий, то функція $\gamma(x)$ на ньому змінюється мало. Тому маса Δm_i частини стержня

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1},$$

яка відповідає цьому відрізку, наближено дорівнює

$$\Delta m_i \approx \gamma(\alpha_i)\Delta x_i \text{, де } \alpha_i \in \left[x_{i-1}, x_i\right],$$

а маса всього стержня

$$m \approx \sum_{i=1}^{n} \gamma(\alpha_i) \cdot \Delta x_i . \qquad (5.8)$$

Точне значення маси знайдемо як границю цієї суми, тобто

$$m = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \gamma(\alpha_i)\Delta x_i = \int_a^b \gamma(x)dx. \qquad (5.9)$$

Знайдемо координати центра мас. Якщо Δx_i малі, то стержень можна представити у вигляді системи матеріальних точок з координатами $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n$ *і* масами $\Delta m_i = \gamma(\alpha_i)\Delta x_i$.

Центр мас такої системи має координату

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i \Delta m_i}{\sum_{i=1}^{n} \Delta m_i} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i \gamma(\alpha_i)\Delta x_i}{\sum_{i=1}^{n} \gamma(\alpha_i)\Delta x_i}. \qquad (5.10)$$

Координату центра мас стержня одержимо граничним переходом при

$$\max \Delta x_i \to 0:$$

$$x_{\text{ц.м}} = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i \gamma(\alpha_i)\Delta x_i}{\sum_{i=1}^{n} \gamma(\alpha_i)\Delta x_i} = \frac{\int_a^b x\gamma(x)dx}{\int_a^b \gamma(x)dx} \qquad (5.11)$$

Приклад 5.2. Знайти масу стержня, розташованого на відрізку [0,2] осі Оx, якщо його густина $\gamma(x) = 1 + \cos\frac{\pi x}{2}$. Обчислити координату його центра мас.

Розв’язання

$$m = \int_a^b \gamma(x)dx = \int_0^2 (1 + \cos\frac{\pi x}{2})dx = \left(x + \frac{2}{\pi}\sin\frac{\pi x}{2} \right)\Bigg|_0^2 = 2.$$

$$x_{\text{ц.м}}\frac{\int_a^b x\gamma(x)dx}{m}=\frac{1}{2}\int_0^2 x\left(1+\cos\frac{\pi x}{2}\right)dx=\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2}\Big|_0^2+\int_0^2 x\cos\frac{\pi x}{2}dx\right)=$$

$$=\left|\begin{matrix} u=x,\ du=dx; \\ dv=\cos\frac{\pi x}{2};\ v=\frac{2}{\pi}\sin\frac{\pi x}{2}\end{matrix}\right|=\frac{1}{2}\left(2+\frac{2}{\pi}x\sin\frac{\pi x}{2}\Big|_0^2-\frac{2}{\pi}\int_0^2\sin\frac{\pi x}{2}dx\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(2+\frac{4}{\pi^2}\cos\frac{\pi x}{2}\Big|_0^2\right)=\frac{1}{2}\left(2-\frac{8}{\pi^2}\right)=1-\frac{4}{\pi^2}.$$

5.4. Задача про роботу змінні сили

Нехай на матеріальну точку діє сила $\overline{F}$, яка є сталою за напрямом і неперервно змінюється за величиною. Нехай під дією цієї сили точка перемістилася вздовж осі Ох з точки a в точку b ($a<b$). Обчислити роботу цієї сили на відрізку $[a,b]$

Розв'язання. У кожній точці $x\in[a,b]$ діє сила $\overline{F}$, величина якої за умовою є неперервною функцією від x: $F=F(x)$.

Розіб'ємо відрізок $[a,b]$ точками

$$a=x_0<x_1<x_2<...<x_{n-1}<x_n=b$$

на n частинних відрізків $\left[x_{i-1},x_i\right]$, $i=\overline{1,n}$. Припустимо, що кожний з частинних відрізків є таким малим, що $F(x)$ на ньому можна вважати сталою і рівною значенню в деякій довільно вибраній точці $\alpha_i\in\left[x_{i-1},x_i\right]$:

$$F=F(\alpha_i).$$

Робота, що виконана силою $\overline{F}$ на відрізку $\left[x_{i-1},x_i\right]$ наближено дорівнює

$$\Delta A_i\approx F(\alpha_i)\cdot\Delta x_i.$$

Оскільки робота на відрізку $[a,b]$ дорівнює сумі робіт на всіх частинних відрізках, то

$$\Delta A_i \approx \sum_{i=1}^{n} F(\alpha_i)\Delta x_i . \qquad (5.12)$$

Ця наближена рівність тим точніша, чим менші довжини Δx_i . Тому природно за роботу сили $\overline{F}$ на шляху $[a,b]$ вважати границю суми (5.12), а саме:

$$A = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} F(\alpha_i)\Delta x_i = \int_a^b F(x)dx \qquad (5.13)$$

Приклад 5.3. Яку роботу треба виконати, щоб розтягнути пружину на 10 см, якщо сила в 20Н розтягує пружину на 5 см?

Розв'язання. За Законом Гука упруга сила, що розтягує пружину, пропорційна розтягу x, тобто

$$F(x) = k \cdot x ,$$

де k – коєффіцієнт пропорційності (жорсткість пружини). За умовою задачі сила F = 20Н розтягую пружину на x = 0,05 м. Отже 20 = k 0,05, звідси k = 400 (Н/м), отже F = 400 x. Шукана робота за формулою (5.13) дорівнює

$$A = \int_0^{0,1} 400x dx = 200x^2 \Big|_0^{0,1} = 2 \text{ (дж)} .$$

6. ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Завдання 1. а), б), в), г), д).

Обчислити визначені інтеграли.

Завдання 2. а), б), в), г).

Обчислити площу фігури, обмеженої даними кривими

Завдання 3. а), б), в).

Знайти довжину дуги кривої.

Завдання 4. Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням фігури, обмеженої даними кривими, навколо даної осі.

Завдання 5. Знайти площу поверхні, утвореної при обертанні даної кривої навколо заданої осі.

Завдання 6. Знайти шлях, що буде пройденим тілом від моменту t_0=0 до моменту t_1.

Завдання 7. Знайти масу стержня, розташованого на відрізку [a,b] осі Ox, якщо його густина $\gamma(x)$. Обчислити координату його центра мас.

Завдання 8. Знайти роботу, що виконується при розтягу пружини жорсткості k Н/см на l см.

Варіант 1

1. $a)\ \int\limits_0^1 (x^3+x)dx;\quad б)\ \int\limits_{-1}^0 \frac{dx}{x\sqrt{1+4\ln^2 x}};\quad в)\ \int\limits_3^4 \frac{dx}{x^2\sqrt{25-x^2}};$

$г)\ \int\limits_0^1 x^2e^{4x}dx;\quad д)\ \int\limits_1^e x^4\ln x dx.$

2. $a)\ y=x^2,\ y=8-x^2;\quad б)\ y=\frac{x-1}{e-1},\ y=\ln x;$

$в)\ \begin{cases} x=3(t-\sin t) \\ y=3(1-\cos t)\end{cases};\ x=3(\frac{\pi}{4}-\frac{\sqrt{2}}{2}),\ y=0;$

$г)\ \rho=2+\cos 4\varphi.$

3. $a)\ y=\ln x\ (\sqrt{3}\le x\le\sqrt{15});\quad б)\ \begin{cases} x=3\sin^5 t \\ y=3\cos^5 t\end{cases};$

$в)\ \rho=4(1+\cos\varphi).$

4. $y=\sqrt{x},\ y=\frac{x}{2}$ навколо осі OY.

5. $y=2x^3,\ 2\le x\le 3$ навколо осі OX.

6. $v(t)=\cos^3 t$ м/сек, $t_1=3$ сек.

7. $a=0, b=\pi, \gamma(x)=\sin x$.

8. $k=12$ Н/см, $l=4$ см.

Варіант 2

1\. *а*) $\int_0^1 \left(x^3+\frac{x}{2}\right)dx$; *б*) $\int_0^1 \frac{\sin x dx}{\sqrt{9-4\cos^2 x}}$; *в*) $\int_0^1 \frac{x^3 dx}{\sqrt{x^2+9}}$; *г*) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} x\sin^2 3x dx$;

д) $\int_0^{\frac{1}{9}} x^2 \arcsin x dx$

2\. *а*) $y=x^2$, $y=6-x$; *б*) $y=\frac{1}{x+1}$, $y=e^x$, $y=2$;

в) $\begin{cases} x=2(1-\cos t) \\ y=2(t-\sin t) \end{cases}$, $y=2\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $x=0$;

г) $\rho=3+\sin 2\varphi$.

3\. *а*) $y=\ln\cos x (0\le x\le\frac{\pi}{6})$; *б*) $\begin{cases} x=\sin^4 2t, \\ y=\cos^4 2t \end{cases}$;

в) $\rho=2\cos^2\frac{\varphi}{2}, \varphi\in[0,\pi]$.

4\. $x^2+y^2=9$, $x=-1$, $x=2$ навколо осі OX.

5\. $y=2\sqrt[3]{x}, 1\le x\le 8$ навколо осі OY.

6\. $v(t)=\frac{\sqrt{\ln(3-t)}}{3-t}$ м/сек, $t_1=3$ сек.

7\. $a=\frac{\pi}{2}, b=\pi, \gamma(x)=\sin\frac{x}{2}$.

8\. $k=9$ Н/см, $l=4$ см.

Варіант 3

1\. *а*) $\int_0^1 \left(x^3+\frac{x}{4}\right)dx$; *б*) $\int_1^4 \frac{\sin^2\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$; *в*) $\int_1^2 \frac{\sqrt{4x^2+1}}{x}dx$; *г*) $\int_0^{\frac{\pi}{7}} x^2\sin 7x dx$;

д) $\int_0^{\frac{1}{2}} x \operatorname{arctg} 2x dx$.

2. $a)\ y=x^2-2x,\ y=x-x^2;\quad б)\ y=e^x,\ y=1-x,\ y=2;$

$в)\ \begin{cases} x=\cos^3 t \\ y=\sin^3 t \end{cases},\ y=1-x^2,\ г)\ \rho=3+\cos 2\varphi.$

3. $a)\ y=\ln(x+\sqrt{x^2-1})\ (1\le x\le 2);\quad б)\ \begin{cases} x=\cos^2 t, \\ y=2\sin t \end{cases},\ t\in\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right];$

$в)\ \rho=2\varphi^2,\pi\le\varphi\le 2\pi.$

4. $y=2\cos x,\ y=\cos x,\ 0\le x\le\dfrac{\pi}{2}$ навколо осі OX.

5. $y=\arcsin x,\ 0\le x\le 1$ навколо осі OY.

6. $v(t)=\dfrac{t-2}{t^2-4t+5}$ м/сек, $t_1=2$ сек.

7. $a=\dfrac{\pi}{4},\ b=\dfrac{\pi}{2},\ \gamma(x)=\dfrac{1}{\sin^2 x}.$

8. $k=7$ Н/см, $l=2$ см.

Варіант 4

1. $a)\ \int\limits_0^1\left(x^3+\dfrac{x}{5}\right)dx;\quad б)\ \int\limits_1^{32}\dfrac{\cos\sqrt[5]{x}}{\sqrt[5]{x^4}}dx;\quad в)\ \int\limits_0^1\dfrac{x^2dx}{\sqrt{9-x^2}};\quad г)\ \int\limits_0^{\frac{\pi}{7}}x\cos 7x dx;$

$д)\ \int\limits_0^1 x^2\,\mathrm{arc\,tg}3x dx,$

2. $a)\ y=x^2,\ y=2x+3;\quad б)\ y=\sqrt{x},\ y=2-x^2,\ y=0;$

$в)\ \begin{cases} x=2(t-\sin t) \\ y=2(1-\cos t) \end{cases},\ \begin{cases} x=3(t-\sin t) \\ y=3(1-\cos t) \end{cases},\ y=0,\ (0\le t\le 2\pi).$

$г)\ \rho=3+2\cos\varphi.$

3. $a)\ y=\ln\sin x\left(\dfrac{\pi}{3}\le x\le\dfrac{\pi}{2}\right);\ б)\ \begin{cases} x=2\cos t, \\ y=2\sin t \end{cases}\ (x\ge 1);\quad в)\ \rho=2\cos\varphi.$

4. $y=e^x+6,\ y=e^{2x},\ x=0$ навколо осі OX.

5. $y=\dfrac{(3-x)\sqrt{x}}{3},\ 0\le x\le 3$ навколо осі OX.

6. $v(t)=(t-3)e^{2t}$ м/сек, $t_1=3$ сек.

7. $a=1,\ b=9,\ \gamma(x)=\sqrt{x}+x.$

8. $k = 9$ Н/см, $l = 4$ см.

Варіант 5

1. $a) \int_0^1 \left(x^3 + \frac{x}{6} \right) dx$; $б) \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{\arcsin x}{1 - x^2}} dx$; $в) \int_2^3 x \sqrt[3]{4 - x^2} dx$; $г) \int_{-\frac{\pi}{6}}^0 x^2 \cos 6x dx$;

$д) \int_0^{\frac{1}{6}} x \arcsin 6x dx$.

2. $a)\ y = \sin x,\ y = \frac{4}{\pi^2} x^2$; $б)\ y = x^3,\ y = 2 - x,\ y = 0$;

$в) \begin{cases} x = \cos^2 t \\ y = 2\sin t \end{cases},\ x = \frac{3}{4}$;

$г)\ \rho = \cos^2 \frac{\varphi}{2}$.

3. $a)\ y = \arcsin(e^{-x})$; от $A(0; \frac{\pi}{2})$ до $B\ (1, \arcsin \frac{1}{e})$.

4. $y = \sin x,\ y = 2x,\ x = \pi$ навколо осі OX.

5. $y = \ln x, 1 \le x \le e$ навколо осі OY.

6. $v(t) = \frac{1 - t}{\sqrt{1 + t^2}}$ м/сек, $t_1 = 1$ сек.

7. $a = -2, b = 2, \gamma(x) = e^{|x|}$.

8. $k = 10$ Н/см, $l = 3$ см.

Варіант 6

1. $a) \int_0^1 \left(\frac{x^3}{2} + x \right) dx$; $б) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x dx}{16 + \cos^2 2x} dx$; $в) \int_0^1 x e^{-7x} dx$; $г) \int_3^4 x \sqrt{x^2 - 9} dx$;

$д) \int_1^e x^8 \ln x dx$.

2. $a)\ y = x^2 - 1,\ y = 1 - x^2$; $б)\ y = \sqrt{2 - x},\ y = x,\ y = 0$;

в) $\begin{cases} x = 2(t - \sin t) \\ y = 2(1 - \cos t) \end{cases}$, $x = 2\left(\frac{\pi}{6} - \frac{1}{2}\right)$, $y = 0$.

г) $\rho = 3 - \sin\varphi$.

3. *а*) $y = 2 + \ln\cos x \ (0 \le x \le \frac{\pi}{6})$; *б*) $\begin{cases} x = \cos^5 t \\ y = \sin^5 t \end{cases}$; *в*) $\rho = 2\cos^5\frac{\varphi}{5}$, $\varphi \in [0, \pi]$.

4. $y = x^2$, $y = 3x$ навколо осі OY.

5. $y = \sin x$, $0 \le x \le \pi$ навколо осі OX.

6. $v(t) = \dfrac{4 - t}{t^2 + 2t + 5}$ м/сек, $t_1 = 4$ сек.

7. $a = -1$, $b = 1$, $\gamma(x) = \cos\dfrac{\pi x}{2}$.

8. $k = 7$ Н/см, $l = 2$ см.

Варіант 7

1. *а*) $\int\limits_0^1 \left(\frac{x^3}{2} + 2x\right)dx$; *б*) $\int\limits_0^1 \frac{3^{\arccos x}}{\sqrt{1 - x^2}}dx$; *в*) $\int\limits_0^1 x\sqrt{4x^2 + 1}dx$; *г*) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{20}} x\sin 10x dx$;

д) $\int\limits_0^1 x^2 \mathrm{arctg}\, 7x dx$.

2. *а*) $y = x - x^2$, $y = 0$; *б*) $y = \ln x$, $y = \ln^2 x$;

в) $\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = -\cos t \end{cases}$ $(0 \le t \le 2\pi)$, $y = 0$;

г) $\rho = 3 + \frac{1}{2}\sin\varphi$.

3. *а*) $y = \dfrac{(3 - x)\sqrt{x}}{3}$ $(0 \le x \le 3)$;

б) $\begin{cases} x = \sin^3 2t \\ y = \cos^3 2t \end{cases}$; *в*) $\rho = \varphi^2$, $0 \le \varphi \le \pi$.

4. $y = \mathrm{tg} x$, $y = x$, $x = \dfrac{\pi}{4}$ навколо осі OX.

5. $y = \sqrt[3]{x^2}$, $0 \le x \le 1$ навколо осі OY.

6. $v(t)=\dfrac{\ln(2-t)}{2-t}$ м/сек, $t_1=2$ сек.
7. $a=0, b=4, \gamma(x)=e^{-x}$.
8. $k=11$ Н/см, $l=3$ см.

Варіант 8

1. *а*) $\int_0^1\left(\dfrac{x^3}{2}+3x\right)dx$; *б*) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3 2x dx$; *в*) $\int_0^1 x\sqrt[7]{4-x^2}dx$; *г*) $\int_0^{\frac{\pi}{9}} x\cos^2 9x dx$;

д) $\int_0^{\frac{1}{3}} x^2\arccos x dx$.

2. *а*) $y=(x+1)^2,\ y=1-x^2$; *б*) $y=\ln x,\ y=1-x,\ y=1$;

в) $\begin{cases} x=\sin^3 t \\ y=\cos^3 t \end{cases}$, $y=1-x$; *г*) $\rho=1+\sin 2\varphi$.

3. *а*) $y=\mathrm{ch}x=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2},\ -1\le x\le 1$;

б) $\begin{cases} x=t^2 \\ y=t^3 \end{cases}$ $0\le t\le 2$; *в*) $\rho=2\sin\varphi,\ \dfrac{\pi}{6}\le\varphi\le\dfrac{\pi}{2}$.

4. $y=x^3,\ y=4x$, навколо осі OX.
5. $y=x^2, 1\le x\le 2$ навколо осі OY.
6. $v(t)=\dfrac{2-t}{\sqrt{t^2+2t+2}}$ м/сек, $t_1=2$ сек.
7. $a=0, b=\dfrac{\pi}{4}, \gamma(x)=\dfrac{1}{\cos^2 x}$.
8. $k=9$ Н/см, $l=4$ см.

Варіант 9

1. *а*) $\int_0^1\left(\dfrac{x^3}{2}+4x\right)dx$; *б*) $\int_0^1 \dfrac{4^{\mathrm{arctg}x}}{1+x^2}dx$; *в*) $\int_0^1 x^5\sqrt{9+4x^2}dx$; *г*) $\int_0^{\frac{\pi}{16}} x\sin 8x\, dx$;

д) $\int_1^e \sqrt{x}\ln x dx$.

2. *а*) $y = 2x^2$, $y = 3x - 1$; *б*) $y = \sqrt{x}$, $y = 6 - x$, $y = 0$;

в) $\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$, $\begin{cases} x = 4(t - \sin t) \\ y = 4(1 - \cos t) \end{cases}$, $y = 0$ $(0 \le t \le 2\pi)$.

г) $\rho = 5 + \sin 2\varphi$.

3. *а*) $y = \ln(x^2 - 1)$ $(2 \le x \le 3)$;

б) $\begin{cases} x = 2\sin^3 t \\ y = 2\cos^3 t \end{cases}$, $x \ge \frac{1}{4}$; *в*) $\rho = \cos^3 \frac{\varphi}{3}$, $-\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$.

4. $4x^2 + y^2 = 1$, навколо осі OY.

5. $y = e^x$, $1 \le x \le 2$ навколо осі OX.

6. $v(t) = \sqrt[3]{8 - 2t}$ м/сек, $t_1 = 4$ сек.

7. $a = 1$, $b = 2$, $\gamma(x) = \ln x$.

8. $k = 8$ Н/см, $l = 3$ сек.

Варіант 10

1. *а*) $\int\limits_0^1 \left(\frac{x^3}{2} + 5x \right) dx$; *б*) $\int\limits_1^e \frac{x^2 dx}{\sin^2 x^3}$; *в*) $\int\limits_0^{\frac{1}{3}} \sqrt{4 - 9x^2}\, dx$; *г*) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{7}} x^2 \cos 7x\, dx$;

д) $\int\limits_1^e x^9 \ln^2 x dx$.

2. *а*) $y = \frac{6}{x}$, $y = 5 - x$; *б*) $y = x^2$, $y = 6 - x$, $y = 0$;

в) $\begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = \sin^3 t \end{cases}$, $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}$;

г) $\rho = 3 - 2\sin 2\varphi$.

3. *а*) $y = \ln \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$ $(1 \le x \le 2)$.

б) $\begin{cases} x = 2(1 - \sin t) \\ y = 2(t - \cos t) \end{cases}$, $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$;

в) $\rho = \frac{2}{\varphi}$, $\pi \le \varphi \le 2\pi$.

4. $y = e^x$, $y = e$, $x = 0$ навколо осі OY.

5. $y = x\sqrt{x},\ 0 \le x \le 4$ навколо осі OX.

6. $v(t) = \sqrt{4 - t^2}$ м/сек, $t_1 = 2$ сек.

7. $a = 2,\ b = e,\ \gamma(x) = \dfrac{\ln x}{x}$.

8. $k = 7$ Н/см, $l = 5$ см.

Варіант 11

1. *а*) $\displaystyle\int_0^1 \left(\frac{x^3}{2} + 6x\right) dx$; *б*) $\displaystyle\int_1^e \frac{dx}{x\cos^2 \ln x}$; *в*) $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2 + 25}}$; *г*) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{12}} x\sin^2 6x\, dx$;

д) $\displaystyle\int_0^1 x^2 \mathrm{arctg} 8x dx$.

2. *а*) $y = x^2 - 2x,\ y = x - 2$; *б*) $y = \sqrt{9 - x},\ y = x + 3,\ y = 0$;

в) $\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases} (0 \le t \le 2\pi),\ y = \dfrac{1}{2}$;

г) $\rho = \mathrm{tg}\varphi,\ \varphi = \dfrac{\pi}{4}$.

3. *а*) $y = e^x$ от $A(0;1)$ до $(2;e^2)$;

б) $\begin{cases} x = \sin^3 t \\ y = 2\cos^2 t \end{cases}$; *в*) $\rho = \dfrac{1}{\varphi},\ \dfrac{\pi}{2} \le \varphi \le \dfrac{3\pi}{2}$;

4. $y = x^3,\ y = 9x$ навколо осі OY.

5. $x^2 + y^2 = 4,\ 0 \le x \le 1$ навколо осі OX.

6. $v(t) = (2 - t)e^{3t}$ м/сек, $t_1 = 2$ сек.

7. $a = -2,\ b = 0,\ \gamma(x) = \sqrt{4 - x}$.

8. $k = 14$ Н/см, $t = 3$ сек.

Варіант 12

1. $a)\int\limits_0^1\left(\frac{x^3}{2}+7x\right)dx;$ $б)\int\limits_0^1\frac{2^x dx}{\sqrt{1+4^x}};$ $в)\int\limits_1^{\sqrt{3}}\frac{dx}{x\sqrt{4-x^2}};$ $г)\int\limits_0^{\frac{\pi}{26}}x\cos^2 13x\,dx;$

$д)\int\limits_0^{\frac{1}{5}}x^2\arccos 5x dx.$

2. $a)\ y=\sqrt{x},\ y=\frac{x}{2};$ $б)\ y=\frac{1}{x},\ y=x^2,\ y=\frac{x}{4};$

$в)\begin{cases}x=2\cos^2 t\\ y=\sin^3 t\end{cases},\ x=0;$ $г)\ \rho=4+2\cos 2\varphi.$

3. $a)\ y=\sqrt{4-x^2}$ от $A(0;2)$ до $B\ (1;\sqrt{3}).$

$б)\begin{cases}x=3\cos^4 t\\ y=3\sin^4 t\end{cases},\ 0\le x\le 2;$

$в)\ \rho=2(1-\sin\varphi).$

4. $y=\sqrt{x}\sin x,\ x=\frac{\pi}{2},\ y=0$ навколо осі OX.

5. $y=e^{-x},\ 0\le x\le 1$ навколо осі OX.

6. $v(t)=\arccos t$ м/сек, $t_1=\frac{\pi}{2}$ сек.

7. $a=-1,\ b=1,\ \gamma(x)=\frac{1}{x^2+1}.$

8. $k=6$ Н/см, $l=4$ см.

Варіант 13

1. $a)\int\limits_0^1\left(\frac{x^3}{2}+8x\right)dx;$ $б)\int\limits_1^e\frac{\sqrt[5]{1+\ln x}}{x}dx;$ $в)\int\limits_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{3}}\frac{\sqrt{1-9x^2}}{x^2}dx;$ $г)\int\limits_0^{\frac{\pi}{14}}x\cos 14x\,dx;$

$д)\int\limits_1^e x^4\ln x dx.$

2. $a)\ y=(x-1)^2,\ y=4;$ $б)\ y=\sqrt{9-4x},\ y=\sqrt{x+9},\ y=0;$

$в)\begin{cases}x=t-\sin t\\ y=1-\cos t\end{cases},\ y=\frac{2}{\pi}x;$ $г)\ \rho=2\sin\varphi-1.$

3. $a)\ y=e^{-2x}$ от $A(0;1)$ до $B(1;e^{-2}).$

$б)\begin{cases} x=\sin t \\ y=\frac{1}{2}\cos^2 t \end{cases}, t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right];\quad в)\ \rho=3(1+\sin\varphi),\ 0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}.$

4. $y=\frac{6}{x},\ y=6,\ x=6$ навколо осі OX.
5. $y=\sqrt[3]{x},\ 0\le x\le 27$ навколо осі OY.
6. $v(t)=t(1+\cos t)$ м/сек, $t_1=\pi$ сек .
7. $a=1, b=2, \gamma(x)=\frac{1}{x-3}.$
8. $k=5$ Н/см, $l=6$ см.

Варіант 14

1. $а)\int_0^1\left(\frac{x^3}{3}+x\right)dx;\quad б)\int_{-2}^{-1}\frac{3^x dx}{\sqrt{1-9^x}}dx;\quad в)\int_4^5\frac{x^3dx}{\sqrt{x^2-9}};\quad г)\int_0^1 e^{-3x}x^2dx;$

$д)\int_0^{\frac{1}{12}} x\arcsin 12x dx.$

2. $а)\ y=x^3,\ y=4x;\ б)\ y=\frac{1}{x},\ y=x^2,\ y=\frac{x^2}{8};$

$в)\begin{cases} x=2\cos^3 t \\ y=3\sin^3 t \end{cases}, \begin{cases} x=2\cos t \\ y=3\sin t \end{cases};\ г)\ \rho=4-2\cos\varphi.$

3. $а)\ y=\sqrt{9-x^2}\ (\frac{3\sqrt{2}}{2}\le x\le 3);$

$б)\begin{cases} x=3\cos^2 t \\ y=\sin^3 t \end{cases};\quad в)\ \rho=3\sin\varphi.$

4. $y=\ln x,\ y=1,\ x=1$ навколо осі OX.
5. $y=\arccos x,\ 0\le x\le 1$ навколо осі OY.
6. $v(t)=\frac{1-t}{\cos^2 t}$ м/сек, $t_1=1$ сек .
7. $a=0, b=3, \gamma(x)=\frac{1}{\sqrt{x+1}}.$
8. $k=3$ Н/см, $l=7$ см.

Варіант 15

1. *а*) $\int\limits_0^1 \left(\dfrac{x^3}{3} + 2x \right) dx$; *б*) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \dfrac{\cos(\mathrm{tg}x)dx}{\cos^2 x}$; *в*) $\int\limits_0^1 \dfrac{x^2 dx}{\sqrt{x^2+9}}$; *г*) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{24}} x^2 \sin 12x dx$;

д) $\int\limits_0^1 x \,\mathrm{arc\,tg} 8x dx$.

2. *а*) $y = \sin x,\ y = \dfrac{2}{\pi}x$; *б*) $y^2 - x = 2,\ y = x$;

в) $\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases},\ y = \dfrac{2}{\pi^2}x^2$;

г) $\rho = 1 + 2\sin^2 \varphi$.

3. *а*) $y = \ln(1 - x^2)\ (-\dfrac{1}{2} \le x \le \dfrac{1}{2})$;

б) $\begin{cases} x = \cos^5 2t \\ y = \sin^5 2t \end{cases}$; *в*) $\rho = 3e^{2\varphi},\ \dfrac{\pi}{2} \le \varphi \le \pi$.

4. $x^2 - y^2 = 1,\ y = -1,\ y = 2$ навколо осі OY.
5. $y = \cos x,\ -\pi \le x \le \pi$ навколо осі OX.
6. $v(t) = \dfrac{\pi}{4} - \mathrm{arctg} t$ м/сек, $t_1 = 1$ сек .
7. $a = -2,\ b = -1,\ \gamma(x) = \dfrac{1}{x^2}$.
8. $k = 7$ Н/см, $l = 5$ см.

Варіант 16

1. *а*) $\int\limits_0^1 \left(\dfrac{x^3}{3} + 3x \right) dx$; *б*) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \sqrt{\sin x} dx$; *в*) $\int\limits_0^1 x^3 \sqrt{x^2+4} dx$; *г*) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{16}} x \sin^2 8x dx$;

д) $\int\limits_0^1 x^2 \,\mathrm{arc\,tg} 3x dx$.

2. *а*) $y = 4 - x^2,\ y = x^2 - 2x$; *б*) $x = y^2 - 2y + 1,\ x = 1$;

в) $\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 6\sin t \end{cases}$, $y = 3$ $(y \le 3)$; *г*) $\rho = 2\sin 3\varphi$.

3. *а*) $y = \dfrac{x\sqrt{4-x^2}}{4\sqrt{2}}$ $(0 \le x \le 2)$.

б) $\begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = \sin^3 t. \end{cases}$ от А$\left(\dfrac{1}{8};\dfrac{3\sqrt{3}}{8}\right)$ до В$\left(\dfrac{3\sqrt{3}}{8};\dfrac{1}{8}\right)$;

в) $\rho = \sin^3\dfrac{\varphi}{3}$, $\dfrac{\pi}{2} \le \varphi \le \pi$.

4. $y = \sqrt{x}e^x$, $y = e$, $x = 0$ навколо осі OX.

5. $y = \dfrac{\sqrt[3]{x}}{3}$, $0 \le x \le 1$ навколо осі OY.

6. $v(t) = \ln^2(t+1)$ м/сек, $t_1 = 2$ сек.

7. $a = 1$, $b = 16$, $\gamma(x) = 1 + x\sqrt{x}$.

8. $k = 10$ Н/см, $l = 3$ см.

Варіант 17

1. *а*) $\int\limits_0^1 \left(\dfrac{x^3}{3} + x^2\right)dx$; *б*) $\int\limits_0^1 \dfrac{3^x\,dx}{1+9^x}$; *в*) $\int\limits_0^3 x\sqrt{9-x^2}\,dx$; *г*) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{30}} x\cos^2 15x\,dx$;

д) $\int\limits_0^{\frac{1}{13}} x^2 \arccos 13x\,dx$.

2. *а*) $y = x^2 - 1$, $y = 4x^2 - 4$; *б*) $x = y^2 - 4y + 4$, $x = 1$;

в) $\begin{cases} x = 8\sin^3 t \\ y = 8\cos^3 t \end{cases}$, $y = 1$ $(y \ge 1)$; *г*) $\rho = 3\sin 2\varphi$.

3. *а*) $y = \dfrac{1}{2}\operatorname{ch}2x = \dfrac{1}{4}\left(e^{2x} + e^{-2x}\right)$, $(-1 \le x \le 1)$;

б) $\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 + \cos t \end{cases}$ от А$(0;2)$ до В$(\pi;0)$.

в) $\rho = \cos^2\varphi$, $0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2}$.

4. $y=\dfrac{1}{x},\ y=\dfrac{1}{x^2},\ x=2$ навколо осі OX.

5. $y=\ln x,\ 2\le x\le 5$ навколо осі OY.

6. $v(t)=\dfrac{t}{t^2+2t+2}$ м/сек, $t_1=3$ сек.

7. $a=0, b=1, \gamma(x)=\operatorname{arctg} x$.

8. $k=15$ Н/см, $l=2$ см.

Варіант 18

1. *а*) $\int\limits_0^1\left(x^3+2x^2\right)dx$; *б*) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\dfrac{2^{\operatorname{tg}x}dx}{\cos^2 x}$; *в*) $\int\limits_1^2 x\sqrt{4x^2-1}dx$; *г*) $\int\limits_0^1 x^2e^{-11x}dx$;

д) $\int\limits_1^e x^5\ln x dx$,

2. *а*) $y=\dfrac{x^2}{2},\ y=\sqrt{2x}$; *б*) $y=tgx,\ y=tg^2x\left(-\dfrac{\pi}{4}\le x\le\dfrac{\pi}{4}\right)$;

в) $\begin{cases}x=2\sqrt{2}\cos t\\ y=\sqrt{2}\sin t\end{cases},\ y=1\ (y\ge 1)$; *г*) $\rho=4\cos 2\varphi$.

3. *а*) $y=\dfrac{x^2}{2}+3$ от A (0;3) до B (2;5);

б) $\begin{cases}x=2\cos t\\ y=\sin^2 t\end{cases}$; *в*) $\rho=e^{-\varphi},\ \dfrac{\pi}{2}\le\varphi\le\pi$.

4. $y=(x-1)^2,\ y=0,\ x=0$ навколо осі OY.

5. $y=chx=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2},\ -1\le x\le 1$ навколо осі OX.

6. $v(t)=(1-t)e^{2t}$ м/сек, $t_1=1$ сек.

7. $a=0, b=1, \gamma(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.

8. $k=8$ Н/см, $l=4$ см.

Варіант 19

1. *а*) $\int_0^1 \left(x^3 + \frac{x^2}{2}\right)dx$; *б*) $\int_0^{\pi} \sin^5 x dx$; *в*) $\int_0^1 x^7 \sqrt{4+x^2}dx$; *г*) $\int_0^{\frac{\pi}{30}} x\sin 15x dx$;

д) $\int_0^{\frac{1}{4}} x^2 \arcsin 4x dx$.

2. *а*) $x = \cos x,\ y = \frac{8\sqrt{2}}{\pi^2}x^2$; *б*) $x = (y-2)^2,\ x + 7y - 4 = 0$;

в) $\begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = \sin^2 t \end{cases},\ y = 0$; *г*) $\rho = 2\cos 4\varphi$.

3. *а*) $y = \frac{2}{\pi}\ln\sin\frac{\pi x}{2},\ x \in \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$;

б) $\begin{cases} x = 2\cos^3 2t \\ y = 2\sin^3 2t \end{cases},\ 0 \le t \le \frac{\pi}{4}$; *в*) $\rho = \frac{3}{\varphi},\ \frac{\pi}{3} \le \varphi \le \pi$.

4. $x^2 - y^2 = 1,\ x = 2$ навколо осі OX.

5. $y = x\sqrt{\frac{x}{3}},\ 0 \le x \le 3$ навколо осі OX.

6. $v(t) = t\sqrt{1+t^2}$ м/сек, $t_1 = \sqrt{3}$ сек.

7. $a = -1,\ b = 1,\ \gamma(x) = ch = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$.

8. $k = 12$ Н/см, $l = 5$ см.

Варіант 20

1. *а*) $\int_0^1 \left(x^3 + \frac{x^2}{3}\right)dx$; *б*) $\int_1^4 \frac{3^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$; *в*) $\int_2^3 x^5\sqrt{4x^2 - 9}dx$; *г*) $\int_0^1 x^2 e^{-12x}dx$;

д) $\int_0^{\frac{1}{15}} x\arccos 15x dx$.

2. *а*) $y = -x^2 + 4x + 5,\ y = 2x + 2$; *б*) $y = \mathrm{arctg} x,\ y = -x,\ x = 1$;

в) $\begin{cases} x = 2\sqrt{2}\cos^3 t \\ y = \sqrt{2}\sin^3 t \end{cases}$, $x = 1\,(x \geq 1)$;

г) $\rho = 5\cos 3\varphi$.

3. *а*) $y = \dfrac{x\sqrt{1-x^2}}{2\sqrt{2}}$; *б*) $\begin{cases} x = 1-\cos t \\ y = t-\sin t, \end{cases}$ $0 \leq t \leq 2\pi$; *в*) $\rho = 4\varphi,\ \pi \leq \varphi \leq 2\pi$.

4. $y = \cos x,\ y = 0;\ -\dfrac{\pi}{2} \leq x \leq \dfrac{\pi}{2}$ навколо осі OY.

5. $y^2 = 4 + x,\ -2 \leq x \leq 2$ навколо осі OX.

6. $v(t) = te^{-t}$ м/сек, $t_1 = 2$ сек.

7. $a = -2,\ b = 2,\ \gamma(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+5}}$.

8. $k = 5$ Н/см, $l = 2{,}5$ см.

Варіант 21

1. *а*) $\int\limits_0^1 \left(x^3 + \dfrac{x^2}{4} \right) dx$; *б*) $\int\limits_1^2 \dfrac{2^x\,dx}{\sqrt{4^x - 1}}$; *в*) $\int\limits_0^1 x\sqrt{4+9x^2}\,dx$; *г*) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{17}} x^2 \sin 17x\,dx$;

д) $\int\limits_0^1 x\,\mathrm{arctg}\,12x\,dx$.

2. *а*) $y = e^{-x},\ y = x+1;\ x = 2$; *б*) $y = x^3\ \ y = 4x,\ y = x$;

в) $\begin{cases} x = \sin^5 t \\ y = \cos^2 t \end{cases}$, $y = \dfrac{1}{4}$; *г*) $\rho = 1 + \cos^2\varphi$.

3. *а*) $y = (x-1)^{\frac{3}{2}}$ от $A(1;0)$ до $B(2;1)$;

б) $\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$ от начала координат до А $\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}; 1 - \dfrac{\sqrt{2}}{2} \right)$;

в) $\rho = 3\varphi^2,\ \dfrac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \pi$.

4. $y = x^2,\ y = x + 2$ навколо осі OX.

5. $y=\frac{(x-3)\sqrt{x}}{3}$, $0\le x\le 3$ навколо осі OX.

6. $v(t)=t^2\sin t$ м/сек, $t_1=\frac{\pi}{4}$ сек.

7. $a=2, b=3, \gamma(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$.

8. $k=11$ Н/см, $l=3$ см.

Варіант 22

1. $а)\ \int\limits_0^1\left(x^3+\frac{x^2}{5}\right)dx;$ $б)\ \int\limits_e^{e^2}\frac{dx}{x\sin^2\ln x};$ $в)\ \int\limits_0^{\frac{1}{4}}\frac{xdx}{\sqrt{(1-9x^2)^3}};$ $г)\ \int\limits_0^{\frac{\pi}{16}}x^2\cos 16x dx;$

$д)\ \int\limits_0^{\frac{1}{7}}x\arcsin 7x dx.$

2. $а)\ y=e^x,\ y=e^{-x},\ x=3;$ $б)\ y=(x+2)^2,\ y=4-x,\ y=0;$

$в)\ \begin{cases}x=t-\sin t\\ y=1-\cos t\end{cases}$ $(0\le t\le 2\pi)$ и $y=1;$

$г)\ \rho=2e^{\varphi}$ $(0\le\varphi\le 2\pi),\ \varphi=0.$

3. $а)\ y=(2-x)^{\frac{3}{2}}$ от A(2;0) доB $(-2;8)$;

$б)\ \begin{cases}x=\sin^4 t\\ y=\cos^4 t\end{cases};$ $в)\ \rho=1+\cos\varphi,\ -\frac{\pi}{4}\le\varphi\le\frac{\pi}{4}.$

4. $y=\frac{5}{x},\ y=1,\ y=5$ навколо осі OY.

5. $y=\cos x,\ -\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2}$ навколо осі OX.

6. $v(t)=\frac{t}{\sqrt{t^2+4t+5}}$ м/сек, $t_1=2$ сек.

7. $a=-\frac{\pi}{4}, b=\frac{\pi}{4}, \gamma(x)=\cos 2x.$

8. $k=6$ Н/см, $l=4$ см.

Варіант 23

а) $\int\limits_0^1\left(x^3+\frac{x^2}{6}\right)dx$; *б*) $\int\limits_0^1\frac{\sqrt{x}dx}{\cos^2(x\sqrt{x})}$; *в*) $\int\limits_6^7\frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-25}}$; *г*) $\int\limits_0^1 xe^{-9x}dx$;

д) $\int\limits_1^e x^9\ln x dx.$

2. *а*) $y=x^2-4x+3,\ y=2x+3-x^2$; *б*) $y=\arcsin x,\ y=\frac{\pi}{2}x\ (y\geq 0)$;

в) $\begin{cases} x=2\sqrt{2}\sin t \\ y=\sqrt{2}\cos t \end{cases}, x=2 (x\geq 2)$;

г) $\rho=3e^{2\varphi}, (0\leq\varphi\leq\pi), \varphi=0, \varphi=\pi.$

3. *а*) $y=(2x+1)^{\frac{3}{2}}$ от А(0;1) до В (4;27);

б) $\begin{cases} x=t^3 \\ y=t^2 \end{cases}$ от начала координат до A (1;1);

в) $\rho=2e^{\frac{\varphi}{2}}\ (0\leq\varphi\leq\pi).$

4. $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1, x=-1, x=2$ навколо осі OX.

5. $y=e^x, -1\leq x\leq 2$ навколо осі OX.

6. $v(t)=\frac{1}{2\cos t+3}$ м/сек, $t_1=\frac{\pi}{2}$ сек.

7. $a=0, b=\frac{\pi}{2}, \gamma(x)=\sin^2 x.$

8. $k=9$ Н/см, $l=5$ см.

Варіант 24

1. *а*) $\int\limits_0^1\left(x^3+\frac{x^2}{6}\right)dx$; *б*) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x dx}{\sqrt{4+\sin^2 x}}$; *в*) $\int\limits_1^2\frac{dx}{x\sqrt{4+x^2}}$; *г*) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{8}} x\sin 8x dx$;

д) $\int\limits_0^1 x^2\mathrm{arctg}13x dx$.

2. *а*) $y=(x+1)^2,\ y^2=x+1$; *б*) $y=\frac{3}{x},\ y=x+2,\ x+3y=6$;

в) $\begin{cases}x=2\cos^3 t\\ y=16\sin^3 t\end{cases},\ y=2\ (y\ge 2)$; *г*) $\rho=2+\sin\varphi$.

3. *а*) $y=\frac{(x-3)\sqrt{x}}{3},\ 0\le x\le 3$; б) $\begin{cases}x=4(t-\sin t)\\ y=4(1-\cos t)\end{cases},\ \frac{\pi}{4}\le t\le\frac{\pi}{2}$;

в) $\rho=5(1-\cos\varphi)\ (0\le\varphi\le\frac{\pi}{6})$.

4. $y=2x^2,\ y=1+x^2$, навколо осі OX.

5. $y=\sin 2x,\ -\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2}$ навколо осі OX.

6. $v(t)=e^{\sqrt{t}}$ м/сек, $t_1=9$ сек.

7. $a=-\frac{\pi}{2},\ b=0,\ \gamma(x)=\cos^2 x$.

8. $k=15$Н/см, $l=4$ см.

Варіант 25

1. *а*) $\int\limits_0^1\left(x^3+\frac{x^2}{7}\right)dx$; *б*) $\int\limits_1^2\frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}$; *в*) $\int\limits_1^2\frac{x^3dx}{\sqrt{9-x^2}}$; *г*) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{11}} x\cos 11x dx$;

д) $\int\limits_0^{\frac{1}{2}} x^2\arccos 2x dx$.

2. *а*) $y=(x+1)^3,\ y=(x+1)^2$; *б*) $y=x^2+1,\ y=1-x^2,\ y=5x-5$;

в) $\begin{cases}x=2\cos t\\ y=6\sin t\end{cases},\ x=\sqrt{3}\ (x\ge\sqrt{3})$; *г*) $\rho=1-\sqrt{2}\sin\varphi$

3. $a)\ y=\dfrac{x-6}{3}\sqrt{\dfrac{x}{2}}\ (1\le x\le 2)$;   б) $\begin{cases} x=4\cos^3 t \\ y=4\sin^3 t \end{cases}, y\ge \dfrac{1}{2}$;

$в)\ \rho=4\sin\varphi,\ \dfrac{\pi}{3}\le\varphi\le\dfrac{3\pi}{4}.$

4. $y=\sin x,\ y=x,\ x=\dfrac{\pi}{2}$ навколо осі OX.

5. $x^2+y^2=25,\ 0\le x\le 3$ навколо осі OY.

6. $v(t)=(t+1)e^{-2t}$ м/сек, $t_1=3$ сек.

7. $a=1,\ b=2,\ \gamma(x)=\dfrac{1}{x^2+2x}.$

8. $k=8$Н/см, $l=5$ см.

Варіант 26

1. $a)\ \int\limits_0^1\left(x^3+\dfrac{x^2}{8}\right)dx$; $б)\ \int\limits_0^1 2^x\cos 2^x\,dx$; $в)\ \int\limits_2^3 x\sqrt[3]{x^2-4}\,dx$; $г)\ \int\limits_0^1 x^2e^{-15x}dx$;

$д)\ \int\limits_0^1 x\,\mathrm{arctg}\,9x\,dx.$

2. $a)\ y^2=9x,\ y=3x$; $б)\ y=\sin x,\ y=2x,\ y=\pi-x$;

$в)\ \begin{cases} x=\cos^3 4t \\ y=\sin^3 4t \end{cases},\ x=\dfrac{1}{8}\ (x\ge\dfrac{1}{8}).$

$г)\ \rho=4-\cos 2\varphi.$

3. $a)\ y=\ln\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)(1\le x\le 3)$;   б) $\begin{cases} x=\cos^3 t \\ y=\sin^2 t \end{cases}$;

$в)\ \rho=\sin^2\varphi.$

4. $x^2+\dfrac{y^2}{4}=1,\ y=-1,\ y=1$ навколо осі OY.

5. $y=cos2x,\ -\dfrac{\pi}{4}\le x\le\dfrac{\pi}{4}$ навколо осі OX.

6. $v(t)=\dfrac{1}{3\sin t+4}$ м/сек, $t_1=\dfrac{\pi}{2}$ сек.

7. $a=-1, b=1, \gamma(x)=e^{\frac{x}{2}}$.
8. $k=12$Н/см, $l=3$ см.

Варіант 27

1. *а*) $\int\limits_0^1 \left(2x^3+x^2\right)dx$; *б*) $\int\limits_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} x\sin x^2 dx$; *в*) $\int\limits_1^2 \frac{\sqrt{1+9x^2}}{x^2}dx$; *г*) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{36}} x\sin 18x dx$;

д) $\int\limits_0^{\frac{1}{15}} x^2 \arcsin 15x dx$.

2. *а*) $y=e^x,\ y=\dfrac{1}{x+1},\ x=2$; *б*) $y=x^2+4,\ y=4x,\ y=-5x$;

в) $\begin{cases} x=\dfrac{1}{2}\cos^3 t \\ y=\sin^3 t \end{cases}, \begin{cases} x=2\cos^3 t \\ y=3\sin^3 t \end{cases}$;

г) $\rho=2+\sin 3\varphi$.

3. *а*) $y=\ln\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)\ (1\le x\le 2)$; б) $\begin{cases} x=5\sin t+12\cos t \\ y=12\sin t-5\cos t, \end{cases}\ t\in[0,\pi]$;

в) $\rho=3(1-\cos\varphi)$.

4. $y=(x+2)^2,\ y=0,\ x=1$ навколо осі OX.
5. $y=x^3, 1\le x\le 3$ навколо осі OX.
6. $v(t)=\dfrac{t+1}{\sqrt{t^2+16}}$ м/сек, $t_1=3$ сек.
7. $a=-2, b=2, \gamma(x)=e^{-3x}$.
8. $k=10$Н/см, $l=4$ см.

Варіант 28

1. $a)\ \int_0^1\left(2x^3+\frac{x^2}{3}\right)dx;\ \ б)\ \int_0^1\frac{e^x dx}{\sqrt[3]{1+e^x}};\ \ в)\ \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}}\frac{\sqrt{1-4x^2}}{x}dx;\ \ г)\ \int_0^{\frac{\pi}{17}}x^2\cos 17x dx;$

$д)\ \int_1^e x^{10}\ln x dx.$

2. $а)\ xy=3,\ x+y=4;\ \ б)\ x=y^2+1,\ x=2y,\ y=0;$

$в)\ \begin{cases}x=\sin^4 t\\ y=\cos^4 t\end{cases},\ x=0,\ y=0;$

$г)\ \rho=\sqrt{2}+2\cos\varphi.$

3. $а)\ y=e^x-1$ от начала координат до $A(\ln 2;1);$

б) $\begin{cases}x=\sin^3 t\\ y=\cos^2 t\end{cases};$

$в)\ \rho=e^{4\varphi},\ 0\le\varphi\le\pi.$

4. $y=x\ln x,\ y=0,\ x=2$ навколо осі OX.

5. $y=(x-1)^3, 1\le x\le 3$ навколо осі OX.

6. $v(t)=t\sqrt{4-t^2}$ м/сек, $t_1=1$ сек.

7. $a=0, b=3, \gamma(x)=\frac{1}{3x+5}.$

8. $k=9$Н/см, $l=3$ см.

Варіант 29

1. $a)\ \int_0^1\left(2x^3+\frac{x^2}{3}\right)dx;\ б)\ \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x dx}{4+\sin^2 x};\ в)\ \int_0^1 x\sqrt{9+x^2}dx;\ г)\ \int_0^{\frac{\pi}{30}}x\sin 15x dx;$

$д)\ \int_0^1 x^2 \mathrm{arctg} 9x dx.$

2. $а)\ y=x^2,\ y=\frac{8}{x},\ x=3;\ б)\ y=|\mathrm{arctg} x|,\ y=1;$

в) $\begin{cases} x = \sin^2 t \\ y = 2\cos^3 t \end{cases}$, $x = 0$;

г) $\rho = \dfrac{1}{2} + \sin\varphi$.

3. *а*) $y = x^2 + 1$ от $A(0;1)$ до $B(1;2)$;

б) $\begin{cases} x = 2\cos^5 t \\ y = 2\sin^5 t, \end{cases}$ $0 \le t \le \dfrac{\pi}{4}$;

в) $\rho = \cos^4 \dfrac{\varphi}{4}$, $\varphi \in [0, 2\pi]$.

4. $y = chx = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 1$ навколо осі OX.

5. $y = (x+2)^3$, $-1 \le x \le 1$ навколо осі OX.

6. $v(t) = \dfrac{\ln^2(t+1)}{t+1}$ м/сек, $t_1 = 4$ сек.

7. $a = 0, b = 1, \gamma(x) = shx = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$.

8. $k = 5$Н/см, $l = 7$ см.

Варіант 30

1. *а*) $\int_0^1 \left(2x^3 + \dfrac{x^2}{4}\right)dx$; *б*) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\cos 2x} \sin 2x dx$; *в*) $\int_0^2 x\sqrt{4 - x^2}dx$; *г*) $\int_0^{\frac{\pi}{14}} x \cos 14x dx$;

д) $\int_0^{\frac{1}{6}} x^2 \arccos x dx$.

2. *а*) $y = \sin x$, $y = x$, $x = \dfrac{\pi}{2}$; *б*) $y = 4x - x^2$, $y = x - 4$, $y = 4$;

в) $\begin{cases} x = 32\cos^3 t \\ y = \sin^3 t \end{cases}$, $x = 4$ $(x \ge 4)$;

г) $\rho = 4 + 3\sin\varphi$.

3. $a)\ y=\arccos e^{-x}$ от $A(0;0)$ до $B(1;\arccos\frac{1}{e})$;

б) $\begin{cases} x=12\sin t-5\cos t \\ y=5\sin t+12\cos t, \end{cases}$ $t\in[0,\pi]$;

$в)\ \rho=3\cos\varphi,\ \frac{\pi}{4}\le\varphi\le\frac{\pi}{3}.$

4. $y=(x-2)^2, y=x+4,\ y=0$ навколо осі OX.

5. $y=2(e^{\frac{x}{4}}+e^{-\frac{x}{4}}), -4\le x\le 4$ навколо осі OX.

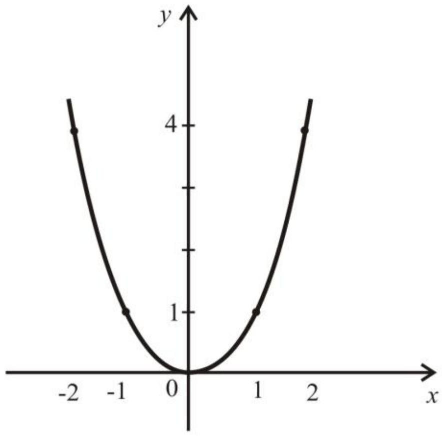
6. $v(t)=\dfrac{2t+1}{t^2+6t+10}$ м/сек, $t_1\ =3$ сек.

7. $a=-\dfrac{\pi}{2}, b=\dfrac{\pi}{2}, \gamma(x)=\cos\dfrac{x}{3}.$

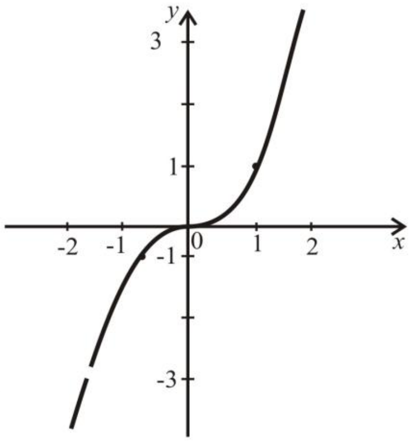
8. $k=15$Н/см, $l=4$ см.

ДОДАТОК

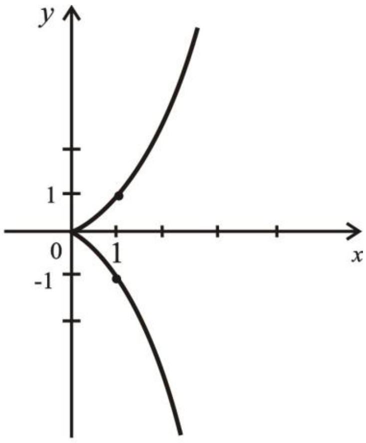
ДЕЯКІ КРИВІ



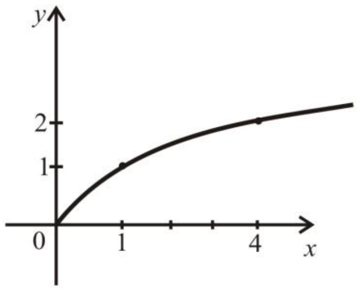
1. Парабола
$y = x^2$



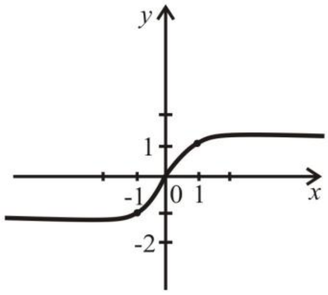
2. Кубічна парабола
$y = x^3$



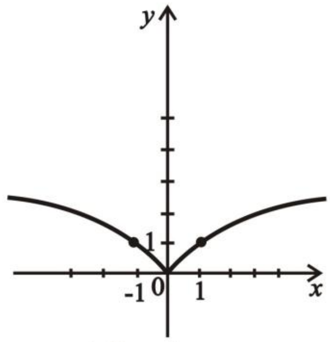
3. Полукубічна парабола
або парабола Нейла
$y = x^{3/2}$



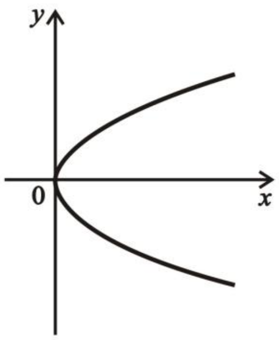
4. Парабола
$y = \sqrt{x}$



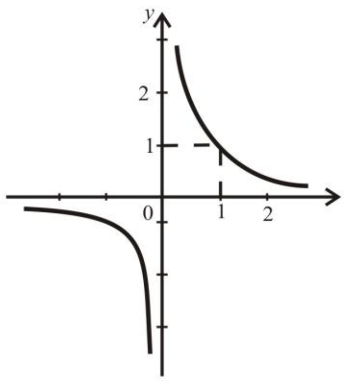
5. Парабола
$y = \sqrt[3]{x}$



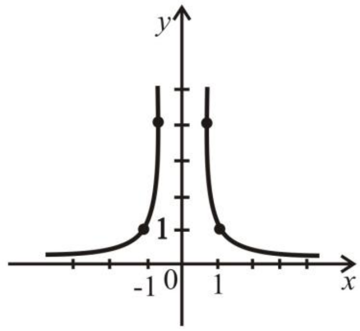
6. Парабола
$y = x^{2/3}$



7. Парабола
$y^2 = 2px,\ p > 0$

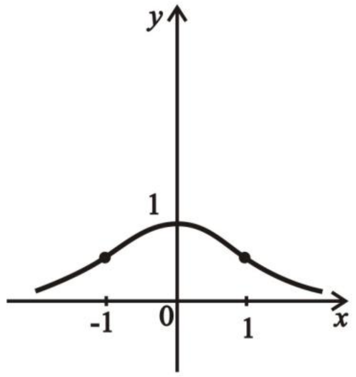


8. Гіпербола
$y = \dfrac{1}{x}$



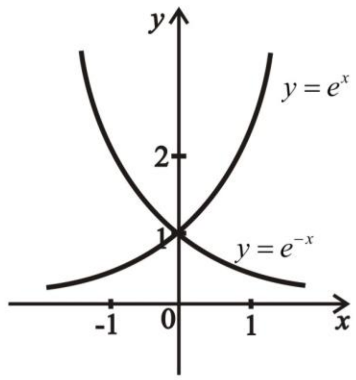
9. Гіпербола
$y = \dfrac{1}{x^2}$

Продовження дод.



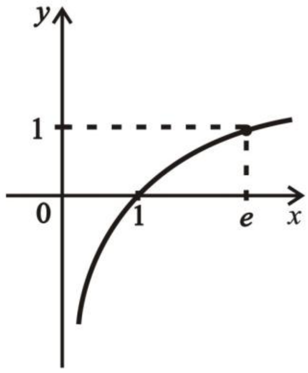
10. Локон Аньєзі

$$y = \frac{\mathrm{I}}{\mathrm{I}+x^2}$$



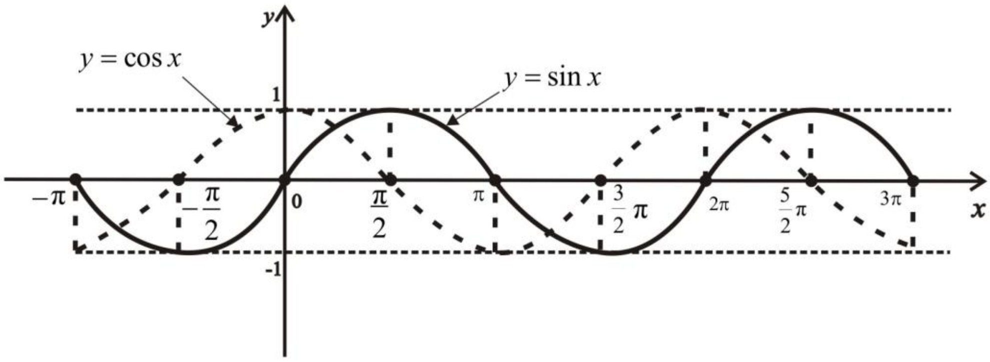
11. Графік показникових функцій

$$y = e^x;\ y = e^{-x}$$

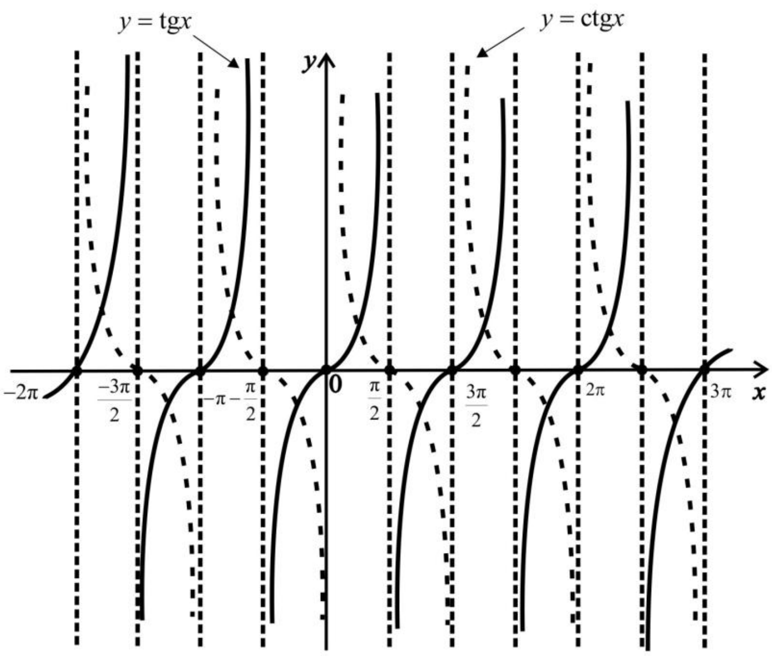


12. Логарифмічна крива

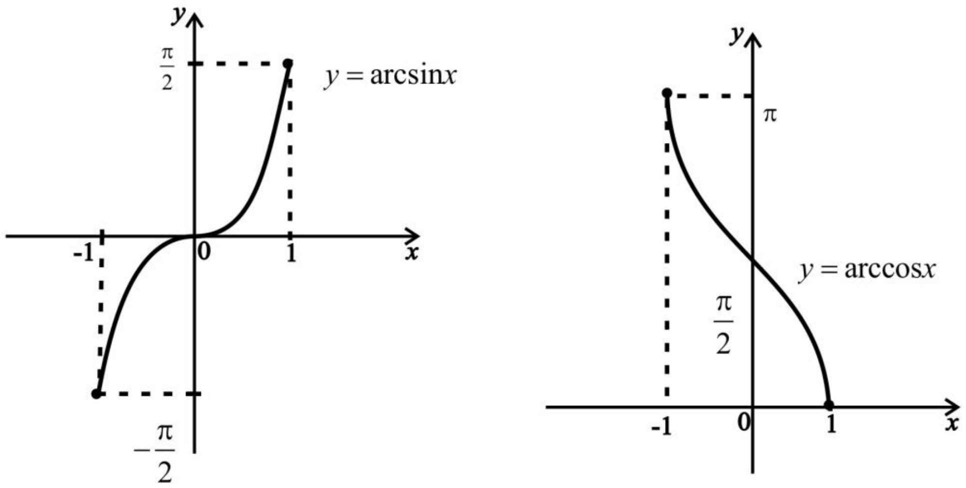
$$y = \ln x$$



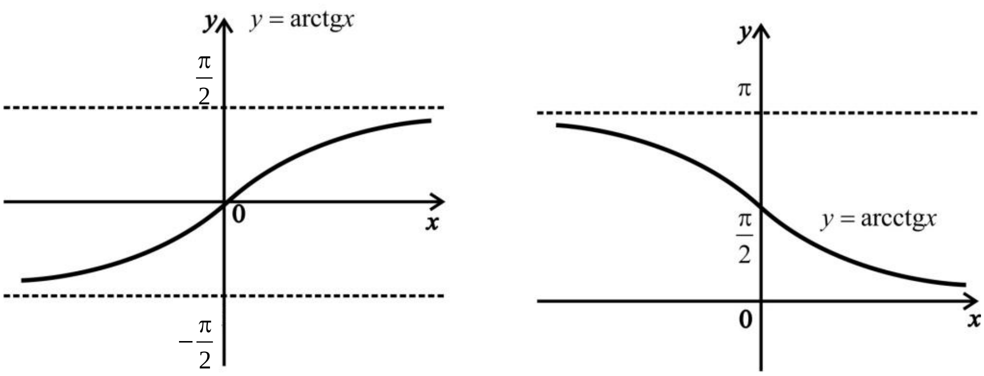
13. Синусоїда, $y = \sin x$ косинусоїда $y = \cos x$



14. Тангеносоїда, $y = \mathrm{tg}x$ котангеносоїда $y = \mathrm{c\,tg}x$

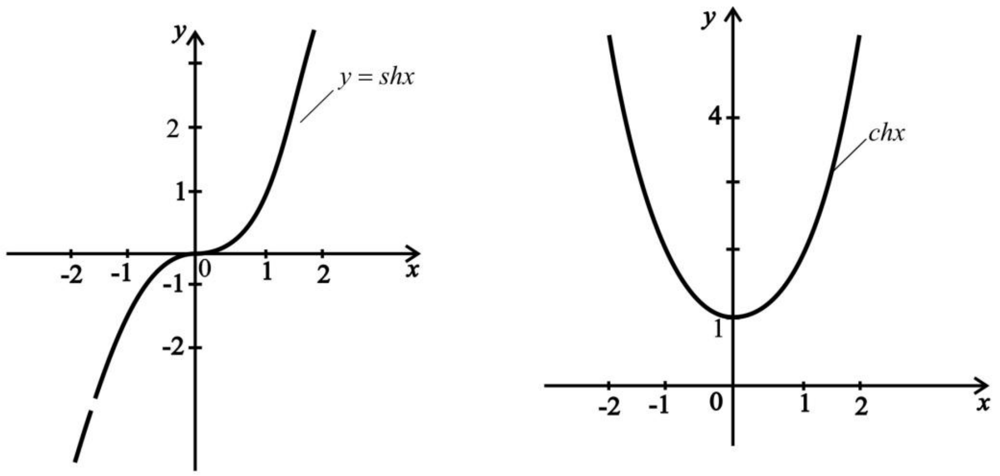


15. Графіки обернених тригонометричних функцій. $y = \arcsin x$ і $y = \arccos x$

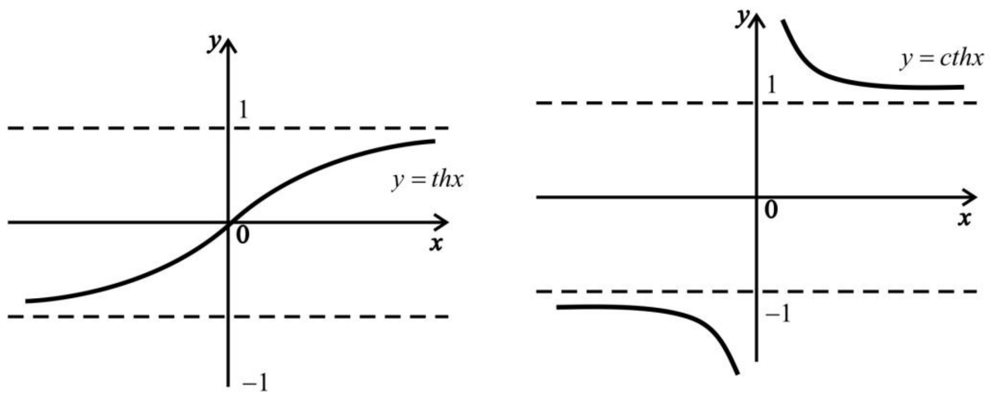


16. Графіки обернених тригонометричних функцій $y = \mathrm{arctg}$, $y = \mathrm{arcctg}\,x$

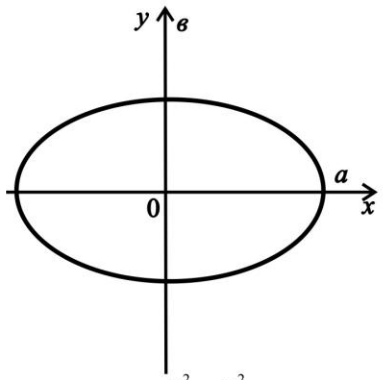
Продовження дод.



17. Графіки гіперболічних функцій $y = shx = \dfrac{L^x - L^{-x}}{2}$, $y = chx = \dfrac{L^x + L^{-x}}{2}$ (ланцюгова лінія)



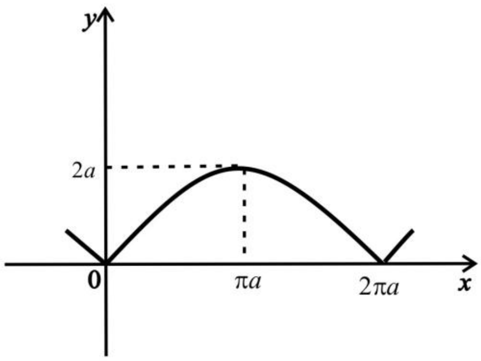
18. Графіки гіперболічних фукнцій $y = thx = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$, $y = cth = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$



19. Еліпс $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

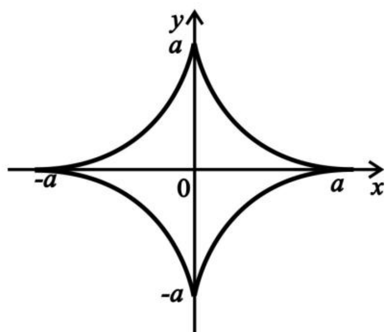
або $\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t \end{cases}$

$0 \le t \le 2\pi$



20. Циклоїда

$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}.$



21. Гипоциклоїда (астроїда)

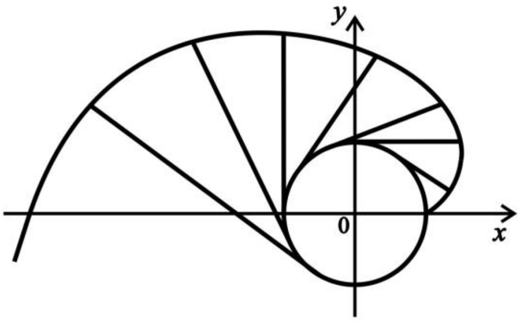
$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$

або

$\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases}$

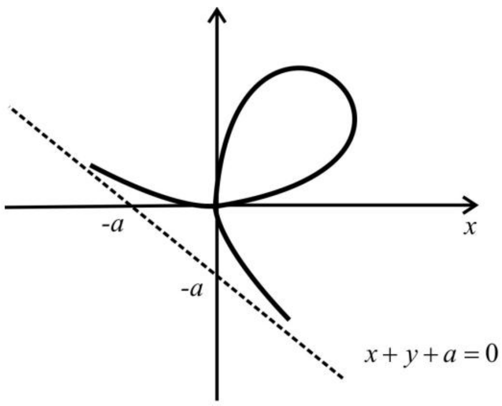
$0 \le t \le 2\pi$

y



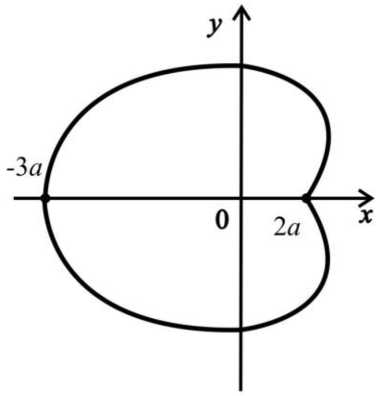
22. Евольвента кола

$$\begin{cases} x = a(\cos t + t\sin t), \\ y = a(\sin t - t\cos t) \end{cases}$$



23. Декартів листок

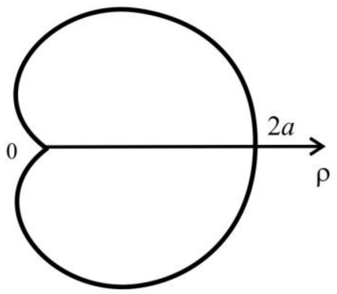
$$\begin{cases} x = \dfrac{3at}{1+t^3} \\ y = \dfrac{3at^2}{1+t^3} \end{cases}$$



24. Кардіоїда

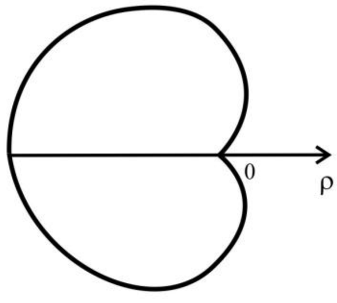
$$\begin{cases} x = 2a\cos t - a\cos 2t, \\ y = 2a\sin t - a\sin 2t \end{cases}$$

$0 \le t \le 2\pi$



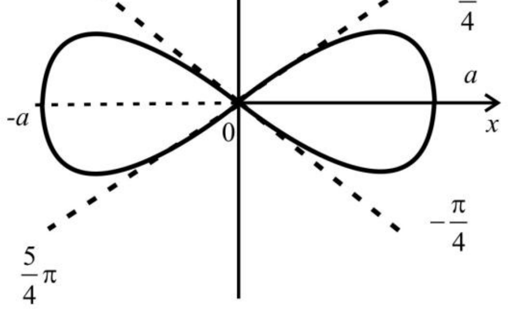
25. Кардіоїда

$\rho = a(1+\cos\varphi)$



26. Кардіоїда

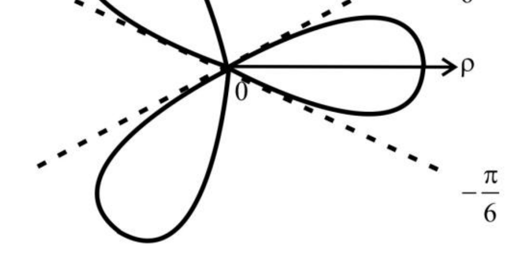
$\rho = a(1-\cos\varphi)$



27. Лемніската Бернулі

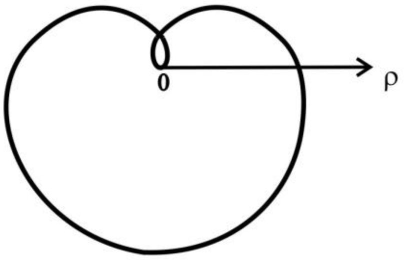
$\rho^2 = a\cos 2\varphi$

або $(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2)$



28. Трипилюсткова роза

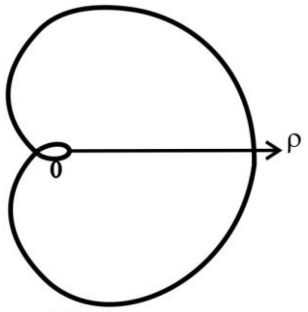
$\rho = a\cos 3\varphi$



29. Крива

$$\rho = a\sin^3\frac{\varphi}{3},$$

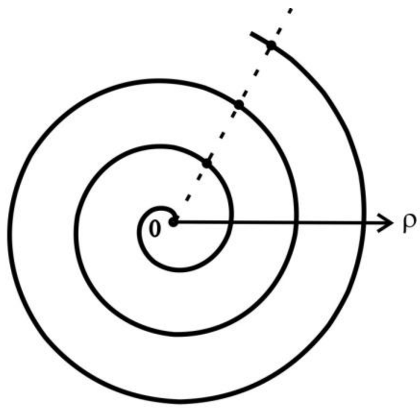
$$0 \le \varphi \le 3\pi$$



30. Крива

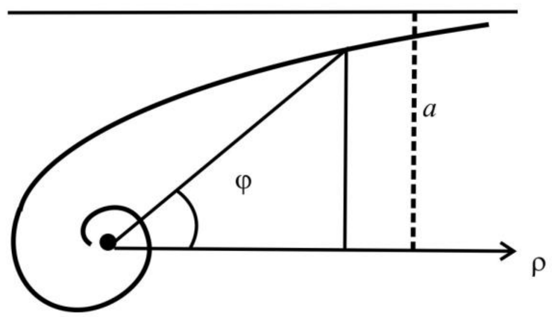
$$\rho = a\sin^4\frac{\varphi}{4},$$

$$0 \le \varphi \le 4\pi$$



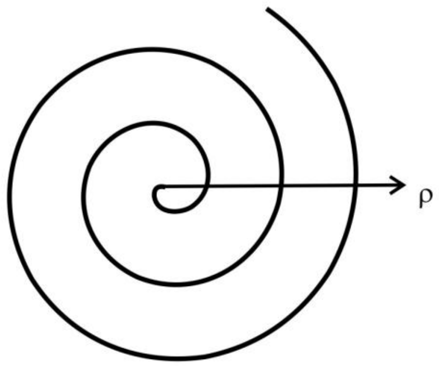
31. Спираль Архімеда

$$\rho = a\varphi$$



32. Гіперболічна спіраль

$$\rho = \frac{a}{\varphi}$$



33. Логарифмічна спіраль

$$\rho = e^{a\varphi}$$

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Дубовик В.П., Вища математика / Дубовик В.П., Юрик І.І. – К:А.С.К., 2006. – 648 с.

2. Пискунов М.М. Дифференциальное и интегральное исчисления / Пискунов М.М. – М: Интеграл. – Пресс, 2004. – Т1 – 416 с; 2003. – Т2. – 529 с.

3. Натансон И.П. Краткий курс высшей математики. – М: «Наука», 1968 – 727 с.

4. Герасимчук В.С. Вища математика. Повний курс у прикладах і задачах. Невизначений, визначений та невласні інтеграли. Звичайні диференціальні рівняння. Прикладні задачі : навч. посіб / Герасимчук В.С., Васильченко Г.С., Кравцов В.І. – К: Книги України ЛТД, 2010 – 470 с

5. Сборник задач по математике для втузов: В 2 ч. / Под. ред. А.В. Ефимова и Б.П. Демидовича. – М: Наука, 1981. – ч. 1 – 464 с.; 1986. – ч.2 – 368 с.

6. Лунгу К.Н. Сборник задач по высшей математике. 1 курс / Лунгу К.Н., Письменный Д.Т., Федин С.Н., Шевченко Ю.А. – Москва, Айрис – Пресс, 2008. – 575 с.

ЗМІСТ

ДЛЯ НОТАТОК

ДЛЯ НОТАТОК

ДЛЯ НОТАТОК

Навчальне видання

ЯРХО ТЕТЯНА ОЛЕКСАНДРІВНА
НЕБРАТЕНКО ОЛЕГ В'ЯЧЕСЛАВОВИЧ
МОРОЗ ІРИНА ІВАНІВНА

ПРАКТИКУМ З ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ. ВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ ТА ЙОГО ЗАСТОСУВАННЯ

Навчально-методичний порадник

Відповідальний за випуск *Т. В. Ємел'янова*

Авторська редакція

Комп'ютерна верстка *М. В. Дурова*

Дизайн обкладинки *О.В. Веретільника*

План 2011 р. Поз 5.
Підписано до друку 31.08.2011 р. Формат 60×84 1/16. Папір офсетний.
Гарнітура Times New Roman Cyr. Віддруковано на ризографі
Ум.друк. арк. 5,1. Обл.-вид.арк. 6,0.
Зам. № 473/11. Наклад 300 пр. Ціна договірна

ВИДАВНИЦТВО
Харківського національного автомобільно-дорожнього університету

Видавництво ХНАДУ, 61002, Харків-МСП, вул. Петровського, 25.
Тел. /факс: (057)700-38-64; 707-37-03, e-mail: rio@khadi.kharkov.ua

Свідоцтво Державного комітету інформаційної політики, телебачення та радіомовлення України про внесення суб'єкта видавничої справи до Державного реєстру видавців, виготівників і розповсюджувачів видавничої продукції, серія № ДК №897 від 17.04 2002 р.