Министерство образования и науки Украины

Харьковский национальный автомобильно-дорожный университет

Л. Д. НАЦИК

Е. И. ТАРАПОВА

А. Л. ВИШНЕВЕЦКИЙ

КУРС ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ ДЛЯ ИНОСТРАННЫХ СТУДЕНТОВ. МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Учебное пособие

Харьков – 201

УДК 517.95
ББК 22.11я7
Н 35

Рецензенты:

Батыгин Ю. В., заведующий кафедрой физики Харьковского национального автомобильно-дорожного университета, доктор физ.-мат. наук, профессор;

Кириченко И. К., заведующий кафедрой информатики и компьютерных технологий Украинской инженерно-педагогической академии, доктор физ.-мат. наук, профессор;

Гандель Ю.В., профессор кафедры математической физики и вычислительной математики ХНУ им. В.Н. Каразина, заслуженный работник образования Украины, заслуженный професор ХНУ, доктор физ.-мат. наук, профессор;

Литвин О.Н., заведующий кафедрой высшей и прикладной математики Украинской инженерно-педагогической академии, доктор физ.-мат. наук, профессор

Н 35 Курс высшей математики для иностранных студентов. Математический анализ. Учебное пособие / Нацик Л. Д., Тарапова Е. И., Вишневецкий А. Л. – Х.: ХНАДУ, 201 . – с. – Библиогр. в конце книги

ISBN

Пособие содержит краткое изложение следующих разделов курса высшей математики: дифференциальное и интегральное исчисления, дифференциальные уравнения, ряды. Приведены примеры и типовые задачи по курсу. Предназначено для студентов на начальном этапе освоения курса высшей математики, в частности, иностранных студентов младших курсов.

Посібник містить стисле викладення таких розділів курсу вищої математики: диференціальне та інтегральне числення, диференціальні рівняння, ряди. Наведені приклади і типові задачі з курсу. Призначено для студентів на початковому етапі засвоєння курса вищої математики, зокрема, іноземних студентів молодших курсів.

УДК 517.95
ББК 22.11я7

ISBN

ПРЕДИСЛОВИЕ

Учебное пособие написано в соответствии с требованиями государственных стандартов к общему курсу высшей математики.

Учебное пособие предназначено для студентов на начальном этапе освоения курса высшей математики, в частности, для иностранных студентов младших курсов университетов, как правило, ещё не преодолевших языковой барьер при изучении курса высшей математики на русском языке. Известно, что указанное обстоятельство затрудняет написание излагаемого в аудитории материала, а также использование рекомендуемой учебной литературы, в связи с необходимостью восприятия больших объемов текстовой информации, содержащейся в определениях, утверждениях, доказательствах, пояснениях.

Оригинальная форма предлагаемого учебного пособия – форма опорного конспекта – позволила сделать изложение теоретического материала кратким, наглядным и доступным для понимания за счет использования схем, таблиц, алгоритмов (правил) решения типовых задач. В учебном пособии рассмотрено решение большого числа примеров, иллюстрирующих все основные теоретические положения.

Предполагается, что учебное пособие будет использовано студентами на начальном этапе освоения курса высшей математики. В дальнейшем рекомендован переход к изучению известной учебной литературы по курсу, содержащей все необходимые рассуждения и доказательства утверждений.

ЧАСТЬ I. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОГО И МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

§1. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

1.1. Комплексные числа в алгебраической форме

Определения

Символ $\boxed{Z = a + ib}$ называется *комплексным числом*, где i – *мнимая единица*, введенная равенством: $\boxed{i^2 = -1}$, числа a и b вещественны.

Число a называется *вещественной частью* комплексного числа Z: $\boxed{a = \operatorname{Re} Z}$, b – *мнимой частью* числа Z: $\boxed{b = Im\, Z}$.

Алгебраическая форма

комплексного числа

$$\boxed{Z = a + ib}$$

a – вещественная часть Z ($a = \operatorname{Re} Z$)

b – мнимая часть Z ($b = Im\, Z$)

$\Leftarrow$

$i^2 = -1,$

a, b – вещественны

$$\boxed{Z = a + ib} \qquad \boxed{\overline{Z} = a - ib}$$

Z и $\overline{Z}$ – *комплексно сопряженные числа*

Примеры

$Z = -3 - 2i;$ $\quad a = \operatorname{Re} Z = -3;$ $\quad b = \operatorname{Im} Z = -2;$

$\overline{Z} = -3 + 2i;$ $\quad \operatorname{Re} \overline{Z} = -3;$ $\quad \operatorname{Im} \overline{Z} = 2.$

1.2. Действия с комплексными числами в алгебраической форме

$Z_1 = a_1 + ib_1$

$Z_2 = a_2 + ib_2$

1) сумма $Z_1 + Z_2 = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)$	
2) произведение $Z_1 \cdot Z_2 = (a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) =$ $= (a_1a_2 - b_1b_2) + i(a_1b_2 + b_1a_2)$ В частности, $Z \cdot \overline{Z} = a^2 + b^2$	раскрываем скобки с учетом того, что $i^2 = -1$
3) частное $\dfrac{Z_1}{Z_2} = \dfrac{Z_1 \cdot \overline{Z}_2}{Z_2 \cdot \overline{Z}_2} = \dfrac{(a_1a_2 + b_1b_2) + i(a_2b_1 - a_1b_2)}{a_2^2 + b_2^2}$	

Примеры

$Z_1 = 5 - 3i; \quad Z_2 = -4 + 2i.$

1) $Z_1 + Z_2 = 5 - 3i + (-4 + 2i) = 5 - 4 + i(-3 + 2) = 1 - i$.

2) $Z_1 \cdot Z_2 = (5 - 3i)(-4 + 2i) = 5 \cdot (-4) - (-3)2 + i(5 \cdot 2 + (-3)(-4) =$

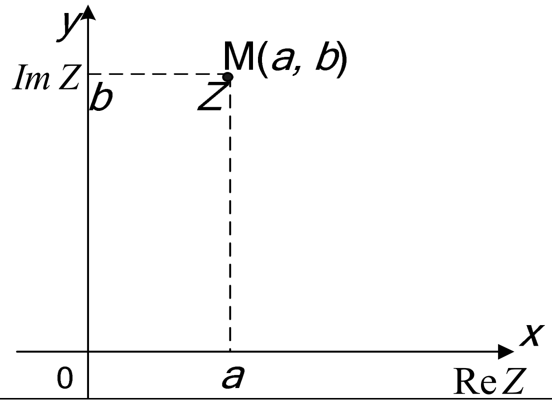
$= -20 + 6 + i(10 + 12) = -14 + 22i$.

3) $\dfrac{Z_1}{Z_2} = \dfrac{5 - 3i}{-4 + 2i} = \dfrac{(5 - 3i)(-4 - 2i)}{(-4 + 2i)(-4 - 2i)} = \dfrac{-20 - 6 + i(12 - 10)}{(-4)^2 + 2^2} =$

$= \dfrac{-26 + 2i}{20} = \dfrac{-13 + i}{10} = -\dfrac{13}{10} + \dfrac{1}{10}i.$

1.3. Изображение комплексного числа на комплексной плоскости. Модуль и аргумент комплексного числа

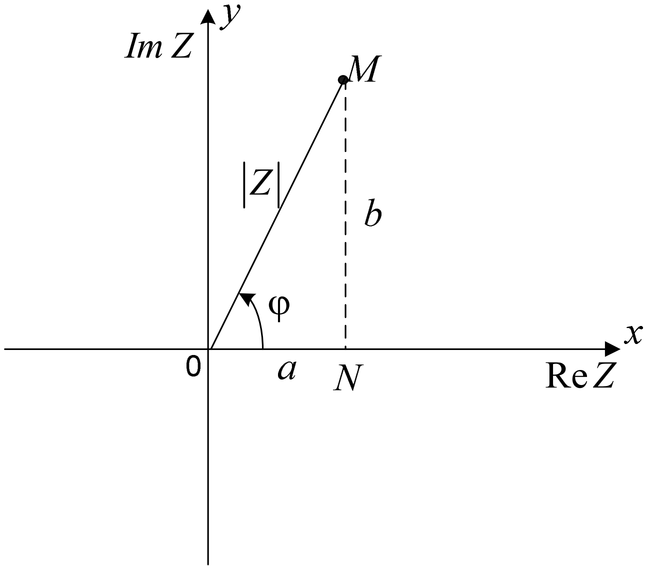
На *комплексной плоскости* (на оси абсцисс откладывается $\mathrm{Re}\,Z$, на оси ординат – $Im\,Z$) число $Z = a + ib$ изображается точкой M(a, b).



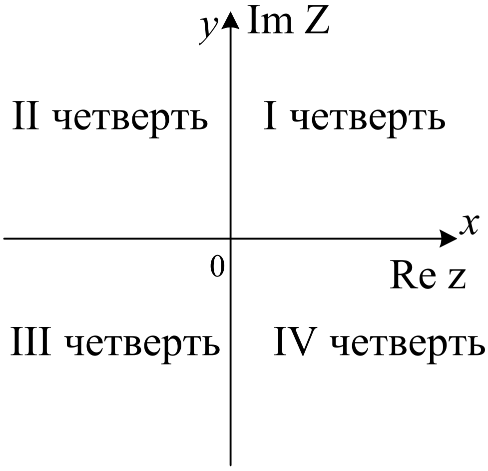
Модуль $|Z|$ комплексного числа Z – это расстояние от точки $M(a,\ b)$ до начала координат ($|Z| \geq 0$).

Аргумент $\arg Z = \varphi$ комплексного числа Z – это угол между положительным направлением оси абсцисс и отрезком OM.

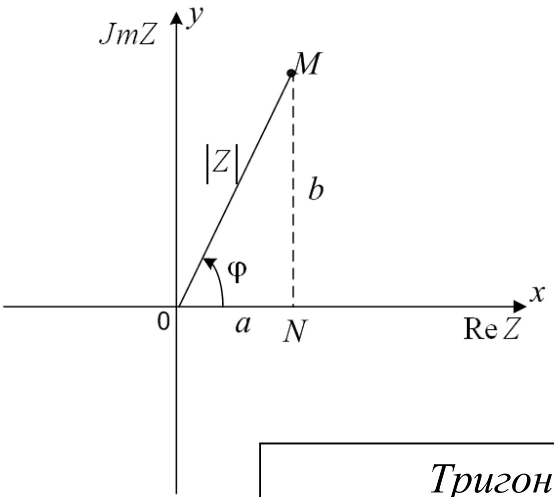
$(0 \leq \varphi < 2\pi$ или $-\pi \leq \varphi < \pi)$



<table>
<tr><td colspan="2">Формулы для $|Z|$ и φ (из $\Delta\ OMN$):

$\boxed{a,b} \rightarrow \boxed{|Z|,\varphi - ?}$</td></tr>
<tr><td rowspan="3"></td><td>$$\boxed{|Z| = \sqrt{a^2 + b^2}}$$</td></tr>
<tr><td>$$Z \in \text{I ч., IV ч.} \rightarrow \varphi = \operatorname{arctg}\frac{b}{a}$$</td></tr>
<tr><td>$$Z \in \text{II ч., III ч.} \rightarrow \varphi = \left(\operatorname{arctg}\frac{b}{a}\right) + \pi$$</td></tr>
</table>

1.4. Тригонометрическая и показательная формы комплексного числа



Алгебраическая

форма

$\boxed{Z = a + ib}$

$$\begin{cases} a = |Z|\cos\varphi \\ b = |Z|\sin\varphi \end{cases} \leftarrow \text{из } \Delta OMN$$

Тригонометрическая форма

комплексного числа

$$Z = |Z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

Формулы Эйлера

$$e^{\pm i\varphi} = \cos\varphi \pm i\sin\varphi$$

Показательная форма

комплексного числа

$$\boxed{Z = |Z| \cdot e^{i\varphi}}$$

Примеры

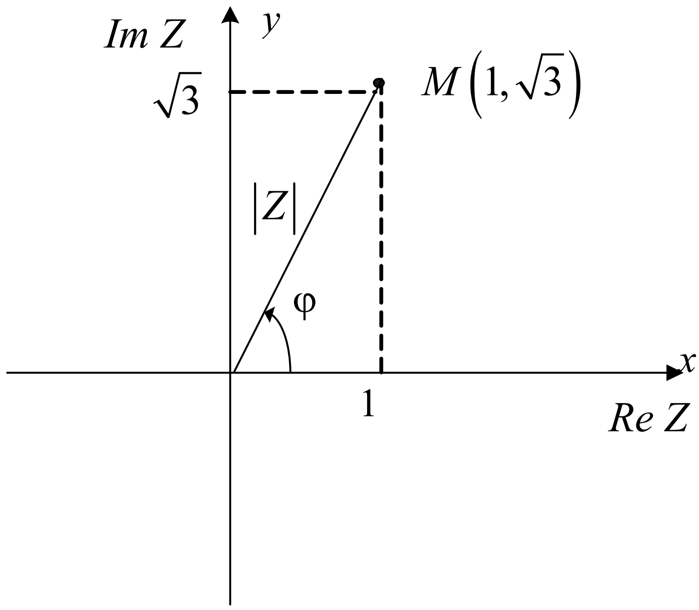
1) $Z = 1 + i\sqrt{3}$ – алгебраическая форма

$a = 1,\ b = \sqrt{3},\ |Z| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$

$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{1} = \frac{\pi}{3}$$

$Z = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$ – тригонометрическая форма

$Z = 2 \cdot e^{i\frac{\pi}{3}}$ – показательная форма.



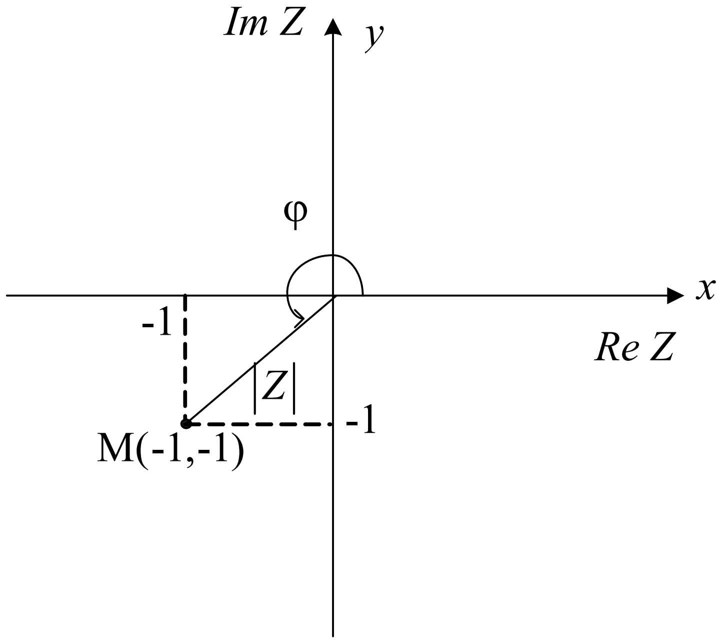
2) $Z = -1 - i$ – алгебраическая форма

$a = -1,\ b = -1,\ |Z| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$

$$\varphi = \operatorname{arctg}\left(\frac{-1}{-1}\right) + \pi = \frac{\pi}{4} + \pi = \frac{5}{4}\pi$$

$$Z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5}{4}\pi\right)$$ – тригонометрическая форма

$Z = \sqrt{2} \cdot e^{i\frac{5}{4}\pi}$ – показательная форма.



1.5. Действия над комплексными числами в тригонометрической и показательной формах

Форма / Действие	Тригонометрическая	Показательная
$Z_1 \cdot Z_2$	$\lvert Z_1\rvert \cdot \lvert Z_2\rvert (\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2))$	$\lvert Z_1\rvert \cdot \lvert Z_2\rvert \cdot e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$
$\dfrac{Z_1}{Z_2}$	$\dfrac{\lvert Z_1\rvert}{\lvert Z_2\rvert}(\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2))$	$\dfrac{Z_1}{Z_2}e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}$
Z^n (n – целое число)	Формула Муавра $\lvert Z\rvert^n \cdot (\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$	Формула Муавра $\lvert Z\rvert^n \cdot e^{in\varphi}$

Примеры

$Z_1 = 1 + i\sqrt{3}$ $\quad \left(\lvert Z_1\rvert = 2,\ \ \varphi_1 = \dfrac{\pi}{3}\right)$

$Z_2 = -1 - i$ $\quad \left(\lvert Z_2\rvert = \sqrt{2},\ \ \varphi_2 = \dfrac{5}{4}\pi\right)$

$$Z_1 \cdot Z_2 = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{5}{4}\pi\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{5}{4}\pi\right)\right)=$$

$$=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{19}{12}\pi+i\sin\frac{19}{12}\pi\right)=2\sqrt{2}e^{i\frac{19}{12}\pi}$$

$$\frac{Z_1}{Z_2}=\frac{2}{\sqrt{2}}\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{5}{4}\pi\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{5}{4}\pi\right)\right)=$$

$$=\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{11}{12}\pi\right)+i\sin\left(-\frac{11}{12}\pi\right)\right)=\sqrt{2}\,e^{-i\frac{11}{12}\pi}$$

$$Z_1^5=2^5\left(\cos 5\cdot\frac{\pi}{3}+i\sin 5\cdot\frac{\pi}{3}\right)=32\left(\cos\frac{5}{3}\pi+i\sin\frac{5}{3}\pi\right)=32e^{i\frac{5}{3}\pi}.$$

Контрольные вопросы к § 1

1. В какой форме удобнее складывать (умножать, делить, возводить в степень) комплексные числа?

2. Какой геометрический смысл имеют модуль и аргумент комплексного числа?

3. Может ли модуль (аргумент) комплексного числа быть равным нулю, отрицательным?

Упражнения к § 1

1. Найти сумму, произведение, частное следующих комплексных чисел:

а) $z_1 = 2+i,\quad z_2 = 1-3i$;

б) $z_1 = -4+i,\quad z_2 = 3+5i$;

в) $z_1 = 2i,\quad z_2 = 3-i$.

Изобразить результаты на комплексной плоскости.

2. Записать в тригонометрической и показательной формах следующие комплексные числа:

а) $z = 1 + i$;

б) $z = 2 - \sqrt{2}i$;

в) $z = -2 + 3i$;

г) $z = -1 - i\sqrt{3}$.

Изобразить результаты на комплексной плоскости.

3. Найти $\overline{z_1} \cdot z_2$, $z_2{}^3$, $\frac{z_1}{\overline{z_2}}$, если

а) $z_1 = 3\sqrt{2}^{-i\frac{\pi}{7}}$, $\quad z_2 = 4\left(\cos\frac{3}{5}\pi + i\sin\frac{3}{5}\pi\right)$;

б) $z_1 = 2$, $\quad z_2 = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$;

в) $z_1 = e^{i\frac{\pi}{8}}$, $\quad z_2 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

§2. МНОГОЧЛЕНЫ

2.1. Разложение многочлена на множители

Определение *Многочленом степени n* ($n \geq 0$, n – целое число) от переменной x называется выражение вида: $$\boxed{P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0}$$
$a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0$ *– коэффициенты многочлена;* *n – степень многочлена*

Число α – корень многочлена $P_n(x)$	$\Longleftrightarrow$	$P_n(\alpha) = 0$

Разложение многочлена на множители	
$P_n(x) = a_n(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_n)$	$\leftarrow$ $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ – *корни* многочлена
$P_n(x) = a_n(x-\alpha_1)^{k_1}(x-\alpha_2)^{k_2}\ldots(x-\alpha_e)^{k_e}$, числа $\alpha_1, \ldots \alpha_e$ попарно различны, k_s – *кратность* корня α_s, $k_1 + k_2 + \ldots + k_e = n$.	

Пример

$$P_4(x) = 5x^4 + 5x^3 - 30x^2 = 5x^2(x^2 + x - 6) =$$
$$= 5x^2(x+3)(x-2)$$
$$(\alpha_1 = 0,\ k_1 = 2;\ \alpha_2 = -3,\ k_2 = 1;\ \alpha_3 = 2,\ k_3 = 1).$$

Контрольные вопросы к § 2

1. Может ли многочлен пятой степени иметь три различных корня (шесть различных корней)?

2. Может ли многочлен с вещественными коэффициентами иметь комплексные корни?

3. Может ли многочлен иметь один (три, пять) комплексных корней?

Упражнения к § 2

1. Разложить на множители следующие многочлены:

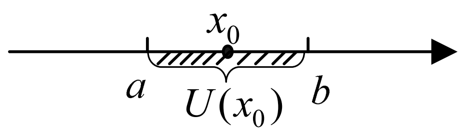
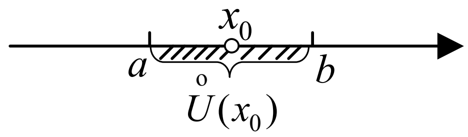
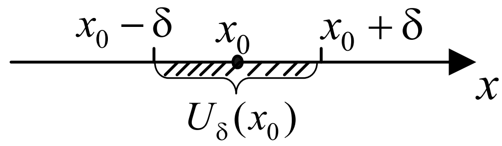
а) $P_3(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$;

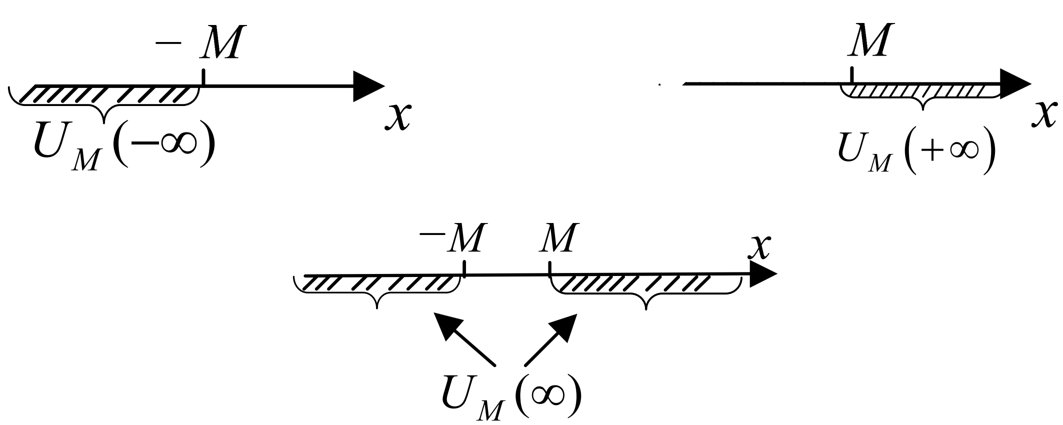
б) $P_4(x) = x^4 - 2x^3 - 5x^2 + 6x$;

в) $P_5(x) = x^5 - 4x^4 - 6x^3 + 16x^2 + 29x + 12$.

§3. ПРЕДЕЛ И НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ

3.1. Окрестности точки x_0, $+\infty$, $-\infty$, ∞

Определения	
Окрестностью $U(x_0)$ *точки* x_0 называется любой интервал, содержащий эту точку.	
Проколотой окрестностью $\overset{o}{U}(x_0)$ *точки* x_0 называется окрестность точки x_0, из которой исключена точка x_0.	
В любой окрестности точки x_0 содержится симметричная δ*–окрестность этой точки,* т. е. совокупность точек вида $(x_0-\delta, x_0+\delta)$, $\delta>0$.	

Определение	
Пусть $M>0$	Интервал $(M; +\infty)$ называется M-окрестностью точки $+\infty$ (плюс бесконечности).
	Интервал $(-\infty; -M)$ называется M-окрестностью точки $-\infty$ (минус бесконечности).
	Объединение интервалов $(-\infty;-M)\cup(M;+\infty)$ называется окрестностью ∞ (бесконечности).
	

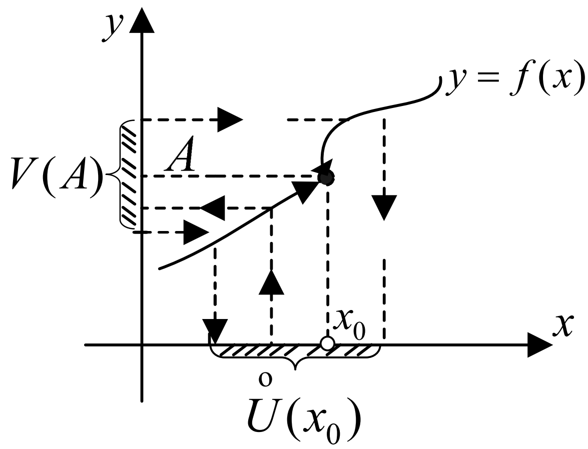
3.2. *Предел функции в точке x_0*

<table>
<tr>
<td>

Определение 1

Число A называется *пределом функции* $f(x)$ в точке x_0 (при x, стремящемся к x_0), если для любой окрестности $V(A)$ числа A найдется такая проколотая окрестность $\overset{\circ}{U}(x_0)$ точки x_0, что для всех $x \in \overset{\circ}{U}(x_0)$ значения функции $f(x) \in V(A)$.

</td>
<td>



$$\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) = A}$$

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{\forall V(A) \exists \overset{\circ}{U}(x_0) : \forall x \in \overset{\circ}{U}(x_0) \Rightarrow \Rightarrow f(x) \in V(A)}$$

Символы математической логики:

$\forall$ – для каждого, для любого;

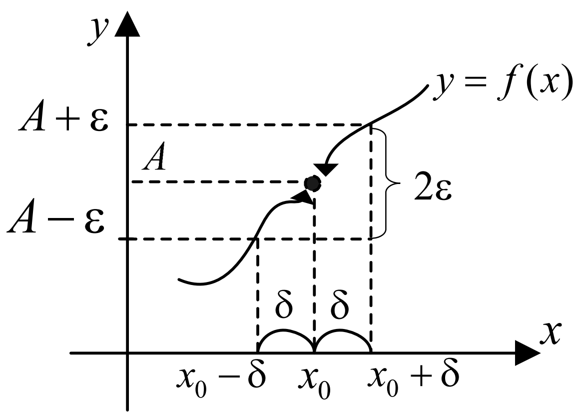
$\exists$ – существует, найдется.

</td>
</tr>
<tr>
<td>

Определение 2

Число A называется пределом функции $f(x)$ в точке x_0 (при x, стремящемся к x_0), если для каждого числа $\varepsilon > 0$, как бы мало оно ни было, можно указать такое число $\delta > 0$, что для всех x, отличных от x_0 и удовлетворяющих неравенству $|x - x_0| < \delta$, имеет место неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

</td>
<td>



$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A$$

</td>
</tr>
</table>

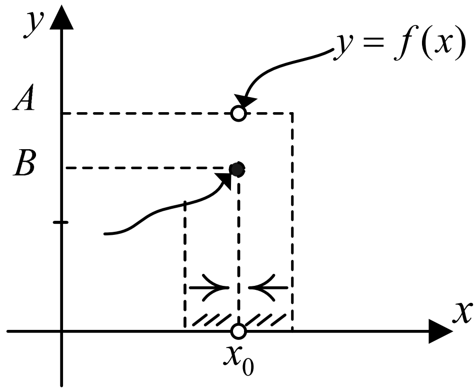
3.3. Односторонние пределы

$$\boxed{f\left(x_0+0\right)=\lim_{x\to x_0+0} f\left(x\right)=A}$$

(предел справа)

$$\boxed{f\left(x_0-0\right)=\lim_{x\to x_0+0} f\left(x\right)=B}$$

(предел слева)

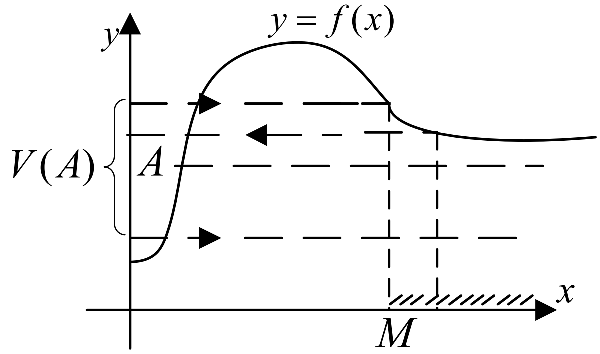


3.4. Конечный предел функции f(x) при x→+∞

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x)}$$

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{\forall V(A)\exists U_M(+\infty):\forall x\in U_M(+\infty)\Rightarrow f(x)\in V(A)}$$

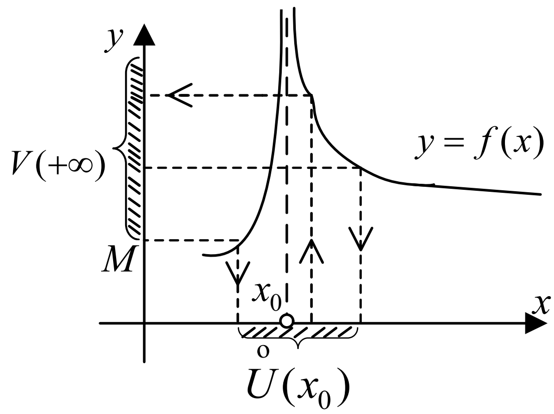


3.5. Бесконечный предел f(x) при x→ x_0

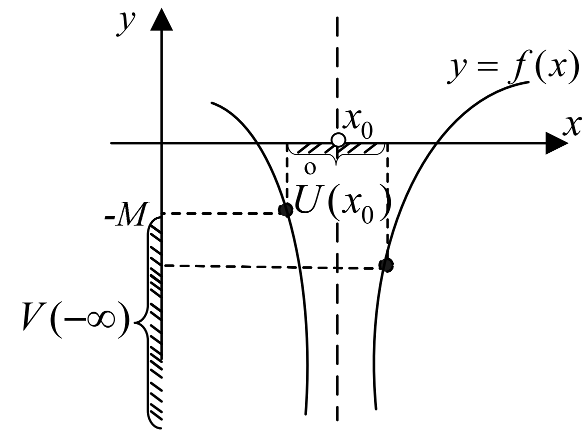
$$\boxed{\lim_{x\to x_0} f(x)=+\infty}$$

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{\forall V(+\infty)\exists \overset{o}{U}(x_0):\forall x\in \overset{o}{U}(x_0)\Rightarrow f(x)\in V(+\infty)}$$

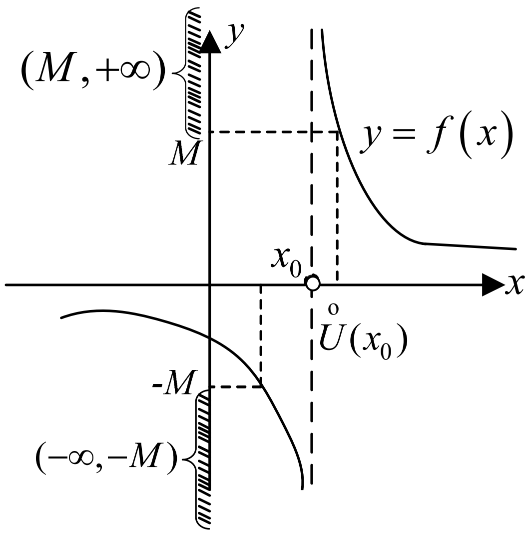


$$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$$



$$\forall V(-\infty) \exists \overset{o}{U}(x_0) : \forall x \in \overset{o}{U}(x_0) \Rightarrow f(x) \in V(-\infty)$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$$



$$\forall V(\infty) \exists \overset{o}{U}(x_0) : \forall x \in \overset{o}{U}(x_0) \Rightarrow f(x) \in V(\infty)$$

3.6. Теоремы о пределах

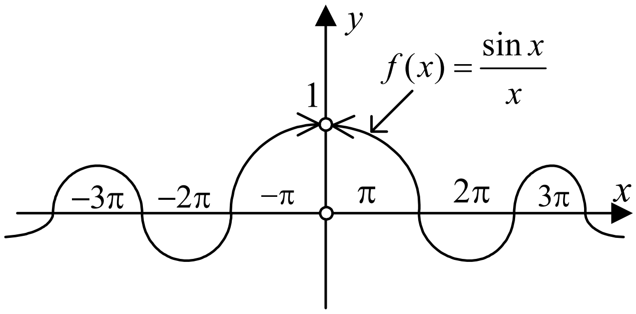
	$\Longrightarrow$	
$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$		1) $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) + g(x)) = A + B$
$\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = B$		2) $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = A \cdot B$
A, B – конечны		3) $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{A}{B}$; $B \neq 0$

Утверждения теорем сохраняются
и при $x \to +\infty; -\infty; \infty$

3.7. Первый замечательный предел

3π

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$
$\lim\limits_{\alpha(x)\to 0}\dfrac{\sin\alpha(x)}{\alpha(x)}=1$



Следствия

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{\dfrac{x^2}{2}}=1$	$\lim\limits_{\alpha(x)\to 0}\dfrac{1-\cos\alpha(x)}{\dfrac{\alpha(x)^2}{2}}=1$
$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}x}{x}=1$	$\lim\limits_{\alpha(x)\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}\alpha(x)}{\alpha(x)}=1$
$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{arctg}x}{x}=1$	$\lim\limits_{\alpha(x)\to 0}\dfrac{\mathrm{arctg}\alpha(x)}{\alpha(x)}=1$
$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}=1$	$\lim\limits_{\alpha(x)\to 0}\dfrac{\arcsin\alpha(x)}{\alpha(x)}=1$

3.8. Второй замечательный предел

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}=e$	$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$
$\lim\limits_{\alpha(x)\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{\alpha(x)}\right)^{\alpha(x)}=e$	$\lim\limits_{\alpha(x)\to 0}(1+\alpha(x))^{\frac{1}{\alpha(x)}}=e$

Следствия

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x\ln a}=1$	$\lim\limits_{\alpha(x)\to 0}\dfrac{a^{\alpha(x)}-1}{\alpha(x)\ln a}=1$
$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$	$\lim\limits_{\alpha(x)\to 0}\dfrac{e^{\alpha(x)}-1}{\alpha(x)}=1$
$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log_a(1+x)}{\dfrac{x}{\ln a}}=1$	$\lim\limits_{\alpha(x)\to 0}\dfrac{\log_a(1+\alpha(x))}{\dfrac{\alpha(x)}{\ln a}}=1$
$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$	$\lim\limits_{\alpha(x)\to 0}\dfrac{\ln(1+\alpha(x))}{\alpha(x)}=1$
$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^p-1}{px}=1$	$\lim\limits_{\alpha(x)\to 0}\dfrac{(1+\alpha(x))^p-1}{p\alpha(x)}=1$

$e\approx 2{,}71828...-$ основание
натурального логарифма:
$\log_e a=b \Leftrightarrow \ln a=b$.

3.9. Бесконечно малые и бесконечно большие

Определение Функция $f(x)$ называется *бесконечно малой* при $x\to x_0$, если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$ (возможно, что $x\to+\infty;\ -\infty;\ \infty$)	$\boxed{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0}$ $\Updownarrow$ $f(x)$ *бесконечно малая* при $x\to x_0$ $f(x)=o(1),\ x\to x_0$
Определение Функция $f(x)$ называется *бесконечно большой* при $x\to x_0$, если $\lim\limits_{x\to x_0}\lvert f(x)\rvert=+\infty$ (возможно, что $x\to+\infty;\ -\infty;\ \infty$)	$\boxed{\lim\limits_{x\to x_0}\lvert f(x)\rvert=+\infty}$ $\Updownarrow$ $f(x)$ *бесконечно большая* при $x\to x_0$

Примеры

1) $f(x) = \sin x$ – бесконечно малая при $x \to 0$, т. к. $\lim\limits_{x\to 0}\sin x = 0$

$$\left(\sin x = o(1),\ x \to 0\right).$$

2) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ – бесконечно малая при $x \to \infty$, т. к. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x} = 0$

$$\left(\frac{1}{x} = o(1),\ x \to \infty\right).$$

3) $f(x) = \dfrac{1}{x-4}$ –бесконечно большая при $x \to 4$, т. к. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{1}{x-4} = \infty$.

3.10. Эквивалентные бесконечно малые. Таблица эквивалентных бесконечно малых. Теорема о замене бесконечно малых эквивалентными

$f(x)$ – бесконечно малая при $x \to x_0$	$\Longrightarrow$	$\boxed{\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)} = c \ne 0}$ $\Longleftrightarrow$ $f(x)$ и $g(x)$ – *бесконечно малые одного порядка* при $x \to x_0$
$g(x)$ – бесконечно малая при $x \to x_0$		$\boxed{\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)} = 1}$ $\Longleftrightarrow$ $f(x)$ и $g(x)$ – *эквивалентные бесконечно малые* при $x \to x_0$
		Запись: $f(x) \sim g(x)$ при $x \to x_0$

Пример

$f(x) = \sin x$ и $g(x) = x$ – эквивалентные бесконечно малые при $x \to 0$, т. к. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$; $\sin x \sim x$ при $x \to 0$.

Таблица эквивалентных бесконечно малых

$\boxed{\text{При } \alpha(x) \to 0}$

1. $\sin\alpha(x) \sim \alpha(x)$	6. $a^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x)\ln a$
2. $\arcsin\alpha(x) \sim \alpha(x)$	6′. $e^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x)$
3. $\mathrm{tg}\alpha(x) \sim \alpha(x)$	7. $\log_a(1+\alpha(x)) \sim \dfrac{\alpha(x)}{\ln a}$
4. $\mathrm{arctg}\alpha(x) \sim \alpha(x)$	7′. $\ln(1+\alpha(x)) \sim \alpha(x)$
5. $1-\cos\alpha(x) \sim \dfrac{(\alpha(x))^2}{2}$	8. $(1+\alpha(x))^p - 1 \sim p\alpha(x)$ (p – число)

Теорема о замене бесконечно малых эквивалентными

$f(x), g(x), f_1(x), g_1(x)$ – бесконечно малые (при $x \to x_0$) функции

$f(x) \sim f_1(x)$

$g(x) \sim g_1(x)$

при $x \to x_0$

$$\Longrightarrow \quad \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0}\frac{f_1(x)}{g_1(x)}$$

Предел отношения бесконечно малых функций не изменится, если каждую из них (или какую-нибудь одну) заменить эквивалентной.

Примеры

$$1)\ \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-3x)}{\arcsin 5x} = \left|\begin{array}{l}\ln(1-3x) \sim -3x, x \to 0\\ \arcsin 5x \sim 5x, x \to 0\end{array}\right| = \lim_{x\to 0}\frac{-3x}{5x} = -\frac{3}{5}.$$

$$2)\ \lim_{x\to 3}\frac{e^{2(x-3)}-1}{\mathrm{tg}(x-3)} = \left|\begin{array}{l}e^{2(x-3)} - 1 \sim 2(x-3), x \to 3\\ tg(x-3) \sim x-3, x \to 3\end{array}\right| = \lim_{x\to 3}\frac{2(x-3)}{x-3} = 2.$$

3.11. Определение непрерывной функции

Определение 1

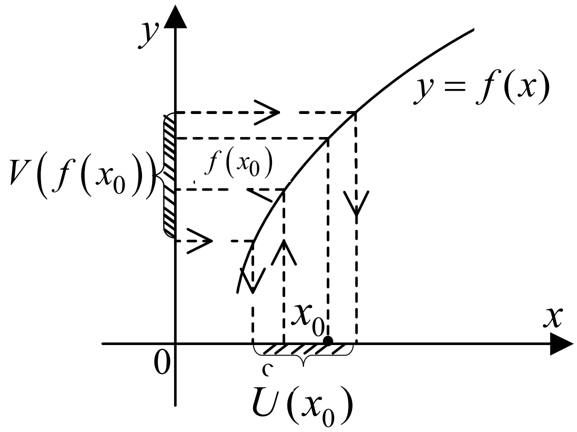
Функция $f(x)$ называется *непрерывной в точке* x_0, если предел этой функции в точке x_0 существует и равен значению функции в этой точке

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)}$$

Определение 2

$$\boxed{f(x) \text{ – непрерывна в точке } x_0}$$

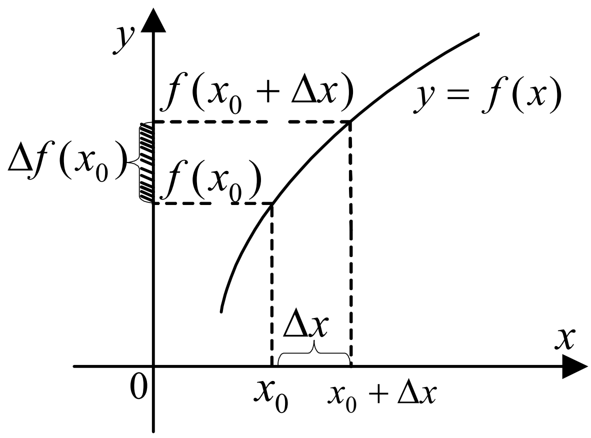
$$\boxed{\begin{gathered}\forall V(f(x_0)) \exists U(x_0) : \forall x \in U(x_0) \Rightarrow \\ \Rightarrow f(x) \in V(f(x_0))\end{gathered}}$$



Определение 3

Функция $f(x)$ называется *непрерывной в точке* x_0, если бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции

$$\boxed{\begin{gathered}\Delta f(x_0) \to 0 \\ \Delta x \to 0\end{gathered}}$$



(Δx – приращение аргумента,

$\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ – приращение функции $f(x)$).

Определение 4

Функция $f(x)$ называется *непрерывной на отрезке* $[a,b]$, если она непрерывна в каждой точке интервала (a,b) и

$$f(a) = \lim_{x \to a+0} f(x); \qquad f(b) = \lim_{x \to b-0} f(x).$$

$f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке x_0	$\Longrightarrow$	$\left.\begin{array}{l} f(x)+g(x), \\ f(x)\cdot g(x), \\ \dfrac{f(x)}{g(x)},(g(x_0)\neq 0) \end{array}\right\}$ непрерывны в точке x_0

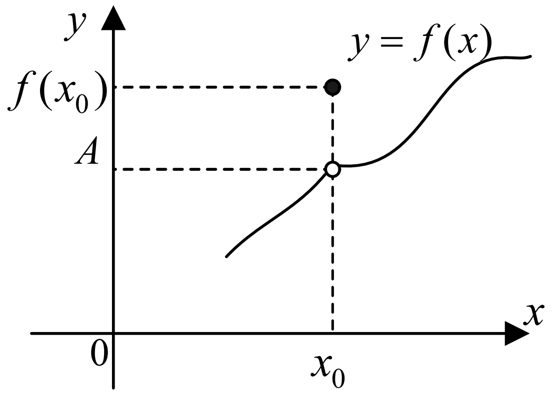
Элементарные функции непрерывны в их области определения

3.12. Разрывные функции.
Классификация точек разрыва

Определение

Точка x_0 называется точкой *устранимого разрыва* функции $f(x)$, если

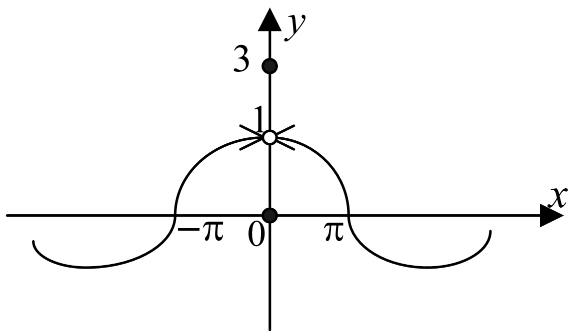
$$\boxed{\lim_{x\to x_0} f(x) = A \neq f(x_0)}$$



Пример

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, x\neq 0, \\ 3, \qquad x=0.\end{cases}$$

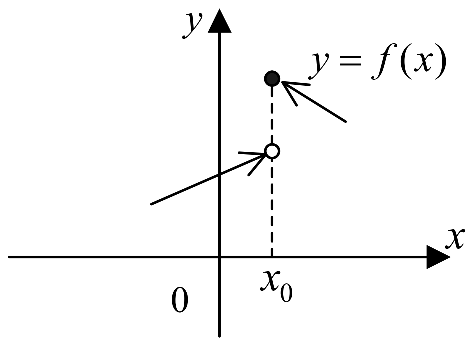
$x_0 = 0$ – точка устранимого разрыва



Разрыв I рода

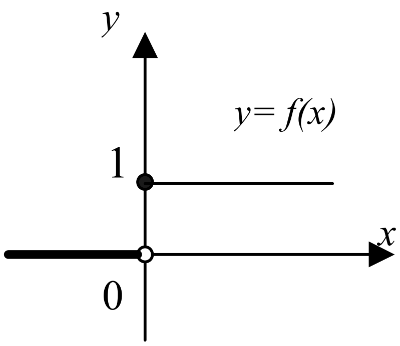
Определение
Точка x_0 называется *точкой разрыва I рода* функции $f(x)$, если в этой точке существуют конечные пределы справа и слева, но

$$\boxed{\lim_{x\to x_0+0} f(x) \neq \lim_{x\to x_0-0} f(x)}$$



$f(x_0+0)-f(x_0-0)\equiv \Delta f(x_0)$ – *скачок* функции в точке разрыва I рода.

Пример



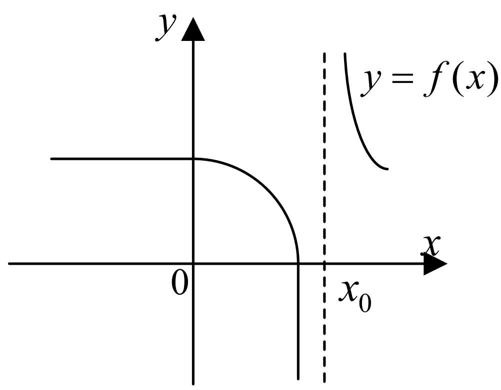
$$f(x)=\begin{cases}1, x\geq 0,\\ 0, x<0\end{cases}$$

$x_0=0$ – точка разрыва I рода

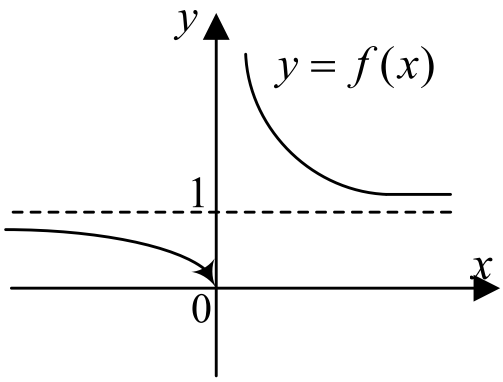
$\Delta f(x_0)=1-0=1$

Разрыв II рода

Определение
Если хотя бы один из пределов $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$ не существует или бесконечен, то точка x_0 называется *точкой разрыва II рода* (функции $f(x)$).



Пример



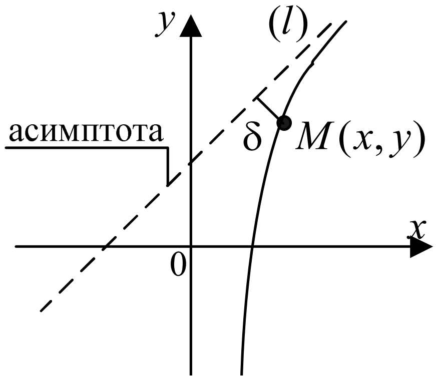
$f(x)=2^{\frac{1}{x}}$

$x_0=0$ – точка разрыва II рода.

3.13. Асимптоты графика функции f(x)

Определение

Прямая (l) называется *асимптотой кривой*, если расстояние δ от переменной точки M этой кривой до (l) при удалении точки M в ∞ стремится к нулю.



Прямая $x=x_0$ является *вертикальной асимптотой* графика функции $f(x)$	$\Longleftrightarrow$	$\lvert f(x)\rvert\to+\infty$ $x\to x_0+0$ или $x\to x_0-0$

Прямая $y=k\cdot x+b$ является *наклонной асимптотой* графика функции $f(x)$.	$\Longleftrightarrow$	$k=\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}}\frac{f(x)}{x}$ $b=\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}}\left(f(x)-kx\right)$

Пример

$$f(x)=\frac{3x^2+4}{x+2}.$$

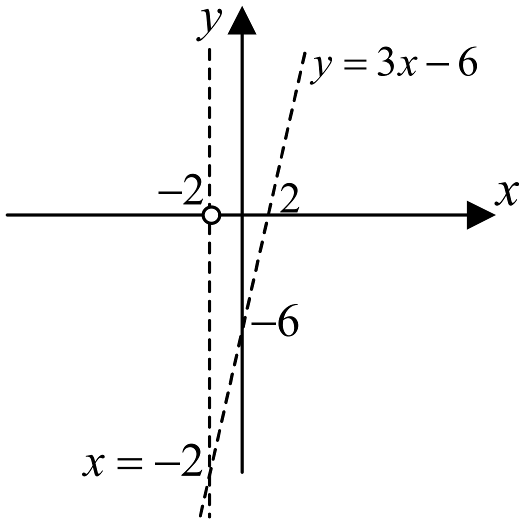
$D(f): x\neq -2$

$x=-2$ – уравнение вертикальной асимптоты.

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+4}{x\left(x+2\right)}=3$$

$$b=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x^2+4}{x+2}-3x\right)=-6$$

$y=3x-6$ – уравнение наклонной асимптоты.



Контрольные вопросы к § 3

1. Может ли сумма (произведение) двух функций, не имеющих пределов в точке x_0, иметь предел в этой точке?

2. Может ли сумма (произведение) двух разрывных в точке x_0 функций быть непрерывной в этой точке?

Указание: рассмотреть функции $f\left(x\right)=\begin{cases}1, & x>0\\ -1, & x\le 0\end{cases}$ и

$$g\left(x\right)=\begin{cases}-x^2-1, & x>0\\ x^2+1, & x\le 0\end{cases}.$$

3. Может ли частное двух непрерывных в точке x_0 функций быть разрывным в этой точке?

4. Существуют ли значения a, при которых функция $f\left(x\right)$ непрерывна в точке $x_0=0$, если

а) $f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \\ a, & x=0 \end{cases}$;

б) $f(x)=\begin{cases} \cos x, & x\leq 0 \\ ax, & x>0 \end{cases}$.

5. Является ли ось абсцисс (ось ординат) асимптотой графика функции $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$?

Упражнения к § 3

1. Найти пределы функций

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x}{1-\cos 3x}$;

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(1+\sin 2x\right)}{\operatorname{tg} 3x}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^{x^2}-1}{\sin 4x\cdot\operatorname{tg} 3x}$;

4) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\operatorname{ctg}(2-x)\cdot\left(x^2-4\right)\right)$;

5) $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\sin x}{x^2-\pi^2}$;

6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin 5x}-e^{\sin x}}{\ln(1-2x)}$;

7) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{\sin\frac{3}{x}}{e^{\frac{1}{x}}-1}$;

8) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin 5\pi x}{\sin 4\pi x}$;

9) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[4]{1+3\sin 2x}-1}{\cos 4x-1}$;

10) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\log_3\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}{\operatorname{arctg}\dfrac{2}{x}}$.

2. Исследовать на непрерывность следующие функции:

1) $f(x)=\dfrac{1}{x^2-4}$;

2) $f(x)=\begin{cases} x+1, & x>0 \\ -x^2, & x\le 0 \end{cases}$;

3) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1-\cos x}{x^2}, & x\ne 0 \\ 1, & x=0 \end{cases}$;

4) $f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, & x\ne 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$.

3. Составить уравнения асимптот графиков функций

1) $f(x)=\dfrac{x^2-5}{3x-1}$;

2) $f(x)=\dfrac{3}{x^2-1}$;

3) $f(x)=\dfrac{x^3}{2(1-x)^2}$;

4) $f(x)=2x+\operatorname{arctg}\dfrac{x}{2}$;

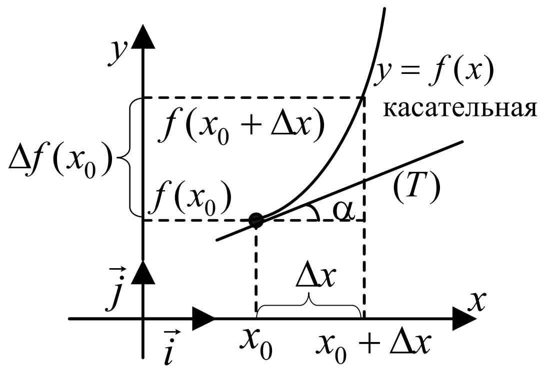
5) $f(x)=\dfrac{2x^2+3x-5}{x(x-4)}$.

§4. ПРОИЗВОДНЫЕ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ

4.1. Производная функции f(x) в точке x_0

Определение

Производной функции $f(x)$ в точке x_0 называется *предел* (если он существует) отношения приращения функции в точке x_0 к приращению аргумента Δx при условии стремления Δx к нулю.



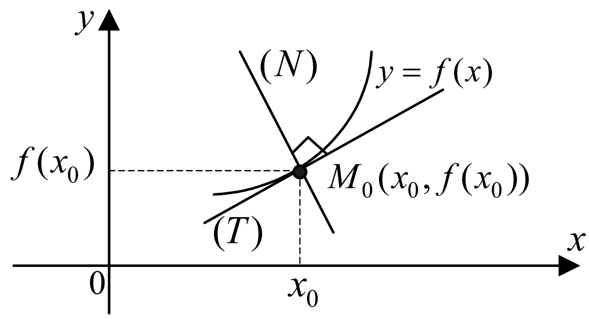
$$f'(x_0) \equiv \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_0} \overset{\text{(опр)}}{=} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

$$f'(x_0) = \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\left(\widehat{\vec{i}, T}\right)$$

Функция $f(x)$ называется *дифференцируемой в точке* x_0

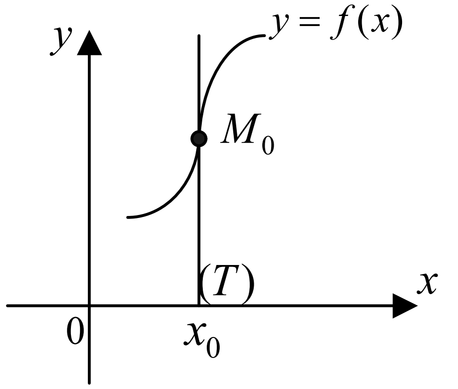
4.2. Уравнения касательной и нормали к графику функции в точке $M_0(x_0, f(x_0))$

(T): $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$
(N): $y = f(x_0) - \dfrac{1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0)$

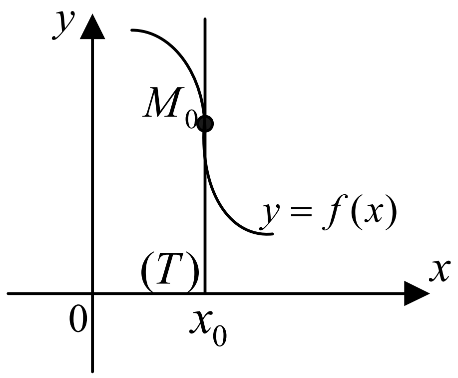


(N) – нормаль, $(N) \perp (T)$

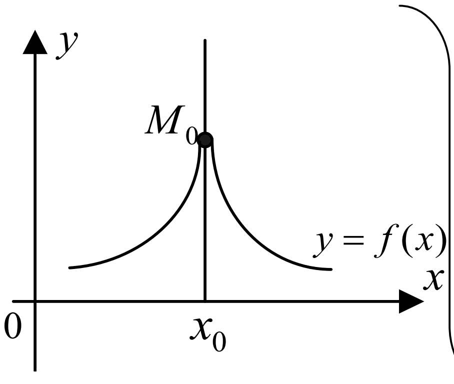
4.3. Бесконечные производные

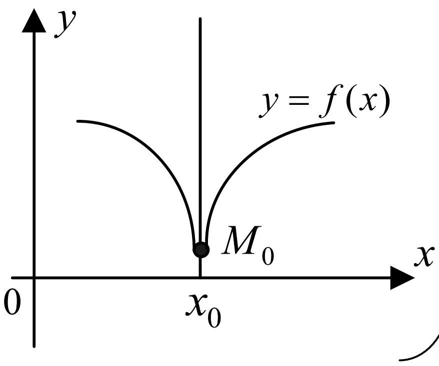


$$\Longrightarrow \quad f'(x_0) = \operatorname{tg}\frac{\pi}{2} = +\infty$$



$$\Longrightarrow \quad f'(x_0) = \operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\infty$$





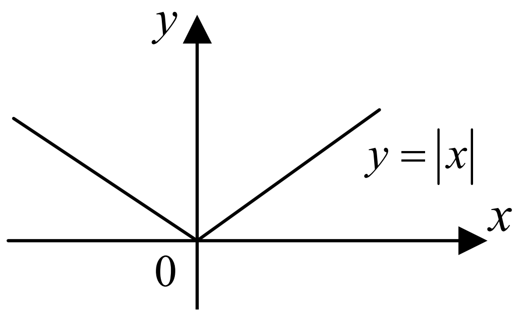
$$\Longrightarrow \quad f'(x_0) = \infty$$

4.4. Связь между дифференцируемостью и непрерывностью в точке x_0

Дифференцируемость	$\Longrightarrow$	Непрерывность
$\exists f'(x_0)$	$\Longrightarrow$	$\Delta f(x_0) \to 0$ при $\Delta x \to 0$

Непрерывность	$\not\Longrightarrow$	Дифференцируемость
$\Delta f(x_0) \to 0$ при $\Delta x \to 0$	$\not\Longrightarrow$	$\exists f'(x_0)$

Пример



В точке $x_0 = 0$ функция $f(x) = |x|$ непрерывна, но не дифференцируема.

4.5. Таблица производных элементарных функций

1	$c' = 0, \left(c = \text{const}\right)$	6	$(\cos x)' = -\sin x$
2	$(x^p)' = px^{p-1}, \ \ (p - \text{число})$	7	$(\text{tg}x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$, $\left(x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi k, k - \text{ целое число}\right)$
3	$\left(a^x\right)' = a^x \ln a, \ \left(a > 0, a \neq 1\right)$	8	$(\text{ctg}x)' = \dfrac{-1}{\sin^2 x}$, $(x \neq k\pi, k - \text{ целое число})$

3′	$(e^x)' = e^x$	9	$(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ (\lvert x\rvert < 1)$
4	$(\log_a \lvert x\rvert)' = \dfrac{1}{x\ln a},$ $(a > 0, a \neq 1, x \neq 0)$	10	$(\arccos x)' = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}},\ \ (\lvert x\rvert < 1)$
4′	$(\ln\lvert x\rvert)' = \dfrac{1}{x},\quad (x \neq 0)$	11	$(\mathrm{arc\,tg}x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$
5	$(\sin x)' = \cos x$	12	$(\mathrm{arc\,ctg}x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$

Примеры

1) $(x^3)' = 3x^2;\ (p = 3)$

2) $(\sqrt[5]{x^4})' = (x^{\frac{4}{5}})' = \dfrac{4}{5}x^{\frac{4}{5}-1} = \dfrac{4}{5}x^{-\frac{1}{5}};\ \left(p = \dfrac{4}{5}\right)$

3) $(2^x)' = 2^x \ln 2;\ (a = 2)$

4) $(\log_3 x)' = \dfrac{1}{x\ln 3};\ (a = 3)$

4.6. Правила дифференцирования

1. $(cf(x))' = c \cdot f'(x),\ (c = \mathrm{const})$
2. $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$
3. $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
4. $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$
5. Производная сложной функции $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

6. $y = f(x)$ и $x = g(y)$ – взаимно обратные функции	$\Longrightarrow$	$g'(y_0) = \dfrac{1}{f'(x_0)}$, где $y_0 = f(x_0)$
7. $y = f(x)$ задана параметрически, т. е. $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \quad (\alpha < t < \beta) \end{cases}$	$\Longrightarrow$	$f'(x) = \dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$
8. $y = f(x)$ задана неявно, т. е. уравнением $F(x, y) = 0$ $(F(x, f(x)) \equiv 0)$	$\Longrightarrow$	$f'(x)$ находится из уравнения $\dfrac{d}{dx}(F(x, f(x))) = 0$

Примеры

1) $(4 \cdot \cos x)' = 4(\cos x)' = -4\sin x$.

2) $(\sin x + x^3)' = (\sin x)' + (x^3)' = \cos x + 3x^2$.

3) $(\mathrm{tg}x \cdot e^x)' = (\mathrm{tg}x)' \cdot e^x + \mathrm{tg}x(e^x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x} \cdot e^x + \mathrm{tg}x \cdot e^x$.

4) $$\left(\frac{x^4 + 1}{\ln x}\right)' = \frac{(x^4+1)'\ln x - (x^4+1)(\ln x)'}{(\ln x)^2} =$$

$$= \frac{4x^3 \cdot \ln x - (x^4+1) \cdot \frac{1}{x}}{(\ln x)^2} = \frac{4x^4 \cdot \ln x - (x^4+1)}{x \ln^2 x}.$$

5) $$(\sqrt{5 + \sin^3 x})' = ((5 + \sin^3 x)^{\frac{1}{2}})' =$$

$$= \frac{1}{2}(5 + \sin^3 x)^{\frac{1}{2}-1} \cdot (5 + \sin^3 x)' = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{5 + \sin^3 x}} \times$$

$$\times (0 + (\sin^3 x)') = \frac{1}{2\sqrt{5 + \sin^3 x}} \cdot 3\sin^2 x \cdot \cos x = \frac{3\sin^2 x \cdot \cos x}{2\sqrt{5 + \sin^3 x}}.$$

6) $y = f\left(x\right) = x + \ln x \left(x > 0\right)$, $f'(x) = 1 + \dfrac{1}{x}$,

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{1+\dfrac{1}{x}} = \frac{x}{x+1}.$$

7) $y = f(x)$ – задана параметрически:

$$\begin{cases} x = \varphi(t) = t^3 + t \\ y = \psi(t) = \cos t \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} = \frac{-\sin t}{3t^2+1}.$$

8) $y = f(x)$ – задана неявно уравнением $x^2 + 2xy - y^3 = 4x \Rightarrow$

$x^2 + 2x(f(x)) - (f(x))^2 = 4x \Rightarrow$ (дифференцируем по x)

$$2x + 2f(x) + 2xf'(x) - 2f(x)\cdot f'(x) = 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{f(x)+x-2}{f(x)-x},\ (f(x) \neq x).$$

4.7. Производные высших порядков

Определение	**Определение**
Вторая производная – это производная от первой производной: $f''(x) = (f'(x))'$.	n-я производная – это производная от $(n-1)$-ой производной: $f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))',\ \ n = 1, 2, 3, \ldots$.

Примеры

1) $f(x) = \sin x$

$$f'\left(x\right) = \cos x,\ f''\left(x\right) = \left(\cos x\right)' = -\sin x$$

2) $f(x) = \log_3 x$

$$f'(x) = \frac{1}{x\ln 3}, f''(x) = \left(\frac{1}{x\ln 3}\right)' = \frac{1}{\ln 3}\left(\frac{1}{x}\right)' =$$

$$= \frac{1}{\ln 3}(x^{-1})' = -\frac{1}{\ln 3}(x^{-2}) = -\frac{1}{\ln 3\cdot x^2} = -\frac{1}{x^2\ln 3}$$

3) $f(x) = a^x$

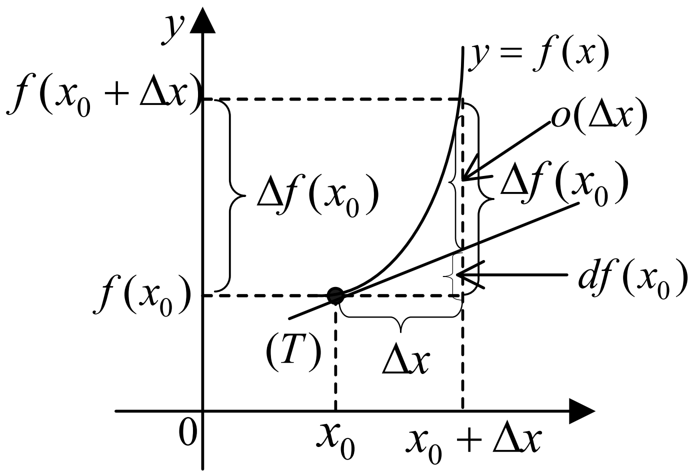
$$f'(x) = a^x \ln a,\ f''(x) = (a^x \ln a)' = \ln a (a^x)' =$$
$$= a^x \cdot \ln a \cdot \ln a = a^x (\ln a)^2,$$
$$f'''(x) = (a^x (\ln a)^2)' = (\ln a)^2 (a^x)' = a^x (\ln a)^3, ...,$$
$$f^{(n)}\left(x\right) = a^x \left(\ln a\right)^n \quad \left(n = 1, 2, 3, \ldots\right).$$

4.8. Дифференциал функции в точке

Определение

Дифференциалом $df(x_0)$ дифференцируемой в точке x_0 функции $f(x)$ называется линейная относительно Δx часть приращения (главная часть приращения) функции.

$$\boxed{df\left(x_0\right) = f'\left(x_0\right)dx}$$



$$\boxed{\Delta x = dx}$$

$$\boxed{\exists f'(x_0)}$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{\Delta f(x_0) = df(x_0) + o(\Delta x)}$$

$$\boxed{df(x_0) = f'(x_0)\Delta x}$$

$$\boxed{\Delta x = dx}$$

$$\downarrow$$

Дифференциал функции $f(x)$ в точке x_0

$$df(x_0) = f'(x_0)dx$$

Формула для приближенного вычисления значения функции $f(x)$

$$\boxed{f(x) = f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x}$$

Дифференциал второго порядка

$$\boxed{d^2 f(x_0) = d(df)\big|_{x_0} = d(f'(x) \cdot dx)\big|_{x_0} = f''(x_0) \cdot (dx)^2}$$

Примеры

1) $f(x) = \sin 3x, x_0 = \dfrac{\pi}{4}$

$$f'(x) = 3\cos 3x, f'(x_0) = 3\cos\frac{3\pi}{4} = -3\frac{\sqrt{2}}{2}, df(x_0) = -3\frac{\sqrt{2}}{2}dx$$

$$f''(x) = -9\sin 3x,\ f''(x_0) = -9\sin\frac{3\pi}{4} = -9\frac{\sqrt{2}}{2},\ d^2 f(x_0) = -9\frac{\sqrt{2}}{2}(dx)^2$$

2) $f(x) = \ln(1+5x),\ x_0 = 0$

$$f'(x) = \frac{5}{1+5x},\ f'(x_0) = 5,\ df(x_0) = 5\,dx$$

$$f''(x) = \left(\frac{5}{1+5x}\right)' = -\frac{25}{(1+5x)^2},\ f''(x_0) = -25,\ d^2 f(x_0) = -25(dx)^2$$

Контрольные вопросы к § 4

1. Может ли непрерывная в точке x_0 функция не иметь производной в этой точке?

2. Может ли дифференцируемая в точке x_0 функция быть разрывной в этой точке?

3. Может ли сумма (произведение, частное) двух недифференцируемых в точке x_0 функций иметь производную в этой точке?

Упражнения к § 4

1. Найти производные (первого и второго порядков) и дифференциалы следующих функций:

1) $f(x) = e^{5x^2} + \sin 2x + 1$;

2) $f(x) = \ln 3x + \sqrt[3]{2x}$;

3) $f(x) = \dfrac{x^2 - 7x + 3}{x + 5}$;

4) $f(x) = \cos(7x + 1)\sqrt{\operatorname{tg} x}$;

5) $f(x) = \arcsin\left(\log_3\left(x^2 + 5\right)\right)$;

6) $\begin{cases} x(t) = \sqrt{t^2 + 1} \\ y(t) = \operatorname{ctg} 2t \end{cases}$;

7) $\begin{cases} x(t) = 5^{t^2 - 3} \\ y(t) = \sin^3(4t + 1) \end{cases}$.

2. Найти дифференциалы функций в указанных точках:

1) $d\left(\dfrac{1}{x} + e^{-x}\right)$, $x_0 = 1$;

2) $d\left(\operatorname{arctg}\dfrac{\ln x}{x}\right)$, $x_0 = e$;

3) $d\left(x^2 3^x\right)$, $x_0 = 0$.

§5. ПРИЛОЖЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

5.1. Формула Тейлора n-го порядка

Пусть функция $f(x)$ дифференцируема $(n+1)$ раз в $(x_0-\alpha, x_0+\alpha)$, $(\alpha>0)$. Тогда для $x\in(x_0-\alpha, x_0+\alpha)$, имеет место *формула Тейлора n-го порядка*

$$f(x)=\underbrace{f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n}_{T_{n,x_0}(x)-\text{многочлен Тейлора } n\text{-го порядка}}+$$

$$+\underbrace{\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}}_{R_{n,x_0}-\text{ остаточный член}}, \quad \text{где } c\in\left(x_0, x\right)$$

$$\Downarrow$$

$f(x)\approx T_{n,x_0}(x)$ с погрешностью $\left|f(x)-T_{n,x_0}(x)\right|=\underset{x\to x_0}{o}(|x-x_0|^n)$

5.2. Правило Лопиталя

Пусть при $x\to x_0$ (или $x\to\infty$)

$f(x)\to 0$(или ∞) $g(x)\to 0$(или ∞)	и $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=A$ (или ∞)	$\Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=A$ (или ∞)

Примеры

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}=\dfrac{1}{6}$, т.к.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\left|\begin{matrix}(x-\sin x)'=1-\cos x\\ (x^3)'=3x^2\end{matrix}\right|=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{2\cdot 3x^2}=\frac{1}{6}.$$

2) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^{10}-10x+9}{x^5-5x+4}=\dfrac{9}{2}$, т.к.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^{10}-10x+9}{x^5-5x+4}=\left|\begin{matrix}(x^{10}-10x+9)'=10x^9-10\\ (x^5-5x+4)'=5x^4-5\end{matrix}\right|=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{10x^9-10}{5x^4-5}=2\lim_{x\to 1}\frac{x^9-1}{x^4-1}=\left|\begin{matrix}(x^9-1)'=9x^8\\(x^4-1)'=4x^3\end{matrix}\right|=2\lim_{x\to 1}\frac{9x^8}{4x^3}=\frac{9}{2}.$$

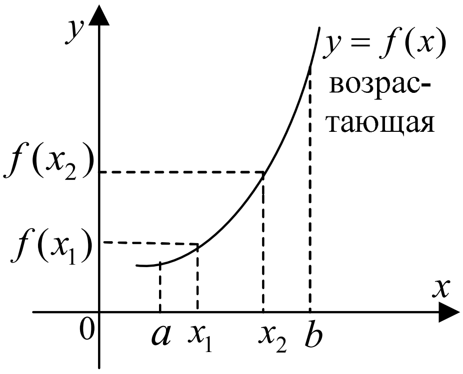
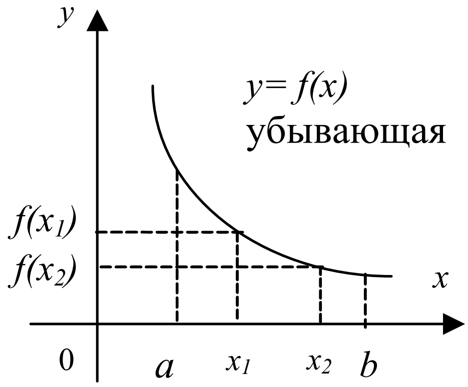
3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3}{e^{5x}}=0,$ т.к.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{e^{5x}}=\left|\begin{matrix}(x^3)'=3x^2\\(e^{5x})'=5e^{5x}\end{matrix}\right|=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2}{5e^{5x}}=\frac{3}{5}\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^{5x}}=$$

$$=\left|\begin{matrix}(x^2)'=2x\\(e^{5x})'=5e^{5x}\end{matrix}\right|=\frac{3}{5}\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{5e^{5x}}=\frac{6}{25}\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^{5x}}=\left|\begin{matrix}(x)'=1\\(e^{5x})=5e^{5x}\end{matrix}\right|=$$

$$=\frac{6}{25}\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{5e^{5x}}=0.$$

5.3. Промежутки монотонности функции $f(x)$

<table>
<tr>
<td rowspan="2">Определение
Функция $f(x)$ называется возрастающей (убывающей) в промежутке (a,b), если для любых $x_2>x_1$ $\left(x_1,x_2\in(a,b)\right)$ выполнено неравенство
$f(x_2)>f(x_1)$ $\left(f(x_2)<f(x_1)\right)$.</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>$f(x)\nearrow$ при $x\in(a,b)$</td>
</tr>
<tr>
<td rowspan="2">Возрастающие и убывающие функции называются монотонными</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>$f(x)\searrow$ при $x\in(a,b)$</td>
</tr>
</table>

Достаточное условие монотонности на (a,b)

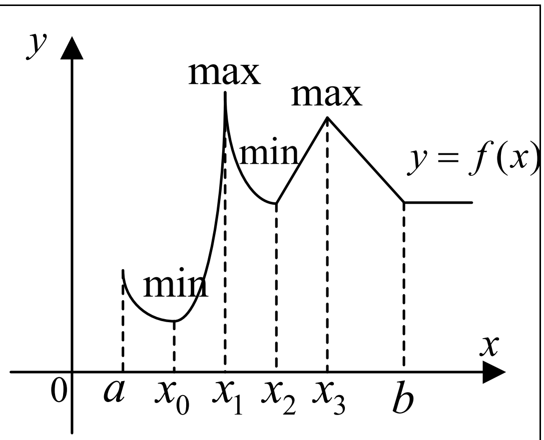
$f'(x) > 0 \Rightarrow f(x) \nearrow$	$x \in (a,b)$
$f'(x) < 0 \Rightarrow f(x) \searrow$	$x \in (a,b)$

5.4. Экстремумы функции $f(x)$

Определение

Точка x_0 из области определения функции $f(x)$ называется точкой *локального максимума (минимума)* функции $f(x)$, если существует такая окрестность $U(x_0)$ точки x_0, что для всех $x \in U(x_0)$ выполняется неравенство $f(x_0) > f(x)(f(x_0) < f(x))$.

Точки локального максимума и минимума называются *точками локального экстремума*, а значения функции в этих точках – *экстремумами.*



$f'(x_0) = 0$

$f'(x_1) = \infty$

$f'(x_2) = 0$

$f'(x_3)$ не существует

x_0, x_1, x_2, x_3 *– точки локальных экстремумов*

Необходимое условие экстремума

x_0 – точка локального экстремума функции $f(x)$	$\Longrightarrow$	x_0 – критическая точка функции $f(x_0)$	$\Longleftrightarrow$	$f'(x_0) = 0$ или $f'(x_0) = \infty$ или $f'(x_0)$ не существует

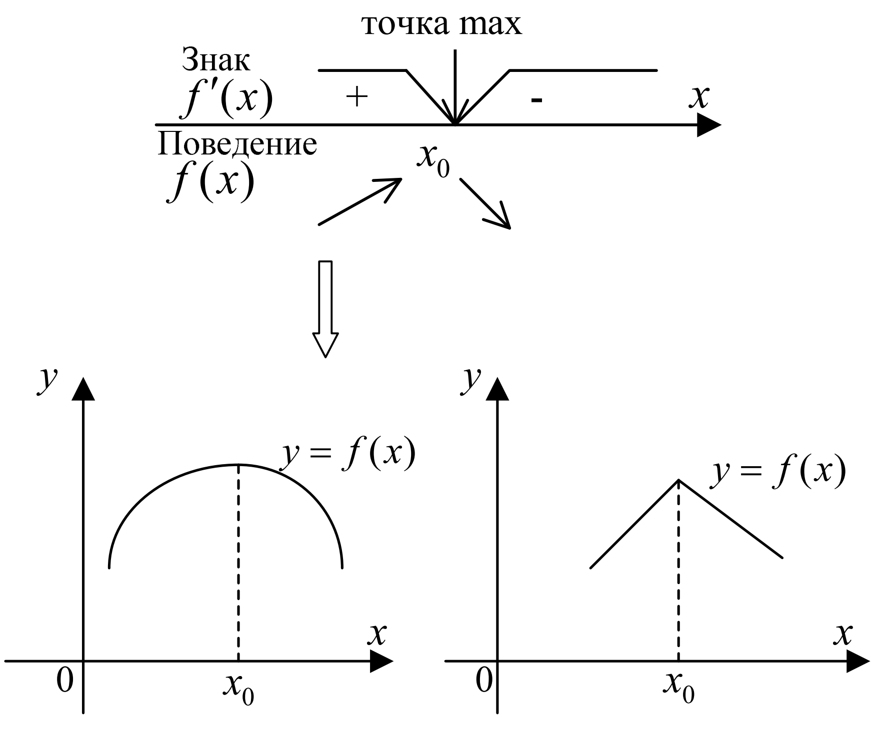
x_1

Достаточные условия экстремума

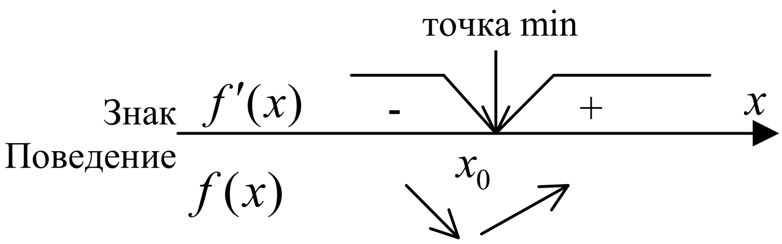
а) **по первой производной** $f'(x)$.

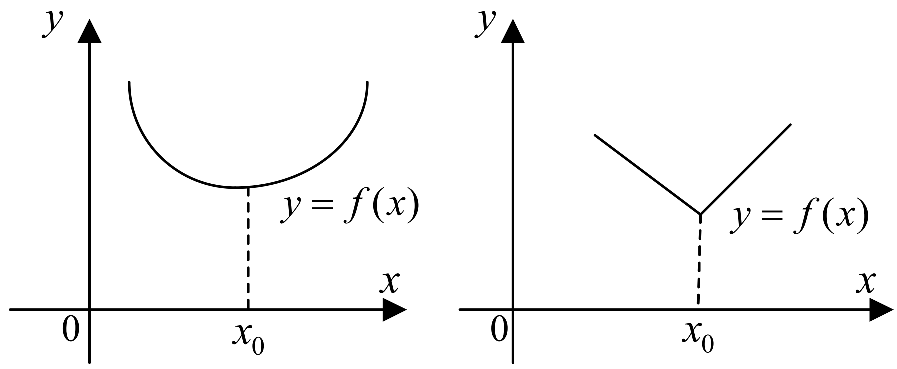
Точками локального экстремума являются те критические точки из области определения функции $f(x)$, при переходе через которые производная $f'(x)$ меняет знак на противоположный.

Если при переходе через x_0 в направлении оси OX знак $f'(x)$ меняется с «+» на «–» (с «–» на «+»), то точка x_0 является точкой локального максимума (локального минимума).



x_0 – точка локального максимума





x_0 – точка локального минимума

б) **по второй производной** $f''(x)$.

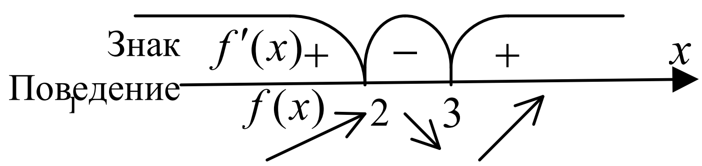
$f'(x_0)=0 \quad f''(x_0)>0$	$\Longrightarrow$	x_0 – точка локального минимума
$f'(x_0)=0 \quad f''(x_0)<0$	$\Longrightarrow$	x_0 – точка локального максимума

Примеры

1) $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{5}{2}x^2+6x$

$f'(x)=x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$

критические точки: $x_1=2, x_2=3, (f'(x_1)=f'(x_2)=0)$



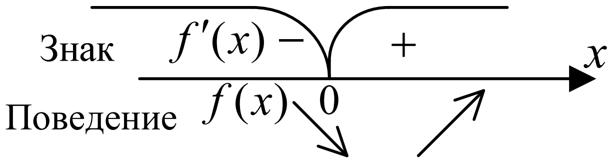
Ответ: $x_1=2$ – точка локального максимума $f(x); f(2)=4\dfrac{2}{3}$.

$x_1=3$ – точка локального минимума $f(x); f(3)=4\dfrac{1}{2}$.

2) $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$

$f'(x)=\dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}}$

критическая точка: $x_0=0$ $\left(f'\left(x_0\right)=\infty\right)$.



Ответ: $x_0 = 0$ – точка локального минимума $f(x); f(x_0) = 0$.

3) $f(x) = e^x + e^{-x}$

$f'(x) = e^x - e^{-x}$

критическая точка $x_0 = 0$ $\quad (f'(x_0) = 0)$

$f''(x) = e^x + e^{-x} > 0 \quad (\forall x \in R)$

Ответ: $x_0 = 0$ – точка локального минимума $f(x); f(x_0) = 2$.

5.5. Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке

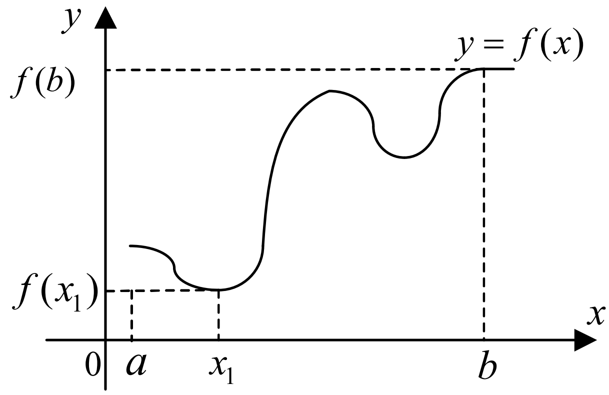
Своих наибольшего и наименьшего значения непрерывная на $[a,b]$ функция достигает в точках экстремума или на концах отрезка $[a,b]$.	$f(x)$ – непрерывна $\forall x \in [a,b]$  $\max\limits_{[a,b]} f(x) = f(b)$(при $x = b$) $\min\limits_{[a,b]} f(x) = f(x_1)$(при $x = x_1$)

Схема отыскания наибольшего и наименьшего значений функции на отрезке

1. Найти критические точки $f(x)$ на $[a,b]$.

2. Вычислить значения функции $f(x)$ в критических точках и на концах отрезка.

3. Выбрать из найденных значений наибольшее и наименьшее.

Пример.

Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)=\sqrt{100-x^2}$ на отрезке $[-6,8]$.

$$f(x)=\sqrt{100-x^2}, f'(x)=-\frac{x}{\sqrt{100-x^2}},$$

критические точки: $x_1=0,\ x_2=\pm 10\notin[-6,8]$,

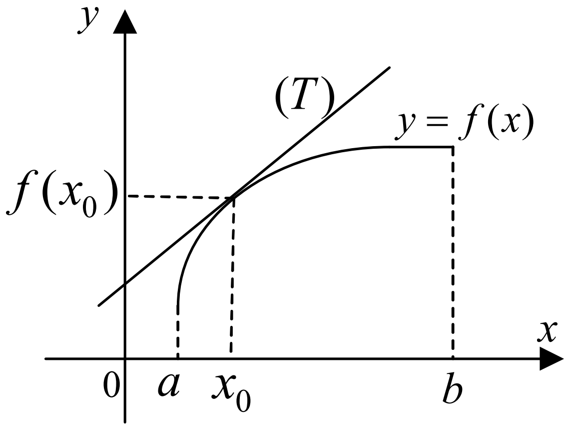
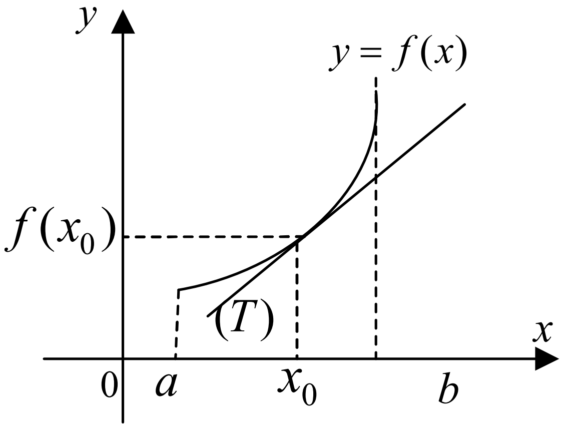
$f(0)=\sqrt{100}=10$, $f(-6)=\sqrt{100-36}=8$, $f(8)=\sqrt{100-64}=6$.

Ответ: наибольшее значение $f(x)$ равно 10 (при $x=0$), наименьшее значение $f(x)$ равно 6 (при $x=8$).

5.6. Выпуклость графика функции $f(x)$

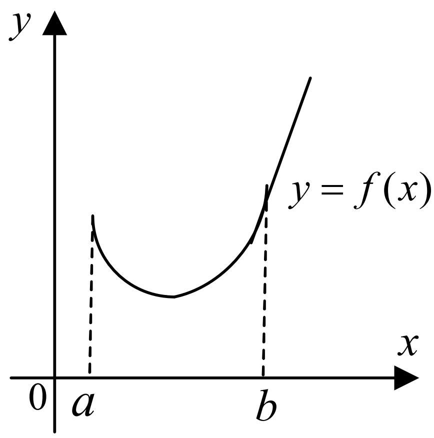
Определение

Функция $f(x)$ называется *выпуклой вверх (вниз) в промежутке* (a,b), если график функции в проколотой окрестности любой точки $x_0\in(a,b)$ расположен ниже (выше) касательной, проведенной в точке $(x_0, f(x_0))$ к графику функции.

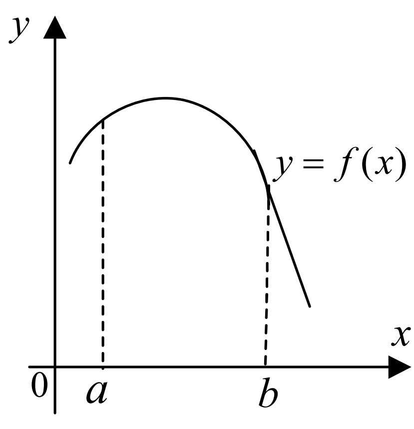
	
$f(x)\cap$, $x \in (a,b)$ $f(x)$ – выпуклая вверх	$f(x)\cup$, $x \in (a,b)$ $f(x)$ – выпуклая вниз

Достаточное условие выпуклости

$f''(x) > 0$, $x \in (a,b)$ $\Longrightarrow$ $f(x)\cup$, $x \in (a,b)$



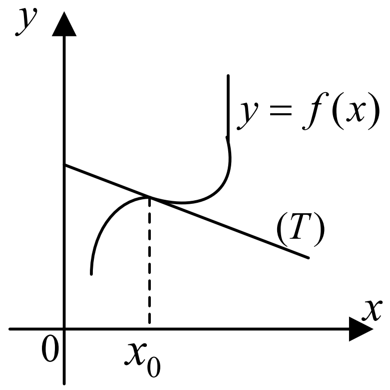
$f''(x) < 0$, $x \in (a,b)$ $\Longrightarrow$ $f(x)\cap$, $x \in (a,b)$

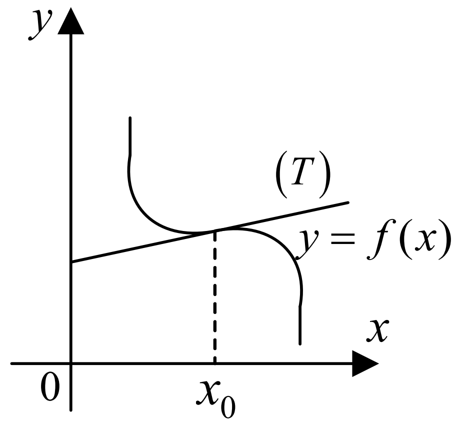


5.7. Точки перегиба графика функции $f(x)$

Определение

Точка x_0 из области определения функции $f(x)$ называется *точкой перегиба графика функции* $f(x)$, если в левой полуокрестности точки x_0 график функции расположен по одну сторону касательной, а в правой – по другую.



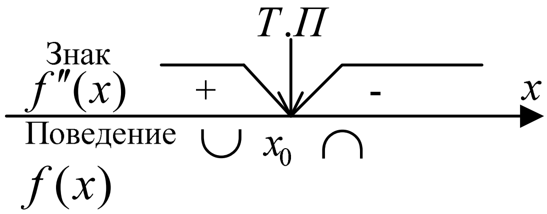


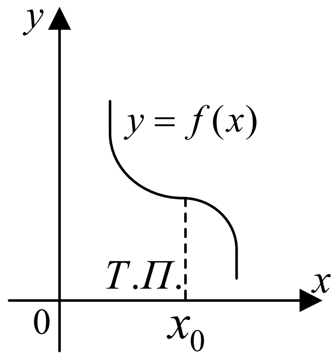
Необходимое условие перегиба

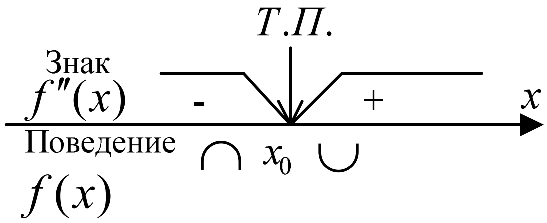
x_0 – точка перегиба $\Longrightarrow$ $f''(x_0) = 0$ или $f''(x_0) = \infty$ или $f''(x_0)$ не существует

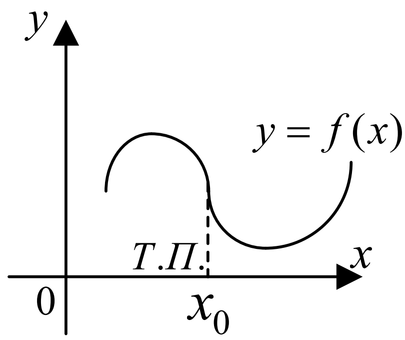
Достаточное условие перегиба

Если при переходе через точку x_0 (принадлежащую области определения функции $f(x)$), вторая производная $f''(x)$ меняет знак, то x_0 – точка перегиба (Т. П.)









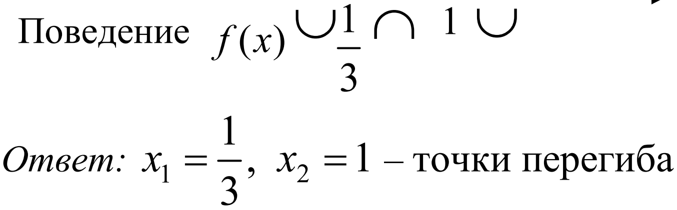
Примеры

1) $f(x) = 3x^4 - 8x^3 + 6x^2 + 12$

$$f'(x) = 12x^3 - 24x^2 + 12x$$

$$f''(x) = 36x^2 - 48x + 12 = 36(x-1)\left(x - \frac{1}{3}\right)$$

$f''(x) = 0$ при $x_1 = \frac{1}{3}, x_2 = 1.$



Ответ: $x_1 = \frac{1}{3}$, $x_2 = 1$ – точки перегиба $f(x)$.

2) $f(x)=\sqrt[3]{x^5}$;

$$f'(x)=(x^{\frac{5}{3}})'=\frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}};\quad f''(x)=\frac{5}{3}\cdot\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}=\frac{10}{9\sqrt[3]{x}};$$

$f''(x)=\infty$ при $x=0$.

Знак $f''(x)$ $-$ $+$ x

Поведение $f(x)$ $\cap$ 0 $\cup$

Ответ: $x=0$ – точка перегиба $f(x)$.

3) $f(x)=x^2+x^4$;

$$f'(x)=2x+4x^3;\quad f''(x)=2+12x^2>0.$$

Ответ: точек перегиба нет.

5.8. Общая схема исследования функции $f(x)$ и построение графика

<u>I этап. Исследование без применения производных</u>

1. Найти область определения D_f функции $f(x)$.
2. Найти точки, в которых функция обращается в нуль (нули функции), если это возможно, и промежутки знакопостоянства.
3. Исследовать функцию на четность, нечетность, периодичность.
4. Исследовать функцию на непрерывность, найти асимптоты (вертикальные и наклонные).
5. Построить эскиз графика.

<u>II этап. Исследование с применением производных</u>

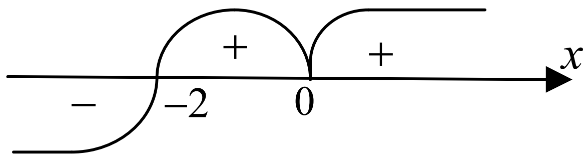
1. Найти интервалы возрастания и убывания функции, экстремумы функции.
2. Найти интервалы выпуклости, точки перегиба графика.
3. Построить график функции.

Пример. Построить график функции $f\left(x\right)=\dfrac{x^2}{x+2}$.

I этап.

1. $D_f=\{(-\infty,-2)\cup(-2,+\infty)\}$.

2. Промежутки знакопостоянства найдем методом интервалов; нули функции: при $x=0,\ \ y=0$.



3. Функция не является ни четной, ни нечетной, т.к. D_f не симметрична относительно начала координат (или: $f(x)\neq f(-x)$; $f(x)\neq -f(-x)$), функция непериодическая.

4. Точка $x_0=-2$ – точка разрыва $f(x)$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-2+0} f(x)=\lim\limits_{x\to-2+0}\dfrac{x^2}{x+2}=+\infty\\[2ex] \lim\limits_{x\to-2-0} f(x)=\lim\limits_{x\to-2-0}\dfrac{x^2}{x+2}=-\infty\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$x=-2-$ уравнение вертикальной асимптоты

Наклонные асимптоты:

$y=kx+b,$

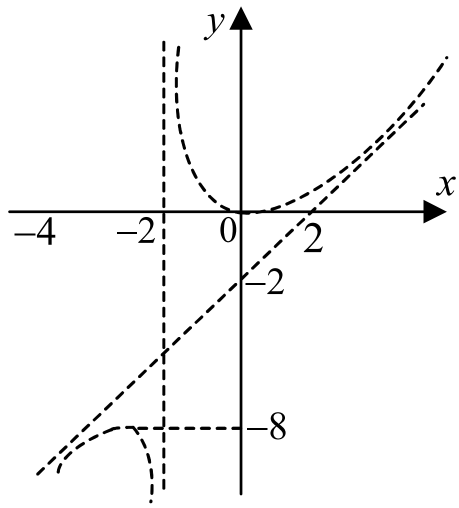
$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{x(x+2)}=1$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2}{x+2}-x\right)=$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2-x^2-2x}{x+2}=-2;$$

$y=x-2$ – уравнение наклонной асимптоты.

5. Эскиз графика



II этап

1. $f'(x) = \dfrac{2x(x+2) - x^2}{(x+2)^2} = \dfrac{x^2 + 4x}{(x+2)^2}$;

$x^2 + 4x = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = -4$;

критические точки: $x_0 = -2, x_1 = 0, x_2 = -4$.

Знак $f'(x)$ $+$ $-$ $-$ $+$ x

Поведение $f(x)$ $\nearrow$ -4 $\searrow$ -2 $\searrow$ 0 $\nearrow$

$(f'(-5) > 0; f'(-3) < 0, f'(-1) < 0; f'(1) > 0)$

$x_1 = 0$ – точка минимума $f(x), f(x_1) = f(0) = 0$

$x_2 = -4$ – точка максимума $f(x), f(x_2) = f(-4) = -8$

2. $f''(x) = \dfrac{(2x+4)(x+2)^2 - (x^2+4x)\cdot 2(x+2)}{(x+2)^4} =$

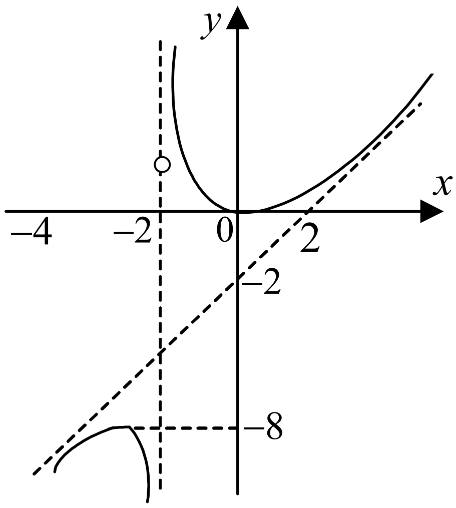
$= 2 \cdot \dfrac{4}{(x+2)^3} = \dfrac{8}{(x+2)^3} \quad \Rightarrow \ f'' \neq 0$

Знак $f''(x)$ $-$ $+$ x

Поведение $f(x)$ $\frown$ -2 $\smile$

$(f''(-3) < 0; f''(0) > 0)$ Точек перегиба нет.

График функции



Контрольные вопросы к § 5

1. Верно ли следующее утверждение: если не существует $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, то не существует $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$? (Указание: рассмотреть $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\cos x}{x-\cos x}$).

2. Верно ли утверждение: если $f'(x_0)=0$, то точка x_0 является точкой экстремума функции $f(x)$?

3. Существуют ли наибольшее и наименьшее значения функций на указанных промежутках:

1) $f(x)=x+\ln x,\quad (x\in(0;1))$;

2) $f(x)=\cos x+\sin x,\quad \left(x\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right]\right)$;

3) $f(x)=\dfrac{1}{x}+x^2,\quad (x\in(0;4])$.

4. Может ли абсцисса точки перегиба графика функции совпадать с точкой экстремума этой функции?

5. Является ли точка $x_0=0$ точкой перегиба графика функции $f(x)=\dfrac{1}{x}$?

Упражнения к § 5

1. Найти пределы функций (применяя правило Лопиталя)

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)-x}{\mathrm{tg}5x}$;

2) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\ln\left(5-x^2\right)}{x^2-3x+2}$;

3) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^5-1}{x^4-1}$;

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x-3x}{x^2\operatorname{arctg} x}$;

5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin x}-e^x}{x-\sin x}$;

6) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^{100}-2x+1}{x^{99}-3x+2}$;

7) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{\arcsin x}\right)$;

8) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{\log_3 x}{x^5}$;

9) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{5x^7+x^6-100}{e^{x^2}}$;

10) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{e^x-1}-\dfrac{1}{\operatorname{tg} x}\right)$.

2. Исследовать на экстремум функции

1) $f\left(x\right)=x\left(x-2\right)^3\left(x+1\right)^2$;

2) $f\left(x\right)=\left(x-1\right)e^x$;

3) $f\left(x\right)=\dfrac{x}{x^2+9}$;

4) $f\left(x\right)=2\sin x+\cos 2x$;

5) $f\left(x\right)=\dfrac{\left(x-3\right)^2}{x+2}$.

3. Найти наибольшее и наименьшее значение следующих функций на указанных промежутках:

1) $f\left(x\right)=x^4-8x^2+3, \quad x\in\left[-1;3\right]$;

2) $f\left(x\right)=x-2\ln x, \quad x\in\left[1;e^2\right]$;

3) $f\left(x\right)=\dfrac{x^4+1}{x^2+1}, \quad x\in\left[-1;1\right]$.

4. Найти точки перегиба функций

1) $f\left(x\right)=\cos x$;

2) $f\left(x\right)=e^{-x^2}$;

3) $f\left(x\right)=\dfrac{1}{1-3x^2}$;

4) $f\left(x\right)=\sqrt[3]{x^5}$;

5) $f\left(x\right)=x^3+3x^2+3x-2$.

5. Построить графики функций

1) $f\left(x\right)=\left(x+1\right)\left(x-2\right)^2$;

2) $f\left(x\right)=\dfrac{x^2}{4-x^2}$;

3) $f\left(x\right)=\dfrac{1}{x}+4x^2$;

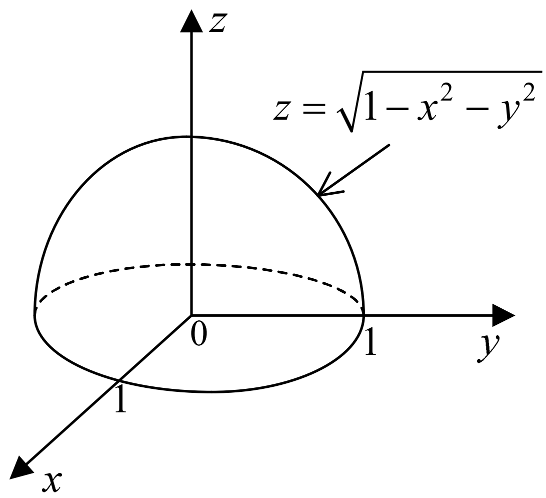
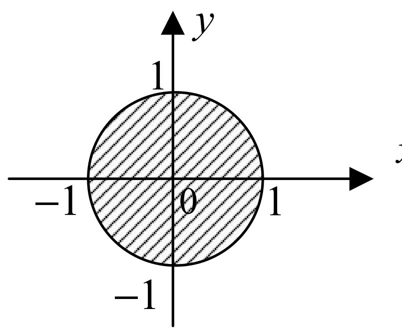
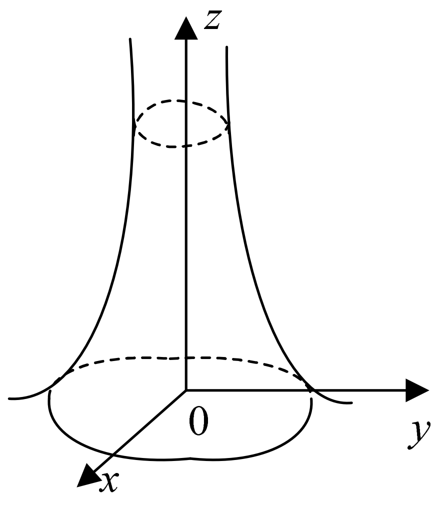
4) $f\left(x\right)=\dfrac{x^4}{\left(1+x\right)^3}$;

5) $f\left(x\right)=\operatorname{arctg}\frac{1}{x}$;

6) $f\left(x\right)=\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}$.

§6. Функции двух переменных

6.1. Определения

Определение Функция двух переменных – это правило, по которому каждому значению двух независимых переменных x и y из некоторого множества D отвечает значение $z = f(x, y)$.	
Определение Множество D называется *областью определения* функции $z = f\left(x, y\right)$.	
Определения Функция $z = f(x, y)$ называется *непрерывной* в точке $M(x_0, y_0)$, если $f(x, y) \to f(x_0, y_0)$ при $x \to x_0, y \to y_0$ (произвольно). *Окрестностью* $U\left(M_0\right)$ точки $M_0\left(x_0, y_0\right)$ называется множество внутренних точек круга с центром в точке M_0.	 Эта функция разрывна в точке O и непрерывна во всех остальных точках.

6.2. Частные производные

$f(x,y)$ – функция двух переменных	$f(x,y_0)\to f'_x(x_0,y_0)=\dfrac{d}{dx}(f(x,y_0))\Big|_{x=x_0}$
	$f(x_0,y)\to f'_y(x_0,y_0)=\dfrac{d}{dy}(f(x_0,y))\Big|_{y=y_0}$

Частные производные от $f(x,y)$ по x и по y
$f'_x\equiv\dfrac{\partial f}{\partial x}\overset{(\text{опр})}{=}\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}$
$f'_y\equiv\dfrac{\partial f}{\partial y}\overset{(\text{опр})}{=}\lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y}$

Примеры

1) $f(x,y)=\cos(x^2y)+x^2+y^3.$

$$f'_x=\frac{\partial}{\partial x}(\cos(x^2y)+x^2+y^3)=\frac{d}{dx}(\cos(x^2y)+x^2+y^3)\Big|_{y-\text{фиксированное}}=$$

$$=-\sin(x^2y)\cdot 2xy+2x.$$

$$f'_y=\frac{\partial}{\partial y}(\cos(x^2y)+x^2+y^3)=\frac{d}{dy}(\cos(x^2y)+x^2+y^3)\Big|$$

$$y-\text{фиксированное}==-\sin(x^2y)\cdot x^2+3y^2.$$

2) $f(x,y)=e^{x^2+y^2}+\mathrm{tg}(xy).$

$$f'_x=\frac{\partial}{\partial x}(e^{x^2+y^2}+\mathrm{tg}(xy))=\frac{d}{dx}(e^{x^2+y^2}+\mathrm{tg}(xy))\Big|_{y-\text{фиксированное}}=$$

$$=2x\cdot e^{x^2+y^2}+\frac{y}{\cos^2 xy}.$$

$$f'_y = \frac{\partial}{\partial y}(e^{x^2+y^2} + \mathrm{tg}(xy)) = \frac{d}{dy}(e^{x^2+y^2} + \mathrm{tg}(xy))\Big|_{y-\text{фиксированное}} =$$

$$= 2y \cdot e^{x^2+y^2} + \frac{x}{\cos^2 xy}.$$

6.3. Дифференциал функции двух переменных

$$\boxed{\exists f'_x(x_0, y_0), f'_y(x_0, y_0)}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\Delta f(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0) \cdot \Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y + o(\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2})}$$

$$\Downarrow$$

Дифференциал функции

$f(x, y)$ в точке (x_0, y_0)

$$df(x_0, y_0) \overset{(\text{опр})}{=} f'_x(x_0, y_0)dx + f'_y(x_0, y_0)dy$$

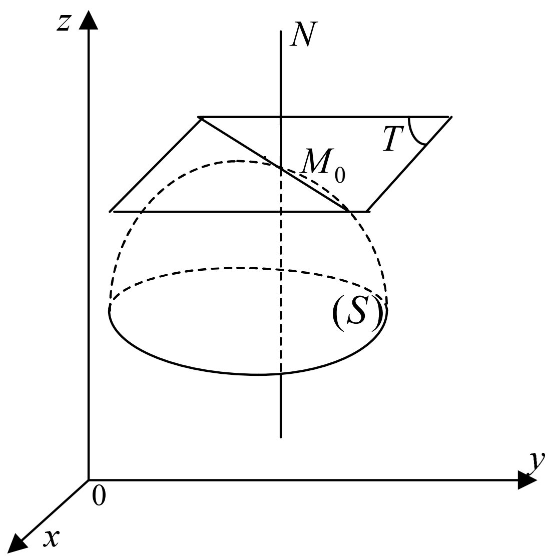
6.4. Частные производные и дифференциал второго порядка

$$f(x, y) \to f'_x \equiv \frac{\partial f}{\partial x} \to \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right) \equiv \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} \equiv f''_{xx} \\ \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right) \equiv \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \equiv f''_{xy} \end{cases}$$

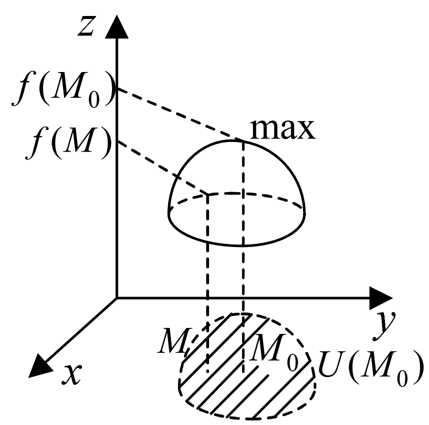
$$f(x, y) \to f'_y \equiv \frac{\partial f}{\partial y} \to \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right) \equiv \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \equiv f''_{yx} \\ \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right) \equiv \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} \equiv f''_{yy} \end{cases}$$

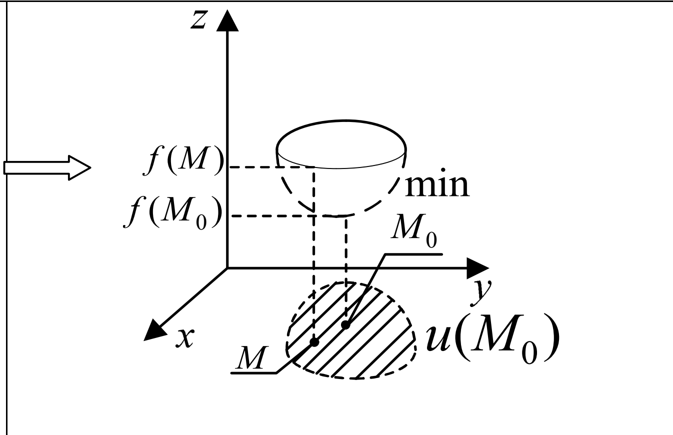
$$d^2 f(x_0, y_0) \overset{\text{(опр)}}{=} d(df)\big|_{(x_0, y_0)} =$$
$$= f''_{xx}\big|_{(x_0, y_0)} \cdot (dx)^2 + 2 f''_{xy}\big|_{(x_0, y_0)} \cdot dxdy + f''_{yy}\big|_{(x_0, y_0)} \cdot (dy)^2 \text{(если } f''_{xy} = f''_{yx}\text{)}$$

6.5. Касательная плоскость и нормаль к поверхности

Уравнение поверхности $(S): z = f(x, y)$ Точка на поверхности $M_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ ⇒	*Уравнение касательной плоскости* (T) к поверхности (S) в точке M_0: $z - f(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0)$
	*Уравнение нормали* (N) (прямой, перпендикулярной касательной плоскости) к поверхности (S) в точке M_0: $\dfrac{x - x_0}{f'_x(x_0, y_0)} = \dfrac{y - y_0}{f'_y(x_0, y_0)} = \dfrac{z - f(x_0, y_0)}{-1}$

6.6. Экстремум функции двух переменных

Определение Точка $M_0(x_0, y_0)$ из области определения является *точкой локального максимума (минимума)* функции $f(x, y)$, если существует такая окрестность $U(M_0)$ точки M_0, что для всех $M \in U(M_0)$	

$(M \neq M_0)$ выполняется неравенство: $f(M_0) > f(M)$ $(f(M_0 < f(M))$	

Нахождение экстремума функции двух переменных $f(x, y)$

1) $\begin{cases} f'_x\ (x, y) = 0 \\ f'_y(x, y) = 0 \end{cases}$ ⇒ находим координаты точек $M_0(x_0, y_0)$, *подозреваемых на экстремум (стационарных точек)*

2) Составляем определитель $\Delta(x, y) = \begin{vmatrix} f''_{xx}(x, y) & f''_{xy}(x, y) \\ f''_{yx}(x, y) & f''_{yy}(x, y) \end{vmatrix}$

3) Находим $\Delta(x_0, y_0) \equiv \Delta(M_0)$

а) $\Delta(M_0) > 0$ → Экстремум в точке M_0 есть

- $f''_{xx}(M_0) > 0 \Rightarrow$ M_0 – точка минимума
- $f''_{xx}(M_0) < 0 \Rightarrow$ M_0 – точка максимума

б) $\Delta(M_0) < 0$ → Экстремума в точке M_0 нет

в) $\Delta(M_0) = 0$ → Требуется дополнительное исследование

Пример.

Исследовать на экстремум функцию $f(x, y) = x^3 + xy^2 + 6xy$.

1) $\begin{cases} f'_x = 3x^2 + y^2 + 6y, \\ f'_y = 2xy + 6x, \end{cases}$ $\begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \end{cases} \Rightarrow$ $\begin{matrix} M_1(0,0),\ M_1(0,-6) \\ M_3\left(\sqrt{3},-3\right), M_1\left(-\sqrt{3},-3\right) \end{matrix}$

2) $\Delta(x,y) = \begin{vmatrix} 6x & 2y+6 \\ 2y+6 & 2x \end{vmatrix}$

3) $\Delta(M_1) = \begin{vmatrix} 0 & 6 \\ 6 & 0 \end{vmatrix}$; $\Delta(M_2) = \begin{vmatrix} 0 & -6 \\ -6 & 0 \end{vmatrix}$; $\Delta(M_3) = \begin{vmatrix} 6\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 2\sqrt{3} \end{vmatrix}$

$\Delta\left(M_4\right) = \begin{vmatrix} -6\sqrt{3} & 0 \\ 0 & -2\sqrt{3} \end{vmatrix}$

В точках M_1 и M_2 экстремума нет, так как $\Delta\left(M_1\right) < 0$ и $\Delta\left(M_2\right) < 0$. Точка M_3 – точка минимума, M_4 – точка максимума.

$f_{\min} = f(M_3) = f(\sqrt{3};-\sqrt{3}) = -6\sqrt{3}.$

$f_{\max} = f(M_4) = f(-\sqrt{3};-3) = 6\sqrt{3}.$

Контрольные вопросы к § 6

1. Верно ли утверждение: если $f'_x\left(x_0;y_0\right) = 0$, $f'_y\left(x_0;y_0\right) = 0$, то точка $M\left(x_0;y_0\right)$ является точкой экстремума функции $f\left(x;y\right)$?

2. Имеет ли поверхность $z = \sqrt{x^2+y^2}$ касательную плоскость в точке $O\left(0;0;0\right)$?

3. Верно ли утверждение: $f''_{xy} = f''_{yx}$?

Указание: рассмотреть функцию

$$f\left(x;y\right) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & x^2+y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2+y^2 = 0 \end{cases}$$

Упражнения к § 6

1. Найти частные производные следующих функций:

1) $f(x;y) = x^3y^2 - x^2y$;

2) $f(x;y) = \ln\left(x^3 + \sin y\right)$;

3) $f(x;y) = e^{\frac{x}{y}}$;

4) $f(x;y) = \operatorname{arctg}\sqrt{xy}$;

5) $f(x;y) = \sqrt[3]{x^2 + y^3}$.

2. Составить уравнения касательных плоскостей и нормалей к заданным поверхностям в указанных точках:

1) $z = xy$ в точке $M(1;1;1)$;

2) $xy^2 + z^3 = 12$ в точке $M(1;2;2)$;

3) $z = \sin\dfrac{y}{x}$ в точке $M(1;\pi;0)$;

4) $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ в точке $M\left(1;1;\sqrt{2}\right)$;

5) $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ в точке $M(0;0;R)$.

3. Исследовать на экстремум следующие функции:

1) $f(x;y) = x^3 + y^3 - 9xy + 27$;

2) $f(x;y) = xy(1 - x - y)$;

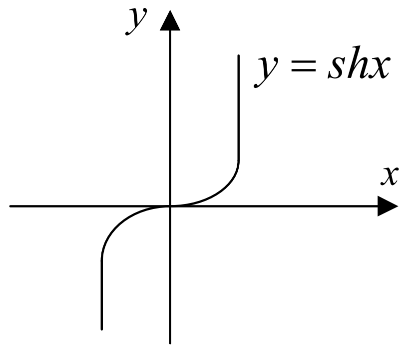
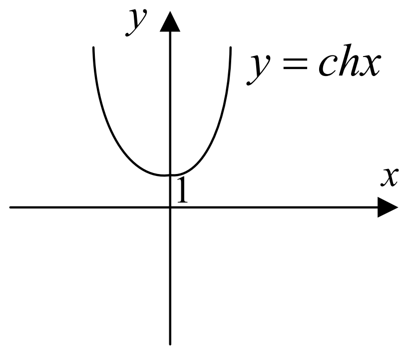
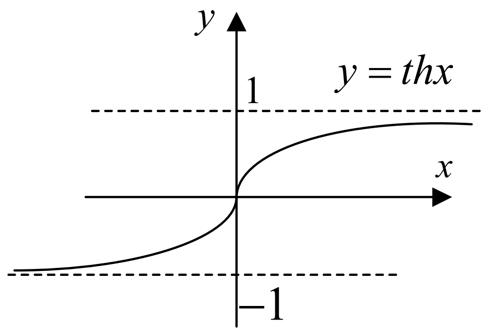
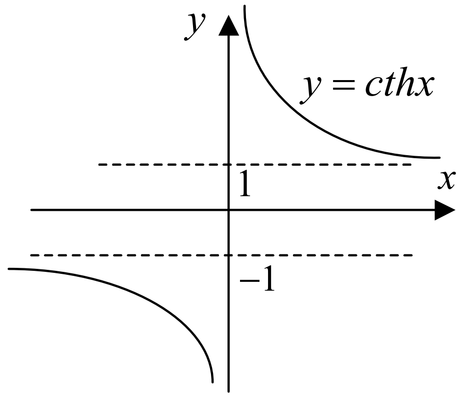
3) $f(x;y) = e^{xy}$;

4) $f(x;y) = x^2 + xy + y^2 - 4\ln x - 10\ln y$;

5) $f(x;y) = xy\ln\left(x^2 + y^2\right)$.

Приложение 1

Гиперболические функции

Определение	График
$shx = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ гиперболический синус	
$chx = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ гиперболический косинус	
$thx = \dfrac{shx}{chx}$ гиперболический тангенс	
$cthx = \dfrac{chx}{shx}$ гиперболический котангенс	

Основные соотношения между гиперболическими функциями

$$\left.\begin{aligned} & shx + chx = e^{x} \\ & ch^2x - sh^2x = 1 \\ & ch^2x + sh^2x = ch2x \\ & 2shx \cdot chx = sh2x \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} ch^2x = \dfrac{ch2x+1}{2} \\ sh^2x = \dfrac{ch2x-1}{2} \end{cases}$$

Производные гиперболических функций

1. $(chx)' = shx$.
2. $(shx)' = chx$.
3. $(thx)' = \dfrac{1}{ch^2x}$.
4. $(cthx)' = -\dfrac{1}{sh^2x}$.

Приложение 2

Рациональные дроби. Деление многочленов

Определение
Рациональной дробью называется выражение вида $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, где $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ – многочлены (n и m – их степени).

Рациональная дробь $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ ←

$n < m \Rightarrow$ правильная дробь
$n \geq m \Rightarrow$ неправильная дробь

Деление многочленов (на примере)

$$
\begin{array}{r|l}
-\;2x^2 - 5x + 6 & x - 1 \\
\underline{2x^2 - 2x} & \overline{2x - 3} \\
-\;-3x + 6 & \text{частное} \\
\underline{-3x + 3} & \\
3 & \\
\text{остаток} &
\end{array}
$$

$$\frac{2x^2 - 5x + 6}{x - 1} = 2x - 3 + \frac{3}{x - 1}$$

неправильная дробь	целая часть (многочлен)	правильная дробь

Упражнения к приложению 2

1. Найти частное и остаток от деления многочлена $P(x)$ на многочлен $Q(x)$:

1) $P(x)=x^3+5x^2-7x-3,\quad Q(x)=x^2-8x+16;$

2) $P(x)=x^5-x^3+1,\quad Q(x)=(x-1)^3;$

3) $P(x)=2x^4-5x^3+2x,\quad Q(x)=x^3-1;$

4) $P(x)=x^{100}-3x^2+2,\quad Q(x)=x^2-1;$

5) $P(x)=x^{30}-1,\quad Q(x)=x^5+1.$

Приложение 3

Элементарные (простейшие) рациональные дроби. Разложение правильной рациональной дроби на сумму простейших дробей

Элементарные (простейшие) рациональные дроби

I рода	$\dfrac{A}{(x-\alpha)^k}$	корень знаменателя: $x=\alpha$, k – *кратность* корня (k – целое число, $k\geq 1$)
II рода	$\dfrac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}$	дискриминант знаменателя отрицателен; корни знаменателя: пара комплексно-сопряженных чисел, k – кратность каждого из этих корней.

Правильная рациональная дробь представляется в виде суммы элементарных (простейших) дробей по правилу 1) Каждому вещественному корню знаменателя α кратности k соответствует в разложении правильной рациональной дроби сумма k слагаемых вида: $$\alpha \to \frac{A_1}{x-\alpha}+\frac{A_2}{\left(x-\alpha\right)^2}+\ldots+\frac{A_k}{\left(x-\alpha\right)^k},$$ $A_1, \ldots, A_k$ *– неопределенные коэффициенты.*
2) Каждой паре комплексно-сопряженных корней знаменателя $(a\pm ib)$ кратности k соответствует сумма k слагаемых вида: $$a\pm ib \to \frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q}+\frac{M_2x+N_2}{\left(x^2+px+q\right)^2}+\ldots+\frac{M_kx+N_k}{\left(x^2+px+q\right)^k},$$ $$(p=-2a; q=a^2+b^2)$$ $M_1, N_1, \ldots,, M_k, N_k$ *– неопределенные коэффициенты.*

Алгоритм разложения правильной рациональной дроби на элементарные (простейшие)

а) Написать разложение с неопределенными коэффициентами.

б) Привести к общему знаменателю правую часть разложения и приравнять числители дробей, стоящих в левой и правой части.

в) Из полученного в пункте (б) тождества найти неопределенные коэффициенты или подстановкой в него корней знаменателя, или приравниванием коэффициентов при одинаковых степенях x.

Пример

Разложить на элементарные (простейшие) дроби правильную рациональную дробь $\dfrac{2x-1}{x^2(x^2+4)}$

а) $\dfrac{2x-1}{x^2\left(x^2+4\right)}=\dfrac{A_1}{x}+\dfrac{A_2}{x^2}+\dfrac{Mx+N}{x^2+4}$

б) $2x-1=A_1x(x^2+4)+A_2(x^2+4)+(Mx+N)x^2;$

$$\text{в)}\quad \begin{array}{l} x=0 \\ \text{коэф. при } x^3: \\ \text{коэф. при } x^2: \\ \text{коэф. при } x\ : \end{array} \left| \begin{array}{l} -1=4A_2 \Rightarrow A_2=-\dfrac{1}{4}=-0,25 \\ 0=A_1+M \\ 0=A_2+N \Rightarrow N=0,25 \\ 2=4A_1 \Rightarrow A_1=0,5 \end{array} \right. \qquad \Rightarrow M=-0,5.$$

Ответ: $\dfrac{2x-1}{x^2(x^2+4)}=\dfrac{0,5}{x}-\dfrac{0,25}{x^2}+\dfrac{-0,5x+0,25}{x^2+4}.$

Упражнения к приложению 3

Разложить рациональную дробь на элементарные дроби:

1) $\dfrac{x^2+2x+6}{(x-1)(x-2)(x-4)}$;

2) $\dfrac{2}{x^2-x^5}$;

3) $\dfrac{x+4}{x^3+6x^2+11x+6}$;

4) $\dfrac{3x^2-3}{x^3-3x+1}$;

5) $\dfrac{5x^2+6x-21}{(x-2)(x+1)^2(x-1)^3}$.

Приложение 4

Некоторые методы вычисления пределов

Предел отношения многочленов

а) $$\lim_{x\to a}\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\left\{\begin{matrix} a-\text{корень} \\ P_n(x)\text{ и } Q_m(x)\end{matrix}\right\}=\left|\begin{matrix}\text{вынести } x-a \text{ за скобки и} \\ \text{сократить на него дробь}\end{matrix}\right|$$

б) $$\lim_{x\to\infty}\frac{P_n(x)}{Q_n(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{a_nx^n+\ldots+a_0}{b_mx^m+\ldots+b_0}=\left|\begin{matrix}\text{вынести } x^n \text{ в числителе} \\ x^m \text{ в знаменателе}\end{matrix}\right|=$$

$$=\lim_{x\to\infty}x^{n-m}\frac{a_n+\dfrac{a_{n-1}}{x}+\ldots+\dfrac{a_0}{x^n}}{b_m+\dfrac{b_{m-1}}{x}+\ldots+\dfrac{b_0}{x^m}}=\begin{cases}0,\text{ если } n<m\\ \dfrac{a_n}{b_m},\text{ если } n=m\\ \infty,\text{ если } n>m\end{cases}$$

Примеры

1) $$\lim_{x\to1}\frac{x^3-1}{x^2-4x+3}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x-3)}=\lim_{x\to1}\frac{x^2+x+1}{x-3}=-\frac{3}{2}.$$

2) $$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+4x+1}{5x^3-2x+3}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2\left(3+\dfrac{4}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)}{x^3\left(5-\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{3}{x^3}\right)}=0.$$

3) $$\lim_{x\to\infty}\frac{4x^2+2x+3}{7x^2+10x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2\left(4+\dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{x^2}\right)}{x^2\left(7+\dfrac{10}{x}-\dfrac{1}{x}\right)}=\frac{4}{7}.$$

4) $$\lim_{x\to\infty}\frac{7x^5-3x^2+2}{4x^2-2x+10}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^5\left(7-\dfrac{3}{x^3}+\dfrac{5}{x^5}\right)}{x^2\left(4-\dfrac{2}{x}+\dfrac{10}{x^2}\right)}=$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^3\left(7 - \dfrac{3}{x^3} + \dfrac{2}{x^5}\right)}{4 - \dfrac{2}{x} + \dfrac{10}{x^2}} = \infty.$$

Предел выражений, содержащих иррациональности

Умножить и разделить выражение, стоящее под знаком предела, на «сопряженное выражение»

Примеры

1) $$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+1} - x) = \lim_{x\to\infty} \frac{(\sqrt{x^2+1} - x)(\sqrt{x^2+1} + x)}{\sqrt{x^2+1} + x} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 + 1 - x^2}{\sqrt{x^2+1} + x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+1} + x} = 0.$$

2) $$\lim_{x\to 9} \frac{\sqrt[3]{x-1} - 2}{x-9} = \lim_{x\to 9} \frac{(\sqrt[3]{x-1} - 2)(\sqrt[3]{(x-1)^2} + 2\sqrt[3]{x-1} + 4)}{(\sqrt[3]{(x-1)^2} + 2\sqrt[3]{x-1} + 4)(x-9)} =$$

$$= \lim_{x\to 9} \frac{x-9}{(\sqrt[3]{(x-1)^2} + 2\sqrt[3]{x-1} + 4(x-9)} =$$

$$= \lim_{x\to 9} \frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2} + 2\sqrt[3]{x-1} + 4} = \frac{1}{12}.$$

Предел степенно-показательного выражения

$$\lim_{x\to a}(U(x))^{V(x)} \quad \Longrightarrow \quad \lim_{x\to a}(U(x))^{V(x)} = e^{\lim\limits_{x\to a} V(x)\ln U(x)}.$$

Примеры

1) $$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln(1+x)} =$$

$$=\left|\ln(1+x)\sim x, x\to 0\right| = e^{\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\cdot x\right)} = e.$$

2) $$\lim_{x\to 0}(1+\sin^3 x)^{\operatorname{ctg}^3 x} = \lim_{x\to 0} e^{\operatorname{ctg}^3 x\ln(1+\sin^3 x)} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\operatorname{ctg}^3 x\ln(1+\sin^3 x)} =$$

$$=\left|\begin{array}{l}\ln(1+\sin^3 x)\sim\sin^3 x\sim x^3, x\to 0\\ \operatorname{ctg}^3 x=\dfrac{1}{\operatorname{tg}^3 x}\sim\dfrac{1}{x^3}, x\to 0\end{array}\right| = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^3}\cdot x^3} = e.$$

3) $$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+2}{x^2-1}\right)^{x^2} = \lim_{x\to\infty} e^{x^2\ln\frac{x^2+2}{x^2-1}} =$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to\infty} x^2\ln\frac{x^2+2}{x^2-1}} = \left|\begin{array}{l}\ln\dfrac{x^2+2}{x^2-1}=\ln\dfrac{x^2-1+3}{x^2-1}=\\ =\ln\left(1+\dfrac{3}{x^2-1}\right)\sim\dfrac{3}{x^2-1}, x\to\infty\end{array}\right| =$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to\infty} x^2\cdot\frac{3}{x^2-1}} = e^3.$$

ЧАСТЬ II. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ. РЯДЫ

§1. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

1.1. Первообразная и неопределенный интеграл. Свойства неопределенного интеграла

Определение Дифференцируемая функция $F(x)$ называется *первообразной для функции* $f(x)$ на (a,b), если для всех $x\in(a,b)$ выполняется соотношение: $\boxed{F'(x)=f(x)}$	$\boxed{F(x) \text{ – первообразная для } f(x)}$ $\Updownarrow$ $\boxed{F'(x)=f(x)}$ **Примеры** для $f(x)=x^2,\ F(x)=\dfrac{x^3}{3}$ для $f(x)=\cos x,\ F(x)=\sin x$

Определение *Неопределенным интегралом* называется совокупность всех первообразных функции $f(x)$.	$\underbrace{\int f(x)dx}_{\text{неопределенный интеграл от } f(x)} \overset{\text{опр}}{=} \underbrace{F(x)+C}_{\text{совокупность всех первообразных функций } f(x)}$ (С – произвольная постоянная)

Свойства неопределенного интеграла

1. $\int df(x)=\int f'(x)dx=f(x)+C$.

2. $d\int f(x)dx=f(x)dx$.

3. Свойство линейности

$\int(af(x)+bg(x))dx=a\int f(x)dx+b\int g(x)dx,$ (a,b – числа).

4. $\int f(x)dx=F(x)+C \Rightarrow \int f(ax+b)dx=\dfrac{1}{a}F(ax+b)+C$.

1.2. Таблица основных неопределенных интегралов

1	$\int x^{\alpha}dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, (\alpha \neq -1)$	9	$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$
2	$\int \frac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert + C$	9'	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C,$ $(a > 0)$
3	$\int \sin x dx = -\cos x + C$	10	$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{x-a}{x+a}\right\rvert + C,$ $(a \neq 0)$
4	$\int \cos x dx = \sin x + C$	11	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \ln\left\lvert x + \sqrt{x^2+a}\right\rvert + C,$ $(a \neq 0)$
5	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg} x + C$	12	$\int shxdx = chx + C$
6	$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg} x + C$	13	$\int chxdx = shx + C$
7	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$, $a \neq 0, a \neq 1$	14	$\int \frac{dx}{ch^2 x} = thx + C$
7'	$\int e^x dx = e^x + C$	15	$\int \frac{dx}{sh^2 x} = -cthx + C$
8	$\int \frac{dx}{1+x^2} = \mathrm{arctg} x + C$	16	$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln\lvert f(x)\rvert + C$
8'	$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\mathrm{arctg}\frac{x}{a} + C,$ $(a \neq 0)$		

1.3. Замена переменной в неопределенном интеграле

1 тип замены

$$\int f(g(x))\cdot g'(x)dx = \left|\begin{array}{l}\text{Замена:}\\ g(x)=t\\ \quad\Downarrow\\ g'(x)dx=dt\end{array}\right| = \int f(t)dt = F(t)+C = F(g(x))+C$$

Примеры

1) $$\int \sin^4 x\cos x dx = \left|\begin{array}{l}\sin x = t\\ \cos x dx = dt\end{array}\right| = \int t^4 dt = \frac{t^5}{5}+C = \frac{\sin^5 x}{5}+C.$$

2) $$\int \ln^2 x\cdot\frac{1}{x}dx = \left|\begin{array}{l}\ln x = t\\ \frac{1}{x}dx = dt\end{array}\right| = \int t^2 dt = \frac{t^3}{3}+C = \frac{\ln^3 x}{3}+C.$$

3) $$\int e^{ax}dx = \left|\begin{array}{l}ax = t\\ adx = dt\end{array}\right| = \int e^t\frac{dt}{a} = \frac{1}{a}e^t + C = \frac{1}{a}e^{ax}+C.$$

2 тип замены

$$\int f(x)dx = \left|\begin{array}{l}\text{Замена:}\\ x=h(t)\\ \quad\Downarrow\\ dx=h'(t)dt,\\ t=g(x)\end{array}\right| = \int f(h(t))h'(t)dt = F_1(t)+C = F_1(g(x))+C.$$

Примеры

1) $$\underset{(-1\le x\le 1)}{\int\sqrt{1-x^2}dx} = \left|\begin{array}{l}x=\sin t, \left(-\frac{\pi}{2}\le t\le\frac{\pi}{2}\right)\\ dx=\cos t dt\\ \sqrt{1-x^2}=\sqrt{1-\sin^2 t}=\cos t\\ t=\arcsin x\end{array}\right| = \int\cos^2 t dt =$$

$$= \int\frac{1+\cos 2t}{2}dt = \frac{1}{2}\left(t+\frac{\sin 2t}{2}\right)+C = \frac{1}{2}\arcsin x + \frac{1}{4}\sin(2\arcsin x)+C.$$

$$2)\ \int \frac{dx}{(x+9)\sqrt{x}} = \left| \begin{array}{l} x = t^2 \\ dx = 2tdt \\ t = \sqrt{x} \end{array} \right| = \int \frac{2tdt}{(t^2+9)t} = 2\int \frac{dt}{t^2+9} = \frac{2}{3}\operatorname{arctg}\frac{t}{3} + C =$$

$$= \frac{2}{3}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{x}}{3} + C.$$

1.4. Интегрирование по частям в неопределенном интеграле

Формула интегрирования по частям

$$\int u dv = u \cdot v - \int v \cdot du$$

или

$$\int u(x) \cdot v'(x) dx = u \cdot v - \int v(x) u'(x) dx$$

Типичные применения метода интегрирования по частям
($P_n(x)$ – многочлен)

$$\int \underbrace{P_n(x)}_{\uparrow\, u} \cdot \underbrace{\left\{ \begin{array}{l} \sin(ax+b) \\ \cos(ax+b) \\ e^{ax+b} \end{array} \right\} dx}_{\uparrow\, dv} \qquad \int \underbrace{\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{arctg}(ax+b) \\ \operatorname{arcctg}(ax+b) \\ \arcsin(ax+b) \\ \arccos(ax+b) \\ \log_a(ax+b) \end{array} \right\}}_{\uparrow\, u} \cdot \underbrace{P_n(x) dx}_{\uparrow\, dv}$$

Примеры

$$1)\ \int \underbrace{\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)}_{\uparrow\, u} \underbrace{e^{3x} dx}_{\uparrow\, dv} = \left| \begin{array}{l} u = 2x - \frac{\pi}{4} \Rightarrow du = 2dx \\ dv = e^{3x} dx \Rightarrow v = \int dv = \frac{e^{3x}}{3} \end{array} \right| =$$

$$= \left(2x - \frac{\pi}{4}\right)\frac{e^{3x}}{3} - \frac{2}{3}\int e^{3x} dx = \left(2x - \frac{\pi}{4}\right)\frac{e^{3x}}{3} - \frac{2}{9}e^{3x} + C.$$

2) $\int \ln x dx = \begin{vmatrix} u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x}dx \\ dv = dx \Rightarrow v = \int dx = x \end{vmatrix} =$

$$= x \cdot \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x \cdot \ln x - \int dx = x \cdot \ln x - x + C.$$

1.5. Интегрирование простейших дробей

Простейшая дробь	
I рода	II рода
$\frac{A}{(x-a)^k}$, k – натуральное число	$\frac{Mx+N}{\underbrace{x^2+px+q}}$ $\uparrow$ дискриминант < 0

Интегрирование простейших дробей
I рода: $\int \frac{Adx}{(x-a)^k} = \begin{cases} A\ln\lvert x-a\rvert + C, & k=1 \\ A\frac{(x-a)^{-k+1}}{-k+1} + C, & k>1 \end{cases}$
II рода: 1) Выделить полный квадрат в знаменателе.   2) Произвести замену, выбрав в качестве новой переменной выражение, квадрат которого выделен в пункте 1.   3) Почленно разделить числитель на знаменатель.   4) Интегрировать.

Примеры

1) $\int \frac{2dx}{(x-3)^5} = \begin{vmatrix} x-3=t \\ dx=dt \end{vmatrix} = 2\int \frac{dt}{t^5} = 2 \cdot \frac{t^{-4}}{-4} + C = -\frac{1}{2(x-3)^4} + C.$

2) $$\int \frac{3dx}{x^2+6x+10} = 3\int \frac{dx}{(x+3)^2+1} = \left| \begin{matrix} x+3=t \\ dx=dt \end{matrix} \right| = 3\int \frac{dt}{t^2+1} =$$
$$= 3\operatorname{arctg} t + C = 3\operatorname{arctg}(x+3) + C.$$

3) $$\int \frac{x-5}{x^2+2x+4}dx = \int \frac{x-5}{(x+1)^2+3}dx = \left| \begin{matrix} x+1=t \\ dx=dt \end{matrix} \right| = \int \frac{t-6}{t^2+3}dt =$$
$$= \int \frac{tdt}{t^2+3} - 6\int \frac{dt}{t^2+3} = \frac{1}{2}\ln\left|t^2+3\right| - \frac{6}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{3}} + C =$$
$$= \frac{1}{2}\ln\left|x^2+2x+4\right| - 2\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{3}} + C.$$

$$\left(\text{Здесь } \int \frac{tdt}{t^2+3} = \left| \begin{matrix} t^2+3=z \\ d(t^2+3)=dz \\ 2tdt=dz \\ tdt=\frac{1}{2}dz \end{matrix} \right| = \frac{1}{2}\int \frac{dz}{z} = \frac{1}{2}\ln(t^2+3)+C). \right)$$

1.6. Интегрирование рациональных дробей

Рациональная дробь

$$R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$$

$P_n(x)$ – многочлен степени n

$Q_m(x)$ – многочлен степени m

Дробь правильная, если $n < m$.

Дробь неправильная, если $n \geq m$.

Неправильная дробь = Целая часть + Правильная дробь

Алгоритм интегрирования неправильной дроби

1) Выделение целой части и правильной дроби.

2) Разложение правильной дроби на сумму простейших дробей.

3) Интегрирование суммы целой части и простейших дробей.

Примеры

1) $J = \int \frac{x^2+2x+3}{x^3-9x^2+20x}dx$

$$\frac{x^2+2x+3}{x^3-9x^2+20x} = \frac{x^2+2x+3}{x(x-4)(x-5)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-4} + \frac{C}{x-5}$$

$$x^2+2x+3 = A(x-4)(x-5) + Bx(x-5) + Cx(x-4)$$

$$\begin{array}{l|l} x=0 & 3 = 20A \Rightarrow A = \frac{3}{20} \\ x=4 & 27 = -4B \Rightarrow B = -\frac{27}{4} \\ x=5 & 38 = 5C \Rightarrow C = \frac{38}{5} \end{array}$$

$$J = \int \left(\frac{3}{20x} - \frac{27}{4(x-4)} + \frac{38}{5(x-5)} \right) dx =$$

$$= \frac{3}{20}\int \frac{dx}{x} - \frac{27}{4}\int \frac{dx}{x-4} + \frac{38}{5}\int \frac{dx}{x-5} =$$

$$= \frac{3}{20}\ln|x| - \frac{27}{4}\ln|x-4| + \frac{38}{5}\ln|x-5| + C.$$

2) $J = \int \frac{x^3-2x^2+3x+1}{x^2-1}dx$

$$\begin{array}{r|l} x^3-2x^2+3x+1 & x^2-1 \\ \underline{x^3-x} & \overline{x-2} \\ -2x^2+4x+1 & \\ \underline{-2x^2+2} & \\ 4x-1 & \end{array}$$

$$\frac{x^3-2x^2+3x+1}{x^2-1} = x-2+\frac{4x-1}{x^2-1}.$$

$$\frac{4x-1}{x^2-1}=\frac{4x-1}{(x-1)(x+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}$$

$$4x-1=A(x+1)+B(x-1).$$

$$\begin{array}{c|l} x=-1 & -5=-2B\Rightarrow B=\dfrac{5}{2} \\ & \\ x=1 & 3=2A\Rightarrow A=\dfrac{3}{2} \end{array}$$

$$\frac{4x-1}{x^2-1}=\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{x-1}+\frac{5}{2}\cdot\frac{1}{x+1}.$$

$$J=\int\left(x-2+\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{x-1}+\frac{5}{2}\cdot\frac{1}{x+1}\right)dx=$$

$$=\frac{x^2}{2}-2x+\frac{3}{2}\ln|x-1|+\frac{5}{2}\ln|x+1|+C.$$

1.7. Интегралы вида $\int R(e^x)dx$

Подстановка $e^x=t$ приводит к интегралу от рациональной дроби

$$\int R(e^x)dx=\left|\begin{array}{l} e^x=t \\ e^x dx=dt \\ dx=\dfrac{dt}{e^x}=\dfrac{dt}{t} \end{array}\right|=\int\frac{R(t)}{t}dt.$$

Пример

$$\int\frac{e^x}{e^{2x}+1}dx=\left|\begin{array}{l} e^x=t \\ e^x dx=dt \\ e^{2x}=t^2 \end{array}\right|=\int\frac{dt}{t^2+1}=\mathrm{arctg}t+C=\mathrm{arctg}e^x+C.$$

1.8. Интегралы вида $\int R(x, \sqrt[n]{ax+b})dx$

Подстановка $ax+b=t^n$ приводит к интегралу от рациональной дроби:

$$\int R(x, \sqrt[n]{ax+b})dx = \left| \begin{array}{l} ax+b=t^n \\ adx = nt^{n-1}dt \\ x = \dfrac{t^n-b}{a} \end{array} \right| = \int R\left(\frac{t^n-b}{a}, t\right)\frac{nt^{n-1}}{a}dt$$

Примеры

1) $$\int \frac{x^2dx}{(5x+2)\sqrt{5x+2}} = \int \frac{x^2dx}{(5x+2)^{\frac{3}{2}}} =$$

$$= \left| \begin{array}{l} 5x+2=t^2 \\ 5dx=2tdt \\ dx=\dfrac{2tdt}{5} \\ x=\dfrac{t^2-2}{5} \end{array} \right| = \int \frac{(t^2-2)^2}{25t^3}\cdot\frac{2t}{5}dt = \frac{2}{125}\int\frac{(t^2-2)^2}{t^2}dt =$$

$$= \frac{2}{125}\int\frac{t^4-4t^2+4}{t^2}dt = \frac{2}{125}\int\left(t^2-4+\frac{4}{t^2}\right)dt = \frac{2}{125}\left(\frac{t^3}{3}-4t-\frac{4}{t}\right)+C =$$

$$= \frac{2}{125}\left(\frac{1}{3}(5x+2)\sqrt{5x+2}-4\sqrt{5x+2}-\frac{4}{\sqrt{5x+2}}\right)+C.$$

2) $$\int\frac{xdx}{\sqrt{x-1}+2} = \left| \begin{array}{l} x-1=t^2 \\ dx=2tdt \\ x=t^2+1 \\ t=(x-1)^{\frac{1}{2}} \end{array} \right| = 2\int\frac{(t^2+1)tdt}{t+2} =$$

$$= 2\int\frac{t^3+t}{t+2}dt = 2\int\left(t^2-2t+5-\frac{10}{t+2}\right)dt =$$

$$
\begin{array}{r|l}
-\begin{array}{r} t^3+t \\ t^3+2t \end{array} & t+2 \\ \cline{2-2}
\overline{} -\begin{array}{r} -2t^2+t \\ -2x^2-4t \end{array} & t^2-2t+5 \\
\overline{} -\begin{array}{r} 5t \\ 5t+10 \end{array} & \\
\overline{\ -10} &
\end{array}
$$

$$
=2\left(\frac{t^3}{3}-2\frac{t^2}{2}+5t-10\ln\left|t+2\right|\right)+C=
$$

$$
=2\left(\frac{\sqrt{\left(x-1\right)^3}}{3}-\left(x-1\right)+5\sqrt{x-1}-10\ln\left|\sqrt{x-1}+2\right|\right)+C.
$$

1.9. Интегралы от тригонометрических функций

1)

$\int R(\sin x)\cos x dx \longleftarrow$	подстановка $\sin x = t$
$\int R(\cos x)\sin x dx \longleftarrow$	подстановка $\cos x = t$

Пример

$$
\int\frac{\sin^3 x}{\cos x}dx=\int\frac{\sin^2 x\cdot\sin x}{\cos x}dx=\left|\begin{array}{l}\cos x=t\\ -\sin x dx=dt\\ \sin^2 x=1-\cos^2 x=1-t^2\end{array}\right|=
$$

$$
=-\int\frac{1-t^2}{t}dt=-\int\frac{dt}{t}+\int\frac{t^2}{t}dt=-\ln\left|t\right|+\frac{t^2}{2}+C=
$$

$$
=-\ln\left|\cos x\right|+\frac{\cos^2 x}{2}+C.
$$

2) $\int\sin^n x\cos^m x dx$ ($n, m -$ целые числа)

n – нечетное	подстановка $\cos x = t$
m – нечетное	подстановка $\sin x = t$
n, m – четные положительные	преобразование подынтегрального выражения с помощью формул понижения степени: $\sin^2 x=\dfrac{1-\cos 2x}{2}$; $\cos^2 x=\dfrac{1+\cos 2x}{2}$

Пример

$$\int \sin^2 x \cdot \cos^3 x dx = \left| \begin{array}{l} \sin x = t \\ \cos x dx = dt \\ \cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 1 - t^2 \end{array} \right| =$$

$$= \int t^2 (1 - t^2) dt = \int t^2 dt - \int t^4 dt = \frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5} + C = \frac{\sin^3 x}{3} - \frac{\sin^5 x}{5} + C.$$

3) $\int R(\sin^2 x, \cos^2 x) dx$ или $\int R(\mathrm{tg} x) dx$

Подстановка $tgx = t \Rightarrow \mathrm{arctg} t = x$;

$$dx = \frac{dt}{1+t^2};\ \sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2};$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}.$$

Пример

$$\int \mathrm{tg}^2 x dx = \left| \begin{array}{l} \mathrm{tg}\, x = t \\ \dfrac{1}{\cos^2 x} dx = dt \\ dx = \cos^2 x dt \\ \cos^2 x = \dfrac{1}{1+\cos^2 x} = \dfrac{1}{1+t^2} \\ dx = \dfrac{1}{1+t^2} dt \end{array} \right| = \int \frac{t^2}{1+t^2} dt =$$

$$= \int \frac{t^2 + 1 - 1}{1+t^2} dt = \int \frac{t^2+1}{1+t^2} dt - \int \frac{dt}{1+t^2} = \int dt - \int \frac{dt}{1+t^2} =$$

$$= t - \mathrm{arctg} t + C = \mathrm{tg} x - \mathrm{arctg}(\mathrm{tg} x) + C = \mathrm{tg} x - x + C.$$

4) $\int R(\sin x, \cos x) dx.$

Универсальная тригонометрическая подстановка

$$\mathrm{tg}\frac{x}{2} = t \Rightarrow x = 2\,\mathrm{arctg}\, t;\ dx = \frac{2dt}{1+t^2};$$

$$(-\pi < x < \pi);\quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2};\quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

Пример

$$\int \frac{dx}{1+\sin x} = \left| \begin{array}{l} \mathrm{tg}\dfrac{x}{2} = t \\ dx = \dfrac{2dt}{1+t^2} \\ \sin x = \dfrac{2t}{1+t^2} \end{array} \right| = 2\int \frac{dt}{(1+t^2)\left(1+\dfrac{2t}{1+t^2}\right)} =$$

$$= 2\int \frac{dt}{(t+1)^2} = -\frac{2}{t+1} + C = -\frac{2}{\mathrm{tg}\dfrac{x}{2}+1} + C.$$

5) $\underline{\int \sin mx \cdot \cos nx dx;\ \int \sin mx \cdot \sin nx dx;\ \int \cos mx \cdot \cos nx dx}$

С помощью формул преобразования произведений в суммы

$$\sin mx \cdot \cos nx = \frac{1}{2}[\sin(m+n)x + \sin(m-n)x],$$

$$\sin mx \cdot \sin nx = \frac{1}{2}[\cos(m-n)x - \cos(m+n)x],$$

$$\cos mx \cdot \cos nx = \frac{1}{2}[\cos(m+n)x + \cos(m-n)x].$$

Пример

$$\int \sin 3x \cos 2x dx = \frac{1}{2}\int (\sin 5x + \sin x) dx = -\frac{\cos 5x}{10} - \frac{\cos x}{2} + C.$$

Контрольные вопросы к § 1

1. Является ли функция $g(x)=\sin x+4$ первообразной для функции $f(x)=-\cos x$?

2. Является ли функция $g(x)=\dfrac{1}{x}$ первообразной для функции $f(x)=\ln|x|$ на $(-1;1)$?

3. Всякая ли функция имеет первообразную?

Указание: рассмотреть функцию $f(x)=\begin{cases}1, & x>0\\ -2, & x\le 0\end{cases}$.

4. Требуется найти $\int\sqrt{4-x^2}\,dx$ $(-2\le x\le 2)$. Допустима ли замена переменной:

а) $x=\sin t\left(-\dfrac{\pi}{2}\le t\le\dfrac{\pi}{2}\right)$;

б) $x=2\sin t$ $\left(0\le t\le\dfrac{\pi}{2}\right)$;

в) $x=2\sin t$ $\left(-\dfrac{\pi}{2}\le t\le\dfrac{\pi}{2}\right)$;

г) $x=2\cos t$ $\left(0\le t\le\dfrac{\pi}{2}\right)$;

д) $x=2\cos t$ $(\pi\le t\le 2\pi)$.

Упражнения к § 1

1. Найти интегралы (используя таблицу)

1) $\int x^3dx$; 2) $\int\sqrt[4]{x^5}\,dx$;

3) $\int 3^x dx$;

4) $\int \frac{dx}{5+x^2}$;

5) $\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$.

2. Найти интегралы (методом замены переменной)

1) $\int x^2 \cdot 5^{x^3} dx$;

2) $\int \cos^5 x \sin x \, dx$;

3) $\int \frac{\operatorname{arctg}^3 x}{1+x^2} dx$;

4) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+7}}$;

5) $\int \frac{\ln^6 x}{x} dx$.

3. Найти интегралы (методом интегрирования по частям)

1) $\int (3-2x)\sin 3x \, dx$;

2) $\int \operatorname{arctg} x \, dx$;

3) $\int x^2 \cos 4x \, dx$;

4) $\int \arcsin 3x \, dx$;

5) $\int \sin x \ln \cos x \, dx$.

4. Найти интегралы от рациональных дробей

1) $\int \frac{6\,dx}{x^2+4x+5}$;

2) $\int \frac{x+3}{x^2+5x+7} dx$;

3) $\int \frac{x^2+x+5}{x(x+3)(x-2)} dx$;

4) $\int \frac{2x^2-7x+8}{x^4-10x^2+9} dx$;

5) $\int \frac{dx}{(x^2-4)(x^2+3)}$;

6) $\int \frac{x^2-3}{x^2-1} dx$;

7) $\int \frac{2x^4-x^2+1}{x^3-x} dx$.

5. Найти интегралы от иррациональных выражений

1) $\int \frac{\sqrt[4]{x}}{\sqrt[3]{x}-\sqrt{x}}dx$;

2) $\int \frac{x^4}{\sqrt{x-1}}dx$;

3) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(3+2x)^2}-\sqrt{3+2x}}$;

4) $\int \frac{1-\sqrt{x+1}}{1+\sqrt[3]{x+1}}$;

5) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+5}}$.

6. Найти интегралы от тригонометрических выражений

1) $\int \sin^4 x \cos^3 x\, dx$;

2) $\int \cos^2 x \sin^5 x\, dx$;

3) $\int \cos^4 x\, dx$;

4) $\int \frac{\sin^4 x}{\cos^8 x}dx$;

5) $\int \operatorname{ctg}^3 x\, dx$;

6) $\int \frac{dx}{\sin^3 x}$;

7) $\int \frac{dx}{1+\cos x}$;

8) $\int \frac{dx}{3\cos x+2\sin x}$;

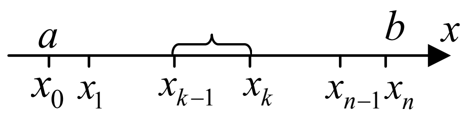
9) $\int \cos 4x \sin 5x\, dx$;

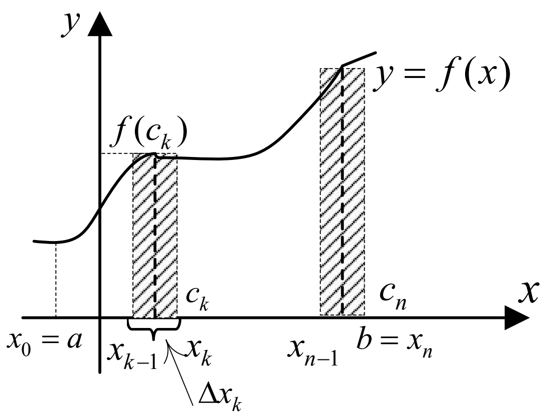
10) $\int \sin 2x \sin 3x\, dx$.

§2. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ. НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

2.1. Интегральная сумма

На отрезке $[a,b]$ задана ограниченная функция $f(x)$

Разбиение отрезка $[a,b]$	Диаметр разбиения
	$d = \max(x_k - x_{k-1}),$ $1 \le k \le n$



Точки $c_k \in [x_{k-1}, x_k]$ $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$

Интегральная сумма для $f(x)$ на отрезке $[a,b]$:

$$\sum_{k=1}^{n} f(c_k) \cdot \Delta x_k$$

Геометрический смысл интегральной суммы: площадь ступенчатой фигуры (при $f(x) \ge 0,\ x \in [a,b]$)

2.2. Определенный интеграл (интеграл Римана)

Определение

Определенным интегралом $\int_a^b f(x)dx$ называется не зависящий от способа разбиения и от выбора точек c_k предел последовательности интегральных сумм при условии, что диаметр разбиения $d \to 0$.

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx \overset{\text{опр}}{=} \lim_{d\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(c_k) \cdot \Delta x_k}$$

Полагаем: 1) $\boxed{\int\limits_a^b f(x)dx = -\int\limits_b^a f(x)dx}$

2) $\boxed{\int\limits_a^a f(x)dx = 0}$

2.3. Формула Ньютона-Лейбница (связь определенного интеграла с неопределенным)

$\boxed{\int f(x)dx = F(x) + C}$	$\Longrightarrow$	Формула Ньютона-Лейбница: $\int\limits_a^b f(x)dx = F(x)\Big\vert_a^b = F(b) - F(a)$

Примеры

1) $\int\limits_2^3 x^2 dx = \dfrac{x^3}{3}\Bigg\vert_2^3 = \dfrac{3^3}{3} - \dfrac{2^3}{3} = \dfrac{19}{3}.$

2) $\int\limits_0^1 \dfrac{dx}{1+x^2} = \mathrm{arctg}x\Big\vert_0^1 = \mathrm{arctg}1 - \mathrm{arctg}0 = \dfrac{\pi}{4} - 0 = \dfrac{\pi}{4}.$

3) $\int\limits_1^5 e^x dx = e^x\Big\vert_1^5 = e^5 - e^1 = e^5 - e.$

2.4. Свойства определенного интеграла, выражаемые равенствами

1. Линейность $$\int\limits_a^b (C_1 f(x) + C_2 g(x))dx = C_1\int\limits_a^b f(x)dx + C_2\int\limits_a^b g(x)dx.$$
2. Аддитивность относительно промежутка интегрирования $$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx$$

2.5. Свойства определенного интеграла, выражаемые неравенствами. Теорема о среднем

1. Монотонность

$$\begin{matrix} f(x) \ge g(x), \\ x \in [a,b] \end{matrix} \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \ge \int_a^b g(x)dx.$$

2. Позитивность

$$\begin{matrix} f(x) \ge 0, \\ x \in [a,b] \end{matrix} \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \ge 0.$$

3. Двусторонняя оценка интеграла

$$\begin{matrix} m \le f(x) \le M, \\ x \in [a,b] \end{matrix} \Rightarrow m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$$

4. Оценка модуля интеграла

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \le \int_a^b |f(x)|dx.$$

Теорема о среднем

$f(x)$ непрерывна на $[a,b]$	$\Longrightarrow$	$\exists c \in [a,b], \int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$

Определение

Интегральным средним функции $f(x)$ на промежутке $[a,b]$ называется число

$$\langle f(x) \rangle_{[a,b]} = \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}.$$

Вторая формулировка теоремы о среднем

$$\langle f(x) \rangle_{[a,b]} = f(c), \text{ где } c \in [a,b].$$

2.6. Интегрирование по частям в определенном интеграле

Формула интегрирования по частям в определенном интеграле $$\int_a^b u\cdot dv = u\cdot v\Big|_a^b - \int_a^b v\cdot du$$
Здесь $u\cdot v\Big|_a^b = u(b)v(b) - u(a)v(a).$

Примеры

$$1)\ \int_0^1 (3x+1)e^{2x}dx = \left| \begin{matrix} u = 3x+1 \Rightarrow du = 3dx \\ dv = e^{2x}dx \Rightarrow v = \int e^{2x}dx = \dfrac{e^{2x}}{2} \end{matrix} \right| =$$

$$= (3x+1)\cdot\frac{e^{2x}}{2}\Bigg|_0^1 - \int_0^1 3\cdot\frac{e^{2x}}{2}dx = (3+1)\cdot\frac{e^2}{2} - (0+1)\cdot\frac{e^0}{2} - \frac{3}{2}\int_0^1 e^{2x}dx =$$

$$= 2e^2 - \frac{1}{2} - \frac{3}{2}\cdot\frac{e^{2x}}{2}\Bigg|_0^1 = 2e^2 - \frac{1}{2} - \frac{3}{4}(e^2 - e^0) = \frac{5}{4}e^2 + \frac{1}{4}.$$

$$2)\ \int_1^2 x\cdot \operatorname{arctg} x dx = \left| \begin{matrix} u = \operatorname{arctg} x \Rightarrow du = \dfrac{dx}{1+x^2} \\ dv = x\cdot dx \Rightarrow v = \int x dx = \dfrac{x^2}{2} \end{matrix} \right| =$$

$$= \operatorname{arctg} x\cdot\frac{x^2}{2}\Bigg|_1^2 - \int_1^2 \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{1+x^2}dx = \left(2\operatorname{arctg}2 - \frac{1}{2}\operatorname{arctg}1\right) -$$

$$-\frac{1}{2}\int_1^2 \frac{x^2}{1+x^2}dx = 2\operatorname{arctg}2 - \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{x^2+1-1}{1+x^2}dx =$$

$$= 2\operatorname{arctg}2 - \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}x\Big|_1^2 + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x\Big|_1^2 = 2\operatorname{arctg}2 - \frac{\pi}{8} -$$

$$-\frac{1}{2}(2-1) + \frac{1}{2}(\operatorname{arctg}2 - \operatorname{arctg}1) = \frac{5}{2}\operatorname{arctg}2 - \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}.$$

2.7. Замена переменной в определенном интеграле

$$\int\limits_a^b f(g(x))g'(x)dx = \left| \begin{array}{l} \text{Замена} \\ g(x)=t \\ g'(x)dx = dt \\ x=a \Rightarrow t=g(a) \\ x=b \Rightarrow t=g(b) \end{array} \right| = \int\limits_{g(a)}^{g(b)} f(t)dt = F(t)\Big|_{g(a)}^{g(b)}.$$

Примеры

$$1)\ \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{ctg} x dx = \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin x} dx = \left| \begin{array}{l} \sin x = t \\ \cos x dx = dt \\ x=\frac{\pi}{4} \Rightarrow t = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ x=\frac{\pi}{2} \Rightarrow t=\sin\frac{\pi}{2} = 1 \end{array} \right| =$$

$$= \int\limits_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1} \frac{dt}{t} = \ln|t|\Big|_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1} = \ln 1 - \ln\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2}\ln 2.$$

$$2)\ \int\limits_0^3 \sqrt{9-x^2}\,dx = \left| \begin{array}{l} x = 3\sin t \\ dx = 3\cos t dt \\ x=0 \Rightarrow t=0 \\ x=3 \Rightarrow t=\frac{\pi}{2} \end{array} \right| = 9\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt =$$

$$= \frac{9}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2t)dt = \frac{9}{2}\left(t + \frac{\sin 2t}{2} \right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{9}{4}\pi.$$

2.8. Определенный интеграл от комплексной функции вещественной переменной

Комплексная функция $W(x)$ вещественной переменной x:

$$W(x) = U(x) + iV(x).$$

$$\Downarrow$$

$$\int_a^b [U(x) + iV(x)]dx = \int_a^b U(x)dx + i\int_a^b V(x)dx$$

Примеры

1) $$\int_0^1 (x + ix^2)dx = \left(\frac{x^2}{2} + i\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{2} + i\frac{1}{3}.$$

2) $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-ix}dx = \frac{e^{-ix}}{-i}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = ie^{-ix}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = i\left(e^{-i\frac{\pi}{2}} - 1\right) =$$

$$= i\left(\cos\frac{\pi}{2} - i\sin\frac{\pi}{2} - 1\right) = i(-i-1) = 1 - i.$$

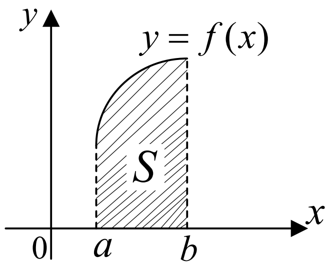
2.9. Вычисление определенного интеграла от четных, нечетных и периодических функций

$f(x)$ – четная: $f(-x) = f(x)$	$\Rightarrow$	$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$
$f(x)$ – нечетная: $f(-x) = -f(x)$	$\Rightarrow$	$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$
$f(x)$ – периодическая с периодом T: $f(x+T) = f(x)$	$\Rightarrow$	$\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx$

2.10. Геометрические приложения определенного интеграла

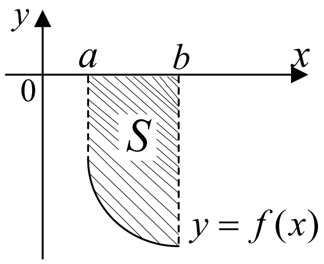
1. *Вычисление площадей* плоских фигур, граница которых задана *явно* $(a < b)$

а) $f(x) \geq 0, \; x \in [a,b]$



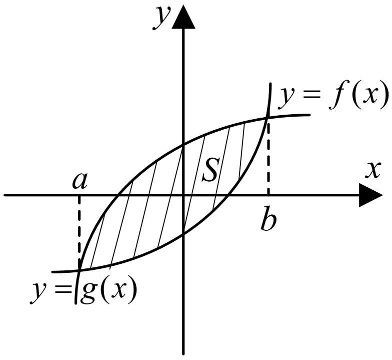
$$S = \int_a^b f(x)dx$$

б) $f(x) \leq 0, \; x \in [a,b]$



$$S = -\int_a^b f(x)dx$$

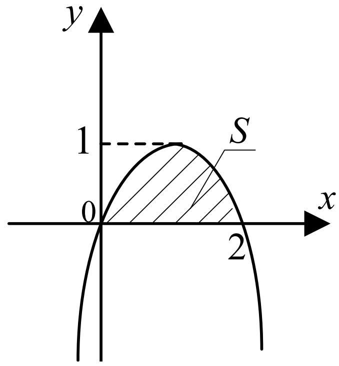
в) $f(x) \geq g(x), \; x \in [a,b]$



$$S = \int_a^b \left[f(x) - g(x) \right] dx$$

Примеры

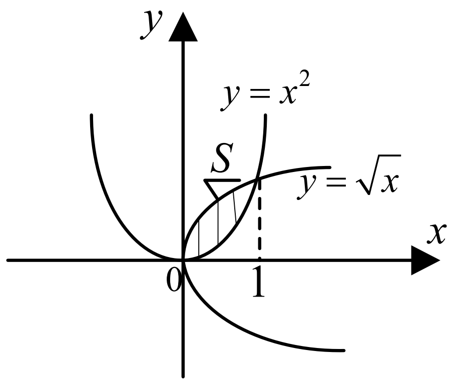
1) Вычислить S фигуры, ограниченной линией $y=-x^2+2x$ и осью OX.



$$S=\int_0^2(-x^2+2x)dx=-\int_0^2 x^2dx+2\int_0^2 xdx=$$

$$=-\frac{x^3}{3}\Bigg|_0^2+2\frac{x^2}{2}\Bigg|_0^2=-\frac{8}{3}+4=\frac{4}{3}\ \text{(кв.ед.)}$$

2) Вычислить S фигуры, ограниченной линиями $y=x^2$ и $y=\sqrt{x}$.



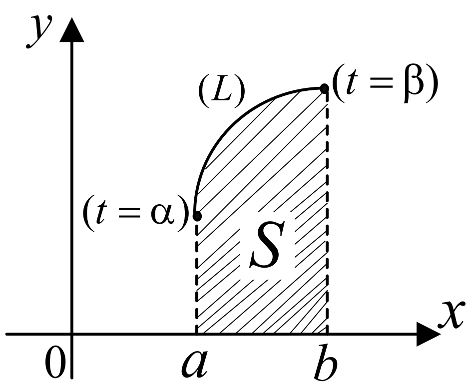
$$S=\int_0^1(\sqrt{x}-x^2)dx=\int_0^1\sqrt{x}dx-\int_0^1 x^2dx=$$

$$=\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^1-\frac{x^3}{3}\Bigg|_0^1=\frac{2}{3}-\frac{1}{3}=\frac{1}{3}\ \text{(кв.ед.).}$$

2. *Вычисление площади* плоской фигуры, граница которой задана *параметрически*

$$(L):\begin{cases}x=x(t)\\ y=y(t)\end{cases},\quad t\in[\alpha,\beta]$$

$$y(t)\ge 0,\ \ x'(t)\ge 0$$

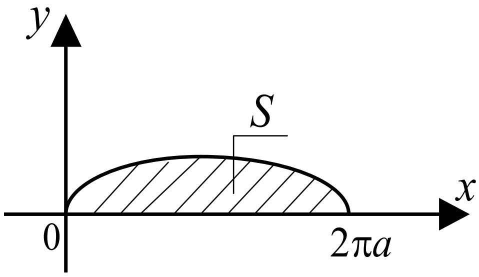


$\Longrightarrow$

$$S=\int_\alpha^\beta y(t)\cdot x'(t)dt$$

$$a=x(\alpha);\ b=x(\beta)$$

Пример



Вычислить S фигуры, ограниченной осью OX и одной аркой циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ ($t \in [0, 2\pi]$, a – число, $a > 0$)

$$S = \int_0^{2\pi} a(1 - \cos t) \cdot a(1 - \cos t) dt =$$

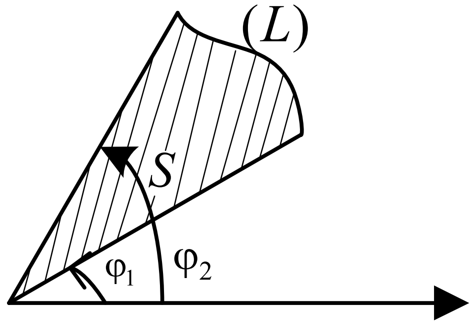
$$= a^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^2 dt = a^2 \int_0^{2\pi} (1 - 2\cos t + \cos^2 t) dt =$$

$$= a^2 \int_0^{2\pi} \left(1 - \cos t + \frac{1 + \cos 2t}{2}\right) dt = a^2 \left(t - \sin t + \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{2\pi} =$$

$$= a^2 (2\pi + \pi) = 3\pi a^2 \text{ (кв.ед.)}.$$

3. *Вычисление площади* плоской фигуры, граница которой задана *в полярной системе координат*

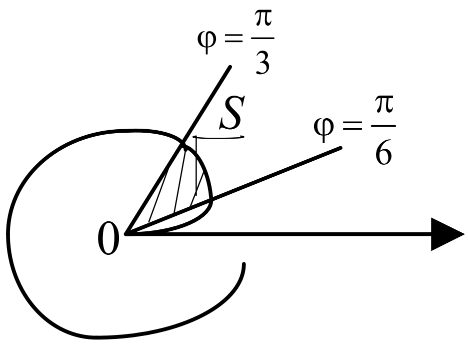
$(L): \rho = \rho(\varphi), \quad \varphi \in [\varphi_1, \varphi_2]$



$\Rightarrow$

$$\boxed{S = \frac{1}{2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho^2(\varphi) d\varphi}$$

Пример



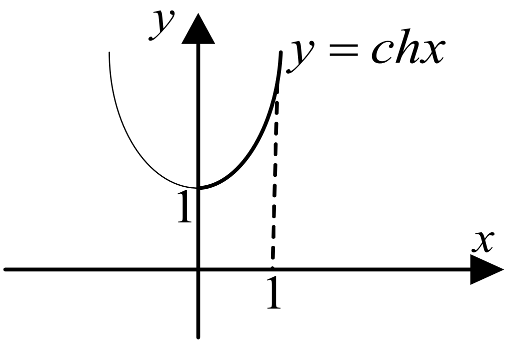
Вычислить S фигуры, ограниченной спиралью Архимеда $\rho=a\varphi$ (a – число) и двумя радиус-векторами, соответствующими полярным углам $\varphi=\frac{\pi}{6}$ и $\varphi=\frac{\pi}{3}$;

$$S=\frac{1}{2}\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} a^2\varphi^2 d\varphi=\frac{1}{2}a^2\left.\frac{\varphi^3}{3}\right|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}=\frac{1}{6}a^2\left(\frac{\pi^3}{27}-\frac{\pi^3}{216}\right)=\frac{7a^2}{1296}\text{(кв.ед.)}.$$

4. *Вычисление длины дуги кривой*

Способ задания	Уравнение кривой (L)	Длина L дуги кривой
Параметрический	$\begin{cases} x=x(t), \\ y=y(t), \quad t\in[\alpha,\beta] \\ z=z(t), \end{cases}$	$L=\int\limits_{\alpha}^{\beta}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\,dt$
Явный	$y=y(x), x\in[a,b]$	$L=\int\limits_{a}^{b}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$
В полярных координатах	$\rho=\rho(\varphi), \varphi\in[\alpha,\beta]$	$L=\int\limits_{\alpha}^{\beta}\sqrt{\left(\frac{d\rho}{d\varphi}\right)^2+\rho^2}\,d\varphi$

Пример



Вычислить длину дуги цепной линии $y = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} = chx$ между точками с абсциссами $x_1 = 0$ и $x_2 = 1$.

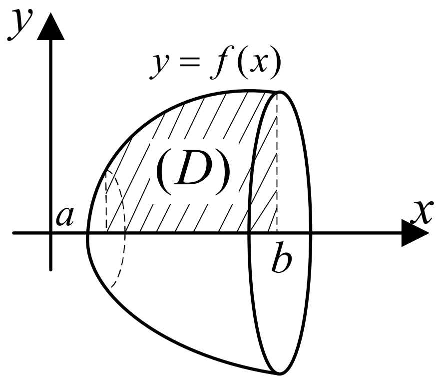
$$L = \int_0^1 \sqrt{1 + (y')^2}\,dx = \left| \begin{array}{l} y' = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} \\ 1 + (y')^2 = 1 + \dfrac{(e^x - e^{-x})^2}{4} = \\ = 1 + \dfrac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4} = \\ = \dfrac{(e^x + e^{-x})^2}{4} \end{array} \right| =$$

$$= \int_0^1 \sqrt{\frac{(e^x + e^{-x})^2}{4}}\,dx = \int_0^1 \frac{e^x + e^{-x}}{2}\,dx = \frac{1}{2}\left(e^x\Big|_0^1 - e^{-x}\Big|_0^1 \right) =$$

$$= \frac{1}{2}(e - 1 - e^{-1} + 1) = \frac{1}{2}\left(e + \frac{1}{e} \right).$$

5. *Вычисление объемов тел вращения*

Пусть криволинейная трапеция (D) вращается вокруг оси OX

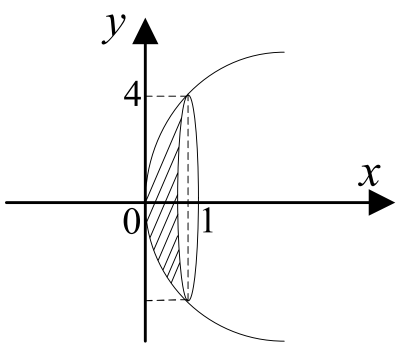


⟹

Объем тела вращения

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx$$

Пример



Вычислить объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной параболой $y^2 = 4x$ и прямой $x = 1$, вокруг оси OX

$$V = \pi\int_0^1 4x dx = 4\pi \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^1 = 2\pi \text{ (куб. ед).}$$

2.11. Физические приложения определенного интеграла

1. Путь, пройденный телом при прямолинейном движении

$V(t)$ – переменная скорость тела, время $t \in [t_1, t_2]$	$\Rightarrow$	Путь, пройденный телом за время $(t_2 - t_1)$ $S = \int_{t_1}^{t_2} V(t)dt$

2. Масса, центр тяжести, момент инерции тонкого стержня

<table>
<tr><td></td><td rowspan="3">⇒</td><td>Масса стержня $M = \int_{x_1}^{x_2} \mu(x)dx$</td></tr>
<tr><td>$\mu(x)$ – линейная плотность массы стержня

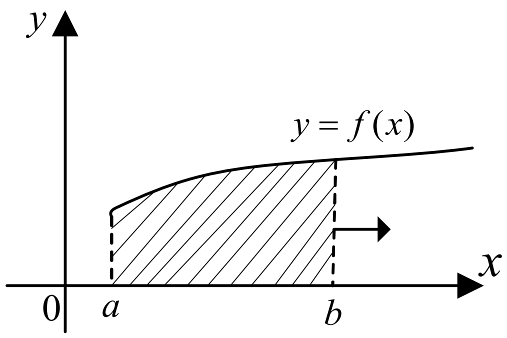
</td><td>Центр тяжести стержня $x_c = \dfrac{\int_{x_1}^{x_2} x\mu(x)dx}{\int_{x_1}^{x_2} \mu(x)dx}$</td></tr>
<tr><td></td><td>Момент инерции относительно точки A $J_A = \int_{x_1}^{x_2} \left|x - x_A\right|^2 \mu(x)dx$</td></tr>
</table>

2.12. Несобственные интегралы I рода
(интегралы с бесконечными пределами)

Пусть $f(x)$ – ограниченная функция, $x \in [a, +\infty)$.

Несобственный интеграл I рода

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx \overset{\text{опр}}{=} \lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)\,dx$$



$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx \overset{\text{опр}}{=} \lim_{a\to-\infty} \int_a^b f(x)dx$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx \overset{\text{опр}}{=} \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_c^{+\infty} f(x)dx$$

$\lim\limits_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)\,dx = A$,
A – конечное число
$\Longrightarrow$
1) $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится
2) $\int_a^{+\infty} f(x)dx = A$

$\lim\limits_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)dx = \infty$ или
$\lim\limits_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)\,dx$ не существует
$\Longrightarrow$
$\int_a^{+\infty} f(x)dx$ расходится

Примеры

1) $\int_0^{+\infty} e^{-x}dx = \lim\limits_{b\to+\infty} \int_0^b e^{-x}dx = \lim\limits_{b\to+\infty} \left.\frac{e^{-x}}{-1}\right|_0^b = -\lim\limits_{b\to+\infty} (e^{-b} - 1) = 1$ (сходится).

2) $\int\limits_{1}^{+\infty} xdx$ расходится т. к. $\lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_{1}^{b} xdx = \lim\limits_{b\to+\infty}\left.\frac{x^2}{2}\right|_1^b = +\infty.$

3) $\int\limits_{0}^{+\infty} \cos xdx$ расходится, ибо $\lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_{0}^{b}\cos xdx = \lim\limits_{b\to+\infty}\sin b$ не существует.

Интеграл – эталон для несобственных интегралов I рода.

$\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x^p}$	$\longleftarrow$	сходится при $p>1$, расходится при $p\le 1$.

Теоремы сравнения для несобственных интегралов I рода

$f(x)\ge 0$, $g(x)\ge 0$, $x\in[a,+\infty)$ $J_1=\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx$, $J_2=\int\limits_{a}^{+\infty} g(x)dx$	$\Rightarrow$	1-ая теорема сравнения (мажорантный признак сравнения) $f(x)\ge g(x)$, J_1 сходится $\Rightarrow J_2$ сходится $x\in[a,+\infty)\Rightarrow$ J_2 расходится $\Rightarrow J_1$ расходится
		2-ая теорема сравнения (предельный признак сравнения) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=C$, $\Rightarrow$ J_1 и J_2 сходятся или $0<C<+\infty$ расходятся одновременно

Абсолютная и условная сходимость интегралов

$\int\limits_{a}^{+\infty}\lvert f(x)\rvert dx$ сходится	1) $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx$ сходится 2) $\int\limits_{a}^{+\infty}\lvert f(x)\rvert dx$ расходится
$\Downarrow$ (опр)	$\Downarrow$ (опр)
$\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx$ сходится абсолютно	$\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx$ сходится неабсолютно (условно)

Признак сходимости интегралов

$\int\limits_a^{+\infty} \lvert f(x) \rvert dx$ сходится	$\Longrightarrow$	$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится

Пример

$\int\limits_a^{+\infty} \frac{\cos x}{x^4 \sqrt[3]{x}} dx$ сходится абсолютно, т. к.

$\int\limits_1^{+\infty} \left| \frac{\cos x}{x^4 \sqrt[3]{x}} \right| dx$ сходится по первой теореме сравнения:

$$f(x) = \left| \frac{\cos x}{x^4 \sqrt[3]{x}} \right| \le \frac{1}{x^{4+\frac{1}{2}}} = g(x) \quad \text{и}$$

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{\frac{13}{3}}} \text{ сходится } \Rightarrow \int\limits_1^{+\infty} \left| \frac{\cos x}{x^4 \sqrt[3]{x}} \right| dx \text{ сходится.}$$

По признаку сходимости

$$\int\limits_1^{+\infty} \left| \frac{\cos x}{x^4 \sqrt[3]{x}} \right| dx \text{ сходится } \Rightarrow \int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^4 \sqrt[3]{x}} dx \text{ сходится (абсолютно).}$$

2.13. Несобственные интегралы II рода

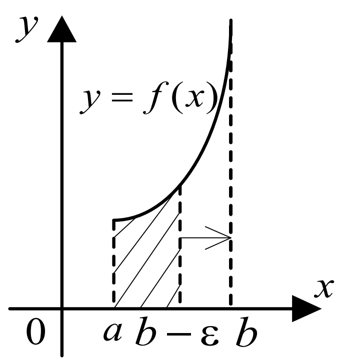
(несобственные интегралы от неограниченных функций)

Пусть $\lvert f(x) \rvert \to +\infty$ при $x \to b$ (точка b называется *особой* точкой)

Несобственный интеграл

II рода

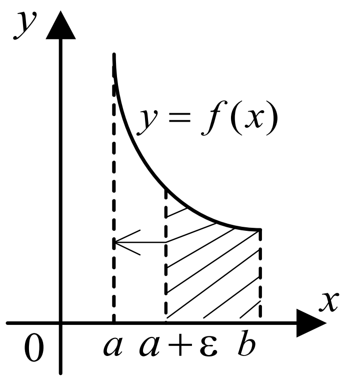
$$\int\limits_a^b f(x)dx \overset{\text{опр}}{=} \lim_{\varepsilon \to +0} \int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$$



$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{\varepsilon\to+0}\int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)dx = A, \quad A \text{ – число} \;\Longrightarrow\; 1)\ \int\limits_a^b f(x)dx \text{ сходится};\quad 2)\ \int\limits_a^b f(x)dx = A \\ \lim\limits_{\varepsilon\to+0}\int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)dx = \infty \text{ или } \lim\limits_{\varepsilon\to+0}\int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)dx \text{ не существует} \;\Longrightarrow\; \int\limits_a^b f(x)dx \text{ расходится} \end{array}\right.$$

$$\int\limits_a^b f(x)dx \overset{\text{опр}}{=} \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx$$

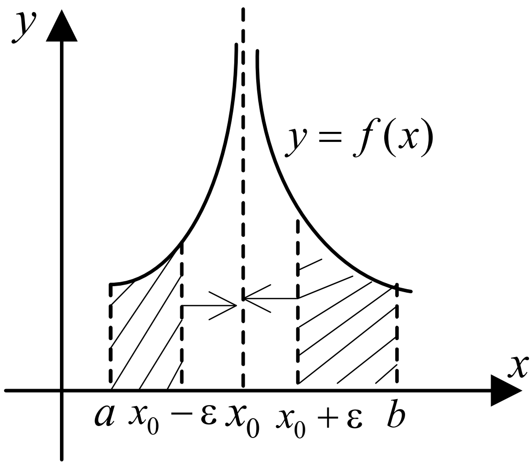
a – особая точка



$$\int\limits_a^b f(x)dx \overset{\text{опр}}{=} \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{a}^{x_0-\varepsilon} f(x)dx + \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{x_0+\varepsilon}^{b} f(x)dx$$

x_0 – особая точка, $x_0 \in (a,b)$

$\varepsilon > 0$



Интеграл – эталон для несобственных интегралов II рода

$\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^p} \longleftarrow$ сходится при $p<1$, расходится при $p \geq 1$

Теоремы сравнения для несобственных интегралов II рода от положительных функций

<table>
<tr>
<td rowspan="2">$f(x)\ge 0$,
$g(x)\ge 0$,
$x\in[a,b]$,
x_0 – особая точка,
$x_0\in\left[a;b\right]$
$J_1=\int\limits_a^b f(x)dx$
$J_2=\int\limits_a^b g(x)dx$</td>
<td rowspan="2">$\Rightarrow$</td>
<td>1-ая теорема сравнения:
(мажорантный признак сравнения)
$f(x)\ge g(x)\Rightarrow J_1$ сходится $\Rightarrow J_2$ сходится
J_2 расходится $\Rightarrow J_1$ расходится</td>
</tr>
<tr>
<td>2-ая теорема сравнения:
(предельный признак сравнения)
$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=C>0\Rightarrow$ J_1 и J_2 сходятся или расходятся одновременно
$0<C<+\infty$</td>
</tr>
</table>

Примеры

1) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\sqrt{x}}dx$ сходится т. к., если

$f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}},g(x)=\frac{\cos x}{\sqrt{x}}$, то $f(x)\ge g(x)$, а

$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)dx=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sqrt{x}}dx$ сходится $\left(p=\frac{1}{2}<1\right)$

2) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\mathrm{tg}x}{x^3}dx$ расходится т. к., если $f(x)=\frac{\mathrm{tg}x}{x^3}$, а $g(x)=\frac{1}{x^2}$, то

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\mathrm{tg}x}{x^3}}{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}x}{x}=1>0,\text{ а}$$

$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}g(x)dx=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{x^2}dx$ расходится $(p=2>1)$.

Контрольные вопросы к § 2

1. Интегрируема ли функция $f(x)=\dfrac{1}{x}$ на $[1;2]$ и на $[-1;1]$?

2. Всякая ли ограниченная функция интегрируема? (Указание: рассмотреть функцию Дирихле $f(x)=\begin{cases}0, & \text{если } x \text{ иррационально}\\ 1, & \text{если } x \text{ рационально}\end{cases}$)

3. Может ли быть интегрируемой сумма интегрируемой и неинтегрируемой функций?

4. Можно ли применить формулу Ньютона-Лейбница к $\int\limits_0^5 \dfrac{dx}{(x-4)^4}$?

5. Известно, что $\int\limits_a^b f(x)dx \geq 0$. Следует ли отсюда, что $f(x)\geq 0$ $\forall x\in[a;b]$?

6. Является ли $\int\limits_0^1 \dfrac{\sin x}{x}dx$ несобственным?

7. Является ли $\int\limits_0^1 \dfrac{\cos x}{x}dx$ несобственным?

Упражнения к § 2

1. Вычислить определенные интегралы

1) $\int\limits_1^2 x^3 dx$;

2) $\int\limits_0^1 4^{3x} dx$;

3) $\int\limits_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$;

4) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (2x-1)\sin 3x\, dx$;

5) $\int\limits_1^e \left(x^2+4\right)\ln 2x\, dx$;

6) $\int\limits_0^{\frac{1}{2}} x\arcsin x\, dx$;

7) $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (1-x)\cos 4x\,dx$;

8) $\int\limits_{2}^{3} \frac{x^2}{5+x^3}\,dx$;

9) $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \operatorname{tg} x\,dx$;

10) $\int\limits_{0}^{\ln 2} \frac{e^x}{\sqrt{e^x+1}}\,dx$;

11) $\int\limits_{1}^{e} \frac{\ln x}{x}\,dx$;

12) $\int\limits_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \sin^5 x\,dx$;

13) $\int\limits_{-1}^{1} \frac{x\,dx}{x^2+1}$;

14) $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,dx$;

15) $\int\limits_{-3}^{3} x^3 e^{x^2} \cos^4 x\,dx$.

Указание: в примерах 12) – 15) использовать пункт 2.9.

2. Вычислить площади фигур, ограниченных линиями

1) $\begin{cases} y = x^2 \\ y = x \end{cases}$

2) $\begin{cases} y = (x+2)^2 \\ y = 4-x \\ y = 0 \end{cases}$

3) $\begin{cases} y = ch\,x \\ y = 0 \\ x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$

4) $\begin{cases} y = x \\ y = 2-x^2 \end{cases}$

5) $\begin{cases} y = x \\ x + y = 2 \\ y = 0 \end{cases}$

6) $\begin{cases} y = x-1 \\ y^2 = x+1 \end{cases}$

3. Вычислить площади фигур, ограниченных линиями, заданными параметрически

1) $\begin{cases} x(t) = 2t - t^2 \\ y(t) = 2t^2 - t^3 \end{cases}, \quad t \in [0; 2];$

2) $\begin{cases} x(t) = a\cos^3 t \\ y(t) = a\sin^3 t \end{cases}, \quad t \in [0; 2\pi];$

(астроида)

3) $\begin{cases} x(t) = a(2\cos t - \cos 2t) \\ y(t) = a(2\sin t - \sin 2t) \end{cases}, \quad t \in [0; 2\pi].$

3. Вычислить площади фигур, ограниченных линиями, заданными в полярных координатах

1) $\begin{cases} \rho = 2\cos\varphi \\ \varphi = 0 \\ \varphi = \dfrac{\pi}{4} \end{cases}$

2) $\rho = a\sin 4\varphi, \quad \varphi \in \left[0; \dfrac{\pi}{4}\right] \ (a > 0)$

3) $\begin{cases} \rho = e^{a\varphi} \\ \varphi = \dfrac{\pi}{4} \\ \varphi = \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$

4. Перейдя к полярным координатам, вычислить площади фигур, ограниченных линиями

1) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ y = 2x \\ y = 0 \end{cases} \qquad (x \geq 0);$

2) $\left(x^2 + y^2\right)^2 = 2a^2 xy$

(лемниската Бернулли).

5. Вычислить длину дуги линии

1) $y = \ln \sin x \quad \left(\dfrac{\pi}{3} \leq x \leq \dfrac{\pi}{2} \right);$

2) $y^2 = x^3$, отсеченной прямой $x = \dfrac{y}{3}$;

3) $\begin{cases} x(t) = a\cos^3 t \\ y(t) = a\sin^3 t \end{cases}, \quad t \in [0; 2\pi]$

(астроида)

4) $\begin{cases} x(t) = a\cos t \\ y(t) = a\sin t \\ z(t) = bt \end{cases}, \qquad t \in [0; 2\pi];$

(первый виток винтовой линии)

5) $\begin{cases} x(t) = a(t - \sin t) \\ y(t) = a(1 - \cos t) \end{cases}, \quad t \in [0; 2\pi];$

(первая арка циклоиды)

6) $\rho = a(1 + \cos\varphi), \quad \varphi \in [0; 2\pi]; \ (a > 0)$

(кардиоида)

7) $\rho = ae^{\varphi}, \quad \varphi \in [0; 2\pi];$

(первый виток логарифмической спирали)

6. Вычислить объемы тел, полученных вращением вокруг оси OX фигур, ограниченных линиями

1) $\begin{cases} y = \dfrac{1}{x} \\ y = 0 \\ x = 1 \\ x = 1 \end{cases}$

2) $\begin{cases} y = ch\,x \\ y = 0 \\ x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$

3) $\begin{cases} y = x^2 \\ y = \sqrt{x} \end{cases}$

4) $\begin{cases} y = e^x \\ y = e^{-x} \\ x = 1 \end{cases}$

5) $\begin{cases} y = \sqrt{4 - x^2} \\ y = 0 \end{cases}$

7. Исследовать на сходимость несобственные интегралы

1) $\int\limits_0^\infty \frac{x^3 dx}{x^5 + 3x^2 + 1}$;

2) $\int\limits_2^\infty \frac{dx}{x\sqrt[3]{x^2 + 5}}$;

3) $\int\limits_2^\infty \frac{dx}{x \ln x}$;

4) $\int\limits_3^\infty \frac{dx}{x^2 \ln x}$;

5) $\int\limits_1^\infty \frac{\sin x}{x^3} dx$;

6) $\int\limits_0^3 \frac{e^x}{x} dx$;

7) $\int\limits_0^2 \frac{e^x}{\sqrt{x}}dx$;

8) $\int\limits_0^5 \frac{dx}{\ln x}$;

9) $\int\limits_1^3 \frac{dx}{1-x^2}$;

10) $\int\limits_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

8. Вычислить несобственные интегралы

1) $\int\limits_0^{\infty} e^{-3x}dx$;

2) $\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{x}{1+3x^2}dx$;

3) $\int\limits_0^1 \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$;

4) $\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}dx$;

5) $\int\limits_0^e \frac{\ln^3 x}{x}dx$.

§3. КРАТНЫЕ (ДВОЙНЫЕ И ТРОЙНЫЕ) ИНТЕГРАЛЫ

3.1. Двойной и тройной интеграл (определения)

$f(x,y)$ – непрерывная функция, заданная в конечной области (D) плоскости *xoy*

Разобьем (D) на *n* ячеек (D_k), площадь ячейки обозначим $\Delta S_k (k=1,2,...,n)$;

d – диаметр разбиения:

$d = \max\{d_1,...,d_n\}$, где d_k – расстояние между двумя наиболее удаленными точками границы ячейки D_k.

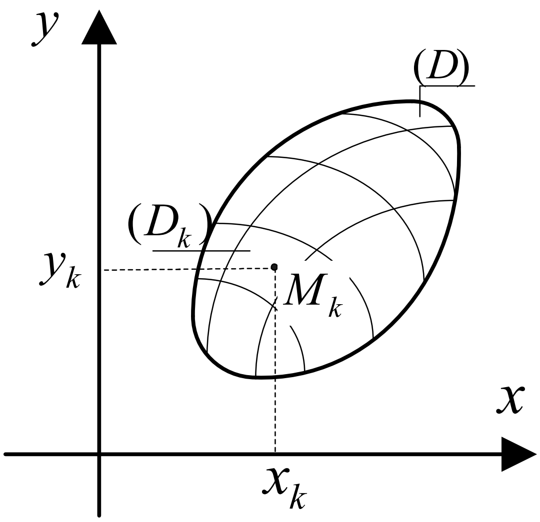
Возьмем точки $M_k\left(x_k, y_k\right) \in D_k$

$\Rightarrow$

Определение

Двойным интегралом от функции $f(x,y)$ по области (D) называется не зависящий от способа разбиения области на ячейки и выбора точек M_k предел последовательности интегральных сумм при $d \to 0$ (тогда $n \to \infty$):

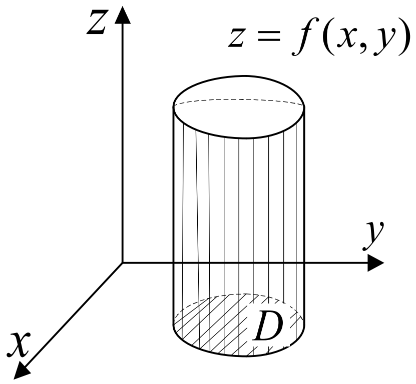
$$\boxed{\iint\limits_{(D)} f\left(x,y\right) dxdy = \lim_{d\to 0} \sum_{k=1}^{n} f\left(x_k, y_k\right) \cdot \Delta S_k}$$



$f(x,y,z)$ – непрерывная функция, заданная в конечной трехмерной области (V) пространства. Разобьем (V) на *n* ячеек (V_k), ΔV_k – объем ячейки (V_k), точки $M_k\left(x_k, y_k, z_k\right) \in V_k$.	$\Rightarrow$	Аналогично: *тройной интеграл* от функции $f(x,y,z)$ по области (V): $\iiint\limits_{(V)} f\left(x,y,z\right)dxdydz =$ $= \lim\limits_{d\to 0}\sum\limits_{k=1}^{n} f\left(x_k, y_k, z_k\right)\cdot \Delta V_k$

3.2. Геометрический смысл двойного интеграла.

Геометрические и физические приложения кратных интегралов

Геометрический смысл двойного интеграла:	
	Объем V тела, ограниченного сверху куском поверхности $z = f\left(x,y\right)$ ($f\left(x,y\right) \geq 0$ при $\left(x,y\right) \in \left(D\right)$), снизу – плоскостью *XOУ*, а с боков – цилиндрической поверхностью с образующими, параллельными оси OZ и проходящими через границу области (D): $V = \iint\limits_{(D)} f(x,y)dxdy$

Площадь области (D) плоскости XOY $S = \iint\limits_{(D)} dxdy$		Объем области (V) пространства $V = \iiint\limits_{(V)} dxdydz$
Масса области (D) $M = \iint\limits_{(D)} \mu(x,y)dxdy$ $\mu(x,y)$ – поверхностная плотность массы		Масса области (V) $M = \iiint\limits_{(V)} \mu(x,y,z)dxdydz$ $\mu(x,y,z)$ – объемная плотность массы
Заряд области (D) $Q = \iint\limits_{(D)} q(x,y)dxdy$ $q(x,y)$ – поверхностная плотность заряда		Заряд области (V) $Q = \iiint\limits_{(V)} q(x,y,z)dxdydz$ $q(x,y,z)$ – объемная плотность заряда

<table>
<tr>
<td>Координаты (x_c, y_c) центра масс плоской фигуры (D):

$$x_c = \frac{\iint\limits_{(D)} x \cdot \mu(x, y)dxdy}{\iint\limits_{(D)} \mu(x, y)dxdy},$$

$$y_c = \frac{\iint\limits_{(D)} y \cdot \mu(x, y)dxdy}{\iint\limits_{(D)} \mu(x, y)dxdy}.$$</td>
<td></td>
<td>Координаты (x_c, y_c, z_c) центра масс области (V):

$$x_c = \frac{\iiint\limits_{(V)} x \cdot \mu(x, y, z)dxdydz}{\iiint\limits_{(V)} \mu(x, y, z)dxdydz},$$

$$y_c = \frac{\iiint\limits_{(V)} y \cdot \mu(x, y, z)dxdydz}{\iiint\limits_{(V)} \mu(x, y, z)dxdydz},$$

$$z_c = \frac{\iiint\limits_{(V)} z \cdot \mu(x, y, z)dxdydz}{\iiint\limits_{(V)} \mu(x, y, z)dxdydz}.$$</td>
</tr>
</table>

3.3. Свойства кратных интегралов

Приведем свойства только для двойных интегралов (для тройных они аналогичны).

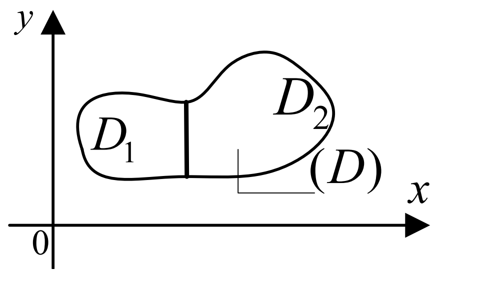
<table>
<tr>
<td>1. Свойства, выражаемые равенствами

а) Линейность

$$\iint\limits_{(D)} (C_1 f(x, y) + C_2 g(x, y))dxdy = C_1 \iint\limits_{(D)} f(x, y)dxdy + C_2 \iint\limits_{(D)} g(x, y)dxdy$$

$(C_1, C_2$ – числа)</td>
</tr>
<tr>
<td>б) Аддитивность относительно области интегрирования

$$\iint\limits_{(D)} f(x, y)dxdy = \iint\limits_{(D_1)} f(x, y)dxdy + \iint\limits_{(D_2)} f(x, y)dxdy$$



$(D) = (D_1) \cup (D_2)$</td>
</tr>
</table>

2. Свойства, выражаемые неравенствами

а) Монотонность

$f(x,y) \ge g(x,y), (x,y) \in (D)$	$\Rightarrow$	$\iint\limits_{(D)} f(x,y)dxdy \ge \iint\limits_{(D)} g(x,y)dxdy$

б) Позитивность

$f(x,y) \ge 0, (x,y) \in (D)$	$\Rightarrow$	$\iint\limits_{(D)} f(x,y)dxdy \ge 0$

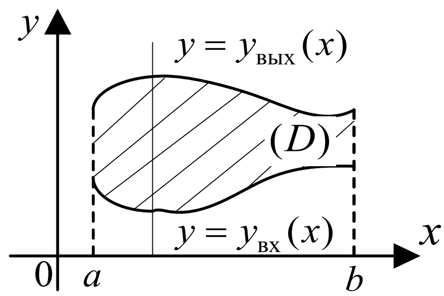
в) Двусторонняя оценка интеграла

$m \le f(x,y) \le M$, $(x,y) \in (D)$	$\Rightarrow$	$m \cdot S_{(D)} \le \iint\limits_{(D)} f(x,y)dxdy \le M \cdot S_{(D)}$ $S_{(D)}$ – площадь области (D)

3.4. Вычисление двойного интеграла в декартовой системе координат

Определение

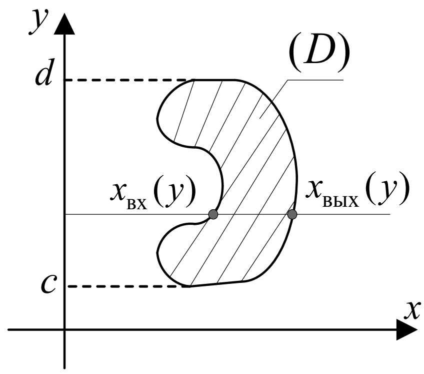
Область (D) называется *правильной в направлении оси* OY, если любая прямая, проходящая через внутреннюю точку области в направлении оси OY, пересекает границу области (D) не более чем в двух точках. Если точка входа в (D) лежит на кривой $y = y_{вх}(x)$, а точка выхода – на кривой $y = y_{вых}(x)$, то область (D) может быть описана так:



$$(D): \{(x,y): a < x < b, y_{вх}(x) < y < y_{вых}(x)\}$$

Область (D) называется *правильной в направлении оси* OX, если любая прямая, проходящая через внутреннюю точку области направлении оси OX, пересекает границу (D) не более чем в двух точках. Если точка входа в область лежит на кривой $x = x_{\text{вх}}(y)$, а точка выхода – на кривой $x = x_{\text{вых}}(y)$, то область (D) может быть описана так:

$$(D):\{(x,y): c < y < d, x_{\text{вх}}(y) < x < x_{\text{вых}}(y)\}$$



Основная теорема о сведении двойного интеграла к повторному в декартовой системе координат

$\iint\limits_{(D)} f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_{\text{вх}}(x)}^{y_{\text{вых}}(x)} f(x,y)dy$	если область (D) – правильная в направлении оси OY
$\iint\limits_{(D)} f(x,y)dxdy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{x_{\text{вх}}(y)}^{x_{\text{вых}}(y)} f(x,y)dy$	если область (D) – правильная в направлении оси OX

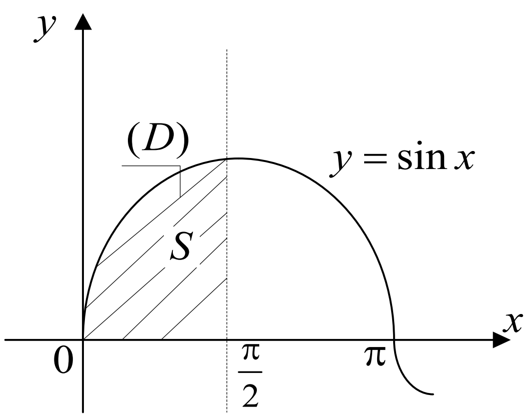
Примеры

1) Найти площадь S области, ограниченной линиями $y = \sin x$, $x = \dfrac{\pi}{2}$ и отрезком $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$ оси OX

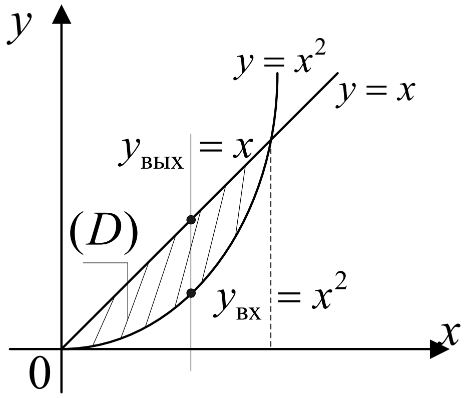
$$S = \iint\limits_{(D)} dxdy = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} dx \int\limits_0^{\sin x} dy =$$

$$= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} dx(y\Big|_0^{\sin x}) = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx =$$

$$= -\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1 \text{ (кв.ед.).}$$



2) Найти заряд Q плоской пластины, ограниченной линиями $y = x$ и $y = x^2$, если поверхностная плотность заряда $q(x, y) = x + y$.

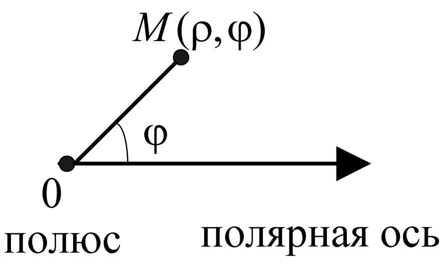
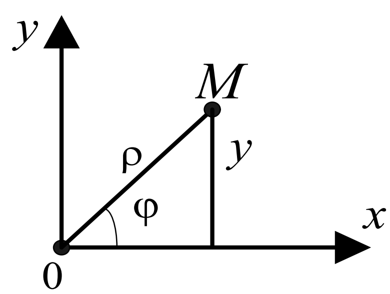


$$Q = \iint\limits_{(D)} q(x,y)dxdy = \iint\limits_{(D)} (x+y)dxdy = \int_0^1 dx \int_{x^2}^{x} (x+y)dy =$$

$$= \int_0^1 dx \left(x\int_{x^2}^{x} dy + \int_{x^2}^{x} ydy \right) = \int_0^1 dx \left(x \cdot \left(y\Big|_{x^2}^{x}\right) + \frac{y^2}{2}\Bigg|_{x^2}^{x} \right) =$$

$$= \int_0^1 \left(x^2 - x^3 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{2} \right) dx = \left(\frac{x^3}{2} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{10} \right)\Bigg|_0^1 = \frac{3}{20} \text{ (ед. заряда).}$$

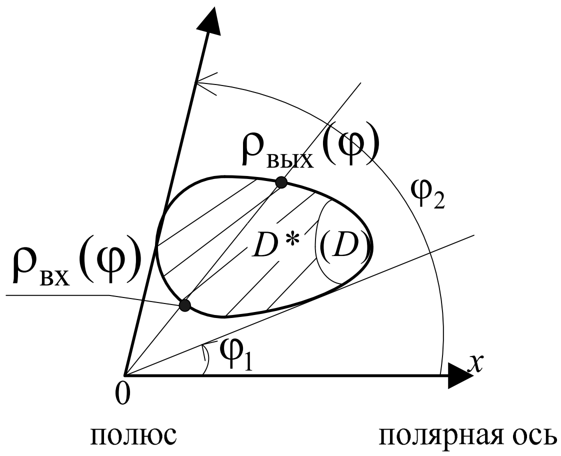
3.5. Вычисление двойного интеграла в полярной системе координат

Полярная система координат	**Связь декартовых и полярных координат**
	
$0 \le \rho < +\infty$, ρ – полярный радиус, $0 \le \varphi < 2\pi$, φ – полярный угол	$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \end{cases} \\ dxdy \to \rho d\rho d\varphi \end{array}\right.$

Переход в двойном интеграле к полярной системе координат и его сведение к повторному

$$\iint\limits_{(D)} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{(D^*)} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho d\rho d\varphi =$$

$$= \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int\limits_{\rho_{\text{вх}}(\varphi)}^{\rho_{\text{вых}}(\varphi)} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho d\rho$$



Пример

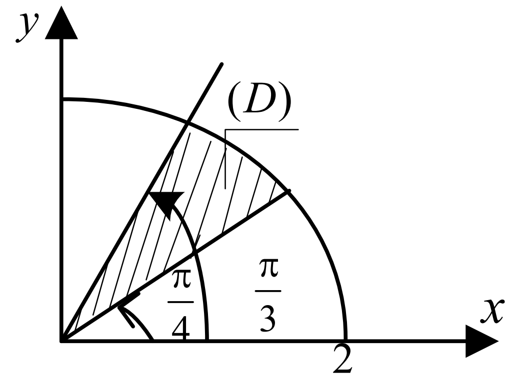
Найти $J = \iint\limits_{(D)} \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$, где $(D): \begin{cases} x^2+y^2 \le 4, \\ y \le \sqrt{3}x, \\ y \ge x. \end{cases}$

$$(D^*): \begin{cases} \rho^2 \le 4 \\ \rho\sin\varphi \le \sqrt{3}\rho\cos\rho \\ \rho\sin\varphi \ge \rho\cos\varphi \end{cases} \Rightarrow (D^*): \begin{cases} 0 \le \rho \le 2 \\ \dfrac{\pi}{4} \le \varphi \le \dfrac{\pi}{3} \end{cases}$$

$$J = \iint\limits_{(D^*)} \sqrt{\rho^2\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\varphi}\rho d\rho d\varphi =$$

$$= \iint\limits_{(D^*)} \rho^2 d\rho d\varphi = \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\varphi \int\limits_0^2 \rho^2 d\rho = \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\varphi \left(\left. \frac{\rho^3}{3} \right|_0^2 \right) =$$

$$= \frac{8}{3}\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\varphi = \frac{8}{3}\varphi\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{8}{3}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{2\pi}{9}.$$

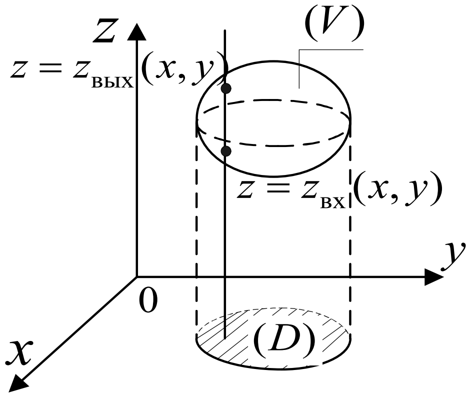


Определение

Область (V) называется правильной в направлении оси OZ, если любая прямая, проходящая в этом направлении через внутреннюю точку области (V), пересекает границу (V) не более, чем в двух точках.

Если точка входа в область лежит на поверхности $z = z_{\text{вх}}(x, y)$, а точка выхода – на поверхности $z = z_{\text{вых}}(x, y)$, то область (V) может быть описана так:

$$(V): \begin{cases} (x, y) \in (D) \\ z_{\text{вх}}(x, y) < z < z_{\text{вых}}(x, y) \end{cases}$$



3.6. Вычисление тройного интеграла в декартовой системе координат

Сведение тройного интеграла к повторному

в декартовой системе координат

$$\int\int\limits_{(V)}\int f(x,y,z)dxdydz = \iint\limits_{(D)} \left\{ \int\limits_{z=z_{\text{вх}}(x,y)}^{z=z_{\text{вых}}(x,y)} f(x,y,z)dz \right\} dxdy =$$

$$= \iint\limits_{(D)} dxdy \int\limits_{z=z_{\text{вх}}(x,y)}^{z=z_{\text{вых}}(x,y)} f(x,y,z)dz,$$

если (V) – правильная в направлении оси OZ область.

$$\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)dxdydz = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y=y_{\text{вх}}(x)}^{y=y_{\text{вых}}(x)} dy \int\limits_{z=z_{\text{вх}}(x,y)}^{z=z_{\text{вых}}(x,y)} f(x,y,z)dz$$

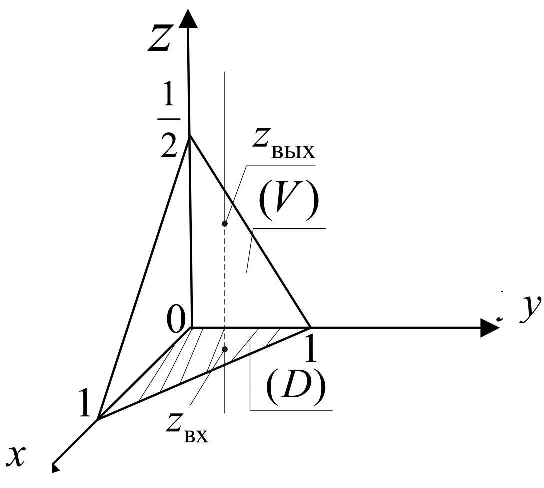
если (V) – правильная в направлении оси OZ область,

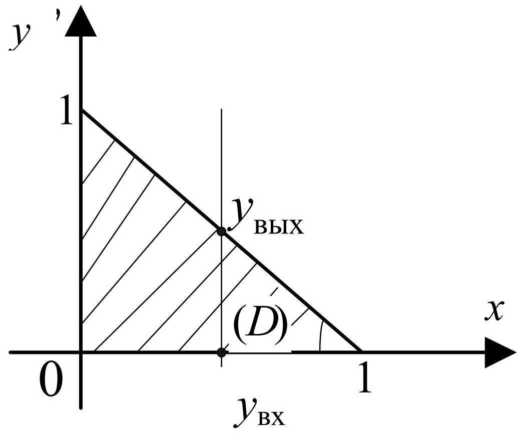
(D) – правильная в направлении оси OY область

Пример

Вычислить заряд пирамиды, ограниченной координатными плоскостями и плоскостью $x+y+2z=1$, если объемная плотность заряда равна $q(x,y,z)=3x$.

$$V = \int\int\limits_{(V)}\int q(x,y,z)dxdydz$$





$$V=\iiint_{(V)} 3xdxdydz = 3\int_0^1 xdx\int_0^{1-x}dy\int_0^{\frac{1}{2}(1-x-y)}dz=$$

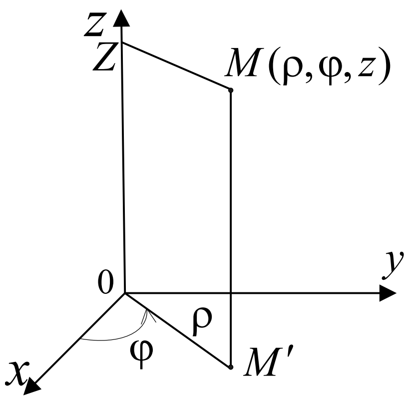
$$=3\int_0^1 xdx\int_0^{1-x}dy\left(z\Big|_0^{1-x-y}\right)=3\int_0^1 xdx\int_0^{1-x}\big((1-x)-y\big)dy=$$

$$=3\int_0^1 xdx\left[(1-x)\left(y\Big|_0^{1-x}\right)-\left(\frac{y^2}{2}\Bigg|_0^{1-x}\right)\right]=$$

$$=3\int_0^1 xdx\left[(1-x)^2-\frac{(1-x)^2}{2}\right]=\frac{3}{2}\int_0^1 x(1-x)^2\,dx=$$

$$=\frac{3}{2}\int_0^1(x-2x^2+x^3)dx=\frac{3}{2}\left(\frac{x^2}{2}-\frac{2x^3}{3}+\frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_0^1=\frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{8}$$ (ед. заряда).

3.7. Вычисление тройного интеграла в цилиндрической системе координат

Цилиндрическая система координат  ρ – полярный радиус, φ – полярный угол проекции M' точки M на плоскость $XOУ$, z – аппликата точки M.	$\boxed{\begin{array}{l}0\le\rho<+\infty,\\ 0\le\varphi<2\pi,\\ -\infty<z<+\infty.\end{array}}$ **Связь декартовых и цилиндрических координат** $\begin{cases}x=\rho\cos\varphi\\ y=\rho\sin\varphi\Rightarrow x^2+y^2=\rho^2\\ z=z\end{cases}$ $\boxed{dxdydz\to\rho d\rho d\varphi dz}$

Переход от декартовой системы координат к цилиндрической в тройном интеграле и сведение его к повторному

Пусть область (V) в цилиндрической системе координат задана так:

$$(V^*):\begin{cases}(\rho,\varphi)\in(D^*),\\ z_{\text{вх}}(\rho,\varphi)<z<z_{\text{вых}}(\rho,\varphi),\end{cases}$$

где в полярных координатах проекция (D^*) области (V^*) задана так: $(D^*):\{(\rho,\varphi):\varphi_1<\varphi<\varphi_2,\rho_{\text{вх}}(\varphi)<\rho<\rho_{\text{вых}}(\varphi)\}$

$\Downarrow$

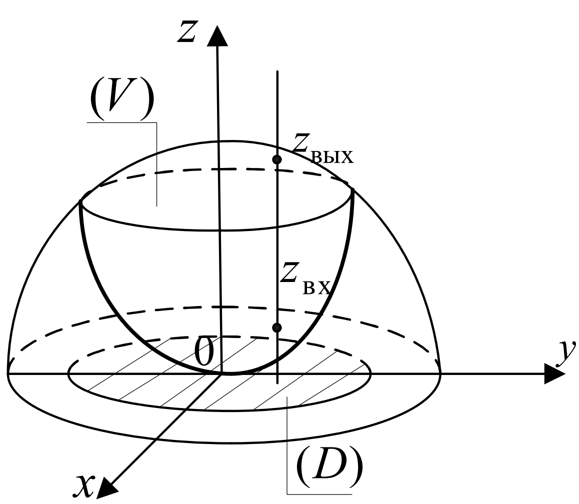
$$\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)dxdydz=\iiint\limits_{(V^*)} f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi,z)\rho d\rho d\varphi dz=$$

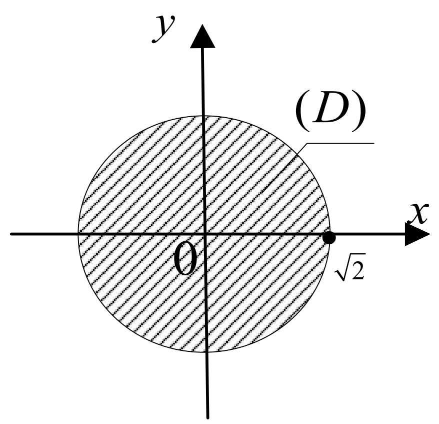
$$=\iint\limits_{(D^*)}\left\{\int\limits_{z=z_{\text{вх}}(\rho,\varphi)}^{z=z_{\text{вых}}(\rho,\varphi)} f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi,z)dz\right\}\rho d\rho d\varphi=$$

$$=\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2}d\varphi\int\limits_{\rho_{\text{вх}}(\varphi)}^{\rho_{\text{вых}}(\varphi)}\rho d\rho\int\limits_{z=z_{\text{вх}}(\rho,\varphi)}^{z=z_{\text{вых}}(\rho,\varphi)} f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi,z)dz.$$

Пример

Вычислить, используя цилиндрические координаты, массу M тела, ограниченного снизу параболоидом $z=x^2+y^2$, а сверху сферой $x^2+y^2+z^2=6$, если объемная плотность массы $\mu(x,y,z)=z$.





$$(V^*):\begin{cases} z=\rho^2 - \text{ уравнение параболоида}\\ z=\sqrt{6-\rho^2} - \text{ уравнение сферы}\end{cases}$$

$$\rho^2=\sqrt{6-\rho^2}\Rightarrow\rho=\sqrt{2}.$$

$$M=\iiint\limits_{(V)}\mu(x,y,z)dxdydz=\iiint\limits_{(V^*)}z\rho d\rho d\varphi dz=$$

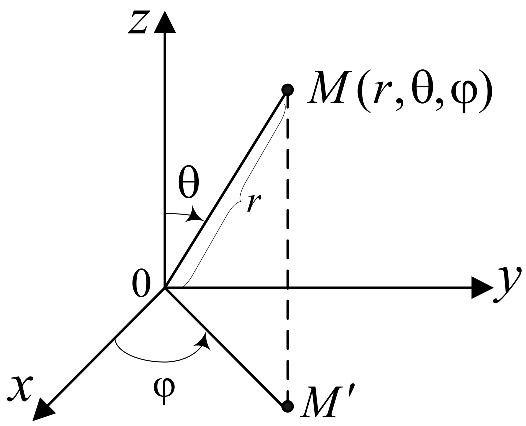
$$=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\sqrt{2}}\rho d\rho\int\limits_{\rho^2}^{\sqrt{6-\rho^2}}zdz=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\sqrt{2}}\rho d\rho\cdot\left(\left.\frac{z^2}{2}\right|_{\rho^2}^{\sqrt{6-\rho^2}}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\sqrt{2}}\rho(6-\rho^2-\rho^4)d\rho=\frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\left.\left(6\frac{\rho^2}{2}-\frac{\rho^4}{4}-\frac{\rho^6}{6}\right)\right|_0^{\sqrt{2}}=$$

$$=\frac{11}{6}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi=\frac{11}{6}\left(\varphi\Big|_0^{2\pi}\right)=\frac{11}{3}\pi \text{ (ед. массы).}$$

3.8. Вычисление тройного интеграла в сферической системе координат

Сферическая система координат



где r – длина радиуса-вектора точки M;

φ – полярный угол точки M';

θ – азимутальный угол точки M.

$$0\le r<+\infty$$
$$0\le\varphi<2\pi$$
$$0\le\theta\le\pi$$

Связь декартовых и цилиндрических координат:

$$\left.\begin{cases} x=r\cos\varphi\sin\theta\\ y=r\sin\varphi\sin\theta\\ z=r\cos\theta\end{cases}\right]\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2+y^2+z^2=r^2$$

$$dxdydz\to r^2dr\sin\theta d\theta d\varphi$$

Теорема о переходе от декартовой системы координат к сферической в тройном интеграле и сведении его к повторному

Пусть область (V) в сферических координатах задается так:

$$(V^*):\begin{cases}\varphi_1<\varphi<\varphi_2\\ \theta_{\text{вх}}(\varphi)<\theta<\theta_{\text{вых}}(\varphi)\\ r_{\text{вх}}(\varphi,\theta)<r<r_{\text{вых}}(\varphi,\theta)\end{cases}$$

$$\Downarrow$$

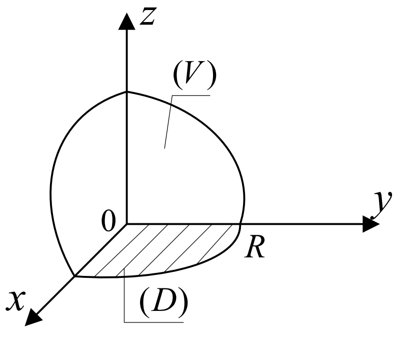
$$\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)dxdydz=\iiint\limits_{(V^*)} f(r\cos\varphi\sin\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\theta)\times$$

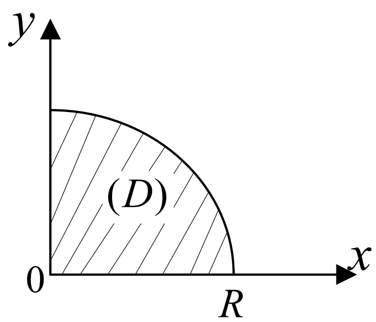
$$\times r^2\sin\theta dr d\theta d\varphi=\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2}d\varphi\int\limits_{\theta_{\text{вх}}(\varphi)}^{\theta_{\text{вых}}(\varphi)}\sin\theta d\theta\times$$

$$\times\int\limits_{r_{\text{вх}}(\varphi,\theta)}^{r_{\text{вых}}(\varphi,\theta)} f(r\cos\varphi\sin\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\theta)r^2dr.$$

Пример

Найти $\int\int\limits_{(V)}\int xyzdxdydz$, где $(V):\begin{cases}x^2+y^2+z^2<R^2\\ x>0, y>0, z>0.\end{cases}$





$$(V^*):\begin{cases}0<\varphi<\dfrac{\pi}{2}\\ 0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\\ 0<\tau<R\end{cases}$$

$$\int\int\limits_{(V)}\int xyzdxdydz=\int\int\limits_{(V^*)}\int r^3\sin^2\theta\cos\theta\sin\varphi\cos\varphi\cdot r^2dr\sin\theta d\theta d\varphi=$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\cos\varphi d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\theta\cos\theta d\theta\int_0^R r^5 dr=\frac{R^6}{48}.$$

Контрольные вопросы к § 3

1. Верно ли равенство:

$$\int_0^1 dx\int_{\frac{x^2}{9}}^{x} f(x;y)dy+\int_1^3 dx\int_{\frac{x^2}{9}}^{x} f(x;y)dy=\int_0^1 dy\int_y^{3\sqrt{y}} f(x;y)dx?$$

2. В какой системе координат удобнее вычислить $\iint\limits_{(D)} e^{x^2+y^2}dx\,dy$, где (D) – круг с центром в начале координат?

3. Верно ли утверждение $\iint\limits_{(D)} ch\left(x^3y^2\right)dx\,dy>0$, где (D) – любая область плоскости (имеющая площадь)?

Упражнения к § 3

1. Вычислить интегралы

1) $\iint\limits_{(D)}(x+y)dx\,dy$, где область (D) ограничена линиями $y^2=2x$, $x+y=4$, $x+y=12$;

2) $\iint\limits_{(D)} xy^2dx\,dy$, где область (D) ограничена линиями $xy=1$, $x+y=\dfrac{5}{2}$;

3) $\iint\limits_{(D)} e^{xy}dx\,dy$, где область (D) ограничена линиями $y^2=x$, $x=1$; $y=0$;

2. Найти площади областей, ограниченных следующими линиями:

1) $y = x^2,\ y = \sqrt{x}$;

2) $y - 2x = 0,\ 2y - x = 0,\ xy = 2$;

3) $y = e^x,\ \ y = e^{-x},\ x = 1$;

4) $y = x^3,\ x + y = 10,\ x - y = 4,\ y = 0$;

5) $y^2 = 4x + 4,\ y = 2 - x$.

3. Перейдя к полярным координатам, найти площади областей, ограниченных следующими линиями:

1) $x^2 + y^2 = 9,\ y = x,\ y = 0\ \left(x \ge 0,\ y \ge 0\right)$;

2) $x^2 + \left(y + 2\right)^2 = 4,\ y = -x$;

3) $\left(x^2 + y^2\right)^2 = 2axy\ \left(a > 0\right)$;

4) $x^2 + y^2 = 1,\ x^2 + y^2 = 4,\ y = x,\ y = 2x$;

5) $x^2 + y^2 = 4x,\ x^2 + y^2 = 8x,\ y = x,\ y = 2x$.

4. Найти объемы тел, ограниченных поверхностями

1) $z = x + y,\ z = xy,\ x + y = 1,\ x = 0,\ y = 0$;

2) $z = 4 - x^2 - y^2,\ x = 1,\ x = -1,\ y = 1,\ y = -1$;

3) $2 - x - y - 2z = 0,\ y = x^2,\ y = x,\ z = 0$;

4) $z = xy,\ y = x,\ x = 1,\ z = 0$;

5) $z = x^2 + y^2,\ z = 2x^2 + 2y^2,\ y = x,\ y = x^2$.

5. Переходя к сферическим или цилиндрическим координатам, найти объемы тел, ограниченных поверхностями

1) $z=\sqrt{x^2+y^2}$, $x^2+y^2=a^2$, $z=0$;

2) $z=x^2+4y^2$, $z=1$;

3) $x^2+y^2=4(z-1)^2$, $z=0$;

4) $z=x^2+y^2$, $x^2+y^2=x$, $z=0$;

5) $x^2+y^2+z^2=R^2$, $x^2+y^2=z^2$ $(z\geq 0)$;

6) $x^2+y^2=2z$, $x^2+y^2=z^2$;

7) $\left(x^2+y^2+z^2\right)^2=z$;

8) $x^2+y^2+\dfrac{z^2}{4}=1$;

9) $\left(x^2+y^2+z^2\right)^3=3xyz$;

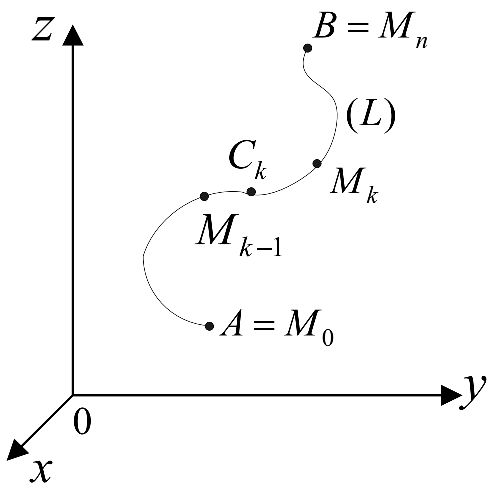
10) $x^2+y^2+z^2=2z$, $x^2+y^2=z^2$ $\quad(0\leq z\leq 2)$.

§4. Криволинейные интегралы

4.1. Интегралы по длине дуги (криволинейные интегралы I рода)

Пусть $f(x,y,z)$ – непрерывная функция, заданная в каждой точке гладкой* пространственной кривой (L). Разобьем (L) на *n* дуг $(\Delta l_k)=$ $=M_{k-1}M_k$ $(k=1,\ldots,n)$. Пусть Δl_k – длина дуги (Δl_k), d – диаметр разбиения: $d=\max\{\Delta l_1,\Delta l_2,\ldots,\Delta l_n\}$. Выберем точки $M_k(x_k,y_k,z_k)\in\Delta l_k$ $(k=1,\ldots,n)$	$\Longrightarrow$	**Определение** *Криволинейным интегралом I рода* от функции $f(x,y,z)$ по длине дуги (L) называется не зависящий от способа разбиения дуги и выбора точек c_k предел интегральной суммы при $d\to 0$. $$\int\limits_{(L)} f(x,y,z)dl=$$ $$=\lim_{d\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(x_k,y_k,z_k)\Delta l_k$$

* Гладкая кривая – это кривая, имеющая в каждой точке касательную, направление которой непрерывно зависит от точки касания.

<table>
<tr><td rowspan="4">
</td><td>Геометрические и физические приложения</td></tr>
<tr><td>Длина дуги (L) $L=\int\limits_{(L)} dl$</td></tr>
<tr><td>Масса дуги (L) $M=\int\limits_{(L)}\mu(x,y,z)dl$, где
$\mu(x,y,z)$ – линейная плотность массы</td></tr>
<tr><td>Заряд дуги (L) $Q=\int\limits_{(L)} q(x,y,z)dl$,
где $q(x,y,z)$ – линейная плотность заряда</td></tr>
</table>

Вычислительные формулы для криволинейного интеграла I рода

	Кривая (L) задана параметрически $(L):\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t) \end{cases}$ $t \in [\alpha;\beta]$	$\Longrightarrow$	$\int\limits_{(L)} f(x,y,z)dl =$ $= \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x(t),y(t),z(t)) \times$ $\times \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\, dt$	
	Кривая (L) задана явно $(L):\left[\begin{array}{l} y = y(x), \\ x \in [a,b] \end{array}\right.$	$\Longrightarrow$	$\int\limits_{(L)} f(x,y)dl = \int\limits_{a}^{b} f(x,y(x))\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$	

Пример

Найти массу M арки циклоиды $(L):\begin{cases} x = a(t-\sin t), \\ y = a(1-\cos t), \end{cases}$ $t \in [0,2\pi]$,

если линейная плотность массы $\mu(x,y) = \sqrt{y}.$

$$M = \int\limits_{(L)} \mu(x,y,z)dl = \int\limits_{(L)} \sqrt{y}dl = \int\limits_{0}^{2\pi} \sqrt{a(1-\cos t)} \times$$

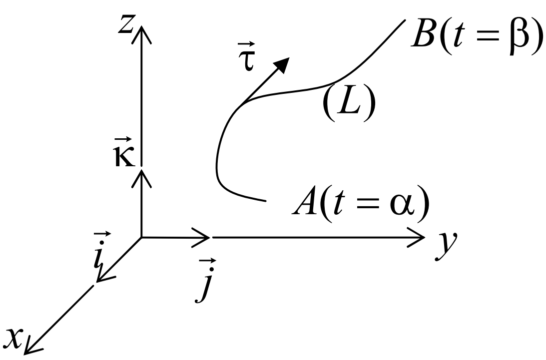
$$\times\sqrt{a^2(1-\cos t)^2 + a^2\sin^2 t}dt = a^{\frac{3}{2}} \int\limits_{0}^{2\pi} \sqrt{1-\cos t} \times$$

$$\times\sqrt{2-2\cos t}dt = a^{\frac{3}{2}}\sqrt{2}\int\limits_{0}^{2\pi}(1-\cos t)dt = 2\sqrt{2}\pi a^{\frac{3}{2}} \text{ (ед. массы).}$$

4.2. Криволинейные интегралы по координатам (криволинейные интегралы II рода)

<table>
<tr>
<td>

$f(x,y,z)$ – непрерывная функция, заданная в каждой точке кусочно-гладкой* кривой (L) в пространстве (точки A и B – начало и конец кривой), $\vec{\tau}$ – единичный вектор касательной в произвольной точке кривой



* Кусочно-гладкая кривая – это кривая, состоящая из конечного числа гладких кусков

</td>
<td>

Определение

Криволинейным интегралом по координате x от функции $f(x,y,z)$ (криволинейным интегралом II рода) называется интеграл вида

$$\int\limits_{(L)} f(x,y,z)dx = \int\limits_{(L)} f(x,y,z)\cos(\widehat{\vec{\tau},\vec{i}})dl,$$

по координате y:

$$\int\limits_{(L)} f(x,y,z)dy = \int\limits_{(L)} f(x,y,z)\cos(\widehat{\vec{\tau},\vec{j}})dl,$$

по координате z*:*

$$\int\limits_{(L)} f(x,y,z)dz = \int\limits_{(L)} f(x,y,z)\cos(\widehat{\vec{\tau},\vec{\kappa}})dl$$

</td>
</tr>
</table>

Определение.

Составным криволинейным интегралом II рода называется интеграл вида

$$\int\limits_{(L)} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz,$$

где $P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)$ – непрерывные функции, заданные на кривой (L).

Пусть задана векторная функция $\vec{F}=(F_x(x,y,z);F_y(x,y,z);F_z(x,y,z))$	$\int\limits_{(L)} F_x(x,y,z)dx+F_y(x,y,z)dy+$ $+F_z(x,y,z)dz=\int\limits_{(L)}(\vec{F}\cdot\vec{\tau})dl=W$ Здесь W – работа силы $\vec{F}$ вдоль кривой (L) (от точки A до точки B)

Вычислительная формула для криволинейных интегралов II рода

Кривая (L) задана параметрически $(L):\begin{cases}x=x(t),\\ y=y(t),\\ z=z(t).\end{cases}$ $t\in[\alpha,\beta]$	$\Rightarrow$	$\int\limits_{(L)} f(x,y,z)dx=\int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x(t),y(t),z(t))\dfrac{dx}{dt}\cdot dt$ $\int\limits_{(L)} f(x,y,z)dy=\int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x(t),y(t),z(t))\dfrac{dy}{dt}\cdot dt$ $\int\limits_{(L)} f(x,y,z)dz=\int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x(t),y(t),z(t))\dfrac{dz}{dt}\cdot dt$

Пример

Вычислить $\int\limits_{(L)} zx^2ydx,$ если $(L):\begin{cases}x=t^3,\\ y=t^2, \quad t\in[0,1]\\ z=1.\end{cases}$

$$\int\limits_{(L)} zx^2ydx=\int\limits_0^1 1\cdot t^6\cdot t^2\cdot 3t^2dt=\left.\frac{3t^{11}}{11}\right|_0^1=\frac{3}{11}.$$

Контрольные вопросы к § 4

1. Верно ли утверждение: при изменении ориентации кривой криволинейный интеграл I рода меняет знак? Верно ли то же в отношении криволинейного интеграла II рода?

2. Имеет ли геометрический смысл криволинейный интеграл I рода?

3. Верно ли утверждение: если $\int\limits_{(L)} f(x,y)dx + g(x,y)dy = 0$, то $f(x,y)dx + g(x,y)dy = 0 \ \left(\forall x, y \in (L)\right)$?

Указание: рассмотреть $\int\limits_{(L)} x^2 y\,dx + \dfrac{x^3}{3}dy$, где:

1) (L) – отрезок прямой $y = -x + 1$, пробегаемый от точки $A(1;0)$ к точке $B(0;1)$;

2) (L) – дуга окружности $x = \cos t$, $y = \sin t$ $\left(0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Упражнения к § 4

1. Вычислить криволинейные интегралы I рода

1) $\int\limits_{(L)} \dfrac{x+4y}{\sqrt{1+x^2}}dl$, где (L) – дуга параболы $y = \dfrac{x^2}{2}$ $\left(x \in [0;1]\right)$;

2) $\int\limits_{(L)} (x+3y)dl$, где (L) – треугольник с вершинами в точках $O(0;0)$, $A(1;0)$, $B(0;1)$;

3) $\int\limits_{(L)} e^{\sqrt{x^2+y^2}}dl$, где (L) – замкнутый контур, состоящий из отрезка оси абсцисс $y = 0$ $(0 \le x \le 2)$, дуги окружности $x^2 + y^2 = 4$ и отрезка прямой $y = x$;

4) $\int\limits_{(L)} dl$, где (L) – астроида $\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases}$ $\left(t \in [0;2\pi]\right)$;

5) $\int\limits_{(L)} y^2 dl$, где (L) – арка циклоиды $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$, $(t \in [0; 2\pi])$;

6) $\int\limits_{(L)} dl$, где (L) – дуга кривой $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin t \\ z = bt \end{cases}$ $\quad (t \in [0; 2\pi])$;

2. Вычислить криволинейные интегралы II рода

1) $\int\limits_{(L)} (xy - y^2)dx + x\,dy$, где (L) – дуга параболы $y = 2x^2$, пробегаемая от точки $O(0;0)$, к точке $A(1;2)$;

2) $\int\limits_{(L)} (3x^2 + y)dx + (x - 2y^2)dy$, где (L) – треугольник с вершинами в точках $O(0;0)$, $A(1;0)$, $B(0;6)$, пробегаемый против хода часовой стрелки;

3) $\oint\limits_{(L)} (x + y)dx + (x - y)dy$, где (L) – эллипс $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, пробегаемый против хода часовой стрелки;

4) $\int\limits_{(L)} xydx + (y - x)dy$, где (L) – дуга линии $y^2 = x$ (или $y = x^2$; или $y = x^3$), пробегаемая от точки $O(0;0)$, к точке $A(1;1)$;

5) $\oint\limits_{(L)} \dfrac{(x + y)dx - (x - y)dy}{x^2 + y^2}$, где (L) – окружность $x^2 + y^2 = a^2$, пробегаемая против хода часовой стрелки.

§5. ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

5.1. Интегралы по площади поверхности

(поверхностные интегралы I рода)

$f(x,y,z)$ – непрерывная функция, заданная на гладкой поверхности (S), уравнение которой $z = z(x,y)$.

(D) – проекция поверхности (S) на плоскость *XOY*.

Разобьем (D) на *n* ячеек (D_k) площади ΔD_k. Каждой ячейке (D_k) соответствует на поверхности ячейка (S_k) площади ΔS_k. Диаметр разбиения

$d = \max\{d_1,...,d_k,...,d_n\}$,

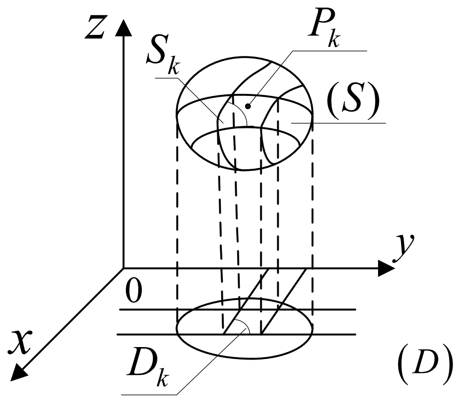
где d_k – расстояние вдоль поверхности между двумя наиболее удаленными точками границы ячейки (S_k).

Определение.

Интегралом от функции $f(x,y,z)$ *по площади поверхности* (S) называется не зависящий от способа разбиения поверхности на ячейки и выбора точек P_k предел интегральной суммы при $d \to 0$

$$\iint_{(S)} f(x,y,z)d\sigma = \lim_{d\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k, z(x_k, y_k))\cdot \Delta S_k$$

$$(P_k(x_k, y_k, z(x_k, y_k)) \in (S_k)$$

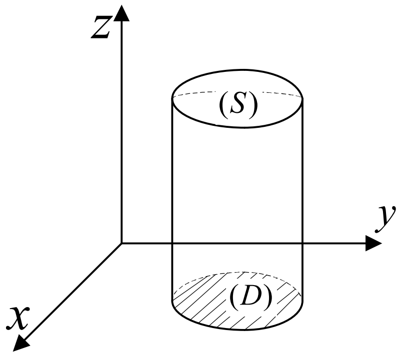


Геометрические и физические приложения поверхностного интеграла I рода	
Площадь поверхности (S)	$S = \iint_{(S)} d\sigma$
Масса поверхности (S) $\mu(x,y,z)$ – поверхностная плотность массы	$M = \iint_{(S)} \mu(x,y,z)d\sigma$
Заряд поверхности (S) $q(x,y,z)$ – поверхностная плотность заряда	$Q = \iint_{(S)} q(x,y,z)d\sigma$

Вычислительная формула для поверхностного интеграла I рода (сведение поверхностного интеграла к двойному)

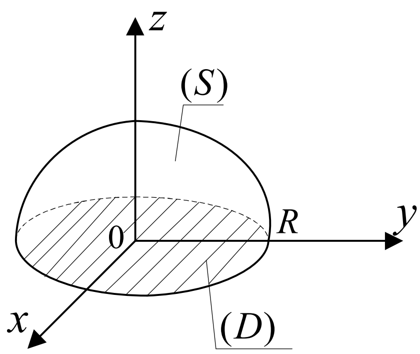
$$\iint\limits_{(S)} f(x,y,z)d\sigma = \iint\limits_{(D)} f(x,y,z(x,y)) \cdot \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dxdy,$$

где $z = z(x,y)$ – уравнение поверхности (S), (D) – ее проекция на плоскость $XOУ$.



Пример

Найти заряд Q полусферы $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$, если поверхностная плотность заряда в каждой точке полусферы $q(x,y,z)=z$.



$$Q=\iint\limits_{(S)} q(x,y,z)d\sigma = \iint\limits_{(S)} zd\sigma =$$

$$=\iint\limits_{(D)} \sqrt{R^2-x^2-y^2}\cdot\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dxdy =$$

$$=\iint\limits_{(D)} \sqrt{R^2-x^2-y^2}\cdot\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\,dxdy =$$

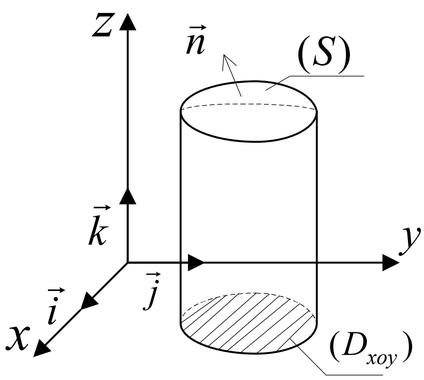
$$= R\iint\limits_{(D)} dxdy = R \cdot \text{площадь } (D) = \pi R^3 \text{ (ед. заряда).}$$

5.2. Поверхностные интегралы по координатам (поверхностные интегралы II рода)

$f(x, y, z)$ – непрерывная функция, заданная в каждой точке гладкой поверхности (S), описываемой уравнением: $z = z(x, y)$.

(D_{xoy}) – проекция (S) на плоскость *XOY*.

$\vec{n}$ – единичный вектор положительной нормали* к поверхности (S) в произвольной точке.



Определение

Поверхностным интегралом по координатам x, y (поверхностным интегралом II рода) называется интеграл такого вида

$$\iint\limits_{(S)} f(x, y, z)dxdy = \iint\limits_{(S)} f(x, y, z)\cos(\widehat{\vec{n}, \vec{k}})d\sigma$$

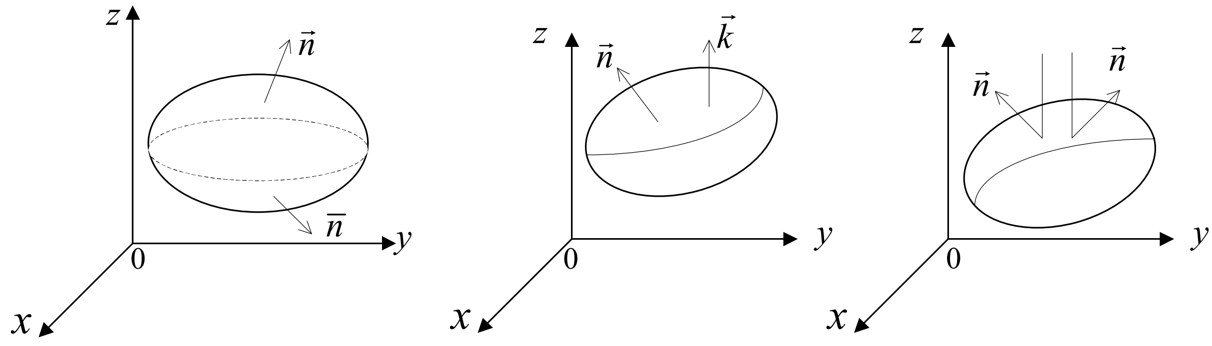
по координатам y, z *:*

$$\iint\limits_{(S)} f(x, y, z)dydz = \iint\limits_{(S)} f(x, y, z)\cos(\widehat{\vec{n}, \vec{i}})d\sigma$$

по координатам x, z *:*

$$\iint\limits_{(S)} f\left(x, y, z\right)dz\,dx = \iint\limits_{(S)} f(x, y, z)\cos(\widehat{\vec{n}, \vec{j}})d\sigma$$

* Будем считать, что для замкнутой поверхности положительная нормаль направлена наружу поверхности, а для незамкнутой поверхности положительная нормаль образует острый угол с направлением оси OZ:



Определение

Составным поверхностным интегралом II рода называется интеграл вида

$$\int\limits_{(S)} P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dzdx + R(x,y,z)dxdy,$$

где $P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)$ – непрерывные функции, заданные в каждой точке поверхности (S).

Пусть задана векторная функция
$\vec{F} = (F_x(x,y,z); F_y(x,y,z); F_z(x,y,z))$

$$\iint\limits_{(S)} F_x(x,y,z)dydz + \\ + F_y(x,y,z)dzdx + \\ + F_z(x,y,z)dxdy = \\ = \iint\limits_{(S)} (\vec{F}\cdot\vec{n})d\sigma.$$

Вычислительная формула
для поверхностного интеграла II рода

$$\iint\limits_{(S)} f(x,y,z)dxdy = \iint\limits_{(D_{xoy})} f(x,y,z(x,y))dxdy,$$

где $z = z(x,y)$ – уравнение поверхности.

Замечание

$$\iint\limits_{(S)} f(x,y,z)\cos(\widehat{\vec{n}^{+},\vec{\kappa}})d\sigma = -\iint\limits_{(S)} f(x,y,z)\cos(\widehat{\vec{n}^{-},\vec{\kappa}})d\sigma,$$

т. е. значение поверхностного интеграла по координатам зависит от того, положительна ли нормаль к интересующей нас поверхности $(\vec{n}^{+})$ или отрицательна $(\vec{n}^{-})$.

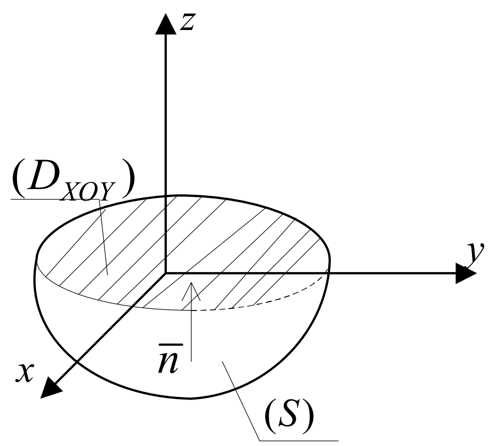
Пример

Вычислить $\iint\limits_{(S)} x^2 zdxdy$, где (S) – внутренняя часть нижней полусферы $Z = -\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$, $\vec{n} = \vec{n}^{+}$

$$\iint\limits_{(S)} x^2 zdxdy = \iint\limits_{(D_{xoy})} x^2\left(\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\right)dxdy =$$

$$= -\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^R \rho\cdot\rho^2\cos^2\varphi\sqrt{R^2-\rho^2}\,d\rho =$$

$$= -\int\limits_0^{2\pi} \cos^2\varphi d\varphi \int\limits_0^R \rho^3\sqrt{R^2-\rho^2}\,d\rho = -\frac{2\pi R^5}{15}.$$



Контрольные вопросы к § 5

1. Какие свойства поверхностных интегралов аналогичны соответствующим свойствам криволинейных интегралов?

2. Имеют ли поверхностные интегралы I рода геометрические приложения?

3. Имеет ли значение при вычислении поверхностного интеграла I рода (II рода) ориентация поверхности?

Упражнения к § 5

1. Вычислить поверхностные интегралы I рода

1) $\iint\limits_{(S)} (x+y+z)d\sigma$, где (S) – часть плоскости $x+y+z=2$, лежащая в I октанте;

2) $\iint\limits_{(S)} z^2 d\sigma$, где (S) – часть сферы $x^2+y^2+z^2=4$, лежащая в I октанте;

3) $\iint\limits_{(S)} \left(x^2+y^2+z-\frac{1}{2}\right)d\sigma$, где (S) – часть параболоида $2z=2-x^2-y^2$ $(z \geq 0)$;

4) $\iint\limits_{(S)} \left(x^2+y^2+z^2\right)d\sigma$, где (S) – часть конуса $1-z=\sqrt{x^2+y^2}$, отсеченная плоскостью $z=0$, $(0 \leq z \leq 1)$;

5) $\iint\limits_{(S)} z d\sigma$, где (S) – часть параболоида $2z=x^2+y^2$, вырезанная конусом $z=\sqrt{x^2+y^2}$.

2. Вычислить поверхностные интегралы II рода

1) $\iint\limits_{(S)} x^2 z\,dx\,dy$, где (S) – часть параболоида $z = x^2 + y^2$, вырезанная цилиндром $x^2 + y^2 = 4$ ($\vec{n}$ образует острый угол с осью OZ);

2) $\iint\limits_{(S)} (x+z)\,dy\,dz$, где (S) – верхняя часть плоскости $x + y + z = 1$, лежащая в I октанте ($\vec{n}$ образует острый угол с осью OZ);

3) $\iint\limits_{(S)} \left(x^2 - 2y - z\right)dy\,dz + \left(3x - y^2 + z\right)dx\,dy$, где (S) – внешняя сторона пирамиды, вершины которой находятся в точках $O(0;0;0)$, $A(2;0;0)$, $B(0;-2;0)$, $C(0;0;4)$;

4) $\iint\limits_{(S)} x(z-R)\,dy\,dz + \dfrac{2}{y}\,dz\,dx + \left(2Rz - z^2\right)dx\,dy$, где (S) – верхняя сторона части сферы $z = R\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$, отсеченная конусом $x^2 + y^2 = z^2$;

5) $\iint\limits_{(S)} \left(x + z^2\right)dy\,dz + \left(2x^2 + y\right)dz\,dx$, где (S) – верхняя сторона части параболоида $y = x^2 + z^2$ $(z \ge 0)$, отсеченная плоскостью $y = 2$.

§6. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

6.1. Основные понятия

Определение.

Дифференциальным уравнением (ДУ) называется уравнение, в котором неизвестная функция содержится под знаком производной или дифференциала.

Порядок дифференциального уравнения – это порядок старшей производной (или дифференциала) неизвестной функции.

$$F\left(\frac{d^n x}{dt^n}, \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}, \ldots, \frac{dx}{dt}, x, t\right) = 0 \text{ – } \textit{ДУ } n\text{-го порядка}$$

где F – известная функция,

t – независимая переменная,

$x(t)$ – неизвестная (искомая) функция,

$\frac{d^n x}{dt^n}, \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}, \ldots, \frac{dx}{dt}$ – производные $x(t)$.

6.2. Дифференциальные уравнения первого порядка

$\frac{dx}{dt} = f(t,x)$ (1)	$\Rightarrow$	$x = \varphi(t)$ – решение ДУ
Дифференциальное уравнение *первого порядка*, $f(t,x)$ – известная функция		$\Updownarrow$ $\frac{d\varphi}{dt} \equiv f(t, \varphi(t))$

Решение $\varphi(t)$ удовлетворяет начальному условию $x\big\|_{t=t_0} = x_0$, если $\varphi(t_0) = x_0$ (точка $(t_0, x_0) \in D_f$). Задача с начальным условием (начальными данными) называется *задачей Коши*:	$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(t,x), \\ x\big\|_{t=t_0} = x_0 \end{cases} \Leftrightarrow \quad x_0 = \varphi(t_0)$

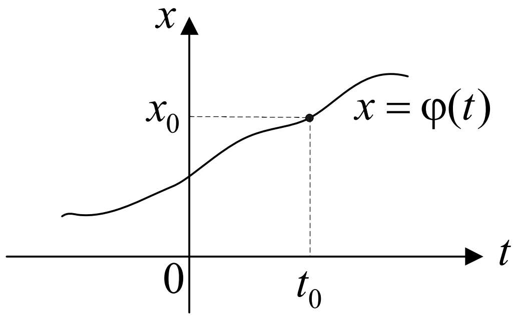
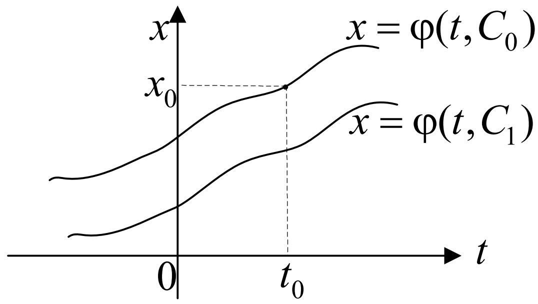


График функции $x = \varphi(t)$ называется интегральной кривой.

Определение Решение $\varphi(t, C)$ уравнения (1) называется *общим решением ДУ,* если для любых допустимых начальных данных t_0, x_0 найдется такое значение *C=C₀*, что $x_0 = \varphi(t_0, C_0)$ (интегральная кривая $x = \varphi(t, C_0)$ проходит через точку (t_0, x_0))	

Частное решение – одно решение, соответствующее заданному начальному условию (одна интегральная кривая, проходящая через точку (t_0, x_0)) – решение задачи Коши.

Существование и единственность решения задачи Коши (решение дифференциального уравнения первого порядка с начальными данными)

$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = f(t,x), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$ $\left.\begin{matrix} f(t,x) \\ \dfrac{\partial f(t,x)}{\partial x} \end{matrix}\right\}$ непрерывны в точке (t_0, x_0)	$\Longrightarrow$	Задача с начальными данными имеет единственное решение

6.3. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными

Определение.

Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными – это дифференциальные уравнения вида

$$\boxed{\frac{dx}{dt} = h(x) \cdot g(t)}$$

$$\Downarrow$$

$\dfrac{dx}{h(x)} = g(t)dt$	$\Longrightarrow$	$\displaystyle\int \frac{dx}{h(x)} = \int g(t)dt$	$\Longrightarrow$	Общее решение $H(x) = G(t) + C$

Пример:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{x+1}{t} \\ x(1) = 2 \end{cases}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{x+1}{t} \Rightarrow \int \frac{dx}{x+1} = \int \frac{dt}{t} \Rightarrow \ln|x+1| = \ln|t| + \ln|c|$$

$x + 1 = Ct \Rightarrow x_{OP} = Ct - 1$ – общее решение

$x(1) = 2 \to$ подставляем в x_{OP}: $2 = C \cdot 1 - 1 \Rightarrow C = 3$.

Ответ: $x_{ЧP} = 3t - 1$ – частное решение.

6.4. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка

Линейное неоднородное дифференциальное уравнение первого порядка $\frac{dx}{dt}=a(t)x+b(t),\quad b(t)\neq 0.$		Линейное однородное дифференциальное уравнение первого порядка $\frac{dx}{dt}=a(t)\cdot x$

Решение

1 способ: метод вариации произвольной постоянной.

2 способ: метод Бернулли.

Пример.

$$\frac{dx}{dt}=\frac{x}{t}+t^2.$$

1 способ (метод вариации произвольной постоянной):
ищем общее решение соответствующего однородного уравнения:

$$\frac{dx}{dt}=\frac{x}{t}\Rightarrow\int\frac{dx}{x}=\int\frac{dt}{t}\Rightarrow\ln|x|=\ln|t|+\ln|c|\Rightarrow x_{ОРОУ}=Ct.$$

Ищем общее решение исходного неоднородного уравнения ($x_{ОРНУ}$), считая C зависящим от t: $x\equiv x_{ОРНУ}=C(t)\cdot t$.

$$C'(t)\cdot t+C(t)=\frac{C(t)\cdot t}{t}+t^2\Rightarrow C'(t)=t\Rightarrow C(t)=\int t\,dt=\frac{t^2}{2}+D.$$

Ответ: $x=\left(\frac{t^2}{2}+D\right)t.$

2 способ (метод Бернулли):

Ищем решение исходного уравнения в виде $x=u\cdot v$.

$$u'v+uv'=\frac{uv}{t}+t^2\Rightarrow u'v+u\left(v'-\frac{v}{t}\right)=t^2.$$

Находим ν из условия $v' - \frac{v}{t} = 0 \Rightarrow \frac{dv}{dt} = \frac{v}{t} \Rightarrow v = t.$

Подставим $\nu = t$: $\quad u'v + u \cdot 0 = t^2 \Rightarrow u't = t^2 \Rightarrow u = \int t dt = \frac{t^2}{2} + D.$

Ответ: $x = u \cdot v = \left(\frac{t^2}{2} + D \right) t.$

6.5. Дифференциальные уравнения второго порядка. Понижение порядка дифференциального уравнения

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = f\left(t, x, \frac{dx}{dt}\right)$$

Решение $\varphi(t, c_1, c_2)$ дифференциального уравнения второго порядка называется *общим,* если для любых допустимых начальных чисел: t_0, x_0, x_0' найдутся такие числа $\breve{c}_1, \breve{c}_2$, что $x_0 = \varphi(t_0, \breve{c}_1, \breve{c}_2)$, $x_0' = \frac{d\varphi}{dt}(t_0, \breve{c}_1, \breve{c}_2)$.

Уравнения, допускающие понижение порядка

1. *Правая часть уравнения зависит только от* t

$\frac{d^2 x}{dt^2} = f(t) \quad \Rightarrow$ интегрируем уравнение два раза $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dt} = \int f(t) dt = F(t) + c_1 \Rightarrow x = \int \big(F(t) + c_1\big) dt = \int F(t) dt + c_1 t + c_2$$

Пример

$$x'' = \sin 2t \Rightarrow x' = \int \sin 2t dt = -\frac{\cos 2t}{2} + c_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \int\left(-\frac{\cos 2t}{2} + c_1\right)dt \Rightarrow x = -\frac{\sin 2t}{4} + c_1 t + c_2.$$

2. *Правая часть уравнения не зависит от искомой функции* $x(t)$

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} = f\left(t, \frac{dx}{dt}\right)}$$

$$\Updownarrow$$

Делаем замену: $\frac{dx}{dt} = y$

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = f(t, y) \Rightarrow & \text{1) находим } \quad y(t) \\ & \qquad\qquad \Downarrow \\ \dfrac{dx}{dt} = y \Rightarrow & \text{2) находим } x(t) \end{cases}$$

Пример

$$x'' = -\frac{1}{t+1}x' \Rightarrow \begin{cases} x' = y \\ y' = -\dfrac{1}{t+1}y \end{cases}$$

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{1}{t+1}y \Rightarrow \int\frac{dy}{y} = -\int\frac{dt}{t+1} \Rightarrow \ln|y| = -\ln|t+1| + \ln c_1 \Rightarrow y = \frac{c_1}{t+1}$$

$$x' = \frac{c_1}{t+1} \Rightarrow x = c_1\int\frac{dt}{t+1} \Rightarrow x = c_1 \ln|t+1| + c_2.$$

3. *Правая часть уравнения не зависит от* t

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} = f\left(x, \frac{dx}{dt}\right)}$$

В качестве новой независимой переменной берем x, а за новую неизвестную функцию выбираем $v = \frac{dx}{dt}$:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\cdot\frac{dx}{dt} = v\frac{dv}{dx}$$

Дифференциальное уравнение принимает вид

$$\boxed{v\frac{dv}{dx} = f(x,v)}$$

Пример

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} = -2\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2\dfrac{1}{x} \\ x\Big|_{t=1} = 2\sqrt[3]{3}; \quad \dfrac{dx}{dt}\Big|_{t=1} = \dfrac{\sqrt[3]{3}}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v\dfrac{dv}{dx} = -2v^2\dfrac{1}{x} \\ v = \dfrac{dx}{dt} \end{cases}$$

$$v\frac{dv}{dx} = -2v^2\frac{1}{x} \Rightarrow \int\frac{dv}{v} = -2\int\frac{dx}{x} \Rightarrow \ln|v| = -2\ln|x| + \ln|c_1| \Rightarrow v = \frac{c_1}{x^2}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{c_1}{x^2} \Rightarrow x^2dx = c_1dt \Rightarrow \frac{x^3}{3} = c_1t + c_2 \Rightarrow x_{OP} = \sqrt[3]{3(c_1t + c_2)}$$ – общее решение.

Используем начальные условия:

$$x(1) = 2\sqrt[3]{3} \Rightarrow \sqrt[3]{3(c_1 + c_2)} = 2\sqrt[3]{3}.$$

$$\frac{dx}{dt}\Big|_{t=1} = \frac{\sqrt[3]{3}}{3} \Rightarrow \frac{\sqrt[3]{3}}{3}(c_1 + c_2)^{-\frac{2}{3}}c_1 = \frac{\sqrt[3]{3}}{3} \Rightarrow c_1 = 4; c_2 = 4.$$

Ответ: $x_{\text{чр}} = \sqrt[3]{12(t+1)}$ – частное решение.

6.6. Линейные однородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами

$a_2\dfrac{d^2x}{dt^2}+a_1\dfrac{dx}{dt}+a_0x=0$
a_2, a_1, a_0 – постоянные, $a_2 \neq 0$ $x(t)$ – искомая функция

$A(p)=a_2p^2+a_1p+a_0$ – *характеристический многочлен*

$a_2p^2+a_1p+a_0=0$ – *характеристическое уравнение*, p_1, p_2 – его корни, D – дискриминант

$x_{OPOУ}$ **– общее решение однородного уравнения**

$D>0\ (p_1 \neq p_2)$	$D=0\ (p_1=p_2=p)$	$D<0\ (p_{1,2}=\alpha \pm i\beta)$
$x_{OPOУ}=c_1e^{p_1t}+c_2e^{p_2t}$	$x_{OPOУ}=e^{pt}(c_1+c_2t)$	$x_{OPOУ}=e^{\alpha t}(c_1\cos\beta t+c_2\sin\beta t)$
Пример $x''-3x'+2x=0$ $A(p)=p^2-3p+2$ $p_1=2; p_2=1$ $x_{OPOУ}=c_1e^{2t}+c_2e^{t}.$	**Пример** $x''-4x'+4x=0$ $A(p)=p^2-4p+4$ $p_1=p_2=2$ $x_{OPOУ}=e^{2t}(c_1+c_2t).$	**Пример** $x''-2x'+5x=0$ $A(p)=p^2-2p+5$ $p_{1,2}=1\pm 2i$ $\alpha=1; \beta=2$ $x_{OPOУ}=e^{t}(c_1\cos 2t+c_2\sin 2t).$

6.7. Принцип суперпозиции

$x_{ЧРНУ}$ – частное решение неоднородного уравнения

$\dfrac{d^2x}{dt^2}+a_1\dfrac{dx}{dt}+a_0x=b_1(t)+b_2(t)+\ldots+b_k(t) \Rightarrow$ $\Rightarrow x_{ЧРНУ}=x_{ЧРНУ}^{(1)}+x_{ЧРНУ}^{(2)}+\ldots+x_{ЧРНУ}^{(k)}$

Здесь:

(1) $\dfrac{d^2x}{dt^2}+a_1\dfrac{dx}{dt}+a_0x=b_1(t)\to x^{(1)}_{ЧРНУ}$.

(2) $\dfrac{d^2x}{dt^2}+a_1\dfrac{dx}{dt}+a_0x=b_2(t)\to x^{(2)}_{ЧРНУ}$

- - - - - - - - -

$(k)\dfrac{d^2x}{dt^2}+a_1\dfrac{dx}{dt}+a_0x=b_k(t)\to x^{(k)}_{ЧРНУ}$

6.8. Нахождение частного решения неоднородного дифференциального уравнения высшего порядка с постоянными коэффициентами (общие случаи)

1) *Правая часть дифференциального уравнения* $b(t)=P_n(t)e^{\gamma t}$, *где* $P_n(t)$ *– многочлен от* t *степени n.*

а) Если γ *не является корнем* характеристического многочлена, то частное решение нужно искать в виде

$$\boxed{x_{ЧРНУ}=Q_n(t)e^{\gamma t},}$$

где $Q_n(t)$ – многочлен *n*-ой степени с неопределенными коэффициентами.

б) Если γ – *корень кратности* k характеристического многочлена, то частное решение нужно искать в виде

$$\boxed{x_{ЧРНУ}=t^k\cdot Q_n(t)e^{\gamma t}}$$

Пример

$x''-x'=te^{2t}$

1) $A(p)=p^2-p,\ \ p_1=0,\ \ p_2=1$

$x_{ОРОУ}=c_1e^t+c_2.$

2) $P_n(t)=t\Rightarrow n=1$

$\gamma = 2 \neq p_{1,2} \Rightarrow \gamma$ не является корнем $A(p) \Rightarrow$

$\Rightarrow x_{ЧРНУ} = (at+b)e^{2t}$, где a,b – неопределенные коэффициенты.

Найдем a,b:

$x'_{ЧРНУ} = ae^{2t} + 2(at+b)e^{2t}$

$x''_{ЧРНУ} = 2ae^{2t} + 2ae^{2t} + 4(at+b)e^{2t} = 4ae^{2t} + 4(at+b)e^{2t}$

Подставляем в дифференциальное уравнение:

$$4ae^{2t} + 4(at+b)e^{2t} - ae^{2t} - 2(at+b)e^{2t} = te^{2t}$$

Приравнивая коэффициенты при t, t^0, получим

$$a = \frac{1}{2}, b = -\frac{3}{4} \Rightarrow x_{ЧРНУ} = \left(\frac{1}{2}t - \frac{3}{4}\right)e^{2t}.$$

Ответ: $x_{ОРНУ} = c_1 e^t + c_2 + \left(\frac{1}{4}t - \frac{3}{4}\right)e^{2t}$.

2) *Правая часть дифференциального уравнения* $b(t) = M\cos\beta t + {}$ $+ N\sin\beta t$, *где* M, N *– числа.*

а) Если число $i\beta$ *не является корнем* характеристического многочлена, то частное решение ищут в виде

$$\boxed{x_{ЧРНУ} = A\cos\beta t + B\sin\beta t,}$$

где A, B – неопределенные коэффициенты.

б) Если число $i\beta$ – *корень кратности* k характеристического многочлена, то частное решение ищут в виде:

$$\boxed{x_{ЧРНУ} = t^k(A\cos\beta t + B\sin\beta t)}$$

Пример

$x'' + 4x = 3\cos 2t$

1) $A(p) = p^2 + 4,\ p_1 = 2i,\ p_2 = -2i$

$x_{ОРОУ} = c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t$.

2) $\beta = 2,\ i\beta = 2i$ – простой корень характеристического многочлена.

$$x_{ЧРНУ} = t(a\cos 2t + b\sin 2t)$$

Найдем a и b:

$x'_{ЧРНУ} = a\cos 2t + b\sin 2t + t(-2a\sin 2t + 2b\cos 2t)$

$x''_{ЧРНУ} = -2a\sin 2t + 2b\cos 2t + (-2a\sin 2t + 2b\cos 2t) +$

$+t(-4a\cos 2t - 4b\sin 2t) = -4a\sin 2t + 4b\cos 2t +$

$+t(-4a\cos 2t - 4b\sin 2t)$.

Подставляем в дифференциальное уравнение:

$-4a\sin 2t + 4b\cos 2t + t(-4a\cos 2t - 4b\sin 2t) +$

$+4t(a\cos 2t + b\sin 2t) = 3\cos 2t$;

$-4a\sin 2t + 4b\cos 2t = 3\cos 2t$.

Приравнивая коэффициенты при $\cos 2t, \sin 2t$, получаем

$$\begin{cases} -4a = 0 \\ 4b = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = \dfrac{3}{4} \end{cases} \Rightarrow x_{ЧРНУ} = \frac{3}{4} t\sin 2t.$$

Ответ: $x_{ОРНУ} = c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t + \dfrac{3}{4} t\sin 2t.$

3) Правая часть дифференциального уравнения

$b(t) = P_n(t)e^{\gamma t}\cos\beta t + Q_m(t)e^{\gamma t}\sin\beta t,$ где $P_n(t), Q_m(t)$ – *многочлены от* t.

а) Если число $(\gamma + i\beta)$ *не является корнем* характеристического многочлена, то частное решение нужно искать в виде

$$\boxed{x_{ЧРНУ} = U(t)e^{\gamma t}\cos\beta t + V(t)e^{\gamma t}\sin\beta t,}$$

где $U(t), V(t)$ – многочлены с неопределенными коэффициентами, степень которых равна наивысшей степени многочленов $P_n(t), Q_m(t)$.

б) Если число $(\gamma + i\beta)$ *является корнем* кратности k характеристического многочлена, то частное решение нужно искать в виде

$$\boxed{x_{ЧРНУ} = t^k (U(t)e^{\gamma t} \cos\beta t + V(t)e^{\gamma t} \sin\beta t),}$$

где $U(t), V(t)$ – многочлены с неопределенными коэффициентами, степень которых равна наивысшей степени многочленов $P_n(t), Q_m(t)$.

6.9. Один простой метод решения дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида

6.9.1. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами и правой частью вида $b(t) = Me^{\gamma t}$

$$\boxed{a_2 \frac{d^2 x}{dt^2} + a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 x = Me^{\gamma t}.}$$

Теорема о структуре общего решения

$$x_{ОРНУ} = x_{ОРОУ} + x_{ЧРНУ},$$

где $x_{ЧРНУ}$ – частное (некоторое) решение неоднородного уравнения;

$x_{ОРОУ}$ – общее решение однородного уравнения $a_2 \dfrac{d^2 x}{dt^2} + a_1 \dfrac{dx}{dt} + a_0 x = 0$

$\boxed{x_{ЧРНУ}}$		Нерезонансный случай $\gamma \neq p_1, \gamma \neq p_2$	$x_{ЧРНУ} = \dfrac{Me^{\gamma t}}{A(\gamma)}$
		Резонанс I рода $\gamma = p_1, \gamma \neq p_2$	$x_{ЧРНУ} = \dfrac{Me^{\gamma t} \cdot t}{A'(\gamma)}$
		Резонанс II рода $\gamma = p_1, \gamma = p_2$	$x_{ЧРНУ} = \dfrac{Me^{\gamma t} \cdot t^2}{A''(\gamma)}$

Примеры

1) $x'' - 5x' + 6x = 4e^t$

$$A(p) = p^2 - 5p + 6;\ p_1 = 2,\ p_2 = 3$$

$$x_{ОРОУ} = c_1 e^{2t} + c_2 e^{3t}$$

$$\gamma = 1 \neq p_1$$

$$\gamma = 1 \neq p_2$$

$$A(\gamma) = 1 - 5 + 6 = 2$$

$$x_{ЧРНУ} = \frac{4e^t}{2} = 2e^t$$

$$x_{ОРНУ} = c_1 e^{2t} + c_2 e^{3t} + 2e^t.$$

2) $x'' - 5x' + 6x = 5e^{3t}$

$$A(p) = p^2 - 5p + 6;\ p_1 = 2,\ p_2 = 3$$

$$x_{ОРОУ} = c_1 e^{2t} + c_2 e^{3t}$$

$$\gamma = 3 = p_2$$

$$\gamma \neq p_1$$

$$A'(p) = 2p - 5;\ A'(\gamma) = 2 \cdot 3 - 5 = 1$$

$$x_{ЧРНУ} = \frac{5e^{3t} \cdot t}{1} = 5te^{3t}$$

$$x_{ОРНУ} = c_1 e^{2t} + c_2 e^{3t} + 5te^{3t}.$$

3) $x'' - 4x' + 4x = 7e^{2t}$

$$A(p) = p^2 - 4p + 4;\ p_1 = p_2 = 2$$

$$x_{ОРОУ} = c_1 e^{2t} + c_2 te^t$$

$$\gamma = 2 = p_1 = p_2$$

$$A'(p) = 2p - 4;\ A''(p) = 2$$

$$x_{ЧРНУ} = \frac{7e^{2t}}{2} \cdot t^2$$

$$x_{ОРНУ} = c_1 e^{2t} + c_2 te^{2t} + \frac{7}{2} t^2 e^{2t} = e^{2t}\left(c_1 + c_2 t + \frac{7}{2} t^2\right)$$

6.9.2. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами с правой частью вида $b(t) = Me^{\alpha t}\cos\beta t\,(Me^{\alpha t}\sin\beta t)$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + a_1\frac{dx}{dt} + a_0 x = b(t) \Longleftarrow b(t) = \left[\begin{array}{l} Me^{\alpha t}\cos\beta t \\ Me^{\alpha t}\sin\beta t \end{array}\right. = \left[\begin{array}{l} \mathrm{Re}\{Me^{(\alpha+i\beta)}\} \\ Im\{Me^{(\alpha+i\beta)}\} \end{array}\right.$$

$$\Downarrow$$

$$x_{ОРНУ} = x_{ОРОУ} + x_{ЧРНУ} \Longleftarrow x_{ЧРВУ} = \left[\begin{array}{l} \mathrm{Re}\{x_{ЧРВУ}\} \\ Im\{x_{ЧРВУ}\} \end{array}\right.$$

$$\Uparrow$$

Вспомогательное уравнение

$$x'' + a_1x' + a_0x = Me^{(\alpha+i\beta)t} \Longleftarrow x_{ЧРВУ} \text{ – его частное решение}$$

Примеры

1) $x'' + 4x = e^t\cos 2t = \mathrm{Re}\{e^{(1+2i)t}\}$

$A(p) = p^2 + 4 \Rightarrow p_{1,2} = \pm 2i \Rightarrow x_{ОРОУ} = c_1\cos 2t + c_2\sin 2t$.

Вспомогательное уравнение

$$x'' + 4x = e^{(1+2i)t};\ \gamma = 1+2i \quad \gamma \neq p_1,\ \gamma \neq p_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{ЧРВУ} = \frac{e^{(1+2i)t}}{(1+2i)^2+4} = \frac{e^{(1+2i)t}}{1+4i};$$

$$x_{ЧРНУ} = \mathrm{Re}\left\{\frac{e^{(1+2i)t}}{1+4i}\right\} = \frac{e^t}{17}\mathrm{Re}\{(\cos 2t + i\sin 2t)(1-4i)\} =$$

$$= \frac{e^t}{17}(\cos 2t + 4\sin 2t);$$

$$x_{ОРНУ} = c_1\cos 2t + c_2\sin 2t + \frac{e^t}{17}(\cos 2t + 4\sin 2t).$$

2) $\dfrac{d^2x}{dt^2} + 3\dfrac{dx}{dt} - 4x = 3 + 2e^{-4t}$

$$A(p) = p^2 + 3p - 4 \Rightarrow p_1 = -4; p_2 = 1,$$

а) $x_{ОРОУ} = c_1 e^{-4t} + c_2 e^t.$

б) $\dfrac{d^2x}{dt^2} + 3\dfrac{dx}{dt} - 4x = 3 = 3e^{ot};\;\; \gamma = 0 \neq p_1; \gamma \neq p_2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow x^{(1)}_{ЧРНУ} = \frac{3}{A(o)} = \frac{3}{-4}.$$

в) $\dfrac{d^2x}{dt^2} + 3\dfrac{dx}{dt} - 4x = 2e^{-4t};\;\; \gamma = -4 = p_1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow x^{(2)}_{ЧРНУ} = \frac{2e^{-4t} \cdot t}{2(-4)+3} = -\frac{2}{5}e^{-4t} \cdot t,$$

$$A'(p) = 2p + 3,$$

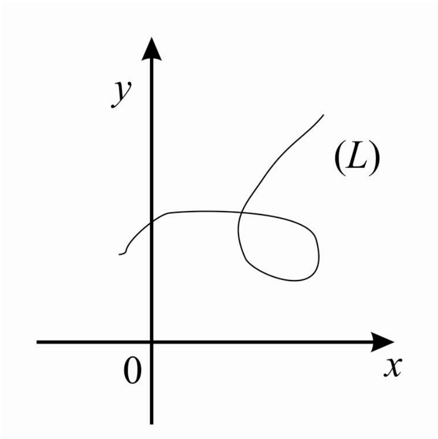
$$x_{ОРНУ} = c_1 e^{-4t} + c_2 e^t - \frac{3}{4} - \frac{2}{5}e^{-4t} \cdot t.$$

6.10. Системы дифференциальных уравнений первого порядка

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = f_1(t, x, y) \\ \dfrac{dy}{dt} = f_2(t, x, y) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$$ – решение системы

$$\begin{cases} \dfrac{d\varphi}{dt} \equiv f_1(t, \varphi(t), \psi(t)) \\ \dfrac{d\psi}{dt} = f_2(t, \varphi(t), \psi(t)) \end{cases}$$



$$(L): \begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \\ z = t \end{cases}$$

– интегральная кривая

Частный случай

Система двух дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y \\ \dfrac{dy}{dt} = f(t, x, y) \end{cases}$$

Дифференциальное уравнение второго порядка

$$\frac{d^2x}{dt^2} = f\left(t, x, \frac{dx}{dt}\right)$$

6.11. Системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = a_{11}x + a_{12}y + b_1(t) \\ \dfrac{dy}{dt} = a_{21}x + a_{22}y + b_2(t) \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

Матричная запись системы

$$\frac{dX}{dt} = A \cdot X + B(t)$$

матрица коэффициентов системы	матрица свободных членов	матрица неизвестных
$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$	$B(t) = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \end{pmatrix}$	$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

1) *Метод сведения системы к одному дифференциальному уравнению.*

Одна неизвестная функция выражается через другую и ее производную

Пример

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 5x + y + e^{-t} \\ \dfrac{dy}{dt} = -4x + \cos t \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{d^2y}{dt^2} - 5\dfrac{dy}{dt} + 4y = -\sin t - 5\cos t - 4e^{-t} \\ x = \dfrac{1}{4}\left(-\dfrac{dy}{dt} + \cos t\right) \end{cases}$$

$$y_{ОРНУ} = c_1 e^{4t} + c_2 e^{t} - \frac{2}{5}e^{-t} - \frac{1}{17}(10\cos t - 11\sin t),$$

$$x_{ОРНУ} = -c_1 e^t - \frac{1}{4} c_2 e^t - \frac{1}{40} e^t + \frac{1}{34}(3\cos t - 5\sin t)$$

2) *Матричный метод* решения системы однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\boxed{\begin{cases} \dfrac{dX}{dt} = A \cdot X, \\ X(0) = X_0 \end{cases}} \Longrightarrow \boxed{X = T \cdot \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} \cdot T^{-1} \cdot X_0}$$

$\Uparrow$

$\lambda_1 \neq \lambda_2$ – собственные значения матрицы A

T – матрица перехода к базису из собственных векторов матрицы A

Пример

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x + y \\ \dfrac{dy}{dt} = 6x + 4y \end{cases}, \qquad \begin{cases} x(0) = 3 \\ y(0) = -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}, \ X_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 6 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{matrix} \lambda_1 = 6 \to \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} & & T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \\ & \Rightarrow & \\ \lambda_2 = 1 \to \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} & & T^{-1} = -\dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{6t} & 0 \\ 0 & e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \left(-\frac{1}{5}\right) = \begin{pmatrix} e^{6t} + 2e^t \\ 3e^{6t} - 4e^t \end{pmatrix}$$

Ответ: $\begin{cases} x = e^{6t} + 2e^t \\ y = 3e^{6t} - 4e^t \end{cases}$.

Контрольные вопросы к § 6

1. Является ли функция $x(t)=\sqrt{t^2+c}$ решением дифференциального уравнения $x\cdot x'=t$?

2. Является ли функция $x(t)=x_1(t)+C\left(x_2(t)-x_1(t)\right)$ решением уравнения $x'+a(t)x=b(t)$, если $x_1(t)$ и $x_2(t)$ – два различных решения этого уравнения?

3. Есть ли среди указанных уравнений однородные; нелинейные; уравнения, допускающие понижение порядка?

$$x'-2tx^2+3=0;$$

$$x''+3x'+2x=0;$$

$$\left(x'\right)^2+5x'-e^t=0;$$

$$x'''+x''\cdot\cos t=3;$$

$$x''\cdot\cos t+x'\cdot\sin t+t^2=0.$$

Упражнения к § 6

1. Решить задачи Коши для уравнений с разделяющимися переменными

1) $x'=-\dfrac{x}{t},\quad x(1)=2;$

2) $x\ln x+t^2x'=0,\quad x(1)=e;$

3) $\left(x+e^t\right)x\cdot x'=e^t,\quad x(0)=1;$

4) $x'=\dfrac{2x}{t},\quad x(1)=1;$

5) $\left(1+t^2\right)x' = tx, \quad x(0)=1.$

2. Решить линейные дифференциальные уравнения I порядка

1) $x' - x\operatorname{ctg} t = t\sin t$;

2) $x' + \dfrac{2x}{t} = t^3$;

3) $tx' + x - e^t = 0$;

4) $x' - x\operatorname{tg} t = \dfrac{1}{\cos t}$;

5) $(2t+1)x' - 2x = 4t$.

3. Решить задачи Коши для линейных однородных дифференциальных уравнений II порядка с постоянными коэффициентами

1) $x'' + 7x' + 12x = 0, \quad x(0)=0, \quad x'(0)=1$;

2) $x'' - 3x' = 0, \quad x(1)=1, \quad x'(1)=0$;

3) $x'' + x' - 6x = 0, \quad x(0)=0, \quad x'(0)=5$;

4) $x'' + 4x' + 4x = 0, \quad x(0)=2, \quad x'(0)=1$;

5) $x'' + 9x = 0, \quad x(0)=0, \quad x'(0)=i$.

4. Решить линейные неоднородные дифференциальные уравнения II порядка с постоянными коэффициентами и правой частью вида $b(t) = Me^{\gamma t}$

1) $x'' - x' = 6e^{2t}$;

2) $x'' + 6x' + 8x = 4e^{-t}$;

3) $x'' - 9x = 5e^{3t}$;

4) $x'' + 2x' + x = 3e^{t}$;

5) $x'' + 6x' + 9x = 2e^{-3t}$.

5. Решить линейные неоднородные дифференциальные уравнения II порядка с постоянными коэффициентами и правой частью вида $b(t) = Me^{\alpha t}\cos\beta t$ $\left(b(t) = Me^{\alpha t}\sin\beta t\right)$

1) $x'' - 2x' + x = 4\sin t$;

2) $x'' + 9x = \cos 3t$;

3) $x'' - 2x' + 2x = 4e^{t}\sin t$;

4) $x'' - 2x' + 3x = e^{-t}\cos t$;

5) $x'' + 2x' + 5x = e^{t}\sin 2t$.

6. Решить системы дифференциальных уравнений с заданными начальными условиями

1) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x - 2y & x(0) = 0 \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + 4y & y(0) = 1. \end{cases}$

2) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + y & x(0) = 1 \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x - 2y & y(0) = -1. \end{cases}$

3) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -y & x(0) = -1 \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + 2y & y(0) = 0. \end{cases}$

4) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x - 9y & x(0) = 4 \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 8y & y(0) = 0. \end{cases}$

5) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 4x - y & x(0) = 1 \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 2y & y(0) = -1. \end{cases}$

§7. ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

7.1. Основные понятия

Бесконечная последовательность чисел		*Числовой ряд*
$\{a_k\}_{k=1}^{+\infty} \sim a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots$	$\Rightarrow$	$\sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_k \sim a_1 + a_2 + \ldots + a_k + \ldots$
a_k – *общий член* последовательности		a_k – общий член числового ряда

Определение

Составленный из членов бесконечной числовой последовательности символ

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_k + \ldots \sim \sum_{k=1}^{+\infty} a_k$$

называется *бесконечным рядом* (или просто – рядом), а сами числа – *членами* ряда *n*-ая *частичная сумма* ряда

$A_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$

$\lim\limits_{n\to+\infty} A_n = A$

A – конечное число

$\Rightarrow$

1) ряд $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_k$ сходится

2) сумма S ряда равна A:

$S = A$; $\left(\sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_k = A\right)$

$\lim\limits_{n\to+\infty} A_n = \infty$

или

$\lim\limits_{n\to+\infty} A_n$ не существует

$\Rightarrow$

ряд $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_k$ расходится

Примеры

1) $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \dfrac{1}{k(k+1)}$ сходится и его сумма $S = 1$, т. к.

$$A_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + ... + \frac{1}{k(k+1)} + ... + \frac{1}{n(n+1)} = \left| \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right| =$$

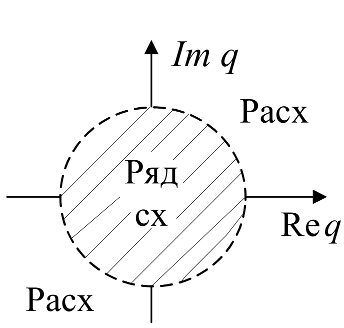
$$= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - ... + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

$$\lim_{n\to+\infty} A_n = \lim_{n\to+\infty}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)} \text{ – сходится}$$

и $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \dfrac{1}{k(k+1)} = 1.$

2) $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} q^{k-1} \sim 1 + q + q^2 + ... + q^{k-1} + ...$ – ряд, составленный из членов геометрической прогрессии, знаменатель прогрессии равен q

$$A_n = \frac{1 - q^n}{1 - q}$$



а) При $|q|<1 \quad \lim\limits_{n\to+\infty} A_n = \dfrac{1}{1-q}$

б) При $|q|\geq 1 \quad \lim\limits_{n\to+\infty} A_n = \infty$

Ответ: $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} q^{k-1}$ сходится при $|q|<1$ и при этом $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} q^{k-1} = \dfrac{1}{1-q}$.

Необходимый признак сходимости ряда
Ряд $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_k$ сходится $\Rightarrow \lim\limits_{k\to+\infty} a_k = 0$.

Достаточный признак расходимости
$\Longrightarrow$
$\lim\limits_{k\to+\infty} a_k \neq 0 \Rightarrow$ ряд $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_k$ расходится

Пример

$\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \dfrac{3k+1}{5k+4}$ расходится, т. к. $\lim\limits_{k\to+\infty} a_k = \lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{3k+1}{5k+4} = \dfrac{3}{5} \neq 0$.

7.2. Ряды с положительными членами

Ряд с положительными членами (*знакоположительный* ряд)
$\sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_k, \qquad a_k \geq 0, k=1,2,...$

Ряд – эталон для рядов с положительными членами (обобщенный гармонический ряд)
$\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \dfrac{1}{k^p} \longleftarrow \begin{cases} \text{сходится при } p>1 \\ \text{расходится при } p\leq 1. \end{cases}$

Теоремы сравнения для знакоположительных рядов		
$\sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_k;\ \ \sum\limits_{k=1}^{+\infty} b_k$ $a_k \geq 0,\ \ b_k \geq 0$		*1-ая теорема сравнения* (мажорантный признак сходимости ряда) $a_k \leq b_k \Rightarrow \begin{cases} \text{а) } \sum\limits_{k=1}^{+\infty} b_k \text{ сход.} \Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_k \text{ сход.} \\ \text{б) } \sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_k \text{ расх.} \Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{+\infty} b_k \text{ расх.} \end{cases}$
		2-ая теорема сравнения (предельный признак сходимости) $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{a_k}{b_k} = C \Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_k$ и $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} b_k$ $0 < C < +\infty$ сходятся или расходятся одновременно

Примеры

1) $\sum\limits_{k=3}^{+\infty} \frac{\ln k}{k}$ расходится.

Используем первую теорему сравнения:

$$a_k = \frac{\ln k}{k} > \frac{1}{k} = b_k;$$

$$\sum_{k=3}^{+\infty} \frac{1}{k} \text{расходится } \left(p=1\right) \Rightarrow \sum_{k=3}^{+\infty} \frac{\ln k}{k} \text{ расходится}$$

2) $\sum\limits_{k=2}^{+\infty} \frac{\ln k}{k^2}$ сходится, т. к. по первой теореме сравнения

$$a_k = \frac{\ln k}{k^2} < \frac{k^{\frac{1}{2}}}{k^2} = \frac{1}{k^{\frac{3}{2}}} = b_k;$$

$$\sum_{k=2}^{+\infty} b_k = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k^{\frac{3}{2}}} \text{сходится} \left(p = \frac{3}{2} > 1\right) \Rightarrow \sum_{k=2}^{+\infty} a_k = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{\ln k}{k^2} \text{ сходится.}$$

3) $\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{1}{k}\right)}{k^2}$ сходится т. к. по второй теореме сравнения

$$a_k=\frac{\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)}{k^2}\underset{k\to+\infty}{\sim}\frac{1}{k^3}=b_k;$$

$$\left(\lim_{k\to+\infty}\frac{a_k}{b_k}=1;c=1\right)\Rightarrow\left(\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)\underset{k\to+\infty}{\sim}\frac{1}{k}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^3}\text{ сходится }(p=3>1)\Rightarrow\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)}{k^2}\text{ сходится}.$$

Интегральный признак Коши

сходимости знакоположительного ряда $\sum\limits_{k=1}^{+\infty}a_k$

$f(x)>0; x\in[1;+\infty)$ $f(x)$ убывает на $[1;+\infty)$ $f(k)=a_k$	$\Longrightarrow$	Ряд $\sum\limits_{k=1}^{+\infty}a_k$ и несобственный интеграл первого рода $\int\limits_1^{+\infty}f(x)dx$ сходятся или расходятся одновременно.

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p}\begin{cases}\text{сходится при } p>1\\ \text{расходится при } p\le 1\end{cases}\Longrightarrow\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^p}\begin{cases}\text{сходится при } p>1\\ \text{расходится при } p\le 1\end{cases}$$

Пример

$\sum\limits_{k=3}^{+\infty}\dfrac{1}{k\ln k}$ расходится, т. к. (используем интегральный признак)

$$\int_3^{+\infty}\frac{dx}{x\ln x}=\int_3^{+\infty}\frac{d\ln x}{\ln x}=\ln\ln x\Big|_3^{+\infty}=+\infty;$$

$$\int_3^{+\infty}\frac{dx}{x\ln x}\text{ расходится }\Rightarrow\sum_{k=3}^{+\infty}\frac{1}{k\ln k}\text{ расходится.}$$

Признак Даламбера сходимости знакоположительного ряда $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_k$

$\lim\limits_{k\to+\infty} \dfrac{a_{k+1}}{a_k} = l$	$\Longrightarrow$	1) $l < 1 \Rightarrow$ ряд $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_k$ сходится 2) $l > 1 \Rightarrow$ ряд $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_k$ расходится 3) $l = 1 \Rightarrow ?$ (признак Даламбера ответа не дает, нужно использовать другие признаки или теоремы сравнения)

Пример

$\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \dfrac{3^k}{k!}$ сходится, т. к.

$$a_k = \frac{3^k}{k!}; a_{k+1} = \frac{3^{k+1}}{(k+1)!}; \lim_{k\to+\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim_{k\to+\infty} \frac{3^k \cdot 3 \cdot k!}{k!(k+1)\cdot 3^k} =$$

$= \lim\limits_{k\to+\infty} \dfrac{3}{k+1} = 0; l = 0 < 1 \Rightarrow$ по признаку Даламбера ряд сходится.

Радикальный признак Коши сходимости знакоположительного ряда $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$

$\lim\limits_{k\to+\infty} \sqrt[k]{a_k} = l$	$\Rightarrow$	1) $l<1 \Rightarrow$ ряд $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ сходится 2) $l>1 \Rightarrow$ ряд $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ расходится 3) $l=1 \Rightarrow$? (признак ответа не дает)

7.3. Знакопеременные ряды

Определение

Ряд, у которого бесконечное число положительных членов и бесконечное число отрицательных членов, называется *знакопеременным рядом.*

$\sum_{k=1}^{+\infty} \lvert a_k \rvert$ сходится $\Downarrow$ (опр) ряд $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ сходится абсолютно	1) $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ сходится 2) $\sum_{k=1}^{+\infty} \lvert a_k \rvert$ расходится $\Downarrow$ (опр) ряд $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ сходится неабсолютно (сходится условно)

Признак сходимости знакопеременного ряда $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$

$\sum_{k=1}^{+\infty} \lvert a_k \rvert$ сходится	$\Rightarrow$	$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ сходится

Пример

$\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\dfrac{\cos k}{k^3}$ – знакопеременный ряд.

$\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\left|\dfrac{\cos k}{k^3}\right|$ – ряд из модулей членов (знакоположительный ряд)

$\left|\dfrac{\cos k}{k^3}\right| < \dfrac{1}{k^3}$, $\quad \sum\limits_{k=1}^{+\infty}\dfrac{1}{k^3}$ сходится $\left(p = 3 > 1\right) \Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{+\infty}\left|\dfrac{\cos k}{k^3}\right|$ сходится;

$\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\left|\dfrac{\cos k}{k^3}\right|$ сходится $\Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{+\infty}\dfrac{\cos k}{k^3}$ сходится абсолютно.

7.4. Знакочередующиеся ряды. Теорема Лейбница. Оценка остатка знакочередующегося ряда

Определение

Ряд, у которого любые два соседних члена имеют противоположные знаки, называется *знакочередующимся:*

$$\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k-1}a_k \sim a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots, \qquad (a_k > 0)$$

Теорема Лейбница (для знакочередующегося ряда)

1) $a_k \geq a_{k+1}$ 2) $a_k \underset{k\to+\infty}{\to} 0$	$\Rightarrow$	Ряд $\sum\limits_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k-1}a_k$ сходится, и сумма ряда S не превосходит первого члена ряда: $0 \leq S \leq a_1$

Пример

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\left(-1\right)^{k-1}\frac{1}{\sqrt[3]{k}} \sim 1 - \frac{1}{\sqrt[3]{2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{3}} - \frac{1}{\sqrt[3]{4}} + \ldots$$

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ a_k=\dfrac{1}{\sqrt[3]{k}}>a_{k+1}=\dfrac{1}{\sqrt[3]{k+1}} \\ 2)\ a_k=\dfrac{1}{\sqrt[3]{k}}\to 0 \text{ при } k\to+\infty \end{array}\right\}\text{ряд сходится и его сумма } S<1.$$

Пусть ряд $\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k-1}a_k$ сходится и имеет сумму S

$\Rightarrow \sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k-1}a_k=A_n+R_n=S$,

где A_n – частичная сумма ряда, а ряд $R_n=(-1)^n(a_{n+1}-a_{n+2}+a_{n+3}-...)$ называется *остатком* исходного ряда.

Оценка остатка ряда $\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k-1}a_k$:

$0<R_n<a_{n+1}$, если n – четное число;

$-a_{n+1}<R_n<0$, если n – нечетное число.

Пример

Ряд $\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k-1}\cdot\dfrac{1}{k\sqrt{k}}$ сходится. Оценить сумму S этого ряда.

а) $R_9=(-1)^9\left(\dfrac{1}{10\sqrt{10}}-\dfrac{1}{11\sqrt{11}}+...\right)\Rightarrow -\dfrac{1}{10\sqrt{10}}<R_9<0,$

$R_9=S-A_9;-\dfrac{1}{10\sqrt{10}}<S-A_9<0\Rightarrow A_9-\dfrac{1}{10\sqrt{10}}<S<A_9.$

б) $R_8=(-1)^8\left(\dfrac{1}{9\sqrt{9}}-\dfrac{1}{10\sqrt{10}}+...\right)\Rightarrow 0<R_8<\dfrac{1}{9\sqrt{9}},$

$R_8=S-A_8;0<S-A_8<\dfrac{1}{9\sqrt{9}}\Rightarrow A_8<S<A_8+\dfrac{1}{9\sqrt{9}}.$

Контрольные вопросы к § 7

1. Верно ли утверждение: если $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = 0$, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится?

2. Является ли сходящимся рядом сумма двух рядов, если:

а) один ряд сходится, а другой расходится;

б) оба ряда расходятся?

Указание: в п. б) рассмотреть ряды $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k-1}$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k+1}$; $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{k}}$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{\sqrt{k}-1}{k}$.

3) Пусть $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^k b_k$ – числовой ряд, где $b_k \to 0$ при $k\to\infty$ и $b_k > 0$ $(\forall k \in N)$. Следует ли отсюда, что этот ряд сходится?

Указание: рассмотреть ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{2+(-1)^k}{k}$.

Упражнения к § 7

1. Исследовать на сходимость числовые ряды

1) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{k^2+3k+2}{2k^2+k+1}$;

2) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{k^3}{k^4+3}$;

3) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\operatorname{tg}\frac{\pi}{4k}$;

4) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{\sin^2 k}{k^3}$;

5) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1+3k^4+5k^2}{k^6+2k+1}$;

6) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\arcsin\frac{1}{k}$;

7) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{5^k}{k!}$;

8) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{4^k}{k\cdot 3^k}$;

9) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(\dfrac{2k+1}{3k-1}\right)$;

10) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{k!}{10^k}$;

11) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^k}{\sqrt{k+1}}$;

12) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^k}{k^5-4}$;

13) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^k\cos^3 k}{k^4}$;

14) $\sum\limits_{k=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^k}{\ln k}$;

15) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^k e^k}{2^k}$;

16) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^k\cdot k!}{k\cdot 5^k}$.

2. Вычислить суммы рядов а) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^k}{k^2}$, б) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^k}{k!}$ с точностью до 10^{-2}.

§8. СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ. РЯД ТЕЙЛОРА

8.1. Функциональный ряд и его область сходимости

Функциональный ряд
$\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x) \sim f_1(x)+f_2(x)+\ldots+f_k(x)+\ldots, \quad x\in(D)$

где (D) – область определения функций $f_1(x), f_2(x),..., f_k(x),...,$.

Определение
Областью сходимости (D_1) функционального ряда называется множество значений $x\in(D)$, при которых ряд сходится.

Область абсолютной сходимости (D_2)	$\subset$	Область сходимости (D_1)	$\subset$	Область определения (D)

$x_0 \in (D_2) \Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{+\infty}\left\|f_k(x_0)\right\|$ сходится $\Rightarrow$ числовой ряд $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} f_k(x_0)$ сходится абсолютно.
$x_0 \in (D_1) \Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{+\infty} f_k(x_0)$ сходится

8.2. Степенной ряд

Определение

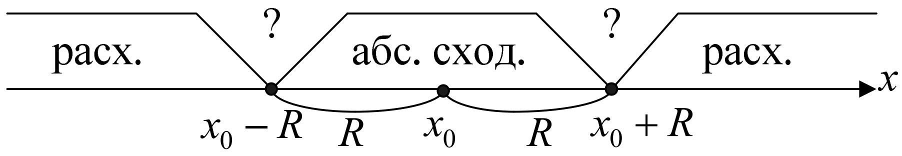
Вещественным степенным рядом с центром в т. x_0 называется ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k = a_0 + a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\ldots+a_k(x-x_0)^k+\ldots$$

где x – вещественная переменная величина, a_k – коэффициенты степенного ряда (вещественные), x_0 – центр степенного ряда

Исследование вещественного степенного ряда на сходимость

Радиус сходимости: $R = \lim\limits_{k \to +\infty} \left| \dfrac{a_k}{a_{k+1}} \right|$



1) В промежутке $(x_0 - R,\ x_0 + R)$ ряд абсолютно сходится.

2) В промежутках $x < x_0 - R$ и $x > x_0 + R$ ряд расходится.

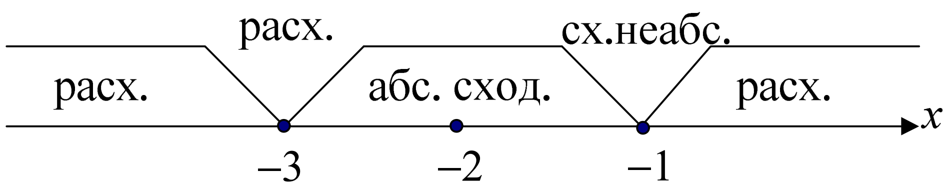
3) В точках $x_0 - R$ и $x_0 + R$ нужно исследовать ряд на сходимость.

Пример

Найти область сходимости степенного ряда $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}}(x+2)^k$

$$x_0 = -2; a_k = \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}}; a_{k+1} = \frac{(-1)^k}{\sqrt{k+1}}$$

$$R = \lim_{k \to +\infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right| = \lim_{k \to +\infty} \frac{\sqrt{k+1}}{\sqrt{k}} = 1.$$



а) $x = -1 \to$ в исходный ряд: $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}}(-1+2)^k = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}}$ – сходится неабсолютно.

б) $x = -3 \to$ в исходный ряд: $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}}(-3+2)^k = -\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{k}}$ – расходится.

Ответ: область сходимости $\left(-3;1\ \right]$.

Определение

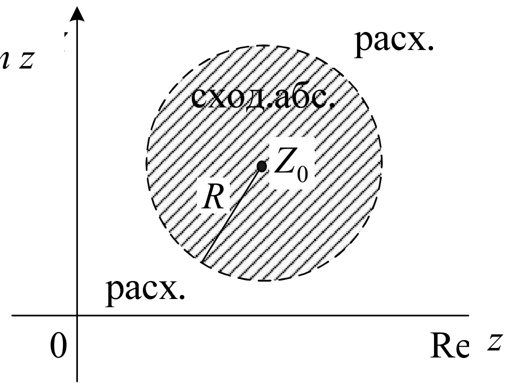
Комплексным степенным рядом с центром в точке z_0 называется ряд

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k (z-z_0)^k = a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \ldots + a_k(z-z_0)^k + \ldots$$

Здесь число z_0, переменная z и коэффициенты a_k могут принимать комплексные значения.

Областью сходимости комплексного степенного ряда является круг с центром в точке $z = z_0$ и радиусом

$$R = \lim_{k\to+\infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right|$$



Алгебраические операции над степенными рядами

$f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k (z-z_0)^k$, радиус сходимости равен R_1 $g(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k (z-z_0)^k$, радиус сходимости равен R_2, $R_1 < R_2$	$\Rightarrow$	1. Равенство рядов $f(z) = g(z) \Leftrightarrow a_k = b_k, R = R_1$ 2. Сложение рядов $f(z) + g(z) =$ $\sum_{k=0}^{+\infty} (a_k + b_k)(z-z_0)^k$, $R = R_1$ 3. Умножение рядов $f(z) \cdot g(z) =$ $= \sum_{k=0}^{+\infty} (a_k b_0 + a_{k-1} b_1 + \ldots + a_0 b_k)(z-z_0)^k$, $R = R_1$

Свойства суммы степенного ряда

		1. Сумма $f(x)$ – непрерывная функция в интервале сходимости ряда.
$f(x)=\sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_k (x-x_0)^k$, $f(x)$ – сумма степенного ряда с центром x_0 и радиусом сходимости R, $x \in (x_0-R, x_0+R)$	$\Rightarrow$	2. Степенной ряд можно почленно дифференцировать в интервале его сходимости: $f'(x)=\sum\limits_{k=1}^{+\infty} k a_k (x-x_0)^{k-1}$, $x \in (x_0-R, x_0+R)$.
		3. Степенной ряд можно почленно интегрировать по любому промежутку, лежащему внутри интервала сходимости: $\int\limits_{x_0}^{x} f(t)dt=\sum\limits_{k=0}^{+\infty}\int\limits_{x_0}^{x} a_k (t-x_0)^k dt=$ $=\sum\limits_{k=0}^{+\infty}\dfrac{a_k}{k+1}(x-x_0)^{k+1}$

8.3. Формула Тейлора. Ряд Тейлора

Пусть $f(x)$ имеет $(n+1)$ непрерывную производную в окрестности $U\left(x_0\right)$ точки x_0.

$\Downarrow$

Формула Тейлора

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+$$

$$+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x),$$

где *остаточный член* (в форме Лагранжа):

$$R_n\left(x\right)=\frac{1}{\left(n+1\right)!}f^{(n+1)}\left(c\right)\cdot\left(x-x_0\right)^{n+1},\ c\in(x_0,x)$$

$\Downarrow$

если $f(x)$ – бесконечно дифференцируема в окрестности точки x_0, а $\lim\limits_{n\to+\infty}R_n(x)=0,$ то переходим к пределу при $n\to+\infty$.

Представление $f(x)$ рядом Тейлора с центром в точке x_0

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+$$

$$+\frac{f^k(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+\ldots=f(x_0)+\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k!}f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k,$$

$\Downarrow$

Ряд Маклорена (ряд Тейлора для $x_0=0$)

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k+\ldots$$

8.4. Представление некоторых элементарных функций степенными рядами ($x_0 = 0$)

$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^k}{k!} + \ldots,$	$x \in (-\infty; +\infty)$
$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^{k-1} \cdot \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + \ldots,$	$x \in (-\infty; +\infty)$
$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^{k-1} \cdot \frac{x^{2k-2}}{(2k-2)!} + \ldots,$	$x \in (-\infty; +\infty)$
$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{k-1} \cdot \frac{x^k}{k} + \ldots,$	$x \in (-1; 1]$
$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} x^3 + \ldots +$ $+ \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)}{k!} x^k + \ldots,$	$x \in (-1; 1)$
$\arcsin x = x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{x^5}{5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{x^7}{7} + \ldots +$ $+ \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2k-1)}{2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 2k} \cdot \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + \ldots,$	$x \in [-1; 1]$
$\mathrm{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots + (-1)^{k-1} \cdot \frac{x^{2k-1}}{2k-1} + \ldots,$	$x \in [-1; 1]$

8.5. Применение степенных рядов в приближенных вычислениях

Примеры

1) Вычислить приближенно определенный интеграл $\int\limits_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sin x}{x} dx$.

$$\frac{\sin x}{x} = \frac{1}{x}\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^{k-1} \cdot \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + \ldots \right) =$$

$$= 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \ldots + (-1)^{k-1} \cdot \frac{x^{2k-2}}{(2k-1)!} + \ldots, \quad x \in (-\infty; +\infty)$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \ldots \right) dx = \frac{1}{2} - \frac{1}{3 \cdot 3! \cdot 2^3} + \frac{1}{5 \cdot 5! \cdot 2^5} - \ldots =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{3 \cdot 3! \cdot 2^3} + R_2,$$

$$0 < R_2 < \frac{1}{5 \cdot 5! \cdot 2^5} \approx 0{,}000052, \quad \frac{1}{2} - \frac{1}{3 \cdot 3! \cdot 2^3} \approx 0{,}493056.$$

Ответ: $0{,}493056 < \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sin x}{x} dx < 0{,}493056 + 0{,}000052 = 0{,}493108.$

2) Найти приближенное значение числа e с точностью до 10^{-4}

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots \underset{x=1}{\Rightarrow} e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!} + \ldots$$

$$R_n = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \ldots < \frac{1}{(n+1)!} \left[1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \ldots \right] =$$

$$= \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{n+2}} = \frac{n+2}{(n+1)!(n+1)} \Rightarrow R_n < \frac{n+2}{(n+1)!(n+1)} < 10^4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad n = 7.$$

(подбором n)

Ответ: $e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{7!}.$

Контрольные вопросы к § 8

1. Может ли радиус сходимости степенного ряда быть равным: а) нулю? б) бесконечности?

2. В чем различие, и что общего между формулой Тейлора и рядом Тейлора для одной и той же функции?

3. Может ли ряд Маклорена для функции $f(x)=\operatorname{tg} x$ иметь следующий вид $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k x^{2k}$?

Упражнения к § 8

1. Найти область сходимости степенных рядов

1) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(x+1)^k}{k^2}$;

2) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k x^k}{k}$;

3) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$;

4) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k!x^k$;

5) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(k-1)(x+3)^k}{3^{k+1}}$;

6) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{2^k}(x-2)^k$;

7) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{4^k}{5^k} x^k$.

2. Разложить в ряд Маклорена следующие функции:

1) $f(x)=\sin^2 x$;

2) $f(x)=sh\, x$;

3) $f(x)=\operatorname{arctg} x$.

3. Вычислить приближенно (с точностью до 10^{-3})

1) $\int\limits_0^1 e^{-x^2} dx$;

2) $\int\limits_0^1 \cos x^2 dx$;

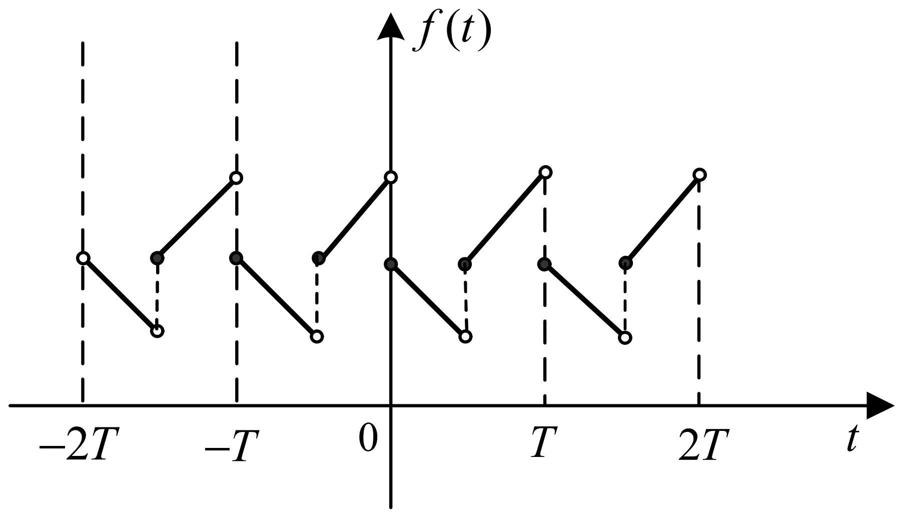
3) $\int\limits_0^{\frac{1}{2}} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} dx$.

§9. РЯД ФУРЬЕ. ИНТЕГРАЛ ФУРЬЕ

9.1. Вещественный ряд Фурье

Вещественные коэффициенты Фурье *T*-периодической функции $f(t)$ и их свойства

$\boxed{f(t)}$ ↑ *T*-периодическая кусочно-дифференци-руемая функция		Вещественные коэффициенты Фурье a_k, b_k : $a_k = \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_0^T f(t)\cos\dfrac{2\pi}{T}kt\,dt,$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ $b_k = \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_0^T f(t)\sin\dfrac{2\pi}{T}kt\,dt,$ $(k = 1, 2, \ldots)$



1) $a_k \underset{k\to+\infty}{\to} 0,\ b_k \underset{k\to+\infty}{\to} 0$		
2) $\boxed{f(t)=f(-t)}$ $\uparrow$ $f(t)$ – четная функция	$\Rightarrow$	$a_k = \dfrac{4}{T}\int\limits_0^{\frac{T}{2}} f(t)\cos\dfrac{2\pi}{T}ktdt, \quad (k=0,1,2,...)$ $b_k = 0 \quad (k=1,2,...)$
3) $\boxed{f(t)=-f(-t)}$ $\uparrow$ $f(t)$ – нечетная функция	$\Rightarrow$	$a_k = 0 \quad (k=0,1,2,...)$ $b_k = \dfrac{4}{T}\int\limits_0^{\frac{T}{2}} f(t)\sin\dfrac{2\pi}{T}ktdt, \quad (k=1,2,...)$

Вещественная форма ряда Фурье

1) $f(t) \sim \dfrac{a_0}{2} + \sum\limits_{k=1}^{+\infty}\left(a_k\cos\dfrac{2\pi}{T}kt + b_k\sin\dfrac{2\pi}{T}kt\right).$

2) $f(t) \sim \sum\limits_{k=0}^{+\infty} A_k\cos\left(\dfrac{2\pi}{T}kt + \varphi_k\right)$, где

$$A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2},\quad \varphi_k = \arg(a_k - ib_k),$$

$$A_0 = \frac{|a_0|}{2};\quad \varphi_0 = \arg a_0.$$

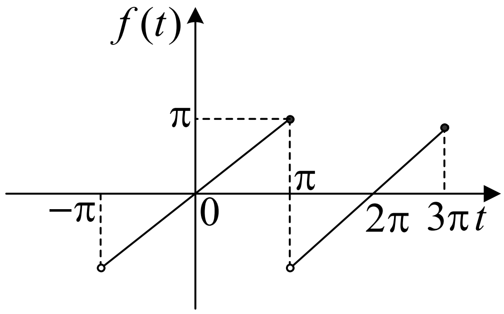
Теорема Фурье

$f(t)$ – T-периодическая; – кусочно-дифференцируемая	$\Rightarrow$	1) Ряд Фурье функции $f(x)$ сходится всюду. 2) Сумма ряда Фурье $\dfrac{a_0}{2} + \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k\cos\dfrac{2\pi}{T}kt + b_k\sin\dfrac{2\pi}{T}kt = \begin{cases} f(t), & \text{если } t - \text{точка непрерывности } f(t) \\ \dfrac{f(t+0)+f(t-0)}{2}, & \text{если } t - \text{точка разрыва } f(t) \end{cases}$

Частотный, амплитудный и фазовый спектры функции $f(t)$	
Частотный спектр	$\{\omega_k\}_{k=0}^{+\infty}=\left\{\frac{2\pi}{T}k\right\}_{k=0}^{+\infty}$, т.е. $\left\{0,\ \frac{2\pi}{T},\ \frac{4\pi}{T},\ \frac{6\pi}{T},\dots\right\}$
Амплитудный спектр	$\{A_k\}_{k=1}^{+\infty}=\left\{\sqrt{a_k^2+b_k^2}\right\}_{k=1}^{+\infty}$; $A_0=\frac{\lvert a_0\rvert}{2}$; т.е $\left\{\frac{\lvert a_0\rvert}{2},\sqrt{a_1^2+b_1^2},\sqrt{a_2^2+b_2^2},\dots\right\}$
Фазовый спектр	$\{\varphi_k\}_{k=1}^{+\infty}=\{\arg(a_k-ib_k)\}_{k=1}^{+\infty}$; $\varphi_0=\arg a_0$, т.е $\{\arg a_0,\arg(a_1-ib_1),\dots\}$

Пример

$$\begin{cases} f(t)=t, & t\in(-\pi,\pi] \\ T=2\pi \end{cases}$$



$f(t)$ – нечетная функция $\Rightarrow b_k=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi t\sin kt\,dt=$

$$=\left|\begin{matrix} u=t & du=dt \\ dv=\sin kt\,dt & v=-\frac{\cos kt}{k}\end{matrix}\right|=\frac{2}{\pi}\left(-t\frac{\cos kt}{k}\Big|_0^\pi+\frac{1}{k}\int_0^\pi\cos kt\,dt\right)=$$

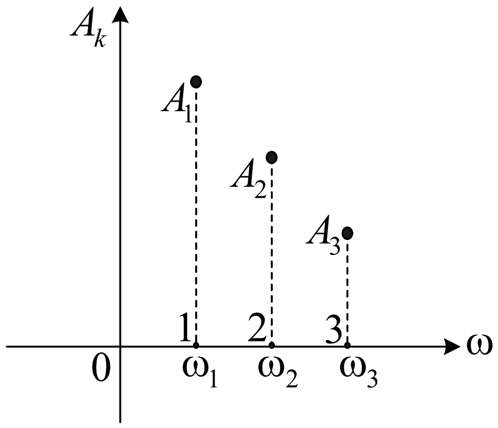
$$=\frac{2}{\pi}\left(-\pi\frac{\cos k\pi}{k}+\frac{1}{k^2}\sin kt\Big|_0^\pi\right)=-\frac{2\cos k\pi}{k}=$$

$$=-\frac{2}{k}(-1)^k=\frac{2}{k}(-1)^{k+1};\ a_k=0,\ a_0=0.$$

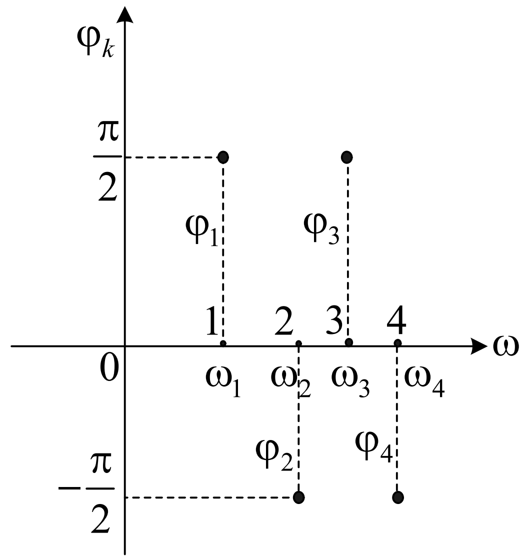
Ответ: Разложение заданной функции в вещественный ряд Фурье:

$f(t) = 2\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\sin kt,$ если $t \neq (2n+1)\pi, \ (n = 0, \pm 1, \ldots),$ а в точках $t_n = (2n+1)\pi: \ 2\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\sin kt = \frac{\pi - \pi}{2} = 0.$

$$A_k = \frac{2}{k}; \ \varphi_k = \arg\left(-i\frac{2}{k}(-1)^{k+1}\right) = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, \text{если } k = 2,4,6,\ldots \\ -\frac{\pi}{2}, \text{если } k = 1,3,5,\ldots \end{cases}$$



$\omega_k = k$



Равенство Ляпунова-Парсеваля
для вещественной формы ряда Фурье

$$\boxed{\frac{1}{T}\int_0^T f^2(t)dt = A_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{+\infty} A_k^2}$$

или

$$\boxed{\frac{1}{T}\int f^2(t)dt = \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{+\infty}\left(a_k^2 + b_k^2\right)}$$

9.2. Комплексный ряд Фурье

Комплексные коэффициенты Фурье

***T*-периодической функции $f(t)$ и их свойства**

$\boxed{f(t)}$ $\uparrow$ *T*-периодическая кусочно-дифференцируемая функция	$\Rightarrow$	Комплексные коэффициенты Фурье C_k $C_k = \frac{1}{T}\int_0^T f(t) e^{-i\frac{2\pi}{T}kt} dt,$ $k = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3, \ldots$

1) $C_k \to 0 \qquad \left(\lvert k \rvert \to +\infty\right)$

2)

$Im\, f\left(t\right) = 0$ (функция $f(t)$ вещественна)	$\Rightarrow$	$a_k = 2\,\mathrm{Re}\, C_k \quad \left(\frac{a_0}{2} = C_0\right)$ $k = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3, \ldots$ $b_k = -2 Im\, C_k$

Комплексная форма ряда Фурье

$$f(t) \sim \sum_{k=-\infty}^{+\infty} C_k e^{i\frac{2\pi}{T}kt} = C_0 + \sum_{\substack{k=-\infty \\ (k\neq 0)}}^{+\infty} C_k e^{i\frac{2\pi}{T}kt}.$$

Теорема Фурье

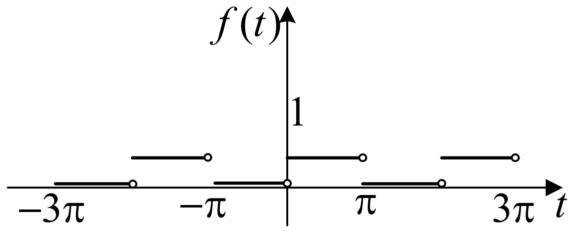
$f(t)$ – *T*-периодическая – кусочно-дифференцируемая функция	$\Rightarrow$	1) Ряд Фурье функции $f(t)$ сходится всюду. 2) Сумма ряда Фурье $C_0 + \sum_{\substack{k=-\infty \\ (k\neq 0)}}^{+\infty} C_k e^{i\frac{2\pi}{T}kt} =$ $= \begin{cases} f(t), \text{если } t - \text{ точка непрерывности } f(t), \\ \dfrac{f(t+0)+f(t-0)}{2}, \text{если } t - \text{ точка разрыва } f(t). \end{cases}$

Частотный, амплитудный и фазовый спектры функции $f(t)$		
Частотный спектр	$\{\omega_k\}_{k=-\infty}^{+\infty}=\left\{\frac{2\pi}{T}k\right\}_{k=-\infty}^{+\infty}$	$0,\ \pm\frac{2\pi}{T},\ \pm\frac{4\pi}{T},\ \pm\frac{6\pi}{T},\ldots$
Амплитудный спектр	$\{\lvert C_k\rvert\}_{k=-\infty}^{+\infty}$	$\lvert C_0\rvert,\ \lvert C_1\rvert,\ \lvert C_{-1}\rvert,\ \lvert C_2\rvert,\ \lvert C_{-2}\rvert,\ldots$
Фазовый спектр	$\{\arg C_k\}_{k=-\infty}^{+\infty}$	$\arg C_0,\arg C_1,\arg C_{-1},\ldots$

Пример

$$f(t)=\begin{cases}0, & t\in[-\pi;0)\\ 1, & t\in[0;\pi)\end{cases}$$

$$T=2\pi$$



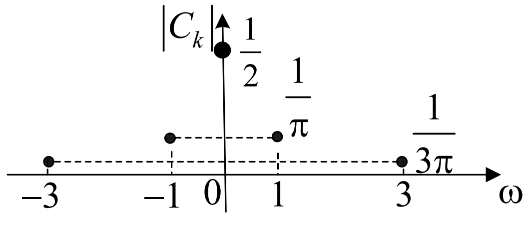
$$C_k=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)e^{-ikt}dt=\int_0^{\pi}e^{-ikt}dt=\frac{(-1)^k-1}{-2\pi ik}\quad(k\neq 0),$$

$$C_0=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}dt=\frac{1}{2}.$$

Ответ: $f(t)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2\pi}\sum\limits_{\substack{k=-\infty\\(k\neq 0)}}^{+\infty}\dfrac{(-1)^k-1}{-ik}e^{ikt}$, если $t\neq\pi n$ $(n=0,\pm1,\ldots)$,

$$C_k=\frac{1}{2\pi|k|}\left(1-(-1)^k\right),\ k\neq 0,$$

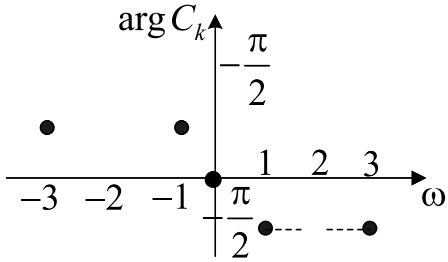
$$C_0=\frac{1}{2}$$



$$\arg C_0=0;$$

$$\arg C_1=\arg C_3=\ldots=-\frac{\pi}{2}$$

$$\arg C_{-1}=\arg C_{-3}=\ldots=\frac{\pi}{2}$$

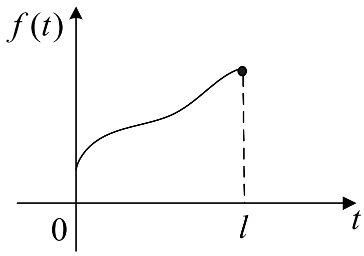


Равенство Ляпунова-Парсеваля для комплексной формы ряда Фурье

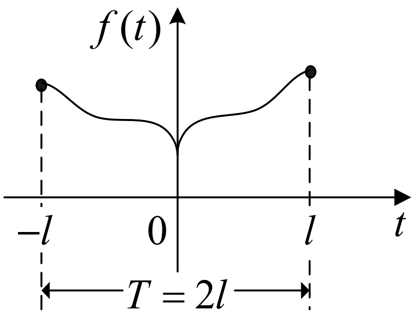
$$\boxed{\frac{1}{T}\int_0^T |f(t)|^2\,dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |C_k|^2}$$

9.3. Разложение в ряд Фурье функции, заданной на отрезке

$f(t)$ – кусочно-дифференцируемая, заданная на отрезке $[0,l]$ функция



1. Разложение $f(t)$ в вещественный ряд Фурье по косинусам:

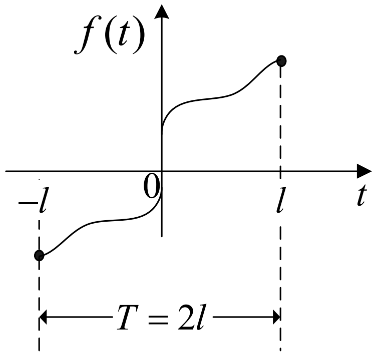


$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos\frac{\pi k}{l}t, \quad t \in [0,l], \text{ где}$$

$$a_k = \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)\cos\frac{2\pi}{T}kt\,dt = \frac{2}{l}\int_0^{l} f(t)\cos\frac{\pi k}{l}t\,dt$$

$$(k = 0,1,2,\ldots)$$

2. Разложение $f(t)$ в вещественный ряд Фурье по синусам:



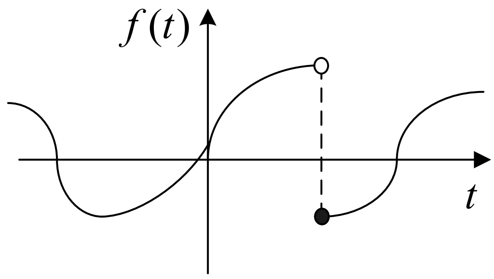
$$f(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} b_k \sin\frac{\pi k}{l}t, \qquad t \in (0,l), \quad \text{где}$$

$$b_k = \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)\sin\frac{2\pi}{T}kt\,dt =$$

$$= \frac{2}{l}\int_0^{l} f(t)\sin\frac{\pi k}{l}t\,dt, \quad (k = 1,2,\ldots)$$

9.4. Интеграл Фурье

Спектральная плотность функции $f(t)$
и ее свойства

$f(t)$ – кусочно-дифференцируемая функция и $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \lvert f(t) \rvert dt < +\infty$		*Спектральная плотность* $C(i\omega)$: $C(i\omega) = \frac{1}{2\pi} \times$ $\times \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt,$ $\omega \in (-\infty, +\infty)$	

Обозначение: $f(t) \doteqdot C(i\omega)$

1) $C(i\omega) \underset{\lvert\omega\rvert \to +\infty}{\to} 0$, $C(i\omega)$ – ограничена и непрерывна.
2) $f(t) = f(-t) \Rightarrow \operatorname{Im} C(i\omega) = 0$.

Интегральная теорема Фурье

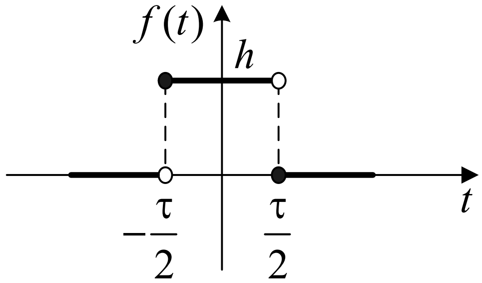
а) $f(t)$ – кусочно-дифференцируемая функция. б) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \lvert f(t) \rvert dt < +\infty$	$\Rightarrow$	$f(t)$ представима интегралом Фурье: $f(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} C(i\omega) e^{i\omega t} d\omega$.

Амплитудно-частотный
и фазо-частотный спектры функции $f(t)$

Амплитудно-частотный спектр (АЧС)	$\lvert C(i\omega) \rvert$
Фазо-частотный спектр (ФЧС)	$\arg C(i\omega)$

$Im\, f(t) = 0$	$\Longrightarrow$	1) $\lvert C(i\omega) \rvert = \lvert C(i(-\omega)) \rvert$ 2) $\arg C(i\omega) = -\arg C(i(-\omega))$

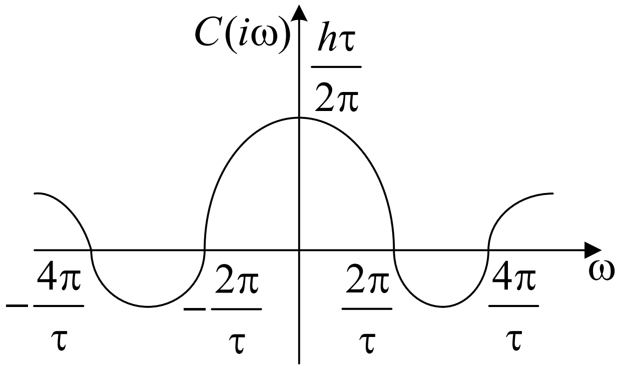
Пример

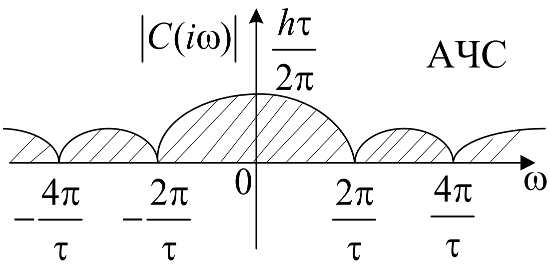


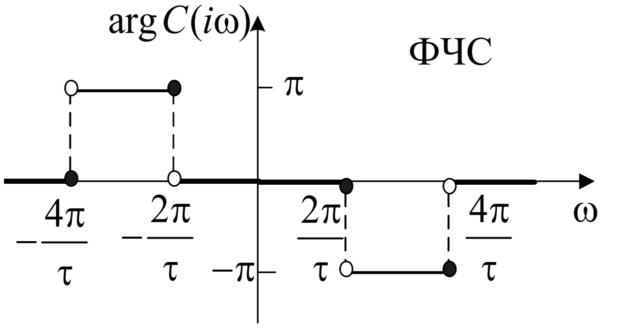
$$f(t)=\begin{cases} h, t\in\left[-\frac{\tau}{2},\frac{\tau}{2}\right) \\ 0, t\notin\left[-\frac{\tau}{2},\frac{\tau}{2}\right) \end{cases}$$

$$C(i\omega)=\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} he^{-i\omega t}dt = h\cdot\frac{\sin\frac{\omega\tau}{2}}{\pi\omega}$$

$$f(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} h\frac{\sin\frac{\omega\tau}{2}}{\pi\omega}e^{i\omega t}d\omega$$







Равенство Ляпунова-Парсеваля

$f(t) \doteqdot C(i\omega)$	$\Longrightarrow$	$\int_{-\infty}^{+\infty}\left\lvert f(t)\right\rvert^2 dt = 2\pi\int_{-\infty}^{+\infty}\left\lvert C(i\omega)\right\rvert^2 d\omega$

Изменение спектральной плотности при некоторых преобразованиях функции (теоремы о спектральной плотности)

$f(t) \doteqdot C(i\omega) \Rightarrow$	$f(t-t_0) \doteqdot e^{-i\omega t_0} \cdot C(i\omega)$
	$f(t)\cdot e^{i\omega_0 t} \doteqdot C(i(\omega-\omega_0))$
	$f'(t) \doteqdot i\omega \cdot C(i\omega)$
	$\int\limits_{-\infty}^{t} f(u)du \doteqdot \dfrac{C(i\omega)}{i\omega}$

Свертка двух функций и ее спектральная плотность

Функции $f_1(t)$ и $f_2(t)$	$\Rightarrow$	**Определение** *Свертка* этих функций – функция $h(t)$, такая, что $h(t) \overset{(\text{опр})}{=} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_1(u)\cdot f_2(t-u)du$

Обозначение свертки: $f = f_1 * f_2 = f_2 * f_1$

Теорема о свертке:

$f_1(t) \doteqdot C_1(i\omega)$ $f_2(t) \doteqdot C_2(i\omega)$	$\Rightarrow$	$(f_1 * f_2)(t) \doteqdot 2\pi C_1(i\omega)\cdot C_2(i\omega)$

Контрольные вопросы к § 9

1. Для каких функций графики суммы ряда Фурье и графики самих функций совпадают?

2. Можно ли не вычисляя указать **некоторые** коэффициенты вещественного ряда Фурье для следующих Т-периодических функций:

а) $f(t) = |t|, \quad |t| \le 2 \qquad (T = 4)$;

б) $f(t) = |\cos t|$;

в) $f(t) = \begin{cases} 1 - t, & t \in [0;1) \\ 1 + t, & t \in [-1;0) \end{cases} \qquad (T = 2)$?

3. Удовлетворяют ли условиям интегральной теоремы Фурье следующие функции:

а) $f(t) = e^{-t}$;

б) $f(t) = \cos t$;

в) $f(t) = t^2$?

Упражнения к § 9

1. Разложить в вещественный ряд Фурье следующие функции

1) $f(t) = \begin{cases} -1, & -\pi \le t \le 0 \\ 0, & 0 < t < \pi \end{cases}, \qquad T = 2\pi$;

2) $f(t) = \begin{cases} 0, & -2 < t \le 0 \\ \dfrac{t}{2}, & 0 < t < 2 \end{cases}, \qquad T = 4$;

3) $f(t) = |\cos t|$;

4) $f(t) = \begin{cases} t + 1, & -1 \le t < 0 \\ 0, & 0 \le t < 2 \end{cases}, \qquad T = 3$;

5) $f(t) = \dfrac{\pi - t}{2} \; (0 < t < 2\pi), \qquad T = 2\pi$.

2. Разложить в комплексный ряд Фурье следующие функции:

1) $f(t) = e^{2t} \quad (t \in [0;1]), \quad T = 1;$

2) $f(t) = \begin{cases} 2t, & 0 \le t < 1 \\ 2, & -1 < t < 0 \end{cases}, \quad T = 2;$

3) $f(t) = t^2 \quad (t \in (0;2\pi)), \quad T = 2\pi;$

4) $f(t) = \begin{cases} 4, & |t| < 1 \\ 0, & 1 \le |t| < \pi \end{cases}, \quad T = 2\pi;$

5) $f(t) = \begin{cases} 1 - t, & -1 \le t < 0 \\ 1 + t, & 0 \le t < 1 \end{cases}, \quad T = 2.$

3. Представить интегралом Фурье следующие функции:

1) $f(t) = \begin{cases} 3, & |t| \le 1 \\ 0, & |t| > 1 \end{cases};$

2) $f(t) = e^{-2|t|};$

3) $f(t) = \begin{cases} \sin t, & |t| \le \pi \\ 0, & |t| > \pi \end{cases};$

4) $f(x) = \begin{cases} e^{-t}, & t > 0 \\ 0, & t = 0 \\ -e^{t}, & t < 0 \end{cases};$

5) $f(x) = \begin{cases} t^2, & |t| \le 1 \\ 1, & 1 < |t| < 2 \\ 0, & |t| \ge 2 \end{cases}.$

СЛОВАРЬ

Н

О

П

Р

ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ

СОДЕРЖАНИЕ

ЛИТЕРАТУРА

1. Бугров Я. С., Никольский С. М. Высшая математика: Дифференциальное и интегральное исчисление/ авторы Бугров Я. С., Никольский С. М. – М. Наука, 1987.

2. Кудрявцев Л. Д. Краткий курс математического анализа: в 2-х т. / автор Кудрявцев Л. Д.– М. Физматлит, 2005.

3. Пискунов Н. С. Дифференциальное интегральное исчисление для вузов: в 2-х т. / автор Пискунов Н. С.– М. Наука, 1978.

4. Берман Г. Н. Сборник задач по курсу математического анализа: / автор Берман Г. Н. – М. Наука, 1972.

5. Демидович Б. П. Задачи и упражнения по математическому анализу для вузов: / автор Демидович Б. П. – М. Наука, 1972.

Навчальне видання

НАЦИК Людмила Дмитрівна
ТАРАПОВА Олена Іванівна
ВИШНЕВЕЦЬКИЙ Олександр Леонідович

КУРС ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ ДЛЯ ИНОСТРАННЫХ СТУДЕНТОВ (МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ)

Навчальний посібник
(російською мовою)

Коректор
Комп'ютерна верстка
Макет обкладинки

Формат 60×84 1/16. Ум. друк. арк. Наклад Зам. № .