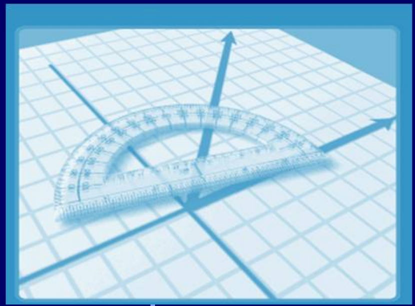
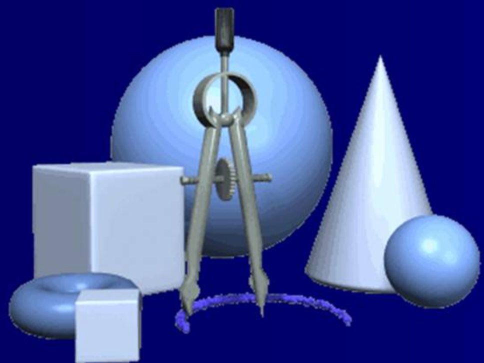


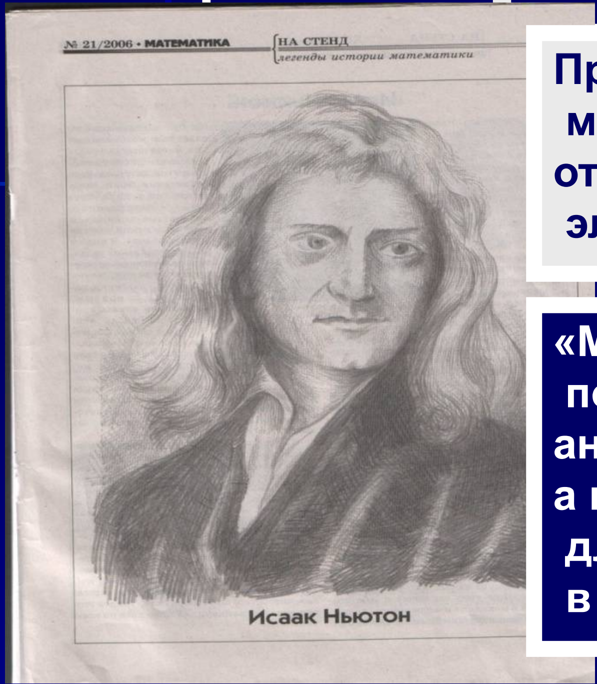
Дифференциальное исчисление



Выполнили:
Хбиби Анас, Хамри Надир
Научный руководитель:
к.ф.-м.н., доцент Волосюк М.А.
ХНАДУ, 2015

«Лишь дифференциальное исчисление дает естествознанию возможность изображать математически не только состояния, но и процессы: движение».

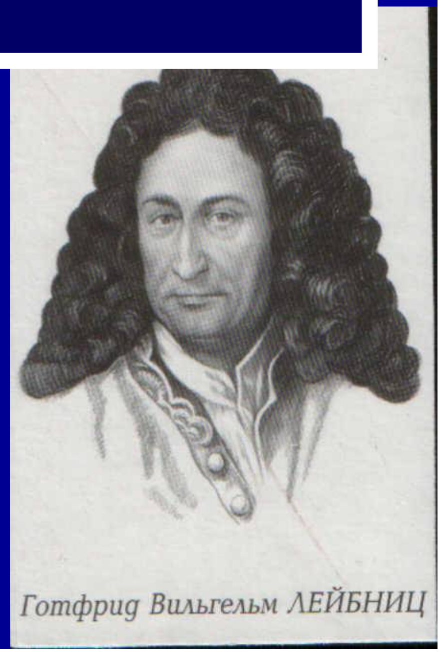
Исторические сведения



Производная – одно из фундаментальных понятий математики. Оно возникло в XVII веке. Независимо друг от друга И.Ньютон и Г.Лейбниц разработали основные элементы дифференциального исчисления.

«Метод флюкций». Так Ньютон назвал свою работу, посвященную основным понятиям математического анализа. Функцию Ньютон назвал флюентой, а производную – флюкцией. Обозначения Ньютона для производных - x* (с точкой) и y* - сохранились в физике до сих пор.

Исчисление, созданное Ньютоном и Лейбницем, получило название дифференциального исчисления. С его помощью был решен целый ряд задач теоретической механики, физики и астрономии.



Математики о производной

Слова «производная» и «произошло» имеют похожие части слова:

производная – *это значит* **«происходит от исходной функции» (исходная функция - *«мама»,* её производная - *«дочь»).***

Дифференциальное исчисление – раздел математики, в котором изучаются производные функций и их применение.

Производная функции

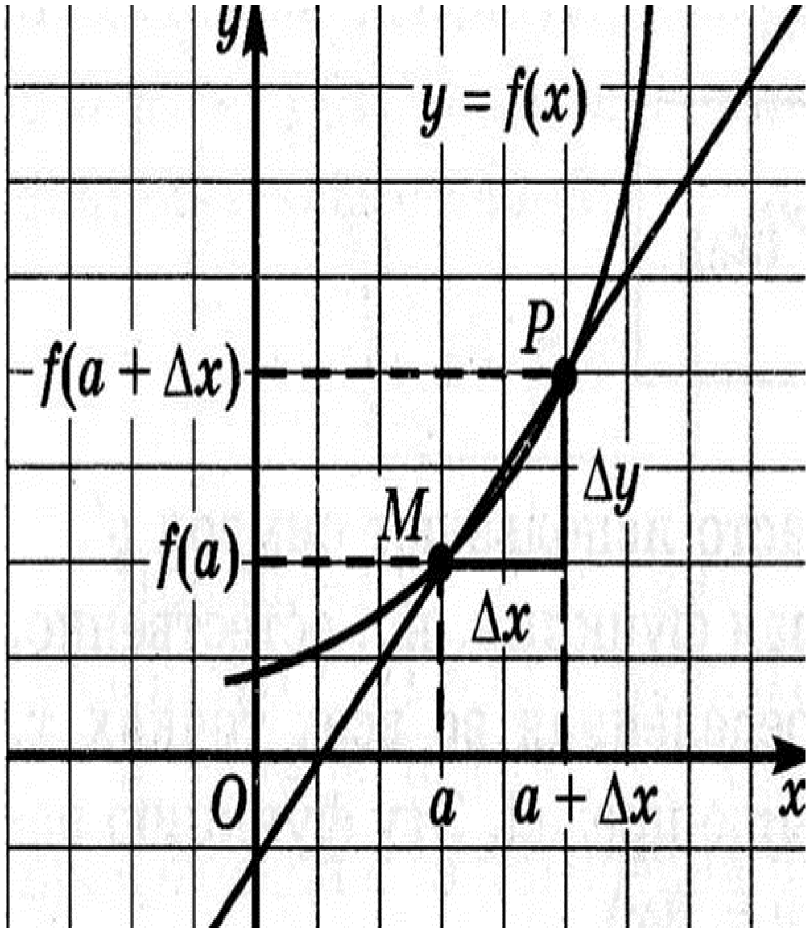
Пусть $y = f(x)$ определена в точке $x_0=a$ и некоторой её области.

Придадим x_0 приращение Δx: $x_0 + \Delta x \in D(f)$.

Функция при этом получит приращение

$$\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) .$$

Определение производной



$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0).$$

Предел отношения Δy к Δx, если Δx стремится к нулю, назвали производной функции y = f(x) в точке x_0

Производной функции в данной точке называется предел отношения приращения функции в этой точке

к приращению аргумента,

когда приращение аргумента стремится к нулю:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Операцию нахождения производной функции $y = f(x)$ называют ***дифференцированием функции*** $f(x)$.

Например:

$$(\sin x)' = \cos x, \quad (\cos x)' = -\sin x, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$(e^x)' = e^x, \quad (a^x)' = a^x \cdot \ln a, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}, \quad (\ln x)' = \frac{1}{x}, \quad \forall x > 0.$$

Правила дифференцирования

1) *Производная постоянной функции равна нулю*, т.е.

$C' = 0$, где C – константа.

2) *Производная суммы* (*разности*) *равна сумме* (*разности*) *производных*, т.е.

$$(u \pm v)' = u' \pm v'$$

3) Производная произведения находится по правилу:

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

В случае большого числа множителей:

$$(u \cdot v \cdot w)' = u' \cdot v \cdot w + u \cdot v' \cdot w + u \cdot v \cdot w',$$

$$(u \cdot v \cdot w \cdot t)' = u' \cdot v \cdot w \cdot t + u \cdot v' \cdot w \cdot t + u \cdot v \cdot w' \cdot t + u \cdot v \cdot w \cdot t'.$$

4) $(C \cdot u)' = C \cdot u'$, где *C* – константа.

Говорят: «постоянный множитель выносится за знак производной».

5) *Производная дроби находится по правилу*:

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2} \qquad \left(v(x) \neq 0\right).$$

6) *Если функция* $\varphi(t)$ *имеет производную в точке* t, *а функция* $f(u)$ *имеет производную в точке* $u = \varphi(t)$, *то сложная функция* $y = f(\varphi(t))$ *имеет производную в точке* t, *причем* $y' = f'(u) \cdot u'$

(правило дифференцирования сложной функции).

Пример:
дифференцирование функции $y = a^x$

$$(a^x)' = a^x \ln a$$

Например,

$$\left(2^x\right)' = 2^x \cdot \ln 2;$$

$$\left(5^x\right)' = 5^x \cdot \ln 5.$$

Пример:

Вычислить значение производной функции $y = e^{4x-12}$ в точке x=3.

Решение:

$$y' = (e^{4x-12})' = 4e^{4x-12}$$

$$y'(3) = (e^{4\cdot 3-12})' = 4e^{0} = 4$$

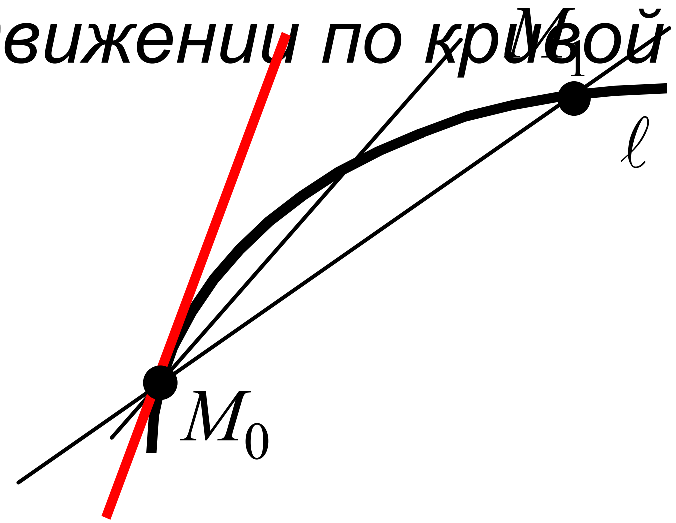
Ответ: 4

Геометрический смысл производной

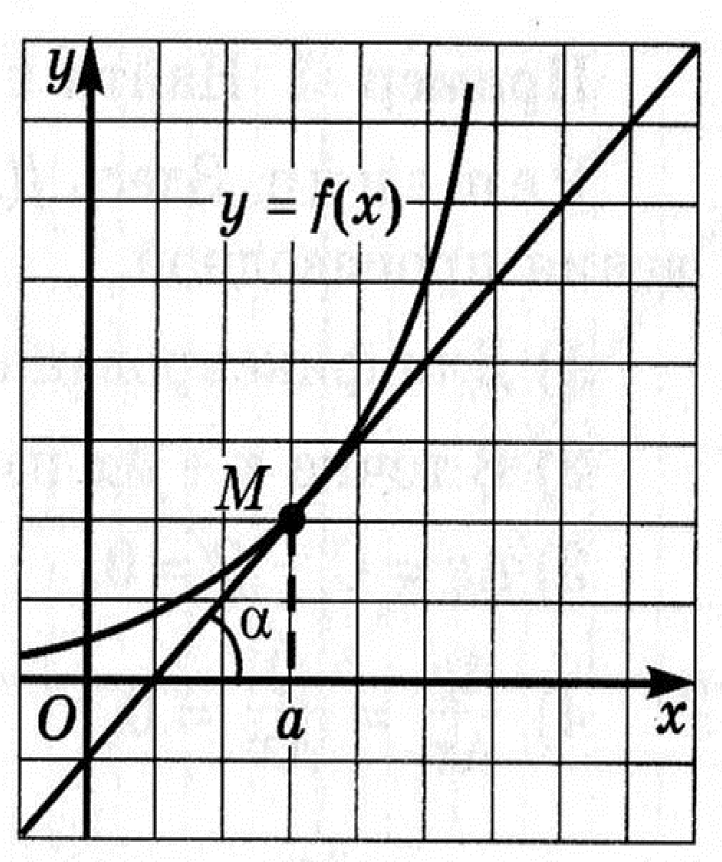
Пусть ℓ –кривая, M_0 – точка на кривой ℓ.

Любая прямая, пересекающая ℓ не менее, чем в двух точках, *называется* ***секущей***.

Касательной к кривой ℓ в точке M_0 *называется предельное положение секущей M_0M_1 при движении по кривой точки M_1 к M_0*.



Геометрический смысл производной



Значение производной функции $y=f(x)$ в точке $x_0=a$ ($f'(a)$) – это тангенс угла наклона касательной к графику функции f(x) в точке a или угловой коэффициент касательной к графику функции в этой точке:

$$f'(a) = tg\alpha = k$$

Уравнение касательной к графику функции в точке M_0:

$$y = f(a) + f'(a)(x-a)$$

Алгоритм составления уравнения касательной к графику функции y = f (x)
1. Обозначить абсциссу точки касания буквой а. 2. Вычислить f(a). 3. Найти f' (x) и вычислить f' (a). 4. Подставить найденные числа a, f (a), f' (a) в формулу.

O2

O1

Слайд 15

О1 Оля; 18.01.2002

О2)
Оля; 18.01.2002

Пример. Найти касательную к графику функции $y = e^x$ в точке x=1.

Решение: $y = f(a) + f'(a)(x-a)$

1) a=1
2) f(a)=f(1)=e
3) $f'(x) = e^x; \quad f'(a) = f'(1) = e.$

4) $y=e+e(x-1);$ $\qquad y = ex$

Ответ: $y=ex$

Алгоритм исследования функции и построения её графика

- Область определения функции
- Производная функции
- Критические точки функции (в которых производная равна 0 или не существует)
- Промежутки возрастания и убывания
- Точки экстремума и экстремумы.

Пример:

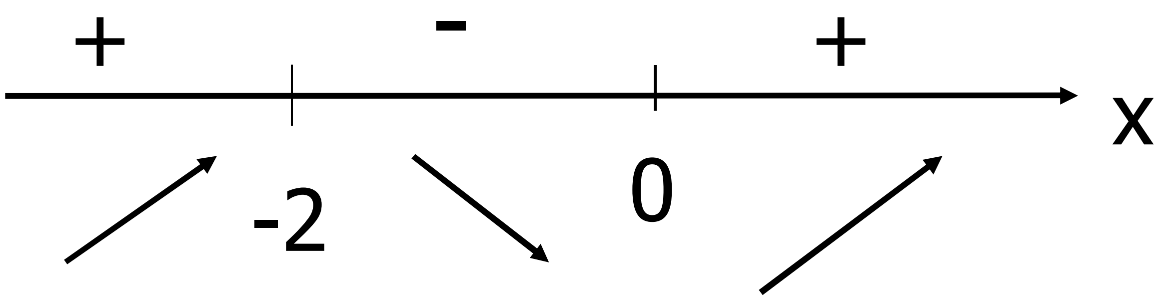
Исследовать функцию и построить её график: $y = x^2 e^x$

Решение: 1) $D(f) = (-\infty; +\infty)$

2) $y' = (x^2 e^x)' = \left(x^2\right)' e^2 + x^2 \left(e^x\right)' =$

$= 2xe^x + x^2 e^x = xe^x(x+2)$

3) $y' = xe^{x}(x+2)$



4) x=-2 – точка максимума

$$y_{\max} = y(-2) = (-2)^2 e^{-2} = 4e^{-2} = \frac{4}{e^2} \approx 0,5$$

x=0 – точка минимума

$$y_{\min} = (0)^2 e^{0} = 0$$

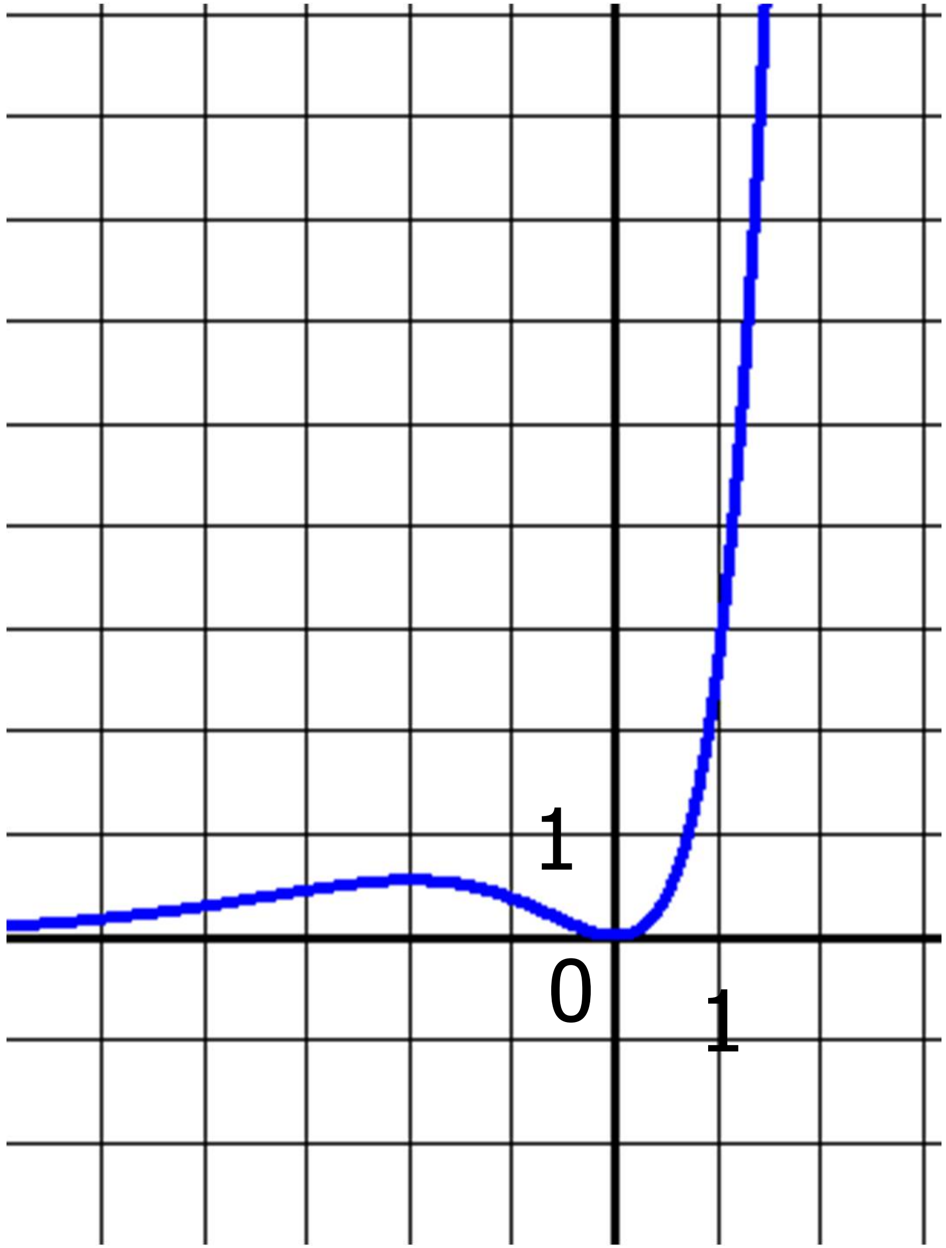


График функции

$$y = x^2 e^x$$

Ось абсцисс – горизонтальная асимптота графика

Физический смысл производной функции $y = f(x)$:

Если функция $y = f(x)$ и её аргумент x являются физическими величинами, то *производная* $f'(x)$ – ***скорость изменения величины*** y ***относительно величины*** x

$f'(x_0)$ скорость

$f''(x_0)$ ускорение

ПРИМЕРЫ В ФИЗИКЕ:

а) Пусть $S = S(t)$ – расстояние, которое проходит точка за время t.
Тогда производная $S'(t_0)$ – *скорость точки в момент времени* t_0.

б) Пусть $q = q(t)$ – количество электричества, которое протекает через поперечное сечение проводника в момент времени t.
Тогда $q'(t_0)$ – скорость изменения количества электричества в момент времени t_0 или *сила тока в момент времени* t_0.

в) Пусть $m = m(x)$ – масса отрезка $[a\,;\,x]$.
Тогда $m'(x)$ – скорость изменения массы в точке x_0 или *линейная плотность в точке* x_0.

Задача

Найдите скорость и ускорение для точки, движущейся по закону $S(t) = t^2 + 2t + 3$

а) в момент времени ***t;***

б) в момент времени ***t=3c.***

Решение.

$$a)\quad V(t) = S'(t) = (t^2 + 2t + 3)' = 2t + 2$$

$$a(t) = V'(t) = S''(t) = 2$$

$$b)\quad V(3) = 2 \cdot 3 + 2 = 8 \text{ (м/с)}$$

$$a(3) = 2 \text{ (м/с}^2\text{)}$$

Задача

$m(l) = 3l^2 + 5l$ (г), $l_{AB} = 20$ см,

$\rho_{ср} = ?$

Решение:

Т.к. $\rho(l) = m'(l)$, то $\rho(l) = 6l + 5$.

$l = 10$ см, $\rho(10) = 60 + 5 = 65$(г/см^3)

Ответ: 65 г/см^3.

Алгоритм нахождения наименьшего и наибольшего значений функции y=f(x) на отрезке [a; b]

- 1. Производная функции.
- 2. Стационарные и критические точки функции, лежащие внутри отрезка [a;b].
- 3. **З**начения функции y=f(x) в выбранных точках и в точках a и b.
- Выбрать среди полученных значений наименьшее и наибольшее.

Применения производной

- в геометрии (касательная к графику функции);

- в физике и технике;

- при исследовании функций;

- при решении задач на нахождение наибольшего и наименьшего значений функции.