Харьковский национальный автомобильно-дорожный университет

Факультет подготовки иностранных граждан

Интегральное исчисление

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a),$$

$$F'(x) = f(x)$$

Студенты: Макнун Саида,

Эддахби Хамза

Научный руководитель:

Волосюк Марина Андреевна

Математики Древней Греции

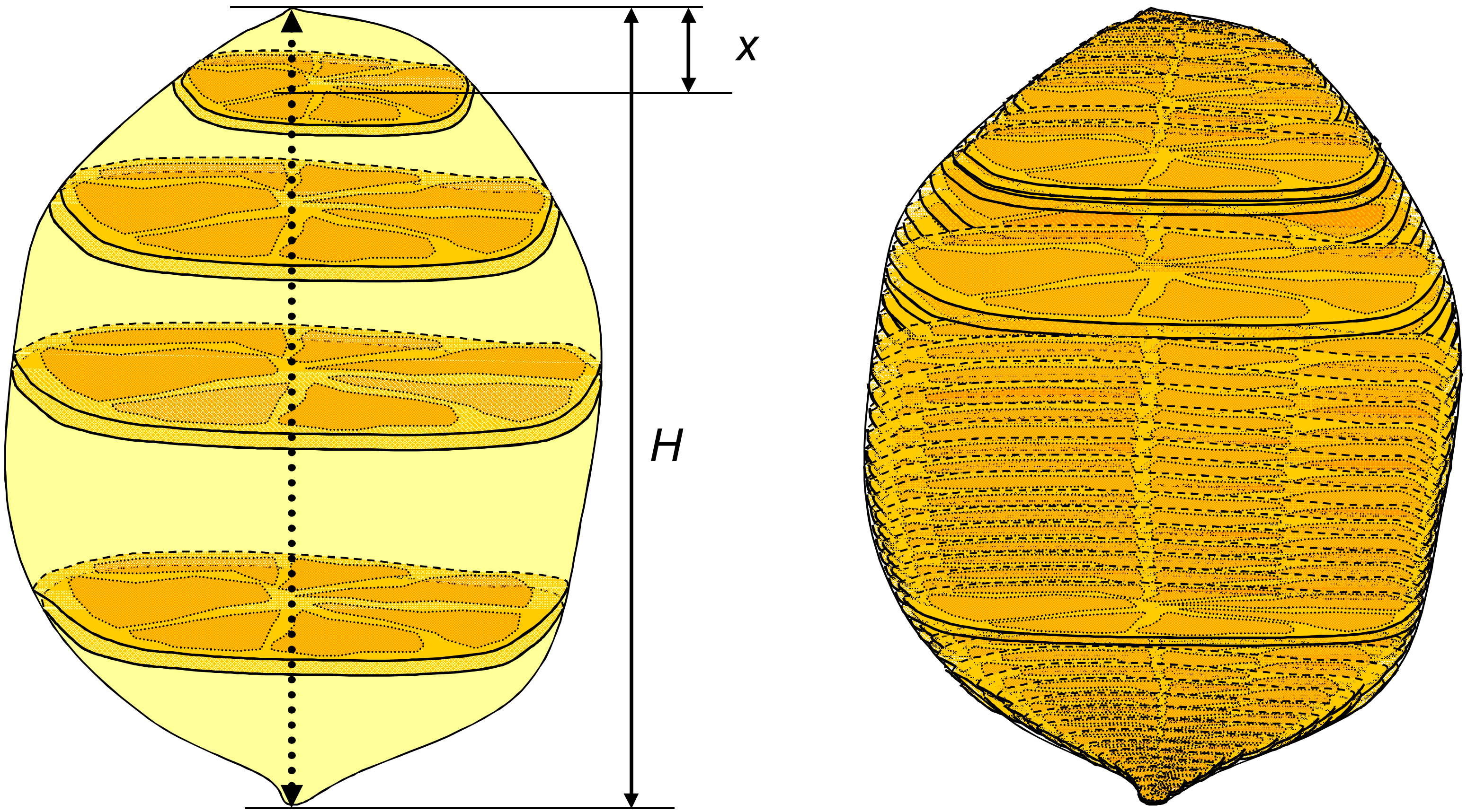
Интегральное исчисление возникло при нахождении площадей и объемов тел.

Математики древней Греции при решении таких задач использовали метод исчерпывания, созданный **Евдоксом Книдским.**

Он стремился найти площади и объемы, разделяя их на бесконечное множество частей, для которых площадь или объем уже известны.

Евдокс Книдский
(408 – 355 года до нашей эры)

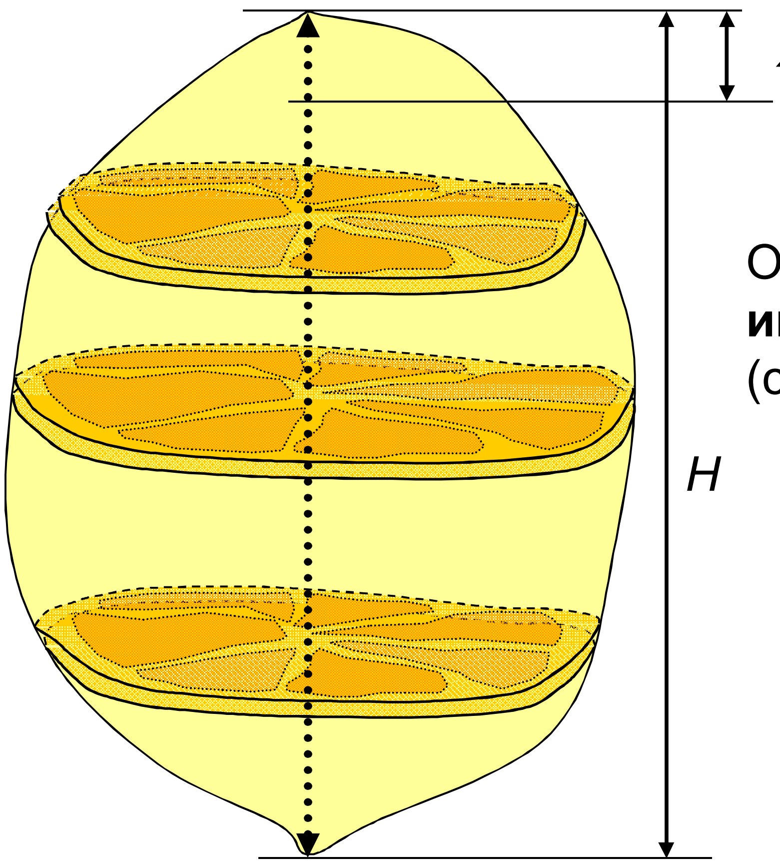
Например, найдём объем лимона. Мы можем разрезать лимон на тонкие доли, размер которых зависит от расстояния x, причем $x \in [0;H]$.

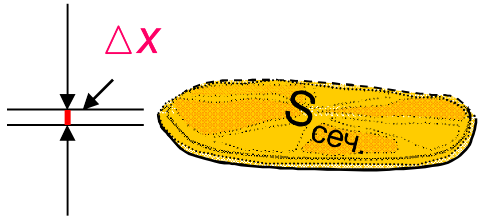


Тогда сумма объемов всех долей даст нам объем всего лимона.

Если принять число разбиений бесконечно большим числом (n→∞), то:

$$\Delta x = \frac{H}{n} \to 0 \qquad \lim_{n\to\infty} \Delta x = \lim_{n\to\infty} \frac{H}{n} = 0$$





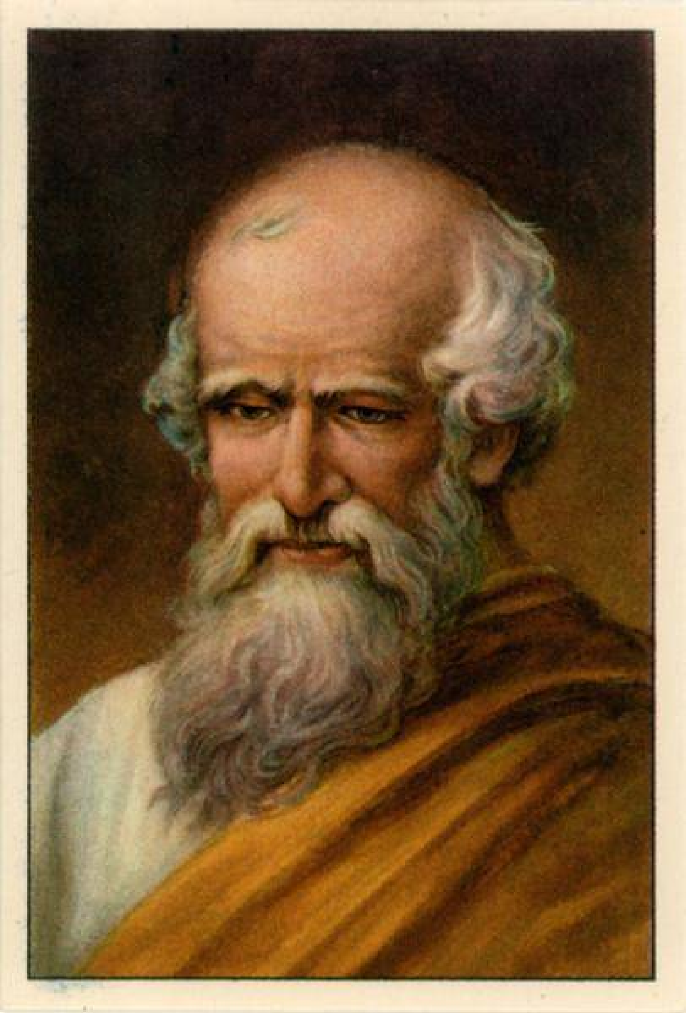
Объем лимона равен **бесконечной интегральной сумме** объёмов таких долей (сечений), зависящих от расстояния *x:*

$$V_{ëèìîíà} = \lim_{n\to\infty}\left(V_1 + V_2 + \ldots + V_n\right) =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\left(\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i \cdot S_i\right) = \int_0^H S_{ñå÷.}\,dx$$

где *H* – высота тела, а $S_{сеч.}$ – некоторая функция, зависящая от *x*, причем $x \in [0;H]$.

Примечание. ∑ – знак суммы.



Архимед
(287 – 212 года до нашей эры)

Метод исчерпывания был далее развит **Архимедом.**

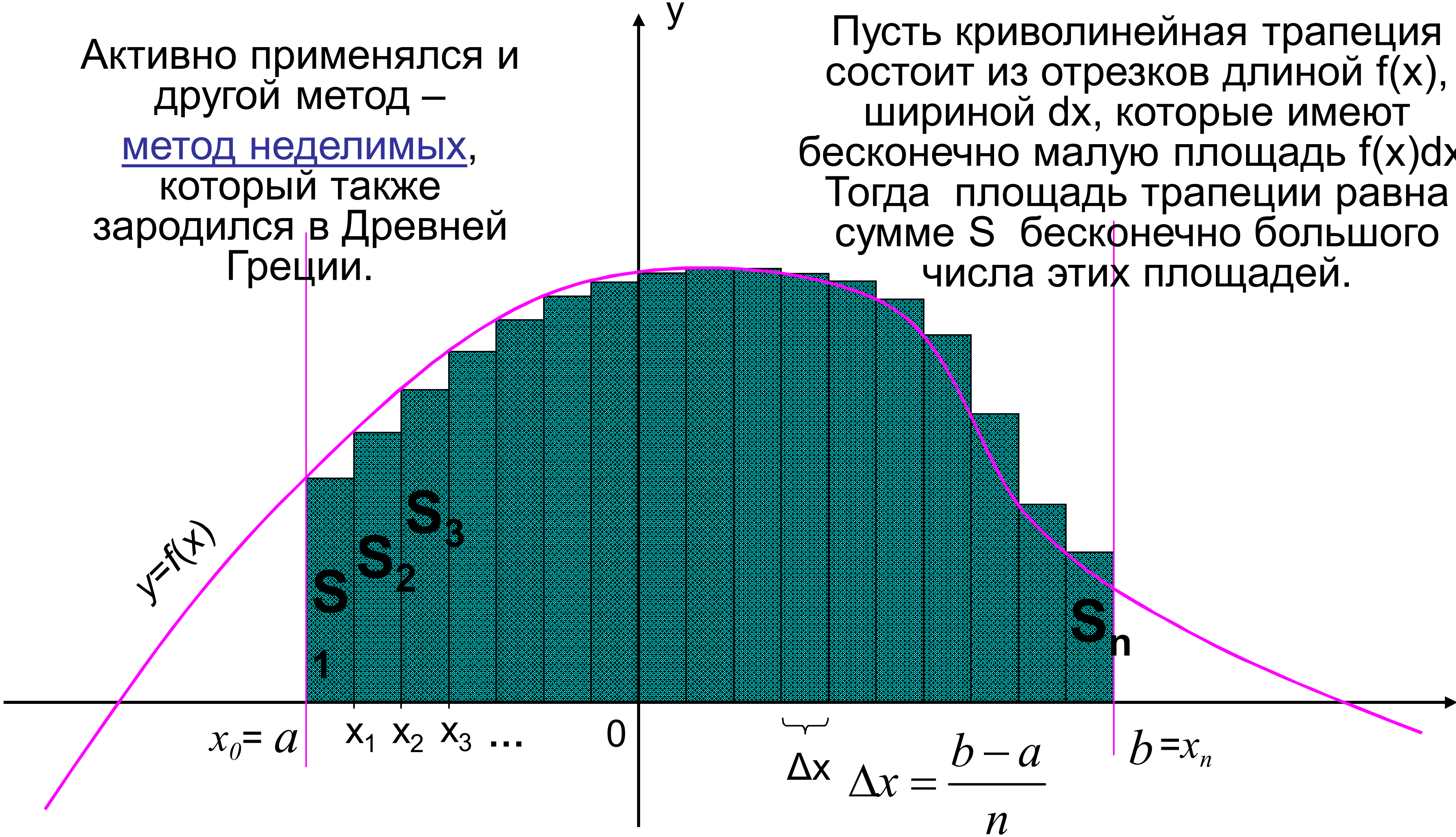
Архимед определил длину окружности и площадь круга, объем и поверхность шара.

В работах «О шаре и цилиндре», «О спиралях», «О коноидах и сферах», он показал, что определение объемов шара, эллипсоида, гиперболоида и параболоида вращения сводится к определению объема конуса и цилиндра.

Архимед разработал и применил методы, подобные созданному в XVII веке интегральному исчислению.

Активно применялся и другой метод – <u>метод неделимых</u>, который также зародился в Древней Греции.

Пусть криволинейная трапеция состоит из отрезков длиной f(x), шириной dx, которые имеют бесконечно малую площадь f(x)dx. Тогда площадь трапеции равна сумме S бесконечно большого числа этих площадей.



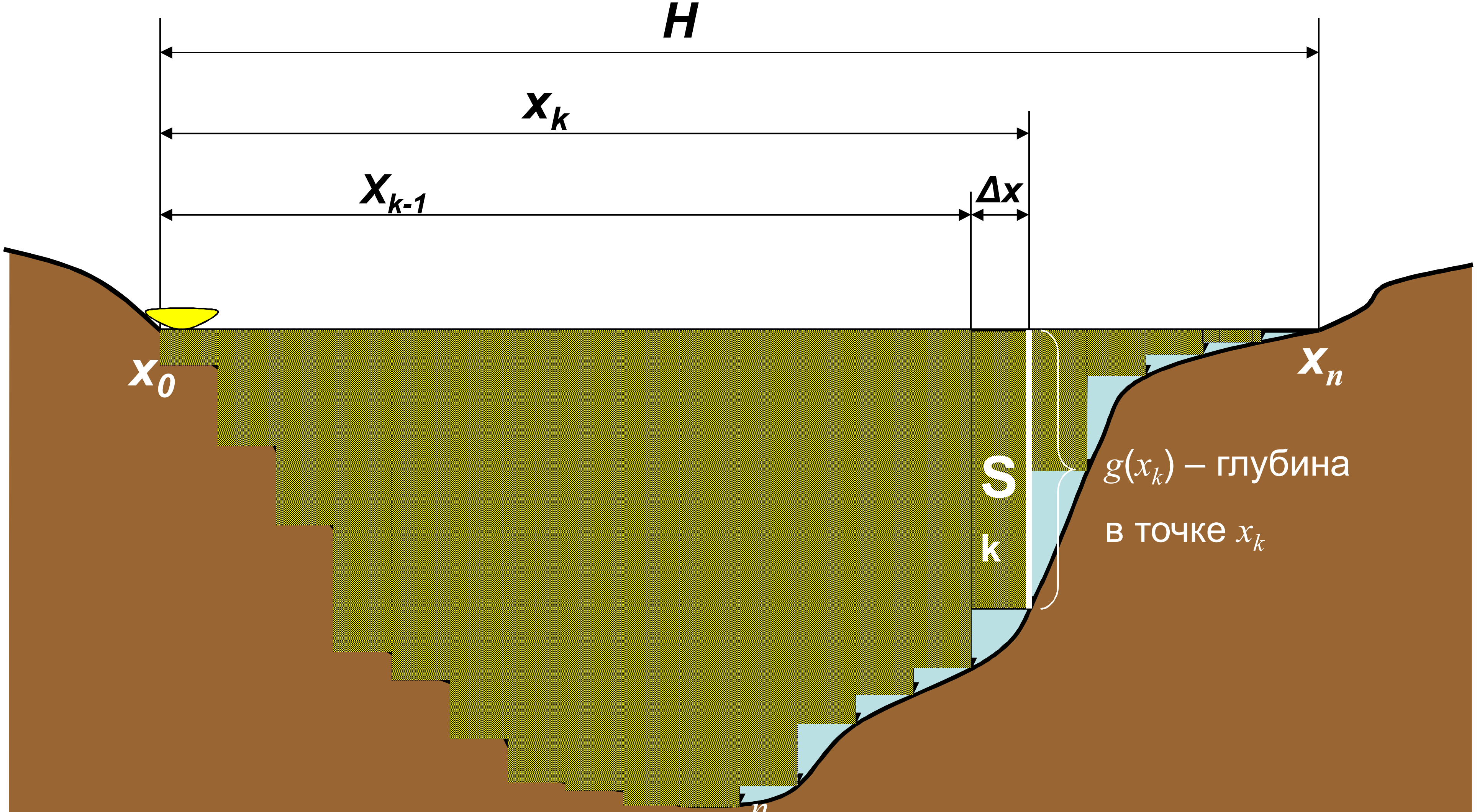
$$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$

$$S_{\text{êð.ò ð.}} \approx S_1 + S_2 + \ldots + S_n = \Delta x \cdot f\left(x_0\right) + \Delta x \cdot f\left(x_1\right) + \ldots + \Delta x \cdot f\left(x_{n-1}\right) =$$

$$= \Delta x \cdot \left(f\left(x_0\right) + f\left(x_1\right) + \ldots + f\left(x_{n-1}\right)\right) = \Delta x \cdot \sum_{k=0}^{n-1} f\left(x_k\right)$$

Например, вычислим площадь сечения реки. Если разбить ширину реки **H** на *n* равных частей, то при $n \to \infty$:

$$\Delta x = \frac{H}{n} \to 0$$



$$S_{\tilde{n}\aa\div.} \approx S_1 + S_2 + \ldots + S_n = \sum_{i=1}^{n} g\left(x_i\right) \cdot \Delta x_i = \int g(x)dx$$

Это бесконечная интегральная сумма.

Иоганн Кеплер
(1571 – 1630)

Прошло более полутора тысяч лет, прежде чем идеи Архимеда были доведены до уровня строгой теории (исчисления).

Первым европейским математиком, получившим новые формулы для площадей фигур и объемов тел, был знаменитый астроном Иоганн **Кеплер**.

Кеплер (1571 - 1630 года) в своих работах "Новая астрономия" (1609 год) и "Стереометрия винных бочек" (1615 год) правильно вычислил некоторые площади (например, площадь эллипса) и объемы (тело резалось на бесконечно тонкие пластинки).

1612 г.

Австрия

город Линц

Общая теория интегралов и дифференциалов была создана во второй половине XVII века в трудах великого английского математика Иссака **Ньютона**

(1643-1716)

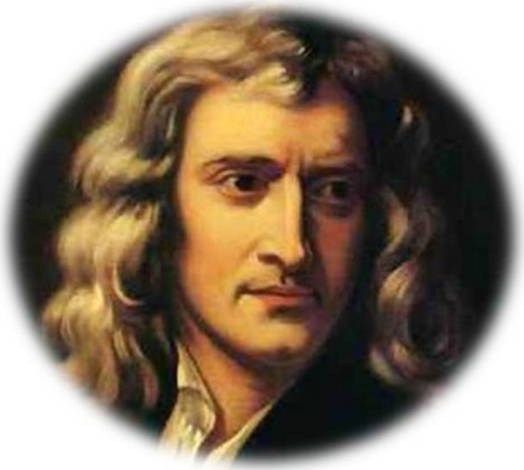
и великого немецкого математика

Якоба Готфрида **Лейбница**

(1646-1716).

Они являются основателями интегрального исчисления.

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$



Символ интеграла введен Лейбницем (1675 г.). Этот знак является изменением латинской буквы S (первой буквы слова сумма), так как площадь криволинейной трапеции есть сумма площадей бесконечно тонких полосок шириной *dx* и высотой *f(x)*.

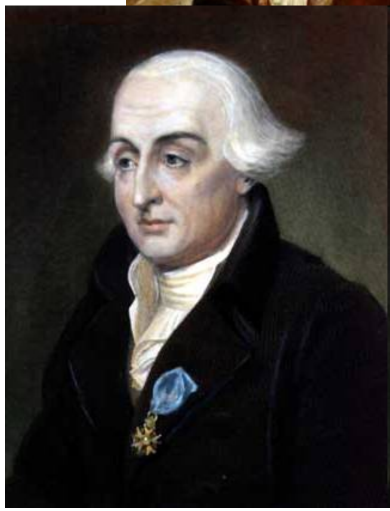
$$\int f(x)dx$$

Краткая история интегрального исчисления

Само слово «интеграл» придумал швейцарский математик **Якоб Бернулли** (1690год) – это значит «восстанавливать» от латинского integro или «целый» от латинского integer.

В1696 году появилось и название нового раздела математики – интегральное исчисление, которое ввел **Иосиф Бернулли**.

Название «первообразная функция» заменило более раннее «примитивная функция», которое ввел **Лагранж** (1797 г.).



Методы математического анализа активно развивались в XVIII веке.

Швейцарский математик и физик Леонард **Эйлер** завершил интегрирование элементарных функций и обобщил понятия интегрирования и дифференцирования в своих трудах.

Строгая теория интеграла появилась только в 19 веке и связана с именами

французского математика Огюстена Луи **Коши** (1789 – 1857)

немецкого учёного

Берндхарда **Римана**

(1826 - 1866 гг.),

французского математика

Жана Гастона **Дарбу**

(1842 - 1917).

Дифференцирование

$$x(t) \quad v(t) \quad a(t)$$

Интегрирование

Интегрирование — операция, обратная операции дифференцирования.

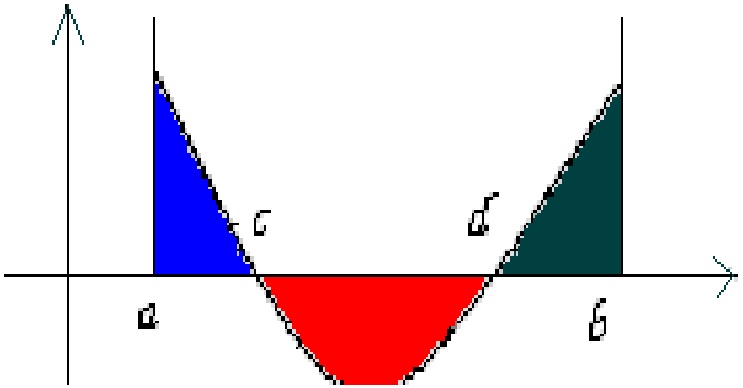
Применение интеграла в геометрии

1. Определение площади плоских фигур

а) если $f(x) \ge 0 \Rightarrow S = \int\limits_a^b f(x)dx$

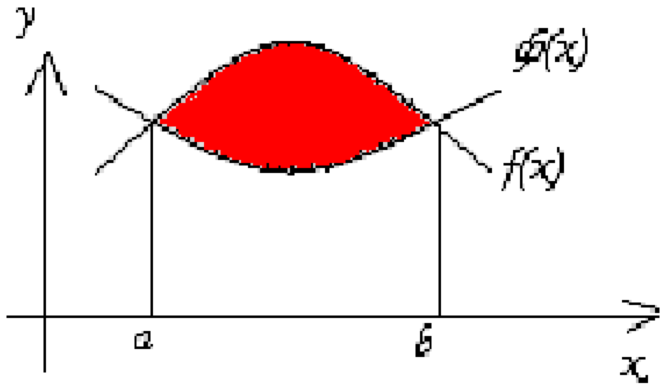
б) если $f(x) < 0 \Rightarrow S = \left|\int\limits_a^b f(x)dx\right|$

в)

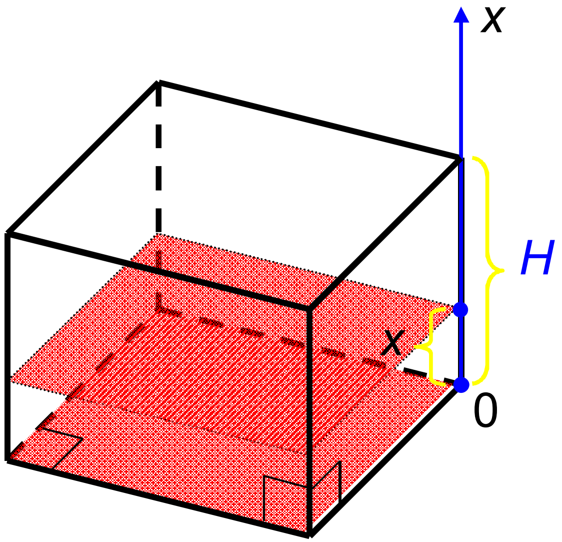


$$S = \int\limits_a^c f(x)dx + \left|\int\limits_c^d f(x)dx\right| + \int\limits_d^b f(x)dx$$

г) $S = \int\limits_a^b [f(x) - \varphi(x)]dx$



Применение интеграла в геометрии



$x \in [0;H]$

1. **Определение объема прямоугольного параллелепипеда**

с высотой H и площадью основания S.

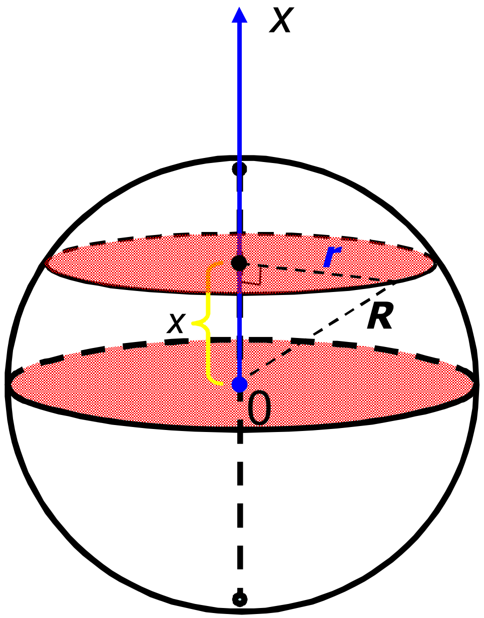
Площадь сечения не изменяется в любой точке отрезка от 0 до H и равна площади основания.

$$V = \int_0^H S_{\text{ńĺ÷.}}\,dx = S_{\text{î ńí.}} \int_0^H dx = S_{\text{î ńí.}} \cdot x \Big|_0^H = S_{\text{î ńí.}} \cdot H \left(\text{ęóá.ĺä.}\right)$$

2. Объем шара с радиусом ***R***.

Найдем объем полушария, как бесконечную интегральную сумму площадей сечения с радиусом *r*, где:

$$r = \sqrt{R^2 - x^2},\ x \in [0; R]$$



$$V_{\text{дî ëóř ŕđč}} = \int_0^R S_{\text{ńĺ÷.}}\,dx = \int_0^R \pi r^2 dx = \pi \int_0^R \left(R^2 - x^2\right)dx =$$

$$= \pi\left(R^2 x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^R = \pi\left(R^3 - \frac{R^3}{3}\right) = \frac{2\pi R^3}{3}\left(\text{ęóá.ĺ ä.}\right)$$

Значит, объем всего шара равен:

$$V_{\text{ř ŕđŕ}} = 2\cdot\frac{2\pi R^3}{3} = \frac{4\pi R^3}{3}\left(\text{ęóá.ĺ ä.}\right)$$

Применение интеграла в физике

Можно определить **путь**, *если известна скорость*

- S - перемещение
- V - скорость
- t – время

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \upsilon(t)dt$$

Можно определить **скорость**, *если известно ускорение*

$$\upsilon = \int_{t_1}^{t_2} a(t)dt$$

- a - ускорение

Применение интеграла в физике

Определить массу тонкого стержня

- m-масса тонкого стержня
- ρ- <u>линейная плотность стержня</u>

$$m = \int_{x_1}^{x_2} \rho(x)dx$$

Применение интеграла в физике

Вычислить работу переменной силы

$$A = \int_{x_1}^{x_2} F(x)dx$$

$$A = \int_{t_1}^{t_2} N(t)dt$$

- A-работа
- F-сила
- N–мощность

Применение интеграла в физике

Определить электрический заряд в проводнике

- q-заряд, который прошёл через сечение проводника за время *t*
- I-сила тока в проводнике

$$q = \int_{t_1}^{t_2} J(t)\,dt$$

Применение интеграла в биологии

Прирост численности популяции

N(t) - прирост численности за промежуток времени от t_0 до T,

v(t) – скорость роста некоторой популяции

$$N(t) = \int_{t_0}^{T} v(t)\,dt$$

Применение интеграла в химии

Количество вступившего в реакцию вещества

m(t) - количество вступившего в реакцию вещества за промежуток времени от t_0 до T,

υ = υ(t) - скорость химических превращений

$$m(T) - m(t_0) = \int_{t_0}^{T} \upsilon(t)\,dt$$

Применение интеграла в экономике

Определение
объема выпуска продукции

Объем V выпуска продукции в течение смены является первообразной для функции *f*(*t*), выражающей продуктивность труда,

где t-рабочее время в часах:

$$V = \int_0^t f(t)\,dt$$

Применение интеграла в технике

Определение *расхода бензина автомобилем*

Известна зависимость расхода бензина Q(t) автомобилем при скорости v от времени t.

Тогда средний расход бензина V за время t:

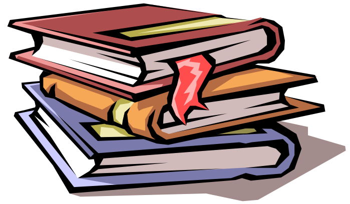
$$V = \int_0^t Q(t)\,dt$$

Вывод

Приведенные примеры решения практических задач с помощью интеграла в математике, физике, биологии, химии, экономике, технике показывают:

- важность интегрального исчисления в современной жизни;
- необходимость тщательного изучения этого раздела математики для успешного овладения будущей профессией.

Список литературы



- Н. А. Колмогоров, «Алгебра и начала анализа», Москва, Просвещение,2000г.
- М. И. Башмаков, «Алгебра и начала анализа», Москва, ДРОФА,2002г.
- Л. В. Киселева, Пособие по математике для студентов медицинских училищ и колледжей, Москва, ФГОУ «ВУНМЦ Росздрава», 2005г.
- http://www.nerungri.edu.ru
- http://tambov.fio.ru
- http://www.zachetka.ru
- http://edu.of.ru
- http://festival.1september.ru