Министерство образования и науки Украины

ХАРЬКОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ АВТОМОБИЛЬНО-ДОРОЖНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

к практическим занятиям по математике
(раздел «Предел функции. Производная. Применения производной»)

для иностранных студентов подготовительных факультетов высших учебных заведений

Утверждено
Методическим советом университета
Протокол № от

Харьков 2015

Составитель: М.А. Волосюк

Кафедра естественных и гуманитарных дисциплин

Методические указания к практическим занятиям по математике предназначены для иностранных студентов, обучающихся на инженерно-технических специальностях подготовительных факультетов высших учебных заведений.

Методические указания составлены в соответствии с учебной программой по «Математике», рекомендуемой Учебно-методической комиссией по довузовской подготовке иностранных граждан, с учетом требований современной теории обучения на неродном для учащихся языке.

Цель методических указаний – способствовать формированию у иностранных студентов общепрофессиональных и коммуникативных компетенций, необходимых им для успешного овладения курсом математики (раздел «Предел функции. Производная. Применения производной») при обучении на основных факультетах высших учебных заведений технического профиля.

ПРЕДЕЛ И НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ

1. Предел функции непрерывного аргумента

Определение. Число b называется ***пределом*** функции $f(x)$ в точке a (при x, стремящемся к a), если для любого положительного числа ε существует зависящее от ε положительное число δ, что при всех $x \neq a$, удовлетворяющих неравенству $|x-a|<\delta$ выполняется неравенство $|f(x)-b|<\varepsilon$.

Обозначение 1: $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$.

Говорят: предел функции «эф» от «икс» при «икс», стремящемся к «а», равен «бэ».

Обозначение 2: $f(x)\to b$ при $x\to a$.

Говорят: функция стремится к «бэ» при «икс», стремящемся к «а».

Замечание. Из определения видно, что для существования предела функции $f(x)$ в точке a необходимо, чтобы функция была определена во всех точках некоторой окрестности точки a, кроме, быть может, самой точки a.

Часто рассматривают ***односторонние пределы*** функции $f(x)$ в точке a: предел слева и предел справа.

Если $x\to a$ и при этом $x<a$, то пишут $x\to a-0$.

Если $x\to a$ и при этом $x>a$, то пишут $x\to a+0$.

Числа $f(a-0)=\lim\limits_{x\to a-0} f(x)$ и $f(a+0)=\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$ называются соответственно ***пределом слева*** функции $f(x)$ в точке a и ***пределом справа*** функции $f(x)$ в точке a.

Для существования предела функции $f(x)$ при $x\to a$ *необходимо и достаточно*, чтобы $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$.

Вместо $x\to 0-0$ и $x\to 0+0$ пишут $x\to -0$ и $x\to +0$ соответственно.

2. Бесконечно малые функции

Функция $f(x)$, которая определена в некоторой окрестности точки a, называется ***бесконечно малой функцией*** при x, стремящемся к a, если $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$.

Свойства бесконечно малых функций

1. Если функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ являются бесконечно малыми при $x\to a$, то их сумма $\alpha(x)+\beta(x)$, произведение $\alpha(x)\cdot\beta(x)$ и $C\cdot\alpha(x)$ (где $C=const$) также являются бесконечно малыми функциями при $x\to a$.

2. Если функция $\beta(x)$ бесконечно малая при $x\to a$ и для всех x, удовлетворяющих условию $|x-a|<\delta$ (кроме, возможно, $x=a$), выполняется неравенство $|\alpha(x)|\le|\beta(x)|$, то функция $\alpha(x)$ также бесконечно малая при $x\to a$.

Связь определения предела функции в точке с бесконечно малыми функциями:

$\lim\limits_{x\to a} f(x)=A \Leftrightarrow f(x)=A+\alpha(x)$, где $\alpha(x)$ – бесконечно малая функция при $x\to a$.

3. Основные теоремы о пределах функций

Теорема 1. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют пределы в точке a, то существуют пределы суммы (разности) и произведения этих функций в точке a, причём:

$$\boxed{\lim_{x\to a}(f(x)\pm g(x))=\lim_{x\to a} f(x)\pm\lim_{x\to a} g(x)}. \qquad (1)$$

Говорят: предел суммы (разности) равен сумме (разности) пределов.

$$\boxed{\lim_{x\to a}(f(x)\cdot g(x))=\lim_{x\to a} f(x)\cdot\lim_{x\to a} g(x)}. \qquad (2)$$

Говорят: предел произведения равен произведению пределов.

Следствие. Если функция $f(x)$ имеет предел в точке a и C – число (постоянный множитель), то функция $Cf(x)$ тоже имеет предел в точке a, причём:

$$\boxed{\lim_{x\to a} Cf(x) = C\lim_{x\to a} f(x)}. \tag{3}$$

Говорят: постоянный множитель C можно вынести за знак предела.

Теорема 2. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют пределы в точке a и $\lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0$, то существует предел частного этих функций в точке a, причём:

$$\boxed{\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}}. \tag{4}$$

Говорят: предел частного двух функций равен частному пределов этих функций.

Предел постоянной функции в любой точке a равен этой же постоянной: $\lim\limits_{x\to a} k = k$.

Предел функции $f(x) = x$ в любой точке a равен a: $\lim\limits_{x\to a} x = a$.

Примеры. Вычислите пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 3} x^2$. *Решение.* Так как $\lim\limits_{x\to 3} x = 3$, то по теореме о пределе произведения $\lim\limits_{x\to 3} x^2 = \lim\limits_{x\to 3}(x\cdot x) = \lim\limits_{x\to 3} x \cdot \lim\limits_{x\to 3} x = 3\cdot 3 = 9$.

б) $\lim\limits_{x\to 2}(2x+3)$. *Решение.* По следствию теоремы о пределе произведения $\lim\limits_{x\to 2} 2x = 2\lim\limits_{x\to 2} x = 2\cdot 2 = 4$. Кроме того, $\lim\limits_{x\to 2} 3 = 3$. Применяя теорему о пределе суммы, находим:

$$\lim_{x\to 2}(2x+3) = \lim_{x\to 2} 2x + \lim_{x\to 2} 3 = 4+3 = 7.$$

в) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^2+2}{4x-1}$. *Решение.* Последовательно применяя теоремы о пределе суммы, произведения и частного, находим:

$$\lim_{x\to 2}\frac{3x^2+2}{4x-1}=\frac{\lim\limits_{x\to 2}(3x^2+2)}{\lim\limits_{x\to 2}(4x-1)}=\frac{\lim\limits_{x\to 2}3x^2+\lim\limits_{x\to 2}2}{\lim\limits_{x\to 2}4x-\lim\limits_{x\to 2}1}=$$

$$=\frac{3\lim\limits_{x\to 2}x\cdot\lim\limits_{x\to 2}x+2}{4\lim\limits_{x\to 2}x-1}=\frac{3\cdot 2\cdot 2+2}{4\cdot 2-1}=\frac{14}{7}=2.$$

4. Непрерывность функции в точке

Определение. Функция $f(x)$ называется ***непрерывной*** в точке x_0, если она определена в некоторой окрестности x_0 и

$$\boxed{\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)}. \tag{5}$$

Пример 1. При $x_0>0$ $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt{x}=\sqrt{x_0}$. Значит, функция $y=\sqrt{x}$ непрерывна при всех $x_0>0$.

Пример 2. Для функции $g(x)=x$ $\lim\limits_{x\to x_0}x=x_0$. Значит, функция $g(x)=x$ непрерывна в любой точке.

Пример 3. Для постоянной функции $f(x)=C$ при любом x_0 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=C$. Значит, постоянная функция непрерывна.

Из теорем о пределах суммы, произведения и частного получаем:

Теорема 1. *Сумма, произведение и частное* непрерывных в точке x_0 функций (частное в случае, когда знаменатель не обращается в точке x_0 в нуль) *есть функции, непрерывные* в точке x_0.

Любая рациональная функция получается из непрерывных функций $f(x)=C$ и $g(x)=x$ последовательным применением сложения, умножения и деления. Поэтому из теоремы 1 вытекает:

Теорема 2. *Рациональная функция непрерывна* во всех точках, в которых она определена.

В частности, целые рациональные функции, т. е. функции, которые можно представить в виде многочленов, непрерывны во всех точках числовой прямой.

Если функция $f(x)$ непрерывна в каждой точке промежутка I, то говорят, что функция ***непрерывна на этом промежутке***. Сам промежуток I при этом называется промежутком непрерывности функции $f(x)$. Кусок графика такой функции, соответствующий промежутку I, представляет собой непрерывную линию, т. е. линию, которую можно нарисовать, «не отрывая карандаша от бумаги».

Например, функция $f_1(x)=x^2$ непрерывна на всей прямой, а функция $f_2(x)=\dfrac{1}{x}$ непрерывна на промежутках $]-\infty;0[$ и $]0;+\infty[$.

Свойство непрерывных функций: если функция $f(x)$ на интервале $]a;b[$ непрерывна и не обращается в нуль, то она на этом интервале сохраняет постоянный знак.

На этом факте основан метод решения неравенств с одной переменной, называемый ***методом интервалов***.

Задания для самостоятельной работы

Задание 1. Прочитайте, напишите, переведите на родной язык новые слова и словосочетания. Запомните их!

предел функции
односторонний предел
предел слева (справа)
бесконечно малая (большая) функция
предел постоянной функции

непрерывность функции в точке
непрерывность функции на промежутке
сохранять постоянный знак

Задание 2. Ответьте на вопросы. Используйте информацию текста.

1) Что называется пределом функции?
2) Чему равен предел суммы (разности) функций?
3) Чему равен предел произведения функций?
4) Чему равен предел частного двух функций?
5) Какая функция называется непрерывной в данной точке?
6) Какая функция называется непрерывной на данном интервале?

Задание 3. Закончите предложение. Используйте информацию текста.

Для существования предела функции $f(x)$ при $x \to a$ необходимо и достаточно, чтобы …

Функция $\alpha(x)$ называется бесконечно малой при $x \to a$ ($x \to \infty$), если …

Постоянный множитель C можно вынести …

Предел постоянной функции в любой точке a равен …

Предел функции $f(x) = x$ в любой точке a равен …

Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если …

Если функция $f(x)$ непрерывна в каждой точке промежутка, то …

Если функция $f(x)$ на интервале $]a;b[$ непрерывна и не обращается в нуль, то …

Задание 4. Напишите существительные и прилагательные во множественном числе.

<u>Образец:</u> односторонний предел – ….
односторонний предел – односторонние пределы.

Бесконечно малая функция; бесконечно большая функция; непрерывная функция.

Задание 5. Прочитайте правильно эти обозначения. Используйте информацию текста.

Образец: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ – предел функции $f(x)$ при x, стремящемся к a, равен b;

$f(x) \to b$ при $x \to a$ – …

$x \to a - 0$ – …

$x \to a + 0$ – …

$\lim\limits_{x \to a-0} f(x)$ – …

$\lim\limits_{x \to a+0} f(x)$ – …

Задание 6. Прочитайте правильно эти формулы. Используйте информацию текста.

$$\lim_{x \to a-0} f(x) = \lim_{x \to a+0} f(x)$$

$$0 < |x - a| < \delta(\varepsilon)$$

$$\lim_{x \to a} \alpha(x) = 0$$

$$\lim_{x \to a} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \to a} f(x) \pm \lim_{x \to a} g(x)$$

$$\lim_{x \to a} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x)$$

$$\lim_{x \to a} Cf(x) = C \lim_{x \to a} f(x)$$

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)}$$

$$\lim_{x \to a} k = k$$

$$\lim_{x \to a} x = a$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Задание 7. Выполните упражнения.

1. Найдите пределы функций:

1) $\lim\limits_{x\to 3}(x^3+2x-1)$;

2) $\lim\limits_{x\to 3}(x^2+x+5)$;

3) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+2x}{4x+1}$;

4) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}$;

5) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-9}{x-5}$;

6) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{x^2-9}$.

Ответ: 1) 32; 2) 11; 3) 1; 4) 2; 5) 2; 6) $\dfrac{1}{6}$.

2. Является ли функция непрерывной в каждой точке данного промежутка:

1) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-2}, (0;+\infty)$;

2) $f(x)=\dfrac{x-3}{x-1}, (2;+\infty)$;

3) $f(x)=x^2-3x, (-\infty;+\infty)$.

ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ

1. Определение производной функции

Определение. ***Производной функции*** $y=f(x)$ в точке x_0 называется предел отношения приращения функции в точке x_0 $\left(\Delta y=\Delta f(x)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\right)$ к приращению аргумента (Δx), когда приращение аргумента стремится к нулю $(\Delta x\to 0)$(при условии, что этот предел существует) (рис. 1):

$$\boxed{y'=f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}}. \qquad (6)$$

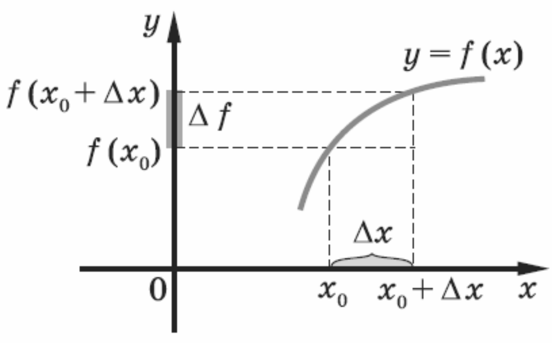


Рисунок 1

Обозначения производной: y', $f'(x)$, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{df(x)}{dx}$.

Читают:

y' – игрек штрих, $\frac{dy}{dx}$ – дэ игрек по дэ икс,

$f'(x)$ – эф штрих от икс, $\frac{df(x)}{dx}$ – дэ эф от икс по дэ икс.

Производная характеризует скорость изменения функции при изменениии аргумента.

Если предел в точке x_0 (или на промежутке X) конечный, то функция $y = f(x)$ называется ***дифференцируемой*** в этой точке (или на промежутке X).

Действие (операция) нахождения производной называется ***дифференцированием*** функции.

Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0, то она ***непрерывна в этой точке***.

Если функция $y = f(x)$ дифференцируема на промежутке (то есть в каждой его точке), то она ***непрерывна на этом промежутке***.

Замечание. Если функция непрерывна в данной точке, то она не обязательно дифференцируема в этой точке.

Если предел равен $+\infty$ (или $-\infty$), то говорят, что функция $y = f(x)$ имеет в точке x_0 бесконечную производную (при дополнительном условии, что функция в этой точке непрерывна).

Алгоритм нахождения производной функции $y = f(x)$ по определению:

1. Найти приращение функции $\Delta y = \Delta f(x) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$, соответствующее приращению аргумента Δx.

2. Найти отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

3. Выяснить, к какому пределу стремится отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ при $\Delta x \to 0$. Это и будет производной данной функции.

<u>Пример 1.</u> Вычислим производную функции $y = C$ (то есть $f(x) = C$), где C – постоянная.

Решение.

1) Найдем приращение функции, соответствующее приращению аргумента Δx:

$\Delta y = \Delta f(x) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = C - C = 0$.

2) Найдем отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0}{\Delta x} = 0$

3) Поскольку отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ постоянно и равно нулю, то и предел этого отношения при $\Delta x \to 0$ также равен нулю. Следовательно, $y' = 0$, то есть $C' = 0$ (производная константы равна нулю).

Ответ: $C' = 0$.

<u>Пример 2.</u> Вычислим производную функции $y = x$ (то есть $f(x) = x$).

Решение.

1) $\Delta y = \Delta f(x) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = x_0 + \Delta x - x_0 = \Delta x$.

2) $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1$.

3) Поскольку отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ постоянно и равно 1, то и предел этого отношения при $\Delta x \to 0$ также равен единице. Следовательно, $y' = 1$, то есть $x' = 1$.

Ответ: $x' = 1$.

Найденные аналогичным образом производные элементарных функций сведены в таблицу.

2. Производные элементарных функций

1	$C' = 0$, $(C - const)$	2	$x' = 1$
3	$\left(x^n\right)' = nx^{n-1}$	4	$\left(a^x\right)' = a^x \ln a$, $(a > 0)$
5	$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$, $(x \neq 0)$	6	$\left(e^x\right)' = e^x$
7	$(\ln x)' = \frac{1}{x}$, $(x > 0)$	8	$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$, $(x > 0, a > 0, a \neq 1)$
9	$\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $(x > 0)$	10	$\left(\sqrt[n]{x}\right)' = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$, (на ОДЗ правой части формулы)
11	$(\sin x)' = \cos x$	12	$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
13	$(\cos x)' = -\sin x$	14	$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
15	$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	16	$(\operatorname{arc tg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$
17	$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	18	$(\operatorname{arc ctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$

<u>Пример.</u> Найдите производные функций:

1) $y = x^6;\ y' = \left(x^6\right)' = 6x^{6-1} = 6x^5;$

2) $y = x^{-5};\ y' = \left(x^{-5}\right)' = -5x^{-5-1} = -5x^{-6};$

3) $y = x^{\frac{2}{3}};\ y' = \left(x^{\frac{2}{3}}\right)' = \frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1} = \frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-\frac{3}{3}} = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}};$

4) $y = \frac{1}{x^4};\ y' = \left(\frac{1}{x^4}\right)' = \left(x^{-4}\right)' = -4x^{-4-1} = -4x^{-5} = -\frac{4}{x^5};$

5) $y = \sqrt[6]{x^5}$; $y' = \left(\sqrt[6]{x^5}\right)' = \left(x^{\frac{5}{6}}\right)' = \frac{5}{6}x^{\frac{5}{6}-1} = \frac{5}{6}x^{\frac{5}{6}-\frac{6}{6}} =$

$= \frac{5}{6}x^{-\frac{1}{6}} = \frac{5}{6}\cdot\frac{1}{x^{\frac{1}{6}}} = \frac{5}{6}\cdot\frac{1}{\sqrt[6]{x}} = \frac{5}{6\sqrt[6]{x}}$;

6) $y = x^4\cdot\sqrt[5]{x}$; $y' = \left(x^4\cdot\sqrt[5]{x}\right)' = \left(x^4\cdot x^{\frac{1}{5}}\right)' = \left(x^{4+\frac{1}{5}}\right)' =$

$= \left(x^{\frac{21}{5}}\right)' = \frac{21}{5}x^{\frac{21}{5}-1} = \frac{21}{5}x^{\frac{16}{5}} = 4\frac{1}{5}x^{3\frac{1}{5}} = 4\frac{1}{5}\cdot x^3\cdot\sqrt[5]{x}$.

3. Основные теоремы о производных

Предполагаем, что рассматриваемые функции определены в некоторой окрестности точки x_0.

Теорема 1. Если функции U и V дифференцируемы в точке x_0, то их сумма (разность) дифференцируема в этой же точке и

$$\boxed{\left(U \pm V\right) = U' \pm V'}. \tag{7}$$

Говорят: производная суммы (разности) равна сумме (разности) производных.

Пример 1. Найдите производные функций:

1) $f\left(x\right) = x + \sqrt{x} - 9x^6$;

$f'\left(x\right) = \left(x + \sqrt{x} - 9x^6\right)' = \left(x\right)' + \left(\sqrt{x}\right)' - \left(9x^6\right)' = 1 + \frac{1}{2\sqrt{x}} - 54x^5$;

2) $y = \cos x + \sin x + 5$;

$y' = \left(\cos x + \sin x + 5\right)' = \left(\cos x\right)' + \left(\sin x\right)' + \left(5\right)' = -\sin x + \cos x$;

3) $y = x^6 + \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x + 7$;

$$y' = \left(x^6 + \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x + 7\right)' = \left(x^6\right)' + \left(\operatorname{tg} x\right)' - \left(\operatorname{ctg} x\right)' + \left(7\right)' =$$

$$= 6x^5 + \frac{1}{\cos^2 x} - \left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right) + 0 = 6x^5 + \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x};$$

4) $y = 3e^x + 5^x - 9$; $y' = \left(3e^x + 5^x - 9\right)' = 3e^x + 5^x \ln 5$.

Теорема 2. Если функции U и V дифференцируемы в точке x_0, то их произведение дифференцируемо в этой же точке и

$$\boxed{(UV)' = U'V + UV'}. \tag{8}$$

Говорят: производная произведения равна сумме произведений производной первой функции на вторую и производной второй функции на первую.

Пример 2. Найдите производные функций:

1) $f(x) = (x+2)x^2$;

$$f'(x) = \left((x+2)x^2\right)' = (x+2)' x^2 + (x+2)\left(x^2\right)' =$$

$$= (x' + 2')x^2 + (x+2)\cdot 2x = (1+0)x^2 + 2x(x+2) = 3x^2 + 4x;$$

2) $f(x) = \left(x^2 - 3\right)\left(x^3 - 2\right)$;

$$f'(x) = \left(\left(x^2 - 3\right)\left(x^3 - 2\right)\right)' = \left(x^2 - 3\right)'\left(x^3 - 2\right) +$$

$$+\left(x^2 - 3\right)\left(x^3 - 2\right)' = 2x \cdot \left(x^3 - 2\right) + \left(x^2 - 3\right) \cdot 3x^2 =$$

$$= 2x^4 - 4x + 3x^4 - 9x^2 = 5x^4 - 9x^2 - 4x;$$

3) $y = x^2 \log_2 x$;

$$y' = \left(x^2 \log_2 x\right)' = \left(x^2\right)' \log_2 x + x^2 \left(\log_2 x\right)' =$$

$$= 2x \log_2 x + x^2 \cdot \frac{1}{x \ln 2} = 2x \log_2 x + \frac{x}{\ln 2};$$

4) $y = \sqrt{x}\lg x$;

$$y' = \left(\sqrt{x}\lg x\right)' = \left(\sqrt{x}\right)'\lg x + \sqrt{x}\left(\log_{10} x\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}\lg x + \sqrt{x}\frac{1}{x\ln 10}.$$

<u>Следствие.</u> Если функция U дифференцируема в точке x_0, а C – постоянная, то функция CU дифференцируема в этой точке и

$$\boxed{(CU)' = CU'}. \tag{9}$$

<u>Говорят:</u> постоянный множитель выносится за знак производной.

<u>Пример 3.</u> Найдите производные функций:

1) $f(x) = 4x^5$; $f'(x) = \left(4x^5\right)' = 4\left(x^5\right)' = 4\cdot 5x^{5-1} = 20x^4$;

2) $f(x) = -\dfrac{x^2}{6}$; $f'(x) = \left(-\dfrac{x^2}{6}\right)' = \left(-\dfrac{1}{6}\cdot x^2\right)' = -\dfrac{1}{6}\cdot\left(x^2\right)' =$

$= -\dfrac{1}{6}\cdot 2x^{2-1} = -\dfrac{1}{3}x$;

3) $f(x) = \dfrac{3}{5x^4}$; $f'(x) = \left(\dfrac{3}{5x^4}\right)' = \left(\dfrac{3}{5}\cdot\dfrac{1}{x^4}\right)' = \left(\dfrac{3}{5}\cdot x^{-4}\right)' =$

$= \dfrac{3}{5}\cdot\left(x^{-4}\right)' = \dfrac{3}{5}\cdot\left(-4x^{-4-1}\right) = \dfrac{3}{5}\cdot\left(-4x^{-5}\right) = -\dfrac{12}{5x^5}$.

<u>Теорема 3.</u> Если функции U и V дифференцируемы в точке x_0 и функция V не равна нулю в этой точке, то частное $\dfrac{U}{V}$ тоже дифференцируемо в этой точке и

$$\boxed{\left(\frac{U}{V}\right)' = \frac{U'V - V'U}{V^2}}. \tag{10}$$

Говорят: производная частного двух функций равна дроби, в числителе которой разность произведений производной числителя на знаменатель и производной знаменателя на числитель, а в знаменателе – квадрат знаменателя функции.

Пример 4. Найдите производные функций:

1) $f(x)=\dfrac{1}{x}$,

$$f'(x)=\left(\frac{1}{x}\right)'=\frac{1'\cdot x-x'\cdot 1}{x^2}=\frac{0\cdot x-1\cdot 1}{x^2}=\frac{-1}{x^2}=-\frac{1}{x^2};$$

2) $f(x)=\dfrac{3-2x}{5x+3}$;

$$f'(x)=\left(\frac{3-2x}{5x+3}\right)'=\frac{(3-2x)'(5x+3)-(3-2x)(5x+3)'}{(5x+3)^2}=$$

$$=\frac{-2(5x+3)-(3-2x)\cdot 5}{(5x+3)^2}=\frac{-10x-6-15+10x}{(5x+3)^2}=\frac{-21}{(5x+3)^2};$$

3) $y=\dfrac{\ln x}{x}$;

$$y'=\left(\frac{\ln x}{x}\right)'=\frac{(\ln x)'\cdot x-\ln x\cdot x'}{x^2}=\frac{\frac{1}{x}\cdot x-\ln x\cdot 1}{x^2}=\frac{1-\ln x}{x^2}.$$

4. Производная сложной функций

При нахождении производной удобно представлять заданную функцию $y(x)$ в виде сложной, составленной из более простых и известных функций.

Если $y=f(u)$, а $u=\varphi(x)$, то y называется функцией от функции или ***сложной функцией*** от x: $y=f(\varphi(x))$.

Производная сложной функции равна:

$$\boxed{y'=f'(u)\cdot u'} \text{ или } \frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}. \qquad (11)$$

	Функция	Производная функции
1	$y=U^n$	$y'=\left(u^n\right)'=nu^{n-1}\cdot u'$
2	$y=\dfrac{1}{u}$	$y'=\left(\dfrac{1}{u}\right)'=-\dfrac{1}{u^2}\cdot u'\,,\left(u\neq 0\right)$
3	$y=\sqrt{u}$	$y'=\left(\sqrt{u}\right)'=\dfrac{1}{2\sqrt{u}}\cdot u'\,,\left(u>0\right)$
4	$y=a^u$	$y'=\left(a^u\right)'=a^u\ln a\cdot u'\,,\left(a>0\right)$
5	$y=e^u$	$y'=\left(e^u\right)'=e^u\cdot u'$
6	$y=\log_a u$	$y'=\left(\log_a u\right)'=\dfrac{1}{u\ln a}\cdot u'\,,\ \left(u>0,a>0,a\neq 1\right)$
7	$y=\ln u$	$y'=\left(\ln u\right)'=\dfrac{1}{u}\cdot u',\left(u>0\right)$
8	$y=\sin u$	$y'=\left(\sin u\right)'=\cos u\cdot u'$
9	$y=\cos u$	$y'=\left(\cos u\right)'=-\sin u\cdot u'$
10	$y=\operatorname{tg} u$	$y'=\left(\operatorname{tg} u\right)'=\dfrac{1}{\cos^2 u}\cdot u'$
11	$y=\operatorname{ctg} u$	$y'=\left(\operatorname{ctg} u\right)'=-\dfrac{1}{\sin^2 u}\cdot u'$
12	$y=\arcsin u$	$y'=\left(\arcsin u\right)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u'$
13	$y=\arccos u$	$y'=\left(\arccos u\right)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u'$
14	$y=\operatorname{arc\,tg} u$	$y'=\left(\operatorname{arc\,tg} u\right)'=\dfrac{1}{1+u^2}\cdot u'$
15	$y=\operatorname{arcctg} u$	$y'=\left(\operatorname{arcctg} u\right)'=-\dfrac{1}{1+u^2}\cdot u'$

Пример. Найдите производную функции:

1) $y=\sqrt{9-x^2}$; $y'=\left(\sqrt{9-x^2}\right)'=\dfrac{1}{2\sqrt{9-x^2}}\cdot\left(9-x^2\right)'=$

$=\dfrac{1}{2\sqrt{9-x^2}}\cdot(-2x)=-\dfrac{x}{\sqrt{9-x^2}}$;

2) $y=\cos(2x+3)$; $y'=\left(\cos(2x+3)\right)'=-\sin(2x+3)\cdot(2x+3)'=$
$=-2\sin(2x+3)$;

3) $y=(2x+3)^7$; $y'=\left((2x+3)^7\right)'=7(2x+3)^6\cdot(2x+3)'=$

$=14(2x+3)^6$;

4) $y=\sin^3 x$; $y'=\left(\sin^3 x\right)'=3\sin^2 x\cdot(\sin x)'=3\sin^2 x\cdot\cos x$;

5) $y=e^{5x}$; $y'=\left(e^{5x}\right)'=e^{5x}\cdot(5x)'=5e^{5x}$;

6) $y=6^{2x-5}$; $y'=\left(6^{2x-5}\right)'=6^{2x-5}\ln 6\cdot(2x-5)'=2\cdot 6^{2x-5}\ln 6$;

7) $y=\log_4\left(x^2+3x-4\right)$; $y'=\left(\log_4\left(x^2+3x-4\right)\right)'=$
$=\dfrac{1}{\left(x^2+3x-4\right)\ln 4}\cdot\left(x^2+3x-4\right)'=\dfrac{2x+3}{\left(x^2+3x-4\right)\ln 4}$.

6. Геометрический смысл производной и уравнение касательной к графику функции

Рассмотрим график непрерывной на некотором промежутке функции $y=f(x)$ и точку $M(x_0;f(x_0))$ на кривой графика (рис. 2). Возьмём на этой кривой другую точку $N(x_0+\Delta x);f(x_0+\Delta x))$ и проведём прямую через точки M и N. Эту прямую называют ***секущей*** (рис. 2).

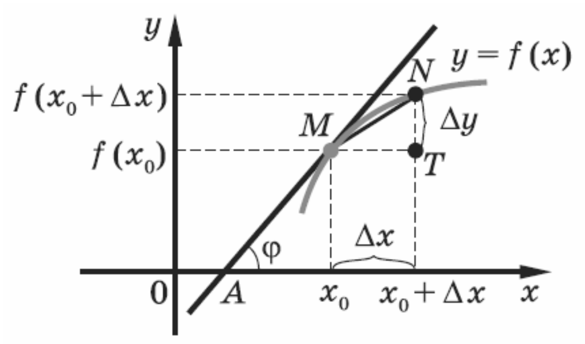


Рисунок 2

Придавая Δx значения, приближающиеся к нулю, мы получим, что точка N будет приближаться к точке M, а прямая MN будет поворачиваться вокруг точки M (см. рис. 2). При этом секущая MN стремится к некоторому предельному положению AM.

Касательной к кривой в данной точке M называется предельное положение секущей MN (рис. 3).

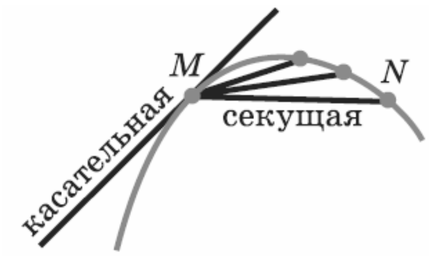


Рисунок 3

Когда точка N приближается к точке M (двигаясь по графику функции $y = f(x)$), то величина угла NMT приближается к величине угла φ наклона касательной AM к оси Ox.

Так как $\operatorname{tg}\angle NMT = \dfrac{NT}{MT} = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$, то $\operatorname{tg}\varphi = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

С другой стороны, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$ и, следовательно, $\operatorname{tg}\varphi = f'(x_0)$.

Значение производной в точке x_0 равно тангенсу угла наклона касательной к графику функции в точке с абсциссой x_0, т.е. равно угловому коэффициенту k этой касательной:

$$\boxed{f'\left(x_0\right) = \operatorname{tg}\varphi = k}. \tag{12}$$

Замечание. Угол отсчитывается от положительного направления оси Ox против часовой стрелки.

Геометрический смысл производной: если функция $y = f(x)$ в точке x_0 имеет производную, то в этой точке определена касательная к графику функции, причем ее угловой коэффициент равен $f'(x_0)$.

Выведем уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $M(x_0; f(x_0))$.

Уравнение прямой с угловым коэффициентом $k = f'(x_0)$ имеет вид: $y = kx + b$. Для вычисления b воспользуемся тем, что касательная проходит через точку $M(x_0; f(x_0))$:

$f(x_0) = f'(x_0) \cdot x_0 + b$, откуда $b = f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0$.

Следовательно, имеем:

$y = kx + b = f'(x_0) \cdot x + f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0 = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.

Уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0:

$$\boxed{y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}. \qquad (13)$$

Замечание. Касательная к графику функции может пересекать этот график в другой точке, в отличие от касательной к окружности, которая имеет с окружностью только одну общую точку.

7. Механический смысл производной

Мгновенная скорость движения точки по прямой. Рассмотрим движение материальной точки по прямой (задача из курса физики). Пусть координата x точки в момент времени t равна $x(t)$. Тогда абсцисса x этой точки есть функция времени t, то есть $x = x(t)$. За промежуток времени от t до $t + \Delta t$ точка проходит путь, равный $x(t + \Delta t) - x(t) = \Delta x$, со средней скоростью:

$$\upsilon_{\text{ср}} = \frac{\Delta x}{\Delta t}.$$

Предел этого отношения при $\Delta t \to 0$ называется скоростью точки в момент времени t (или ***мгновенной скоростью***):

$$\upsilon(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}.$$

С другой стороны, $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta x}{\Delta t} = x'(t)$ и, следовательно:

$$\boxed{\upsilon(t) = x'(t)}. \tag{14}$$

Механический смысл производной: производная от координаты по времени есть мгновенная скорость движения точки.

Скорость υ движения точки есть функция от времени t, т. е. $\upsilon = \upsilon(t)$. Производная этой функции по времени называется ***ускорением*** движения:

$$\boxed{a(t) = \upsilon'(t)}. \tag{15}$$

<u>Говорят:</u> производная от мгновенной скорости по времени есть мгновенное ускорение.

7. Производные высших порядков

Если функция $y = f(x)$ имеет производную $y' = f'(x)$ во всех точках некоторого промежутка, то эту производную можно рассматривать как функцию от аргумента x.

Если функция $y' = f'(x)$ является дифференцируемой, то ее производную называют ***второй производной*** или ***производной второго порядка*** функции $y = f(x)$ и <u>обозначают:</u>

$$y'' = f''(x) \text{ или } \frac{d^2 y}{dx^2}.$$

По аналогии со второй производной определяют и ***производные высших порядков***.

Производную от второй производной функции $f(x)$ называют ***третьей производной,*** или ***производной третьего порядка*** этой функции, и т. д.

Производной n***-го порядка*** функции $f(x)$ называют производную от производной $(n-1)$-го порядка этой функции. Производную n-го порядка функции $f(x)$ обозначают:

$$y^{(n)} = f^{(n)}(x) = \frac{d^n y}{dx^n}.$$

Пример 1. Найти 6-ую производную функции $f(x) = 4x^5 + 7$.

Решение.

$f'(x) = \left(4x^5 + 7\right)' = 20x^4$,

$f''(x) = \left(20x^4\right)' = 80x^3$, $f'''(x) = f^{(3)}(x) = \left(80x^3\right)' = 240x^2$,

$f^{(4)}(x) = \left(240x^2\right)' = 480x$, $f^{(5)}(x) = \left(480x\right)' = 480$,

$f^{(6)}(x) = \left(480\right)' = 0$.

Ответ: $f^{(6)}(x) = 0$.

Пример 2. Найти производную четвёртого порядка функции $y = \sqrt{2x+1}$.

Решение.

Последовательно дифференцируем данную функцию и находим её четвёртую производную:

$$y' = \left(\sqrt{2x+1}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{2x+1}} \cdot (2x+1)' = \frac{1}{\sqrt{2x+1}} = (2x+1)^{-1/2};$$

$$y'' = \left[(2x+1)^{-1/2}\right]' = -\frac{1}{2}(2x+1)^{-3/2} \cdot (2x+1)' = -(2x+1)^{-3/2};$$

$$y''' = \left[-(2x+1)^{-3/2}\right]' = \frac{3}{2}(2x+1)^{-5/2} \cdot (2x+1)' = 3(2x+1)^{-5/2};$$

$$y^{(4)}=\left[3(2x+1)^{-5/2}\right]'=3\cdot\left(-\frac{5}{2}\right)(2x+1)^{-7/2}\cdot(2x+1)'=\frac{15}{\sqrt{(2x+1)^7}}$$

Ответ: $y^{(4)}=\dfrac{15}{\sqrt{(2x+1)^7}}$.

Задания для самостоятельной работы

Задание 1. Прочитайте, напишите, переведите на родной язык новые слова и словосочетания. Запомните их!

производная функции
приращение аргумента (функции)
дифференцируемая функция
бесконечная производная
дифференцирование
механический (геометрический) смысл производной
секущая
касательная к кривой
предельное положение
угловой коэффициент
уравнение касательной
сложная функция
производная второго порядка
производная высшего порядка

Задание 2. Ответьте на вопросы. Используйте информацию текста.

1) Что называется производной функции?
2) Что характеризует производная?
3) В чём состоит геометрический смысл производной?
4) В чём состоит механический смысл производной?
5) Чему равна производная суммы (разности) функций?
6) Чему равна производная произведения функций?
7) Чему равна производная частного функций?
8) Что такое производная второго порядка?
9) Что такое производные высшего порядка?

Задание 3. Закончите предложение. Используйте информацию текста.

Действие нахождения производной называется …
Касательной к кривой в данной точке называется …
Производной n-го порядка функции $f(x)$ называют …

Задание 4. Напишите существительные и прилагательные во множественном числе.

Образец: дифференцируемая функция – ….
дифференцируемая функция – дифференцируемые функции.

Производная функции; касательная к кривой; угловой коэффициент; сложная функция; производная второго порядка; производная высшего порядка.

Задание 5. Прочитайте правильно эти обозначения. Используйте информацию текста.

Образец: $f'(x)$– производная функции $f(x)$;
y' – …
$y'' = f''(x)$ – …
$f'''(x) = f^{(3)}(x)$ – …
$y^{(n)} = f^{(n)}(x)$ – …

Задание 6. Прочитайте правильно эти формулы. Используйте информацию текста.

$$y' = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$$
$$k = \operatorname{tg}\varphi = f'(x_0)$$
$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$
$$\upsilon(t) = x'(t)$$
$$a(t) = \upsilon'(t)$$
$$(U \pm V) = U' \pm V'$$

$$(UV)' = U'V + UV'$$

$$(CU)' = CU'$$

$$\left(\frac{U}{V}\right)' = \frac{U'V - V'U}{V^2}$$

$$y' = f'(u) \cdot u'$$

Задание 7. Выполните упражнения.

1. Найдите производные функций:

1) $y = x^7$;

2) $y = x^{-9}$;

3) $y = x^{\frac{4}{5}}$;

4) $y = \dfrac{1}{x^5}$;

5) $y = \sqrt[5]{x^4}$;

6) $y = \dfrac{1}{x^{\frac{2}{5}}}$;

7) $y = \dfrac{1}{\sqrt[4]{x}}$;

8) $y = x^5 \cdot \sqrt[3]{x}$;

9) $y = \dfrac{1}{x\sqrt[4]{x}}$.

2. Найдите производные функций:

1) $f(x) = 9x^6 - 7x^5 + 12x - 49$;

2) $f(x) = \dfrac{1}{5}x^{10} - 8\sqrt{x} + 9x - 7$;

3) $f(x) = 2x + \dfrac{2}{x} - \dfrac{6}{x^2} + \dfrac{3}{x^3} - \sqrt{7}$;

4) $f(x) = \left(2x^3 - 3\right)(1 - x)$;

5) $f(x) = 5x^2\left(x^3 - 3x\right)$;

6) $f(x) = \dfrac{4 - 3x}{2x - 1}$;

7) $f(x) = \dfrac{x^2}{3x - 1}$;

8) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{4x - 1}$.

3. Найдите производные функций:

1) $y = e^x - \ln x + 7$;

2) $y = \dfrac{5^x}{\sin x}$;

3) $y = 5\sin x + 2\operatorname{tg} x - 6$;

4) $y = 4\log_5 x + 5^x - \arcsin x$;

5) $y = e^x \cos x$;

6) $y = 2\operatorname{arctg} x - \lg x$.

4. Найдите производные функций:

1) $y=\cos^2 x$;

2) $y=\sin x^2$;

3) $y=(3x+2)^8$;

4) $y=\sqrt{5-3x-2x^2}$;

5) $y=\operatorname{tg}6x$;

6) $y=0{,}4^{\operatorname{tg}x}$;

7) $y=\lg\sin x$;

8) $y=\dfrac{\ln 2x}{\cos 3x}$;

9) $y=\sin 2x\operatorname{tg}3x$.

5. Найдите производную второго порядка функции:

а) $y=\sin^2 x$;

б) $y=6^{2x-5}$;

в) $y=\sqrt{1+x^2}$.

Ответ: а) $2\cos 2x$; в) $y=(1+x)^{-3/2}$.

6. Найдите производную третьего порядка функции:

а) $y=x\ln x$;

б) $y=xe^{-x}$;

в) $y=\dfrac{1}{x^3}$.

Ответ: а) $-x^{-2}$; б) $e^{-x}(3-x)$.

7. Закон движения точки по прямой задан формулой $x=x(t)$, где x – координата точки в момент времени t. Найдите мгновенную скорость точки в момент времени t_0, если:

а) $x(t)=0{,}2t^5-4t^2+6$ (м), $t_0=2$ с;

б) $x(t)=4t^3-3t^2+10t$ (м), $t_0=2$ с.

8. Найдите угловой коэффициент касательной к графику функции $y=f(x)$ в точке с абсциссой x_0, если:

а) $f(x)=\dfrac{x^3}{3}-2x^2-4x-2$, $x_0=-2$;

б) $f(x)=\operatorname{tg}3x$, $x_0=-2$;

в) $f(x)=\sqrt{4x-3}$, $x_0=1$.

9. Найдите уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0, если:

а) $f(x) = x^3 - 5x$, $x_0 = 2$;

б) $f(x) = \sqrt{5x - 3 - x^2}$, $x_0 = 1$;

в) $f(x) = \cos^3 x$, $x_0 = \pi$;

г) $f(x) = e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}$, $x_0 = 0$;

д) $f(x) = \operatorname{tg}\left(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{6}\right)$, $x_0 = 0$;

е) $f(x) = \ln x - x$, $x_0 = 1$.

Дополнительные задачи

1. Найдите производные функций:

1) $y = \frac{3}{8}x$;

2) $y = \sqrt[3]{7}x$;

3) $y = 7x^4$;

4) $y = -\frac{x^4}{4}$;

5) $y = -5x^{-4}$;

6) $y = \frac{8}{x^4}$;

7) $y = \frac{1}{5x^8}$;

8) $y = 12x^{-\frac{5}{6}}$;

9) $y = \frac{5}{\sqrt[7]{x}}$.

2. Найдите производные функций:

1) $f(x) = 5x^7 + 4x^5 - 7x - 12$;

2) $f(x) = \frac{1}{4}x^8 + 6\sqrt{x} - 15x - 3$;

3) $f(x) = x - \frac{6}{x} + \frac{4}{x^2} - \frac{1}{x^3} + \sqrt{5}$;

4) $f(x) = (2x - 1)\left(1 - x^2\right)$;

5) $f(x) = 2x^2\left(5x^3 - 8x\right)$;

6) $f(x) = \frac{2x + 1}{3x - 2}$;

7) $f(x) = \frac{1 - 5x}{x^2}$;

8) $f(x) = \frac{x - 1}{\sqrt{x}}$.

3. Найдите производные функций:

1) $y = 3^x - \log_3 x + 2$;

2) $y = \frac{7^x}{\cos x}$;

3) $y = 2\cos x + 7\operatorname{ctg} x - 9$;

4) $y = 9\lg x + 8^x - \arccos x$;

5) $y = 2^x \sin x$;

6) $y = 2\operatorname{arcctg} x - \ln x$.

4. Найдите производные функций:

1) $y=\sin^2 x$;

2) $y=\cos x^2$;

3) $y=(7x-4)^5$;

4) $y=\sqrt{2+9x-3x^2}$;

5) $y=\operatorname{ctg} 2x$;

6) $y=e^{4x-x^2}$;

7) $y=\ln\left(x^2+2x\right)$;

8) $y=\dfrac{\sin 2x}{\lg 3x}$;

9) $y=\cos 2x \operatorname{ctg} 3x$.

5. Найдите производную второго порядка функции:

а) $y=e^{-x^2}$;

б) $y=\operatorname{ctg} x$;

в) $y=\arcsin\dfrac{x}{2}$.

Ответ: а) $2e^{-x^2}(2x^2-1)$; б) $y=\dfrac{2\operatorname{ctg} x}{\sin^2 x}$; в) $y=\dfrac{x}{(4-x^2)^{3/2}}$.

6. Найдите производную третьего порядка функции:

а) $y=\cos^2 x$;

б) $y=\dfrac{1}{x^2}$;

в) $y=x\sin x$.

Ответ: а) $-4\sin 2x$; б) $-24x^{-5}$; в) $-(x\cos x+3\sin x)$.

7. Закон движения точки по прямой задан формулой $x=x(t)$, где x – координата точки в момент времени t. Найдите мгновенную скорость точки в момент времени t_0, если:

б) $x(t)=3t^2-5t+8$ (м), $t_0=4$ с;

в) $x(t)=\dfrac{1}{3}t^3-t^2+7t$ (м), $t_0=5$ с.

8. Найдите угловой коэффициент касательной к графику функции $y=f(x)$ в точке с абсциссой x_0, если:

а) $f(x)=x^4-3x^2+5x-17$, $x_0=-1$;

б) $f(x)=\cos\dfrac{x}{4}$, $x_0=\dfrac{2\pi}{3}$;

в) $f(x)=\sqrt{2x-3}$, $x_0=2$.

9. Найдите уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0, если:

а) $f(x) = \frac{1}{6}x^3 + 4x$, $x_0 = -2$; в) $f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$, $x_0 = 0$;

б) $f(x) = \sqrt{3x^2 + 2x}$, $x_0 = -1$; г) $f(x) = \sin^4 x$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$.

ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИИ И ПОСТРОЕНИЕ ЕЁ ГРАФИКА

1. Монотонность и постоянство функции. Критические точки функции

С помощью производной удобно исследовать функцию на монотонность (то есть на возрастание и убывание).

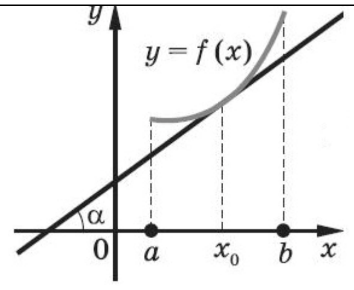
Достаточные условия возрастания и убывания функции:

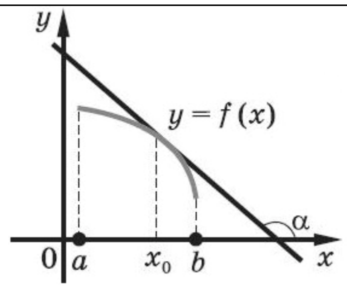
1. Если $f'(x) > 0$ в каждой точке интервала $(a; b)$, то функция $f(x)$ ***возрастает*** на этом интервале (рис.4, *а*).

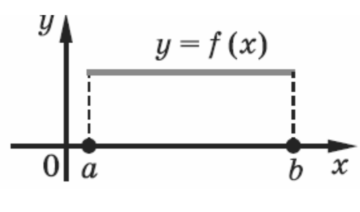
2. Если $f'(x) < 0$ в каждой точке интервала $(a; b)$, то функция $f(x)$ ***убывает*** на этом интервале (рис.4, *б*).

Необходимое и достаточное условие постоянства функции:

Функция $f(x)$ является ***постоянной*** на интервале $(a; b)$ тогда и только тогда, когда $f'(x) = 0$ во всех точках этого интервала (рис.4, *в*).

<table>
<tr>
<td>

$0 < \alpha < 90^\circ$
$f'(x_0) = \operatorname{tg}\alpha > 0$</td>
<td>

$90^\circ < \alpha < 180^\circ$
$f'(x_0) = \operatorname{tg}\alpha < 0$</td>
<td>

$f'(x) = 0$</td>
</tr>
<tr><td>а</td><td>б</td><td>в</td></tr>
</table>

Рисунок 4

Для нахождения промежутков возрастания и убывания функции необходимо решить неравенства $f'(x)>0$ и $f'(x)<0$ на области определения функции $f(x)$. Поскольку $f'(x)$ также является функцией переменной x, то для решения этих неравенств можно использовать метод интервалов.

Теорема Дарбу: точки, в которых производная равна нулю или не существует, разбивают область определения функции $f(x)$ на промежутки, в каждом из которых $f'(x)$ сохраняет постоянный знак.

Определение. ***Критическими точками*** функции называются внутренние точки её области определения, в которых производная равна нулю или не существует.

Алгоритм нахождения интервалов монотонности функции:

1. Найти *область определения* функции $f(x)$.

2. Найти *производную* $f'(x)$.

3. Найти *критические точки* функции $f(x)$ (внутренние точки области определения функции, в которых производная $f'(x)$ равна нулю или не существует).

4. Отметить найденные точки на области определения функции $f(x)$ и найти *знак* $f'(x)$ в каждом из промежутков, на которые разбивается область определения функции (знак можно определить, вычислив значение $f'(x)$ в любой точке промежутка).

Замечание. Когда функция $f(x)$ непрерывна в любом из концов промежутка возрастания (убывания), то его всегда можно присоединить к этому промежутку.

Пример. Исследуем функцию $f(x)=x^3-3x$ на возрастание и убывание.

Решение.

1. Область определения данной функции – все действительные числа: $D(f)=R$.

2. Производная $f'(x) = 3x^2 - 3$.

3. Производная существует на всей области определения функции.

$f'(x) = 0$, если $3x^2 - 3 = 0$, то есть при $x = 1$ или $x = -1$.

4. Решаем неравенства $f'(x) > 0$ и $f'(x) < 0$ на области определения функции $f(x)$ методом интервалов. Для этого отмечаем точки 1 и (–1) на области определения функции $f(x)$ и находим знак $f'(x)$ в каждом из полученных промежутков (рис. 5).

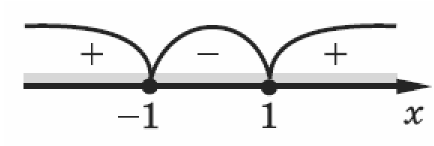


Рисунок 5

Учитывая достаточные условия возрастания и убывания функции, получаем, что в тех интервалах, где производная положительна, функция $f(x)$ возрастает, а в тех интервалах, где производная отрицательна, функция $f(x)$ убывает. Следовательно, функция $f(x)$ возрастает на каждом из промежутков $(-\infty; -1]$ и $[1; +\infty)$ и убывает на отрезке $[-1; 1]$.

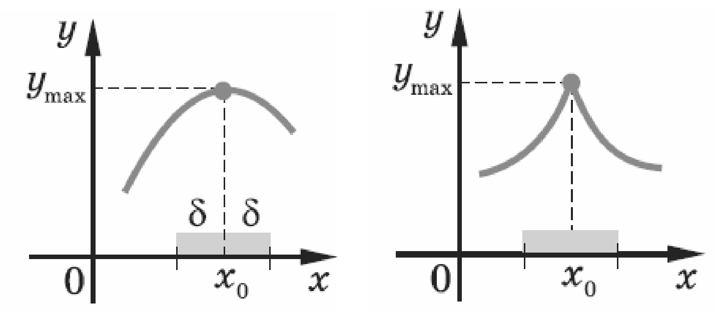
Ответ: $f(x) \nearrow$ при $x \in (-\infty; -1]$, $[1; +\infty)$ и $f(x) \searrow$ при $x \in [-1; 1]$.

2. Экстремумы (максимумы и минимумы) функции

Определение. Точка x_0 из области определения функции $f(x)$ называется ***точкой максимума*** этой функции, если найдется δ-окрестность $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ точки x_0, такая, что для всех $x \neq x_0$ из этой окрестности выполняется неравенство $f(x) < f(x_0)$ (рис 6).

Определение. Точка x_0 из области определения функции $f(x)$ называется ***точкой минимума*** этой функции, если найдется δ-

окрестность $(x_0-\delta; x_0+\delta)$ точки x_0, такая, что для всех $x \neq x_0$ из этой окрестности выполняется неравенство $f(x) > f(x_0)$ (рис. 7).

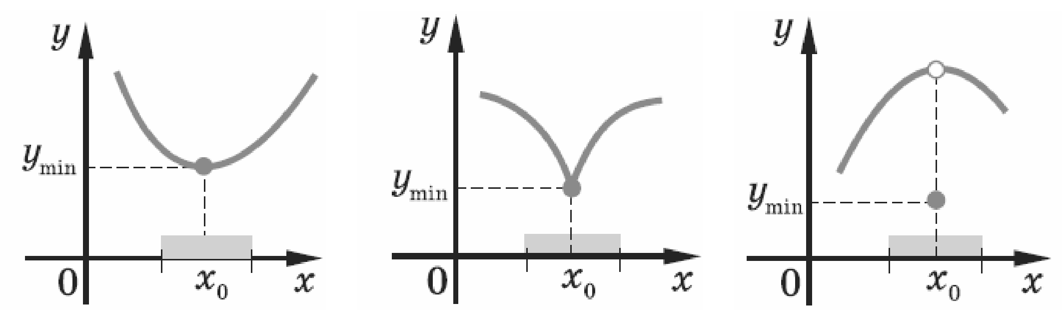


а б в

Рисунок 6

<u>Замечание.</u> По определению значение функции $f(x)$ в точке максимума x_0 является наибольшим среди значений функции из некоторой окрестности этой точки, поэтому график функции $f(x)$ в окрестности точки x_0 чаще всего имеет вид гладкого «холма» (рис. 6, *а*), но может иметь и вид заостренного «пика» (рис. 6, *б*). В точке максимума также может быть изолированная точка графика (в этом случае функция не будет непрерывной в точке x_0), в которой достигается наибольшее значение функции для некоторой окрестности точки x_0 (рис. 6, *в*).

Аналогичные рассуждения и для значений функции $f(x)$ в точке минимума x_0 (рис. 7, *а-в*).



а б в

Рисунок 7

Определение. Точки максимума ($x_{\max}$) и минимума ($x_{\min}$) называются ***точками экстремума***.

Определение. Значения функции в точках максимума и минимума называются ***экстремумами*** (максимумом и минимумом) функции:

$$y_{\max} = f(x_{\max}) = f(x_0) \text{ – максимум;}$$
$$y_{\min} = f(x_{\min}) = f(x_0) \text{ – минимум.}$$

Замечание. По определению *точки экстремума* – это такие точки, в которых функция принимает наибольшее или наименьшее значения по сравнению со значениями этой функции в точках некоторой окрестности экстремальной точки. Такой экстремум обычно называют ***локальным экстремумом*** (от латинского *lokalis*, что означает «местный»). Точками экстремума могут быть только критические точки функции.

Теорема Ферма (***необходимое условие экстремума***). Если x_0 является точкой экстремума функции $f(x)$ и в этой точке существует производная $f'(x_0)$, то она равна нулю: $f'(x_0) = 0$.

Теорема Ферма имеет наглядный ***геометрический смысл***: касательная к графику функции $f(x)$ в точке с абсциссой x_0 (где x_0 – точка экстремума функции) параллельна оси абсцисс (или совпадает с ней) и поэтому ее угловой коэффициент $f'(x_0)$ равен нулю (рис. 8).

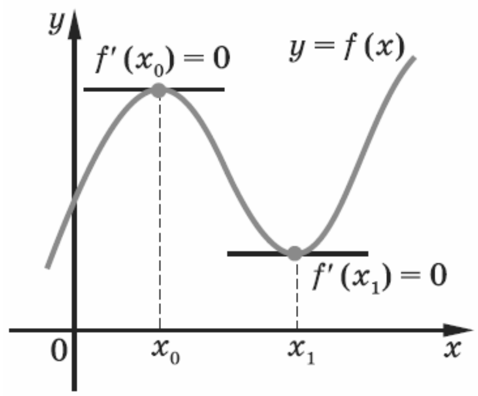
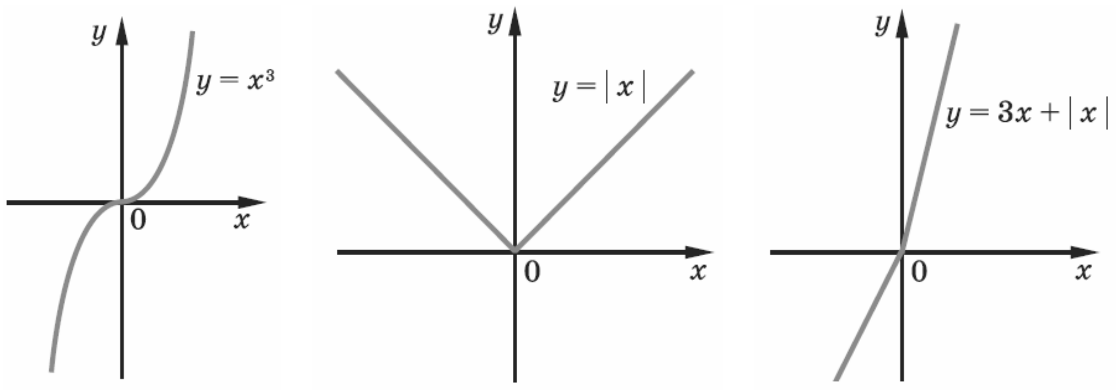


Рисунок 8

Замечание. На рисунке 6, где x_0 и x_1 – точки экстремума, можно указать окрестности этих точек, для которых соответствующие точки графика располагаются по одну сторону от касательной, а на рисунке 9, *а* график функции $y = x^3$ при переходе аргумента через точку $x_0 = 0$ (в которой *производная равна нулю*, но которая не является точкой экстремума) переходит с одной стороны касательной на другую. В этом случае точку x_0 называют ***точкой перегиба*** функции.

Функция может иметь экстремум и в той критической точке, в которой *не существует производная* данной функции. Например, функция $y = |x|$ не имеет производной в точке $x = 0$, но, как видно из ее графика (рис. 9, *б*), именно в этой точке функция имеет *минимум*.

Не каждая критическая точка, в которой *не существует производная* данной функции, будет точкой экстремума этой функции. Например, функция $y = 3x + |x|$ не имеет производной в точке $x = 0$: график имеет ***излом*** при $x = 0$ (рис. 9, *в*).



а б в

Рисунок 9

Достаточные условия существования экстремума в точке:

Теорема 1 (***признак максимума функции***). Если функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 и при переходе через точку x_0 ее производная меняет знак с плюса на минус (то есть в некоторой δ-окрестности точки x_0 при $x < x_0$ значение $f'(x) > 0$, а при $x > x_0$

значение $f'(x)<0$), то точка x_0 является ***точкой максимума*** функции $f(x)$.

<u>Теорема 2</u> (***признак минимума функции***). Если функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 и при переходе через точку x_0 ее производная меняет знак с минуса на плюс (то есть в некоторой δ-окрестности точки x_0 при $x<x_0$ значение $f'(x)<0$, а при $x>x_0$ значение $f'(x)>0$), то точка x_0 является ***точкой минимума*** функции $f(x)$.

<u>Вывод:</u> если функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 и *производная* $f'(x)$ *меняет знак* при переходе через точку x_0, то x_0 – ***точка экстремума*** функции $f(x)$.

Если же функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 и ее производная $f'(x)$ не меняет знак при переходе через точку x_0, то точка x_0 не может быть точкой экстремума функции.

<u>Алгоритм исследования функции на экстремумы:</u>

1. Найти *область определения* функции.
2. Найти *производную* $f'(x)$.
3. Найти *критические точки* (то есть внутренние точки области определения, в которых $f'(x)$ равна нулю или не существует).
4. Отметить критические точки на области определения, найти *знак производной* на каждом из интервалов, на которые разбивается область определения.
5. Относительно каждой критической точки определить, является ли она *точкой максимума или минимума*, или не является точкой экстремума.
6. Найти *экстремумы* функции и записать результат.

<u>Алгоритм исследования функции на монотонность и экстремумы:</u>

1. Найти *область определения* функции.
2. Найти *производную* $f'(x)$.

3. Найти *критические точки* (то есть внутренние точки области определения, в которых $f'(x)$ равна нулю или не существует).

4. Отметить критические точки на области определения, найти *знак производной* и *характер поведения функции* на каждом из интервалов, на которые разбивается область определения.

5. Относительно каждой критической точки определить, является ли она *точкой максимума или минимума*, или не является точкой экстремума.

6. Найти *экстремумы* функции.

7. Записать результат (*промежутки монотонности и экстремумы функции*).

<u>Пример.</u> Для функции $f(x) = x + \dfrac{25}{x}$ найдите промежутки монотонности, точки экстремума и экстремумы функции (значения функции в точках экстремума).

Решение.

1. Область определения, $D(f)$: $x \neq 0$, то есть $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

2. $f'(x) = \left(x + \dfrac{25}{x}\right)' = 1 - \dfrac{25}{x^2}$.

3. Производная существует на всей области определения функции $f(x)$.

$f'(x) = 0$. Тогда $1 - \dfrac{25}{x^2} = 0$ следовательно, $x^2 = 25$, то есть $x = 5$ и $x = -5$ – критические точки.

4. Отмечаем критические точки на области определения функции $f(x)$ и находим знак $f'(x)$ в каждом из полученных промежутков (рис. 10).

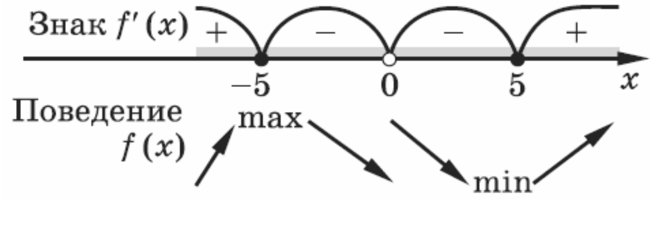


Рисунок 10

Получаем, что функция $f(x)$ возрастает на промежутках $(-\infty; -5]$ и $[5; +\infty)$ и убывает на промежутках $[-5; 0)$ и $(0; 5]$. В точке -5 производная меняет знак с плюса на минус, следовательно, это точка максимума; в точке 5 производная меняет знак с минуса на плюс, следовательно, это точка минимума.

То есть $x_{\max} = -5$, $x_{\min} = 5$.

Тогда $y_{\max} = f(-5) = -10$, $y_{\min} = f(5) = 10$.

Ответ: $f(x) \nearrow$ при $x \in (-\infty; -5]$ и $[5; +\infty)$; $f(x) \searrow$ при $x \in [-5; 0)$ и $(0; 5]$; $x_{\max} = -5$, $x_{\min} = 5$; $y_{\max} = f(-5) = -10$, $y_{\min} = f(5) = 10$.

Замечание. Результаты исследования функции на монотонность и экстремумы удобно фиксировать также в виде специальной таблицы:

x	$(-\infty; -5)$	-5	$(-5; 0)$	$(0; 5)$	5	$(5; +\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	-10	$\searrow$	$\searrow$	10	$\nearrow$
		max		min		

3. Асимптоты графика функции

Асимптота кривой – это прямая, к которой неограниченно приближается кривая при удалении её в бесконечность (рис. 11).

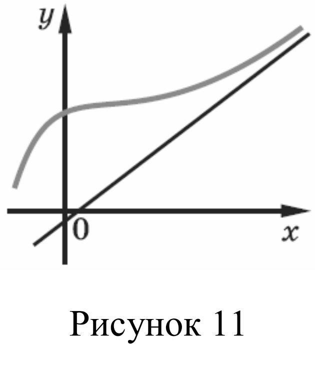


Рисунок 11

Вертикальная асимптота $x = a$ может быть в точке a, если точка a ограничивает открытые (или полуоткрытые) промежутки области определения данной функции и вблизи точки a значения стремятся к бесконечности: при $x \to a$ функция $f(x) \to \infty$.

<u>Пример 1.</u> Найдите вертикальные асимптоты графика функции:

1) $y = \dfrac{1}{x}$.

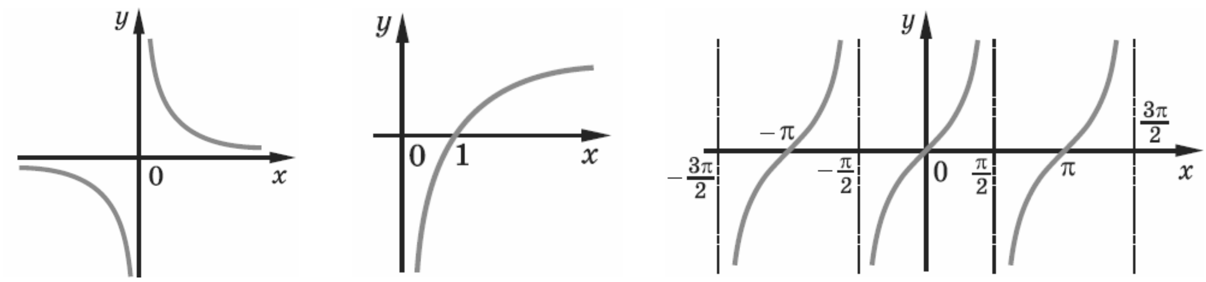
Решение. $D(f): x \in (-\infty; 0) \bigcup (0; +\infty)$. При $x \to +0$ (справа) $y \to +\infty$. При $x \to -0$ (слева) $y \to -\infty$. Поэтому прямая $x = 0$ – вертикальная асимптота (рис. 12, *а*).

2) $y = \ln x$.

Решение. $D(f): x \in (0; +\infty)$. При $x \to +0$ (справа) $y \to -\infty$. Поэтому прямая $x = 0$ – вертикальная асимптота (рис. 12, *б*).

3) $y = \operatorname{tg} x$.

Решение. $D(f): x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi k, k \in z$. При $x \to \dfrac{\pi}{2}$ (слева) $y \to +\infty$. При $x \to \dfrac{\pi}{2}$ (справа) $y \to -\infty$. Поэтому прямая $x = \dfrac{\pi}{2}$ – вертикальная асимптота $\left(x = \dfrac{\pi}{2} + \pi k, k \in z \right)$ (рис. 12, *в*).



а б в

Рисунок 12

Наклонные и горизонтальные асимптоты $y = kx + b$.

1. Если $f(x)$ – *дробно-рациональная функция*, в которой степень числителя на единицу большее степени знаменателя, то, чтобы найти уравнение асимптоты, надо выделить целую часть в выражении функции и использовать определение асимптоты.

2. В *общем случае* уравнения наклонных и горизонтальных асимптот $y = kx + b$ можно получить с помощью формул:

$$\boxed{k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}} \qquad (16)$$

$$\boxed{b = \lim_{x\to\infty} (f(x) - kx)} \qquad (17)$$

<u>Пример 2.</u> Найдите асимптоты графика функции: $f(x) = \dfrac{x^2 + 3x}{x+1}$.

Решение.

I способ.

$f(x) = \dfrac{x^2 + 3x}{x+1} = x + 2 - \dfrac{1}{x+1}$. При $x \to \infty$ $\dfrac{1}{x+1} \to 0$, то есть $f(x) \to x + 2$.

Следовательно, прямая $y = x + 2$ – наклонная асимптота.

II способ.

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 + 3x}{x(x+1)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\dfrac{x^2}{x^2} + \dfrac{3x}{x^2}}{\dfrac{x^2}{x^2} + \dfrac{x}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1 + \dfrac{3}{x}}{1 + \dfrac{1}{x}} = \frac{1+0}{1+0} = 1;$$

$$b = \lim_{x\to\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2 + 3x}{x+1} - 1 \cdot x \right) = \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{x+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{\dfrac{2x}{x}}{\dfrac{x}{x} + \dfrac{1}{x}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2}{1 + \dfrac{1}{x}} = \frac{2}{1+0} = 2.$$

Прямая $y = kx + b = x + 2$ – наклонная асимптота.

Кроме того, $x = -1$ – вертикальная асимптота (рис. 13, *а*).

Ответ: $y = x + 2$, $x = -1$.

Пример 3. Найдите асимптоты графика функции:
$f(x)=\dfrac{2x+1}{x}$.

Решение.

I способ.

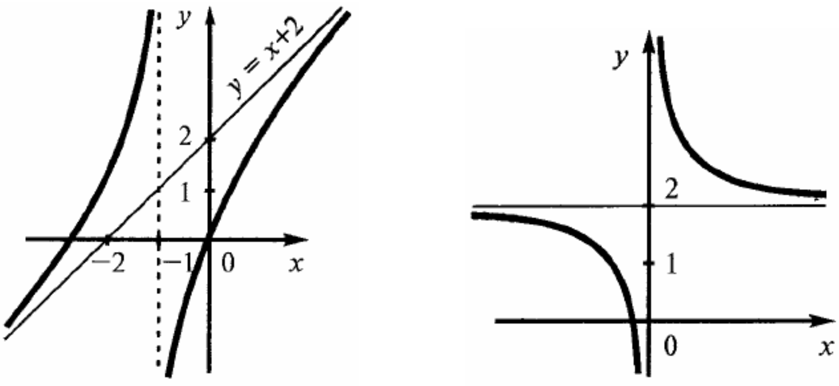
$f(x)=\dfrac{2x+1}{x}=2+\dfrac{1}{x}$. При $x\to\infty$ $\dfrac{1}{x}\to 0$, то есть $f(x)\to 2$. Следовательно, прямая $y=2$ – горизонтальная асимптота.

II способ.

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x+1}{x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x}{x^2}+\frac{1}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}{1}=\frac{0}{1}=0;$$

$$b=\lim_{x\to\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1}{x}-0\cdot x\right)=\lim_{x\to\infty}\left(2+\frac{1}{x}\right)=2.$$

Прямая $y=kx+b=0\cdot x+2=2$ – горизонтальная асимптота. Кроме того, $x=0$ – вертикальная асимптота (рис. 13, *б*).



а б

Рисунок 13

Ответ: $y=2$, $x=0$.

4. Наибольшее и наименьшее значения функции, непрерывной на отрезке

Теорема Вейерштрасса: *непрерывная на отрезке* $[a;b]$ *функция* $f(x)$ *имеет на этом отрезке наибольшее и наименьшее значения*, то есть существуют точки отрезка $[a;b]$, в которых $f(x)$ принимает наибольшее и наименьшее на $[a;b]$ значения.

Свойство. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке и имеет на нём конечное число критических точек, то она принимает свои наибольшее и наименьшее значения на этом отрезке или в критических точках, принадлежащих этому отрезку, или на концах отрезка (рис. 14, *а-г*).

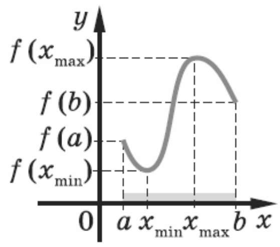
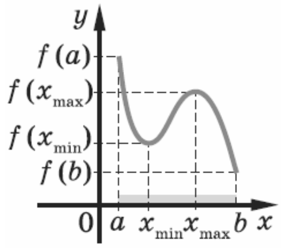
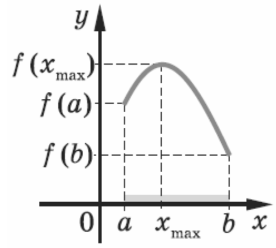
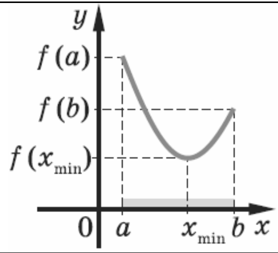
 $\max\limits_{[a;b]} f(x)=f(x_{\max})$ $\min\limits_{[a;b]} f(x)=f(x_{\min})$	 $\max\limits_{[a;b]} f(x)=f(a)$ $\min\limits_{[a;b]} f(x)=f(b)$
а	б
 $\max\limits_{[a;b]} f(x)=f(x_{\max})$ $\min\limits_{[a;b]} f(x)=f(b)$	 $\max\limits_{[a;b]} f(x)=f(a)$ $\min\limits_{[a;b]} f(x)=f(x_{\min})$
в	г

Рисунок 14

Алгоритм нахождения наибольшего и наименьшего значений функции, непрерывной на отрезке:

1. Убедиться, что заданный *отрезок входит в область определения* функции $f(x)$.

2. Найти *производную* $f'(x)$.

3. Найти *критические точки* ($f'(x)=0$ или не существует).

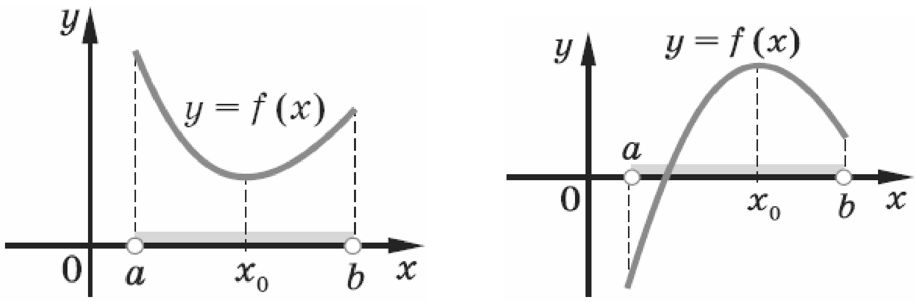
4. Выбрать *критические точки, принадлежащие заданному отрезку*.

5. Вычислить *значения функции в критических точках и на концах отрезка*.

6. *Сравнить* полученные значения функции *и выбрать из них наименьшее и наибольшее*.

Свойство. Если непрерывная функция $f(x)$ имеет на заданном интервале только одну точку экстремума x_0 и это точка минимума, то на заданном интервале функция принимает свое наименьшее значение в точке x_0 (рис. 15, *а*).

Свойство. Если непрерывная функция $f(x)$ имеет на заданном интервале только одну точку экстремума x_0 и это точка максимума, то на заданном интервале функция принимает свое наибольшее значение в точке x_0 (рис. 15, *б*).



а б

Рисунок 15

Пример. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции: $f(x) = x^3 + 3x^2 - 24x + 22$ при $x \in [1; 3]$.

Решение.

$f'(x) = 3x^2 + 6x - 24$;

$f'(x) = 0$, $3x^2 + 6x - 24 = 0 \Rightarrow x_1 = -4$ и $x_2 = 2$.

$x_1 \notin [1; 3]$, $x_2 \in [1; 3]$.

$f(1) = 2$;

$f(2) = -6$;

$f(3) = 4$.

$\max\limits_{[1;\,3]} f(x) = f(3) = 4$, $\min\limits_{[1;\,3]} f(x) = f(2) = -6$.

Ответ: $\max\limits_{[1;\,3]} f(x) = f(3) = 4$, $\min\limits_{[1;\,3]} f(x) = f(2) = -6$.

Рассмотренные способы нахождения наибольших и наименьших значений функции используются для ***решения прикладных (практических) задач***.

Решение практических задач математическими методами, как правило, содержит три основных этапа:

1) формализация, то есть создание математической модели задачи (перевод условия задачи на язык математики);

2) решение составленной математической задачи;

3) интерпретация найденного решения (анализ полученного результата, то есть перевод его с языка математики в термины исходной задачи).

<u>Алгоритм решения задач на нахождение наибольшего и наименьшего значений:</u>

1) *одну из величин*, которую необходимо найти (или величину, с помощью которой можно дать ответ на вопрос задачи), *обозначить через* x (и по смыслу задачи *наложить ограничения на* x);

2) ту величину, о которой говорится, что она наибольшая или наименьшая, *выразить как функцию* x;

3) *исследовать* полученную функцию *на наибольшее или наименьшее значения*;

4) убедиться, что полученный *результат имеет смысл* для исходной задачи.

5. Выпуклость и точки перегиба графика функции

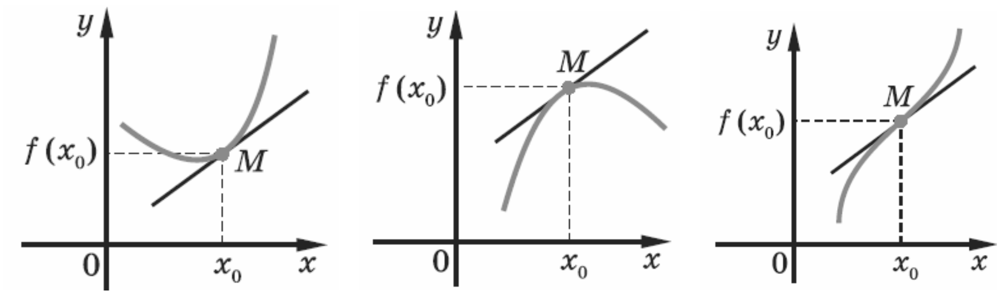
Пусть функция $f(x)$ определена на промежутке $(a; b)$, а в точке $x_0 \in (a; b)$ имеет конечную производную. Тогда к графику этой функции в точке $M(x_0; f(x_0))$ можно провести касательную.

<u>Определение.</u> Функция $f(x)$ называется ***выпуклой вниз*** на интервале $(a; b)$, если для любой точки x_0 из этого интервала при всех $x_0 \in (a; b)$ и $x \neq x_0$ *график функции лежит выше касательной* к этому графику в точке $M(x_0; f(x_0))$ (рис. 16, *а*).

Определение. Функция $f(x)$ называется ***выпуклой вверх*** на интервале $(a; b)$, если для любой точки x_0 из этого интервала при всех $x_0 \in (a; b)$ и $x \neq x_0$ *график функции лежит ниже касательной* к этому графику в точке $M(x_0; f(x_0))$ (рис. 16, *б*).

Определение. Точка M графика непрерывной функции $f(x)$, в которой существует касательная и при переходе через которую кривая меняет направление выпуклости, называется ***точкой перегиба графика функции***. В точке перегиба график функции переходит с одной стороны касательной на другую.

Абсциссу x_0 точки M перегиба графика функции $f(x)$ называют ***точкой перегиба функции*** $f(x)$. Точка x_0 разделяет интервалы выпуклости функции (рис. 16, *в*). В некоторой окрестности точки x_0: при $x < x_0$ кривая ниже касательной, а при $x > x_0$ кривая выше касательной (или наоборот).



а б в

Рисунок 16

Замечание. На интервале, где функция $f(x)$ является выпуклой вниз, ее производная $f'(x)$ возрастает.

На интервале, где функция $f(x)$ является выпуклой вверх, ее производная $f'(x)$ убывает.

Можно доказать, что имеют место и обратные утверждения:

1. Если производная $f'(x)$ функции $f(x)$ возрастает на интервале $(a; b)$, то функция $f(x)$ является выпуклой вниз на этом интервале.

2. Если производная $f'(x)$ функции $f(x)$ убывает на интервале $(a; b)$, то функция $f(x)$ является выпуклой вверх на этом интервале.

Достаточные условия выпуклости функции (и графика функции):

1. Если на интервале $(a;b)$ дважды дифференцируемая функция $f(x)$ имеет положительную вторую производную (то есть $f''(x)>0$ при всех $x\in(a;b)$), то ее график на интервале $(a;b)$ направлен ***выпуклостью вниз***.

2. Если на интервале $(a;b)$ дважды дифференцируемая функция $f(x)$ имеет отрицательную вторую производную (то есть $f''(x)<0$ при всех $x\in(a;b)$), то ее график на интервале $(a;b)$ направлен ***выпуклостью вверх***.

Замечание. Эти условия являются только достаточными, но не являются необходимыми. Например, функции $y=x^4$ выпуклая вниз на всей числовой прямой, хотя в точке $x=0$ её вторая производная $y''=12x^2$ равна нулю (рис. 17).

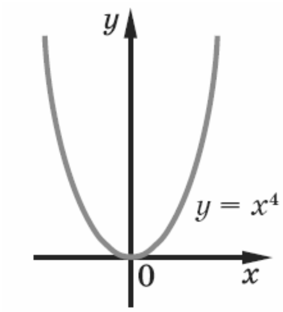


Рисунок 17

Нахождение точек перегиба функции, имеющей вторую производную на данном интервале:

необходимое условие: в точках перегиба функции $f(x)$ её *вторая производная равна нулю или не существует*;

достаточное условие: если функция $f(x)$ имеет первую и вторую производную на интервале $(a;b)$ и её *вторая производная меняет знак* при переходе аргумента через точку $x_0\in(a;b)$, то точка x_0 является точкой перегиба функции $f(x)$.

Замечание. Точка перегиба функции $f(x)$ может быть и в той точке x_0, в которой $f''(x_0)$ не существует (но $f'(x)$ существует).

Алгоритм исследования функции на выпуклость и точки перегиба:

1. Найти область определения и интервалы, на которых функция непрерывна.

2. Найти вторую производную $f''(x)$.

3. Найти внутренние точки области определения, в которых $f''(x)=0$ или не существует.

4. Отметить полученные точки на области определения, найти знак второй производной и характер поведения функции на каждом из интервалов, на которые разбивается область определения.

5. Записать интервалы и характер выпуклости, точки перегиба.

Пример. Исследуйте функцию $f(x)=x^4-4x^3-18x^2+1$ на выпуклость и точки перегиба.

Решение.

1) Область определения: $D(f)=R$. Функция непрерывна в каждой точке своей области определения (как многочлен).

2) Найдём вторую производную $f''(x)$:

$f'(x)=4x^3-12x^2-36x$,

$f''(x)=12x^2-24x-36=12(x^2-2x-3)$.

3) $f''(x)$ существует и непрерывна на всей области определения функции $f(x)$;

$f''(x)=0 \Rightarrow 12(x^2-2x-3)=0 \Rightarrow x_1=-1$ и $x_2=3$.

4) Отметим полученные точки на области определения, найдём знак второй производной и характер поведения функции на каждом интервале (рис. 18):

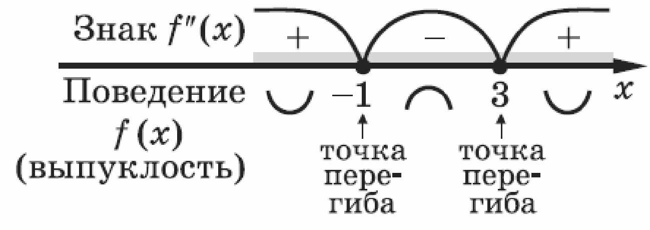


Рисунок 18

5) На интервалах $(-\infty; -1)$ и $(3; +\infty)$ график функции $f(x)$ направлен выпуклостью вниз ($f''(x) > 0$), а на интервале $(-1; 3)$ - выпуклостью вверх ($f''(x) < 0$).

Точки перегиба функции $f(x)$: $x = -1$ и $x = 3$ (в этих точках $f''(x)$ меняет знак).

6. Общая схема исследования функции для построения её графика

Алгоритм исследования функции для построения её графика:

1. Найти *область определения* функции.
2. Исследовать функцию на *чётность (или нечётность*) и *периодичность*.
3. Найти *точки пересечения графика с осями координат* (если можно найти).
4. Найти *производную* и *критические точки* функции.
5. Найти *промежутки возрастания и убывания* функции, *точки экстремума и экстремумы*.
6. Исследовать *поведение функции на концах промежутков* области определения и найти *асимптоты* графика функции (вертикальные, горизонтальные и наклонные).
7. Найти *вторую производную* и исследовать функцию на *выпуклость и точки перегиба* (если они существуют) и *значения* $f(x)$ *в точках перегиба*.
8. Найти координаты дополнительных точек графика функции (если необходимо уточнить его поведение) – *контрольные точки*.
9. На основании проведенного исследования построить *график* функции.

Замечание.

Если функция является *чётной (или нечётной)*, то можно исследовать свойства и строить ее график только при $x \geq 0$, а затем отобразить его симметрично относительно оси Oy (для нечётной функции – симметрично относительно начала координат).

Если функция *периодическая*, то достаточно построить ее график на одном отрезке длиной T, а затем повторить его на каждом из промежутков длиной T (то есть параллельно перенести график вдоль оси Ox на kT, где k целое число).

Пример. Постройте график функции $f(x)=\dfrac{x^2-5x}{x+4}$.

Решение.

1. $x\neq -4$, то есть $D(f)=(-\infty;-4)\cup(-4;+\infty)$.

2. $f(-x)=\dfrac{(-x)^2-5(-x)}{-x+4}=\dfrac{x^2+5x}{-x+4}\neq f(x)$;

$f(-x)=\dfrac{x^2+5x}{-x+4}=-\left(\dfrac{x^2+5x}{x-4}\right)\neq -f(x)$.

Функция $f(x)$ ни чётная, ни нечётная, не периодическая.

3. Точки пересечения графика с осями координат:

$Ox: y=0 \Rightarrow \dfrac{x^2-5x}{x+4}=0 \Rightarrow x^2-5x=0 \Rightarrow x=0$ и $x=5$ абсциссы точек пересечения графика с осью абсцисс;

$Oy: x=0 \Rightarrow\ y=\dfrac{0^2-5\cdot 0}{0+4}=0$.

4. $f'(x)=\left(\dfrac{x^2-5x}{x+4}\right)'=\dfrac{(x^2-5x)'(x+4)-(x^2-5x)(x+4)'}{(x+4)^2}=$

$=\dfrac{(2x-5)(x+4)-(x^2-5x)}{(x+4)^2}=\dfrac{2x^2-5x+8x-20-x^2+5x}{(x+4)^2}=$

$=\dfrac{x^2+8x-20}{(x+4)^2}$.

Производная существует на всей области определения функции $f(x)$ (следовательно, функция $f(x)$ непрерывна в каждой точке своей области определения).

$f'(x)=0 \Rightarrow\ \dfrac{x^2+8x-20}{(x+4)^2}=0\ \Rightarrow\ x^2+8x-20=0\ \Rightarrow\ x_1=2$,

$x_2=-10$ – критические точки.

5. Отметим критические точки на области определения и найдём знак производной $f'(x)$ и характер поведения функции на каждом из интервалов, на которые разбивается область определения (рис. 19):

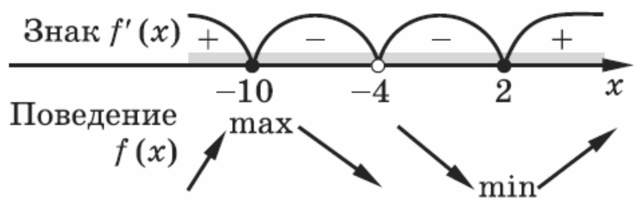


Рисунок 19

Итак, интервалы монотонности функции:

$f(x)\nearrow$ при $x\in(-\infty;-10]$ и $[2;+\infty)$ и $f(x)\searrow$ при $x\in[-10;-4)$ и $(-4;2]$.

Так как в критической точке $x=-10$ производная меняет знак с «+» на «–», то $x_{\max}=-10$, тогда $y_{\max}=f(-10)=-25$.

В критической точке $x=2$ производная меняет знак с «–» на «+», поэтому $x_{\min}=2$, тогда $y_{\min}=f(2)=-1$.

6. Поведение функции на концах промежутков области определения (рис. 20):

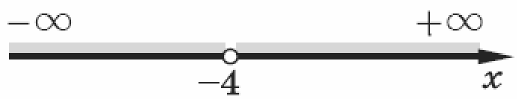


Рисунок 20

При $x\to-4$ слева $f(x)\to\left(\dfrac{26}{-0}\right)\to-\infty$, а при $x\to-4$ справа $f(x)\to\left(\dfrac{26}{+0}\right)\to+\infty$, то есть $\lim\limits_{x\to-4-0}f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to-4+0}f(x)=+\infty$.

Следовательно, прямая $x=-4$ – вертикальная асимптота.

Так как $f\left(x\right)=\dfrac{x^2-5x}{x+4}=\dfrac{x(x+4)-9(x+4)+36}{x+4}=x-9+\dfrac{36}{x+4}$, то при $x\to\infty$ значение $\dfrac{36}{x+4}\to 0$, тогда $f\left(x\right)\to x-9$, то есть прямая $y=x-9$ – наклонная асимптота.

7. $f''(x)=\left(\dfrac{x^2+8x-20}{(x+4)^2}\right)'=$

$$=\frac{(x^2+8x-20)'(x+4)^2-(x^2+8x-20)((x+4)^2)'}{(x+4)^4}=$$

$$=\frac{(2x+8)(x+4)^2-(x^2+8x-20)\cdot 2(x+4)}{(x+4)^4}=\frac{72}{(x+4)^3}.$$

Так как $f''(x)\neq 0$, то знак второй производной может меняться только в точке $x=-4$.

Получаем такие знаки второй производной и соответствующий характер выпуклости (рис. 21):

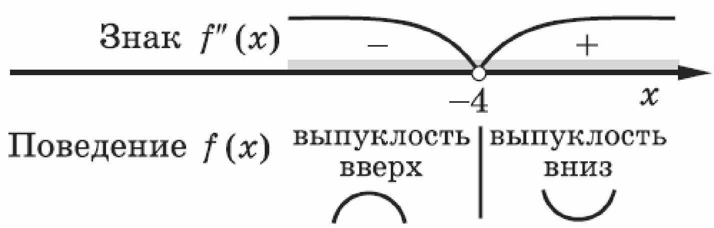


Рисунок 21

8. Контрольные точки:

x	–7	–2
y	–28	7

8. На основании проведенного исследования построим график функции (рис. 22):

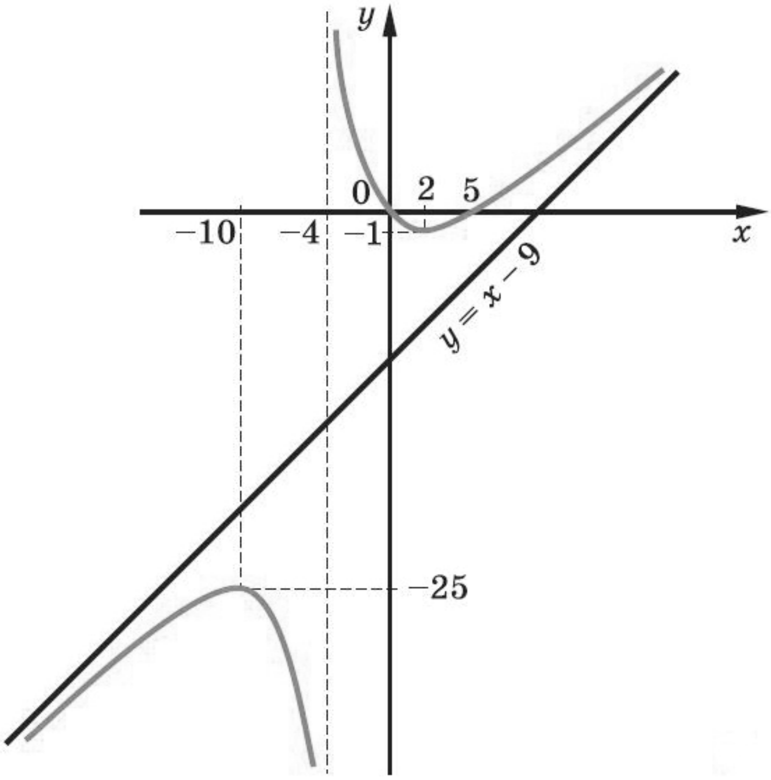


Рисунок 22

Задания для самостоятельной работы

Задание 1. Прочитайте, напишите, переведите на родной язык новые слова и словосочетания. Запомните их!

исследование функции
монотонность функции
критическая точка функции
внутренняя точка области определения
интервал (промежуток) монотонности (возрастания, убывания)
непрерывность функции в точке (на отрезке)
экстремум (максимум, минимум) функции
точка экстремума (максимума, минимума)
наибольшее (наименьшее) значение функции
изолированная точка графика
локальный экстремум
характер поведения функции
излом графика

асимптота графика функции
вертикальная (наклонная, горизонтальная) асимптота
выпуклость графика
точка перегиба графика
выпуклая вниз (вверх) функция
интервал выпуклости
дважды дифференцируемая функция

Задание 2. Ответьте на вопросы. Используйте информацию текста.

1) Какие вы знаете достаточные условия возрастания и убывания функции?

2) Что называют критическими точками функции?

3) Каков алгоритм нахождения интервалов монотонности функции?

4) Что называют точкой максимума (точкой минимума) функции?

5) Что называют точками экстремума функции?

6) Что называют локальным экстремумом функции?

7) Что называют экстремумом функции?

8) Сформулируйте необходимое и достаточные условия существования экстремума в точке.

9) Какую точку называют точкой перегиба функции?

10) Каков алгоритм исследования функции на экстремумы?

11) Каков алгоритм исследования функции на монотонность и экстремумы?

12) Что называют асимптотой графика функции?

13) Каков алгоритм нахождения наибольшего и наименьшего значений функции?

14) Какая функция называется выпуклой вниз? выпуклой вверх?

15) Сформулируйте достаточные условия выпуклости функции.

16)Что называют точкой перегиба графика функции?

17) Сформулируйте необходимое и достаточное условия существования точки перегиба функции.

18) Каков алгоритм исследования функции на выпуклость и точки перегиба?

19) Каков алгоритм исследования функции для построения её графика?

Задание 3. Закончите предложение. Используйте информацию текста.

Функция $f\left(x\right)$ является постоянной на интервале $\left(a;b\right)$ тогда и только тогда, когда …

Касательная к графику функции $f\left(x\right)$ в точке экстремума …

Если $f(x)$ – дробно-рациональная функция, в которой степень числителя на единицу большее степени знаменателя, то, чтобы найти уравнение асимптоты, надо …

В общем случае уравнения наклонных и горизонтальных асимптот можно получить с помощью …

Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке и имеет на нём конечное число критических точек, то она принимает свои наибольшее и наименьшее значения на этом отрезке …

Если непрерывная функция $f(x)$ имеет на заданном интервале только одну точку экстремума x_0 и это точка минимума, то…

Если непрерывная функция $f(x)$ имеет на заданном интервале только одну точку экстремума x_0 и это точка максимума, то…

Задание 4. Напишите существительные и прилагательные во множественном числе.

Образец: внутренняя точка области определения – ….

внутренняя точка области определения – внутренние точки области определения.

Критическая точка функции – ….; интервал (промежуток) монотонности (возрастания, убывания) – ….; экстремум (максимум, минимум) функции – ….; наибольшее (наименьшее) значение функции – ….; изолированная точка графика – ….; локальный экстремум – ….; излом графика – ….; вертикальная (наклонная, горизонтальная) асимптота – ….; выпуклость графика – ….; точка перегиба графика – ….; интервал выпуклости – ….

Задание 5. Прочитайте правильно эти обозначения. Используйте информацию текста.

<u>Образец:</u> $f'(x) > 0$ – производная функции $f(x)$ положительна;

$f'(x) < 0$ – …

$D(f) = R$ – …

$f(x) \nearrow$ – …

$f(x) \searrow$ – …

$x_{\max}$ – …

$x_{\min}$ – …

$y_{\max} = f(x_{\max}) = f(x_0)$ – …

$y_{\min} = f(x_{\min}) = f(x_0)$ – …

$\max\limits_{[a;b]} f(x) = f(x_0)$ – …

$\min\limits_{[a;b]} f(x) = f(x_0)$ – …

$f''(x)$ – …

Задание 6. Прочитайте правильно эти формулы. Используйте информацию текста.

$$k = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x}$$

$$b = \lim_{x \to \infty} (f(x) - kx)$$

Задание 7. Выполните упражнения.

1. Определите промежутки монотонности, точки экстремума функции и значения функции в точках экстремума:

1) $f(x) = x^2 - 6x + 5$;

2) $f(x) = x^4 - 2x^2$;

5) $f(x) = \dfrac{x}{\ln x}$;

6) $f(x) = x^2 - |x| - 1$;

3) $f(x)=x+\dfrac{4}{x}$;

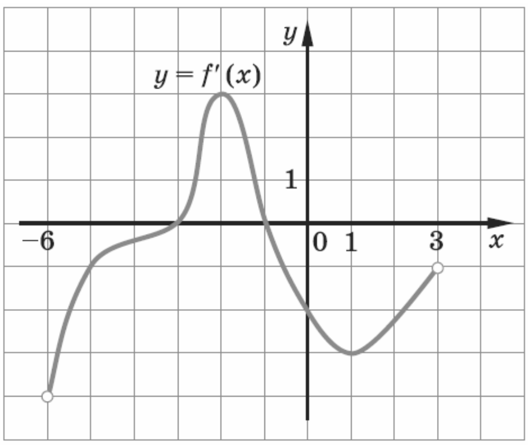
4) $f(x)=\sqrt{x-1}+\sqrt{3-x}$;

7) $f(x)=6x^3-2|x-1|$;

8) $f(x)=\sin x+\dfrac{1}{2}\sin 2x$.

Ответы: 1) $f(x)\nearrow$ при $x\in[3;+\infty)$; $f(x)\searrow$ при $x\in(-\infty;3]$; $x_{\min}=3$; $y_{\min}=-4$; 2) $f(x)\nearrow$ при $x\in[-1;0]$ и $[1;+\infty)$; $f(x)\searrow$ при $x\in(-\infty;-1]$ и $[0;1]$; $x_{\min 1}=-1$ и $x_{\min 2}=1$; $y_{\min 1}=y_{\min 2}=-1$; $x_{\max}=0$; $y_{\max}=0$; 3) $f(x)\nearrow$ при $x\in(-\infty;-2]$ и $[2;+\infty)$; $f(x)\searrow$ при $x\in[-2;0)$ и $(0;2]$; $x_{\max}=-2$; $y_{\max}=-4$; $x_{\min}=2$; $y_{\min}=4$; 4) $f(x)\nearrow$ при $x\in[1;2]$; $f(x)\searrow$ при $x\in[2;3]$; $x_{\max}=2$; $y_{\max}=2$; 5) $f(x)\nearrow$ при $x\in[e;+\infty)$; $f(x)\searrow$ при $x\in(0;1)$ и $x\in(1;e]$; $x_{\min}=e$; $y_{\min}=e$; 6) $f(x)\nearrow$ при $x\in[-0,5;0]$ и $[0,5;+\infty)$; $f(x)\searrow$ при $x\in(-\infty;-0,5]$ и $[0;0,5]$; $x_{\min 1}=-0,5$ и $x_{\min 2}=0,5$; $y_{\min 1}=y_{\min 2}=-1,25$; $x_{\max}=0$; $y_{\max}=-1$; 7) $f(x)\nearrow$ при $x\in(-\infty;1]$ и $[1;+\infty)$; 8) $f(x)\nearrow$ при $x\in\left[-\dfrac{\pi}{3}+2\pi k;\dfrac{\pi}{3}+2\pi k\right], k\in Z$; $f(x)\searrow$ при $x\in\left[\dfrac{\pi}{3}+2\pi k;\dfrac{5\pi}{3}+2\pi k\right], k\in Z$; $x_{\min}=-\dfrac{\pi}{3}+2\pi k$, $k\in Z$; $y_{\min}=-\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$; $x_{\max}=\dfrac{\pi}{3}+2\pi k$, $k\in Z$; $y_{\max}=\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$.

2. Известно, что производная некоторой функции $y = f(x)$, заданной на множестве всех действительных чисел, имеет такие знаки, как на рисунке. Укажите промежутки возрастания и убывания функции $f(x)$.



3. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции на заданном отрезке:

а) $f(x)=-x^3+3x^2+5, [0; 3]$;

б) $f(x)=x^4-4x^3+1, [-1; 1]$;

в) $f(x)=3\cos x+\cos 3x, [0; \pi]$;

г) $f(x)=\operatorname{tg} x-x, \left[\frac{\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}\right]$;

д) $f(x)=2\sqrt{x}-x, [0; 9]$;

е) $f(x)=\ln(2x)-6x^2+11x, \left[\frac{1}{2}; 2\right]$.

Ответы: а) $\max\limits_{[0;\,3]} f(x)=9$, $\min\limits_{[0;\,3]} f(x)=5$; б) $\max\limits_{[-1;\,1]} f(x)=6$, $\min\limits_{[-1;\,1]} f(x)=-2$; в) $\max\limits_{[0;\,\pi]} f(x)=4$, $\min\limits_{[0;\,\pi]} f(x)=-4$; г) $\max\limits_{\left[\frac{\pi}{4};\,\frac{5\pi}{4}\right]} f(x)=1-\frac{\pi}{4}$, $\min\limits_{\left[\frac{\pi}{4};\,\frac{5\pi}{4}\right]} f(x)=-\pi$; д) $\max\limits_{[0;\,9]} f(x)=1$, $\min\limits_{[0;\,9]} f(x)=-3$; е) $\max\limits_{\left[\frac{1}{2};\,2\right]} f(x)=\ln 2+5$, $\min\limits_{\left[\frac{1}{2};\,2\right]} f(x)=\ln 4-2$.

4.Число 10 представьте в виде суммы двух неотрицательных слагаемых так, чтобы сумма квадратов этих чисел была наименьшей. *Ответ:* 5; 5.

5. Число 4 разбейте на два слагаемых так, чтобы сумма первого слагаемого с квадратом второго была наименьшей. *Ответ:* 3,5; 0,5.

6. Разность двух чисел равна 8. Какими должны быть эти числа, чтобы произведение куба первого числа на второе было наименьшим? *Ответ:* 0; 8.

7. Из всех прямоугольников, площадь которых равна 25 см^2, найдите прямоугольник с наименьшим периметром. *Ответ:* квадрат со стороной 5 см.

8. Постройте график функции:

а) $f(x)=x^3-3x^2$;

б) $f(x)=5x^4-4x^5$;

в) $f(x)=\frac{4}{x}-x$;

г) $f(x)=\frac{\ln x}{x}$;

д) $f(x)=\sqrt[3]{(x-1)^2}$;

е) $f(x)=2\sin x-\cos 2x$.

Тест для самопроверки

1. Укажите неправильную формулу для вычисления производной:

А) $(\operatorname{tg} x + 3^x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x} + 3^x \ln 3$;

Б) $(x^2 + \operatorname{ctg} x)' = 3x^2 - \dfrac{1}{\sin^2 x}$;

В) $\left(\ln x + \dfrac{1}{x}\right)' = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}$;

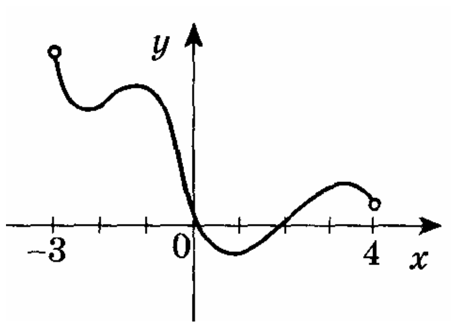
Г) $\left(2^x + \dfrac{1}{x^2}\right)' = 2^x \ln 2 - \dfrac{2}{x^3}$;

Д) $(\sin x + \sqrt{x})' = \cos x + \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

2. Найдите значение второй производной функции $y = x \ln x + 2\sqrt{x}$ в точке $x = 1$:

А	Б	В	Г	Д
–1	–0,5	0	0,5	1,5

3. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$. Функция определена на интервале $(-3;4)$ и в каждой точке этого интервала имеет производную $y' = f'(x)$. Определите количество корней уравнения $f'(x) = 0$ на интервале $(-3;4)$.

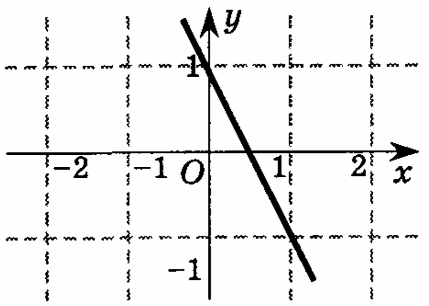


А	Б	В	Г	Д
4	6	5	3	0

4. Функция $f(x)$ имеет в точке x_0 производную $f'(x_0) = -4$. Определите значение производной функции $g(x) = 2 \cdot f(x) + 7x - 3$ в точке x_0.

А	Б	В	Г	Д
15	12	–1	–4	–8

5. Вычислите значение производной сложной функции $\left(y = f^4(x)\right)'$ при $x = 1$, если на рисунке изображено касательную к графику функции $y = f(x)$ в точке $x = 1$:

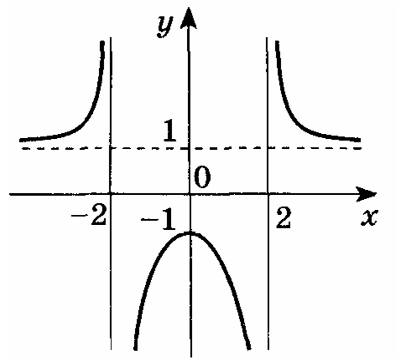


А	Б	В	Г	Д
2	8	–2	32	Другой ответ

6. Установите соответствие между функциями $y = f\left(x\right)$ (1-4) и числовыми значениями (А-Д) тангенсов углов, которые образуют с положительным направлением оси Ox касательные к графикам этих функций в точке с абсциссой x_0.

	Функция		Числовые значения тангенсов углов
1	$y = 2\sqrt{1-x}$, $x_0 = -3$	А	1
2	$y = \operatorname{tg} x$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$	Б	$\frac{1}{2}$
3	$y = \frac{1}{3}x^3$, $x_0 = 1$	В	–2
		Г	2
4	$y = \ln 2x$, $x_0 = 2$	Д	$-\frac{1}{2}$

7. На рисунке изображён график функции $y = f\left(x\right)$, которая задана на интервалах $(-\infty;-2)\cup(-2;2)\cup(2;+\infty)$. Установите соответствие между свойствами функции $y = f\left(x\right)$ (1-4) и интервалами (А-Д).



	Свойство функции		Интервал
1	Функция $y = f(x)$ возрастает	А	$(-\infty;-2); (2;+\infty)$
2	Функция $y = f(x)$ имеет положительные значения	Б	$(0;2); (2;+\infty)$
3	Производная функции $y = f(x)$ отрицательна	В	$\left(-\infty;-1\right); \left[1;+\infty\right)$
		Г	$\left(-\infty;-1\right]; \left(1;+\infty\right)$
4	Область значений функции $y = f(x)$	Д	$\left(-\infty;-2\right); \left(-2;0\right]$

8. Найдите уравнение касательной к графику функции $f(x) = \ln x - x^3$ в точке $x = 1$:

А	Б	В	Г	Д
$y = 3x - 4$	$y = 7 + 2x$	$y = 7 - 8x$	$y = 1 - 2x$	$y = 2x - 3$

9. Определите, в какой момент времени ускорение будет равняться 2 см/с^2, если точка движется прямолинейно по закону $x(t) = 3t^2 + 9\ln t + 7$ ($x(t)$ – путь в сантиметрах, t – время в секундах, $t > 0$):

А	Б	В	Г	Д
1 с	1,5 с	2 с	2,5 с	5 с

10. Определите интервалы возрастания функции $y = \dfrac{x^2 - x + 10}{\sqrt{x^2 + 4}}$:

А	Б	В	Г	Д
Нет интервалов возрастания	$(-\infty; 2)$	$(2; +\infty)$	$(-\infty; 2) \cup (4; +\infty)$	Другой ответ

Ответы:

1	2	3	4	5	6	9	10
В	А	Г	В	Г	Б	Б	В

Навчальне видання

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до практичних занять з математики
(розділ «Границя функції. Похідна. Застосування похідної»)

для іноземних студентів підготовчих факультетів
вищих навчальних закладів

Укладач: ВОЛОСЮК Марина Андріївна

Авторська редакція

Відповідальний за випуск *Нікітіна Т.Б.*

Комп'ютерна верстка, оформлення оригінал-макета *Волосюк М.А.*