Министерство образования и науки Украины

ХАРЬКОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ АВТОМОБИЛЬНО-ДОРОЖНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

к практическим занятиям по математике
(раздел «Первообразная. Интеграл. Применения интегралов»)

для иностранных студентов подготовительных факультетов
высших учебных заведений

Утверждено
Методическим советом университета
Протокол № от

Харьков 2015

Составитель: М.А. Волосюк

Кафедра естественных и гуманитарных дисциплин

Методические указания к практическим занятиям по математике предназначены для иностранных студентов, обучающихся на инженерно-технических специальностях подготовительных факультетов высших учебных заведений.

Методические указания составлены в соответствии с учебной программой по «Математике», рекомендуемой Учебно-методической комиссией по довузовской подготовке иностранных граждан, с учетом требований современной теории обучения на неродном для учащихся языке.

Цель методических указаний – способствовать формированию у иностранных студентов общепрофессиональных и коммуникативных компетенций, необходимых им для успешного овладения курсом математики (раздел «Первообразная. Интеграл. Применения интегралов») при обучении на основных факультетах высших учебных заведений технического профиля.

ПЕРВООБРАЗНАЯ.
НЕОПРЕДЕЛЁННЫЙ ИНТЕГРАЛ

1. Первообразная

Определение. Функция $F(x)$ называется ***первообразной*** для функции $f(x)$ на промежутке X, если для любого x из X выполняется равенство $F'(x) = f(x)$ или $dF(x) = f(x)dx$.

Например, из равенства $(x^5)' = 5x^4$ следует, что функция x^5 является первообразной для функции $5x^4$ на всей числовой оси. Функция $x^5 + 7$ также является первообразной для функции $5x^4$ на всей числовой оси, так как $\left(x^5 + 7\right)' = 5x^4$. Поэтому любая функция вида $x^5 + C$, где C – некоторое число, является первообразной для функции $5x^4$. Таким образом, функция x^5 имеет бесконечно много первообразных.

2. Основное свойство первообразной

Теорема. Если функция $f(x)$ имеет на промежутке X первообразную $F(x)$, то для любого числа C функция $F(x) + C$ также является первообразной для $f(x)$.

Других первообразных функция $f(x)$ на промежутке X не имеет.

Пример. Найти общий вид первообразных для функции $f(x) = x^\alpha$, где $\alpha \neq -1$.

Решение. Так как $(x^{\alpha+1})' = (\alpha+1)x^\alpha$, то при $\alpha \neq -1$ одной из первообразных будет функция $F(x) = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$. Значит, общий вид первообразных для функции $f(x) = x^\alpha$: $F(x) = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$.

Ответ: $F(x) = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$.

3. Неопределённый интеграл

Определение. Совокупность всех первообразных функции $f(x)$ называют ***неопределённым интегралом*** этой функции и обозначают символом $\int f(x)dx$:

$$\boxed{\int f(x)dx = F(x) + C}. \qquad (1)$$

Читают: $\int f(x)dx$ – «*интеграл эф от икс дэ икс*».

$\int$ – *знак интеграла*, $f(x)$ – *подынтегральная функция*, $f(x)dx$ – *подынтегральное выражение*, x – *переменная интегрирования*, C – *постоянная интегрирования*.

Операция ***интегрирования*** является ***обратной*** операции дифференцирования.

Пример. Так как $x^5 + C$ – первообразная для $5x^4$, то $\int(5x^4)dx = x^5 + C$.

Свойства неопределённого интеграла:

1) $d(\int f(x)dx) = (F(x)+C)' = F'(x)dx = f(x)dx$ (дифференциал неопределённого интеграла равен подынтегральному выражению);

2) $\int F'(x)dx = F(x) + C$, так как $F'(x)dx = f(x)dx$.

4. Первообразные и неопределённые интегралы элементарных функций

Нахождение первообразной есть операция, обратная операции дифференцирования.

Поэтому на основании таблицы производных можно получить таблицу первообразных и неопределённых интегралов:

№	Функция	Общий вид первообразных	Неопределённый интеграл
1	$f(x)=k$	$F(x)=kx+C$	$\int kdx=kx+C$
2	$f(x)=x^{\alpha}$ $(\alpha\neq -1)$	$F(x)=\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C$	$\int x^{\alpha}dx=\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C$
3	$f(x)=\dfrac{1}{x}$	$F(x)=\ln\lvert x\rvert+C$	$\int\dfrac{dx}{x}=\ln\lvert x\rvert+C$
4	$f(x)=e^{x}$	$F(x)=e^{x}+C$	$\int e^{x}dx=e^{x}+C$
5	$f(x)=a^{x}$	$F(x)=\dfrac{a^{x}}{\ln a}+C$	$\int a^{x}dx=\dfrac{a^{x}}{\ln a}+C$
6	$f(x)=\sin x$	$F(x)=-\cos x+C$	$\int\sin x\,dx=-\cos x+C$
7	$f(x)=\cos x$	$F(x)=\sin x+C$	$\int\cos x\,dx=\sin x+C$
8	$f(x)=\dfrac{1}{\sin^{2}x}$	$F(x)=-\operatorname{ctg}x+C$	$\int\dfrac{dx}{\sin^{2}x}=-\operatorname{ctg}x+C$
9	$f(x)=\dfrac{1}{\cos^{2}x}$	$F(x)=\operatorname{tg}x+C$	$\int\dfrac{dx}{\cos^{2}x}=\operatorname{tg}x+C$
10	$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^{2}}}$	$F(x)=\arcsin x+C$	$\int\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^{2}}}=\left[\begin{array}{l}\arcsin x+C,\\ -\arccos x+C_1\end{array}\right.$
11	$f(x)=\dfrac{1}{1+x^{2}}$	$F(x)=kx+C$	$\int\dfrac{dx}{1+x^{2}}=\left[\begin{array}{l}\operatorname{arctg}x+C,\\ -\operatorname{arcctg}x+C_1\end{array}\right.$

5. Правила вычисления первообразных и неопределённых интегралов

1. Если $F(x)$ – первообразная для $f(x)$, а $H(x)$ – первообразная для $h(x)$, то $F(x)+H(x)$ – первообразная для $f(x)+h(x)$, то есть ***первообразная суммы равна сумме первообразных***.

Интеграл суммы равен сумме интегралов:

$$\boxed{\int(\varphi(x)+\psi(x))dx=\int\varphi(x)dx+\int\psi(x)dx} \qquad (2)$$

Интегрирование ***разложением в алгебраическую сумму*** есть приведение данного интеграла к сумме более простых интегралов.

2. Если $F(x)$ – первообразная для $f(x)$ и k – постоянная, то $k\,F(x)$ – первообразная для $k\,f(x)$, то есть ***постоянный множитель можно вынести за знак первообразной.***

Постоянный множитель можно вынести за знак интеграла:

$$\boxed{\int k\,f(x)dx = k\int f(x)dx} \qquad (3)$$

Пример 1. Найдите общий вид первообразных для функции:

$$f(x) = 3\sqrt{x} + 2\cos x - 3^x + \frac{\sin x}{5}.$$

Решение. Воспользуемся таблицей первообразных и найдём первообразную для каждой функции, которые входят в состав $f(x)$.

Для функции $f_1(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ имеем $F_1(x) = \dfrac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} = \dfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$.

Для функции $f_2(x) = \cos x$ имеем $F_2(x) = \sin x$.

Для функции $f_3(x) = 3^x$ имеем $F_3(x) = \dfrac{3^x}{\ln 3}$.

Для функции $f_4(x) = \sin x$ имеем $F_4(x) = -\cos x$.

Так как постоянный множитель можно вынести за знак интеграла, то

для $3f_1(x) = 3\sqrt{x}$ первообразной будет $3F_1(x) = 3\cdot\dfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} = 2x^{\frac{3}{2}}$,

для $2f_2(x) = 2\cos x$ первообразной будет $2F_2(x) = 2\sin x$,

для $-f_3(x) = -3^x$ первообразной будет $-F_3(x) = -\dfrac{3^x}{\ln 3}$,

для $\dfrac{1}{5}f_4(x) = \dfrac{\sin x}{5} = \dfrac{1}{5}\sin x$ первообразной будет

$$\frac{1}{5}F_4(x) = -\frac{1}{5}\cos x = -\frac{\cos x}{5}.$$

Так как первообразная суммы равна сумме первообразных, то для $f(x)$ первообразной будет функция

$$F(x) = 2x^{\frac{3}{2}} + 2\sin x - \frac{3^x}{\ln 3} - \frac{\cos x}{5}.$$

Общий вид первообразных для заданной функции:

$$F(x) = 2x^{\frac{3}{2}} + 2\sin x - \frac{3^x}{\ln 3} - \frac{\cos x}{5} + C.$$

Ответ: $F(x) = 2x^{\frac{3}{2}} + 2\sin x - \frac{3^x}{\ln 3} - \frac{\cos x}{5} + C$.

<u>Пример 2.</u> Вычислите интегралы:

1) $\int (7x^6 - 4x^4 + 3x - 2)dx = \int 7x^6 dx - \int 4x^4 dx + \int 3x dx - \int 2dx =$

$$= \frac{7x^7}{7} - \frac{4x^5}{5} + \frac{3x^2}{2} - 2x + C = x^7 - \frac{4x^5}{5} + \frac{3x^2}{2} - 2x + C;$$

2) $\int (x^2 \sqrt[5]{x^3})dx = \int (x^2 x^{\frac{3}{5}})dx = \int (x^{2\frac{3}{5}})dx = \dfrac{x^{2\frac{3}{5}+1}}{2\frac{3}{5}+1} + C = \dfrac{x^{3\frac{3}{5}}}{\frac{18}{5}} + C =$

$$= \frac{5}{18}x^{3\frac{3}{5}} = \frac{5}{18}x^3\sqrt[5]{x^3};$$

3) $\int \left(5\sin x + \dfrac{4}{\cos^2 x}\right)dx = -5\cos x + 4\,\mathrm{tg}\,x + C;$

4) $\int \dfrac{\sqrt{1-x^2} + 1 + x^2}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}\,dx +$

$$+ \int \frac{1+x^2}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int \frac{1}{1+x^2}\,dx + \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx =$$

$$= \mathrm{arctg}\,x + \arcsin x + C.$$

Задания для самостоятельной работы

Задание 1. Прочитайте, напишите, переведите на родной язык новые слова и словосочетания. Запомните их!

первообразная
общий вид первообразных
неопределённый интеграл
знак интеграла
подынтегральная функция
подынтегральное выражение
переменная интегрирования
постоянная интегрирования
интегрирование
интегрирование разложением в сумму

Задание 2. Ответьте на вопросы. Используйте информацию текста.

1. Какая функция называется первообразной для функции $f(x)$?
2. Какое основное свойство первообразной?
3. Что такое неопределённый интеграл?
4. Какие вы знаете правила вычисления неопределённых интегралов?

Задание 3. Закончите предложения. Используйте информацию текста.

1. Операция интегрирования является обратной ...
2. Дифференциал неопределённого интеграла равен …
3. Нахождение первообразной есть операция, обратная …
4. На основании таблицы производных можно получить …
5. Первообразная суммы равна …
6. Постоянный множитель можно вынести …

Задание 4. Напишите существительные и прилагательные во множественном числе.

Образец: первообразная – ….
первообразная – первообразные.

Неопределённый интеграл – …; подынтегральная функция – …; переменная интегрирования – … ; постоянная интегрирования – …

Задание 5. Прочитайте правильно эти обозначения. Используйте информацию текста.

Образец: $f(x)$ – функция,

$F(x)$ – …

$F'(x)$ – …

$dF(x)$ – …

$\int f(x)dx$ – …

Задание 6. Прочитайте правильно эти формулы. Используйте информацию текста.

$F'(x) = f(x)$

$\int f(x)dx = F(x) + C$

$\int (\varphi(x) + \psi(x))dx = \int \varphi(x)dx + \int \psi(x)dx$

$\int k\, f(x)dx = k\int f(x)dx$

Задание 7. Выполните упражнения.

1. Является ли функция $F(x)$ первообразной для функции $f(x)$ на указанном промежутке:

а) $F(x) = 3 - \sin x$, $f(x) = \cos x$, $x \in (-\infty; +\infty)$;

б) $F(x) = 5 - x^4$, $f(x) = -4x^3$, $x \in (-\infty; +\infty)$;

в) $F(x) = \cos x - 4$, $f(x) = -\sin x$, $x \in (-\infty; +\infty)$;

г) $F(x) = x^{-2} + 2$, $f(x) = \dfrac{1}{2x^3}$, $x \in (0; +\infty)$?

2. Найдите для функции $f(x)$ первообразную, график которой проходит через точку М:

а) $f(x) = 4x + \dfrac{1}{x^2}$, $M(-1;\, 4)$;

б) $f(x) = x^3 + 2$, $M(2;\, 15)$;

в) $f(x) = 1 - 2x$, $M(3;\, 2)$;

г) $f(x)=\dfrac{1}{x^3}-10x^4+3,\ M(1;5);$

д) $f(x)=2\cos x,\ M\left(-\dfrac{\pi}{2};1\right);$

е) $f(x)=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right),\ M\left(\dfrac{2\pi}{3};-1\right).$

Ответы: а) $2x^2-\dfrac{1}{x}+1\dfrac{1}{2}$; б) $\dfrac{x^4}{4}+2x+7$; в) $x-x^2+8$;

г) $-\dfrac{1}{2x^2}-2x^5+3x+4{,}5$; д) $2\sin x+3$; е) $-\cos\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)-2.$

3. В равенствах заполните пропущенные места и затем вычислите интегралы: $\int 2x\,dx$, $\int x^3\,dx$, …

а) $d(\ \ )=2x\,dx;$ в) $d(\ \ )=\dfrac{dx}{x};$ д) $d(\ \ )=\dfrac{dx}{\cos^2 x};$

б) $d(\ \ )=x^3dx;$ г) $d(\ \ )=\cos x\,dx;$ е) $d(\ \ )=\dfrac{dx}{1+x^2}.$

4. Вычислите интегралы:

а) $\displaystyle\int\left(x^2+2x+\frac{1}{x}\right)dx;$ д) $\displaystyle\int\left(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}\right)dx;$ з) $\displaystyle\int e^x\left(1-\frac{e^x}{x^2}\right)dx;$

б) $\displaystyle\int\frac{10x^8+3}{x^4}\,dx;$ е) $\displaystyle\int\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}\right)dx;$ и) $\displaystyle\int a^x\left(1+\frac{a^{-x}}{\sqrt{x^3}}\right)dx;$

в) $\displaystyle\int\frac{x-2}{x^3}\,dx;$ ё) $\displaystyle\int\frac{(\sqrt{x}-1)^3}{x}dx;$ к) $\displaystyle\int\frac{\cos 2x}{\cos^2 x\sin^2 x}dx;$

г) $\displaystyle\int\frac{(x^2+1)^2}{x^3}dx;$ ж) $\displaystyle\int\frac{x-1}{\sqrt[3]{x^2}}dx;$ л) $\int\mathrm{ctg}^2\,x\,dx.$

Ответы: 1) $\dfrac{x^3}{3}+x^2+\ln|x|+C$; 2) $2x^5-\dfrac{1}{x^3}+C$; 3) $\dfrac{1-x}{x^2}+C$;

4) $\dfrac{x^2}{2}+2\ln|x|-\dfrac{1}{2x^2}+C$; 5) $x\left(\dfrac{2}{3}\sqrt{x}+\dfrac{3}{4}\sqrt[3]{x}\right)+C$;

6) $2\sqrt{x}-4\sqrt[4]{x}+C$; 7) $\frac{2x\sqrt{x}}{3}-3x+6\sqrt{x}-\ln|x|+C$;

8) $\frac{3}{4}(x-4)\sqrt[3]{x}+C$; 9) $e^x-\frac{1}{x}+C$; 10) $\frac{a^x}{\ln a}-\frac{2}{\sqrt{x}}+C$;

11) $-\operatorname{ctg}x-\operatorname{tg}x+C$; 12) $-\operatorname{ctg}x-x+C$.

5. Вычислите интегралы:

1) $\int\frac{8\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1-x^4}}\,dx$;

2) $\int\frac{x^6+1}{1+x^2}\,dx$;

3) $\int\frac{x^3-x^2+x-1}{1+x^2}\,dx$;

4) $\int\frac{x^2-4x\sqrt{x}+4x}{(\sqrt{x}-2)^2}\,dx$;

5) $\int\frac{x^7-7x^2+x+1}{x^2}\,dx$;

6) $\int\frac{x^4+6x^3+3x+4\sqrt[3]{x^2}}{x\sqrt{x}}\,dx$.

Ответы: 1) $8\arcsin x+C$; 2) $\frac{x^5}{5}-\frac{x^3}{3}+x+C$; 3) $\frac{x^2}{2}-x+C$;

4) $\frac{x^2}{2}+C$; 5) $\frac{x^6}{6}-7x+\ln|x|-\frac{1}{x}+C$;

6) $\frac{2}{7}x^3\sqrt{x}+\frac{12}{5}x^2\sqrt{x}+6\sqrt{x}+24\sqrt[6]{x}+C$.

МЕТОДЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

5. Интегрирование подстановкой

При вычислении интегралов, которых нет в таблице, удобно использовать ***метод замены переменной (или метод подстановки)***. В основе этого метода лежит формула дифференцирования сложной функции. Если $F'(x)=f(x)$ и если существует функция $F[\varphi(t)]$, где функция $\varphi(t)$ дифференцируема, то $\left(F[\varphi(t)]\right)'=F'(x)\varphi'(t)=f(x)\varphi'(t)=f[\varphi(t)]\varphi'(t)$.

Если $\int f(x)dx = F(x) + C$***, то делаем замену*** $x = \varphi(t)$***,*** $dx = d\varphi(t) = \varphi'(t)dt$ ***и получаем:***

$$\boxed{\int f\left[\varphi(t)\right]\varphi'(t)dt = F\left[\varphi(t)\right] + C}. \qquad (4)$$

Такое преобразование интеграла называется ***интегрированием подстановкой***.

Так как $\varphi'(t)dt = d\varphi(t)$, то полученную формулу можно записать в виде:

$$\int f\left[\varphi(t)\right]d\varphi(t) = F\left[\varphi(t)\right] + C.$$

В простых случаях введение новой переменной t рекомендуется выполнять, применяя следующие преобразования дифференциала dx:

$$dx = \frac{1}{a}d(ax+b); \qquad 2xdx = d(x^2); \qquad \cos x\,dx = d(\sin x);$$

$$\frac{dx}{x} = d(\ln x)\ldots$$

и обозначая выражение в скобках через t.

Если $F(x)$ ***- первообразная для*** $f(x)$***, а*** k ***и*** b ***- постоянные, то*** $\frac{1}{k}F(kx+b)$ ***- первообразная для*** $f(kx+b)$:

$$\boxed{\int f(kt+b)\,dt = \frac{1}{k}F(kt+b) + C}. \qquad (5)$$

<u>Пример 3.</u> Вычислим интегралы:

1) $\int \cos(7x-2)dx = \frac{1}{7}\sin(7x-2) + C$;

2) $\int (3x-5)^4 dx = \frac{1}{3}\cdot\frac{(3x-5)^5}{5} + C = \frac{(3x-5)^5}{15} + C$;

3) $\int x^2\sin(x^3)dx$.

Так как $(x^3)' = 3x^2$, то делаем подстановку: $x^3 = t$, $d(x^3) = dt$ или $3x^2dx = dt$. Имеем:

$$\int x^2 \sin(x^3)\, dx = \frac{1}{3}\int \sin t\, dt = \frac{1}{3}\cdot(-\cos t) + C = -\frac{1}{3}\cos(x^3) + C.$$

<u>Пример 4.</u> Вычислите интеграл $\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$, $a > 0$.

Решение. Пусть $x = \varphi(t) = a\sin t$, $-\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}$. Тогда $dx = d\varphi(t) = d(a\sin t) = a\cos t dt$. Имеем:

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \int \sqrt{a^2 - (a\sin t)^2} \cdot a\cos t\, dt = a^2 \int \sqrt{1 - \sin^2 t} \cdot \cos t\, dt =$$

$$= a^2 \int \cos^2 t\, dt = a^2 \int \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = \frac{a^2}{2}\int dt + \frac{a^2}{2}\int \cos 2t\, dt =$$

$$= \frac{a^2}{2} t + \frac{a^2}{2}\frac{\sin 2t}{2} + C = \frac{a^2}{2} t + \frac{a^2 \sin 2t}{4} + C = \frac{a^2}{2}(t + \sin t \cos t) + C.$$

Так как $x = \varphi(t) = a\sin t$, то $\sin t = \frac{x}{a}$,

$\cos t = \sqrt{1 - \sin^2 t} = \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}$, $t = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right)$, поэтому имеем:

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{a^2}{2}\arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + C.$$

Ответ: $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{a^2}{2}\arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + C$.

Задания для самостоятельной работы

1. Вычислите интегралы:

1) $\int \cos 5x\, dx$;

2) $\int (7x - 4)^6 dx$;

3) $\int \sin\frac{x}{2}\, dx$;

4) $\int \frac{dx}{\sin^2(4x - 3)}$;

5) $\int \sqrt{6x + 11}\, dx$;

6) $\int e^{-3x}\, dx$;

7) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{8x - 15}}$;

8) $\int \frac{dx}{\cos^2(6x - 1)}$;

9) $\int \sqrt[3]{5 - 6x}\, dx$.

Ответы: 1) $\frac{1}{5}\sin 5x + C$; 2) $\frac{1}{49}(7x-4)^7 + C$; 3) $-2\cos\frac{x}{2} + C$;

4) $\frac{1}{4}\operatorname{ctg}(4x-3) + C$; 5) $\frac{1}{9}(6x+11)\sqrt{6x+11} + C$; 6) $-\frac{1}{3}e^{-3x} + C$;

7) $\frac{3}{16}\sqrt[3]{(8x-15)^2} + C$; 8) $\frac{1}{6}\operatorname{tg}(6x-1) + C$; 9) $-\frac{1}{8}(5-6x)^{4/3} + C$.

2. Вычислите интегралы:

1) $\int \frac{xdx}{x^2+1}$; 4) $\int \operatorname{ctg} x\, dx$; 7) $\int \frac{\sin x\, dx}{1+3\cos x}$;

2) $\int \frac{dx}{1-10x}$; 5) $\int \operatorname{tg} x\, dx$; 8) $\int \frac{\cos x\, dx}{1+2\sin x}$;

3) $\int \frac{e^{2x}dx}{1-3e^{2x}}$; 6) $\int \frac{\cos 2x\, dx}{\sin x \cos x}$; 9) $\int \frac{dx}{x(1+\ln x)}$.

Ответы: 1) $\frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C$; 2) $-0{,}1 \cdot \ln|1-10x| + C$;

3) $-\frac{1}{6}\ln\left|1-3e^{2x}\right| + C$; 4) $\ln|\sin x| + C$; 5) $-\ln|\cos x| + C$;

6) $\ln|\sin 2x| + C$; 7) $-\frac{1}{3}\ln|1+3\cos x| + C$; 8) $\frac{1}{2}\ln|1+2\sin x| + C$;

9) $\ln|1+\ln x| + C$.

3. Вычислите интегралы (например, №1 можно решить подстановкой $\cos x = t$):

1) $\int \cos^3 x \sin x\, dx$; 4) $\int \sin^2 x \cos x\, dx$ 5) $\int e^{\cos x}\sin x\, dx$;

2) $\int \frac{\cos x\, dx}{\sin^4 x}$; 3) $\int \frac{\sin x\, dx}{\cos^3 x}$; 6) $\int \frac{1-2\cos x}{\sin^2 x}\, dx$.

Ответы: 1) $-\frac{1}{4}\cos^4 x + C$; 2) $-\frac{1}{3\sin^3 x} + C$; 3) $\frac{1}{2\cos^2 x} + C$;

4) $\frac{1}{3}\sin^3 x + C$; 5) $-e^{\cos x} + C$; 6) $\frac{2-\cos x}{\sin x} + C$.

4. Вычислите интегралы (например, №1 можно решить подстановкой $x^3 = t$):

1) $\int e^{x^3} x^2\, dx$; 2) $\int e^{-x^2} x\, dx$; 3) $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\, dx$.

Ответы: 1) $\frac{1}{3}e^{x^3} + C$; 2) $-\frac{1}{2}e^{-x^2} + C$; 3) $2e^{\sqrt{x}} + C$.

5. Вычислите интегралы (например, №1 можно решить подстановкой $x^2 + 1 = t$):

1) $\int \sqrt{x^2 + 1}\, dx$; 4) $\int \frac{xdx}{\sqrt{1 - x^2}}$; 7) $\int \sqrt{1 + 4\sin x}\, \cos x\, dx$;

2) $\int \sqrt[3]{x^3 - 8}\, x^2\, dx$; 5) $\int \frac{\sin x dx}{\sqrt{1 + 2\cos x}}$; 8) $\int \sqrt[3]{1 - 6x^5}\, x^4\, dx$;

3) $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt[3]{1 + x^3}}$; 6) $\int \frac{\sqrt{1 + \ln x}\, dx}{x}$; 9) $\int \sqrt[6]{1 - 2x^3}\, x^2\, dx$.

Ответы: 1) $\frac{1}{3}(x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1} + C$; 2) $\frac{1}{4}(x^3 - 8)\sqrt[3]{x^3 - 8} + C$;
3) $\frac{1}{2}\sqrt[3]{(1 + x^3)^2} + C$; 4) $-\sqrt{1 - x^2} + C$; 5) $-\sqrt{1 + 2\cos x} + C$;
6) $\frac{2}{3}\sqrt{(1 + \ln x)^3} + C$; 7) $\frac{1}{6}\sqrt{(1 + 4\sin x)^3} + C$;
8) $-\frac{1}{40}(1 - 6x^5)\sqrt[3]{1 - 6x^5} + C$; 9) $-\frac{1}{7}(1 - 2x^3)\sqrt[6]{1 - 2x^3} + C$.

5. Вычислите интегралы (например, №1 можно решить подстановкой $x = a\ \mathrm{tg}\, t$, №2 – подстановкой $x = a\sin t$):

1) $\int \frac{dx}{a^2 + x^2}$; 3) $\int \frac{dx}{\sqrt{4 - x^2}}$; 5) $\int \frac{dx}{x^2 + 3}$;

2) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$; 4) $\int \frac{dx}{9 + x^2}$; 6) $\int \frac{dx}{\sqrt{5 - x^2}}$.

Ответы: 1) $\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+C$; 2) $\arcsin\frac{x}{a}+C$; 3) $\arcsin\frac{x}{2}+C$; 4) $\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{3}+C$; 5) $\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{3}}+C$; 6) $\arcsin\frac{x}{\sqrt{5}}+C$.

6. Вычислите интегралы, используя разложение $\frac{1}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\left(\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x+a}\right)$:

1) $\int\frac{dx}{x^2-a^2}$; 2) $\int\frac{dx}{x^2-25}$; 3) $\int\frac{dx}{b^2x^2-a^2}$.

Ответы: 1) $\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C$; 2) $\frac{1}{10}\ln\left|\frac{x-5}{x+5}\right|+C$; 3) $\frac{1}{2ab}\ln\left|\frac{bx-a}{bx+a}\right|+C$.

7. Вычислите интегралы, исключив из подынтегральной дроби целое выражение:

1) $\int\frac{x^2dx}{x^2+1}$; 2) $\int\frac{x^4dx}{x^2-3}$; 3) $\int\frac{x^4dx}{x^2+2}$.

Ответы: 1) $x-\operatorname{arctg}x+C$; 2) $\frac{x^3}{3}+3x+\frac{3\sqrt{3}}{2}\ln\left|\frac{x-\sqrt{3}}{x+\sqrt{3}}\right|+C$;

3) $\frac{x^3}{3}-2x+2\sqrt{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}}+C$.

9. Вычислите интегралы, выделив полный квадрат из квадратного трёхчлена:

1) $\int\frac{dx}{x^2+4x+5}$; 3) $\int\frac{dx}{x^2+6x+13}$; 5) $\int\frac{dx}{x^2+3x+3}$;

2) $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+3}}$; 4) $\int\frac{dx}{\sqrt{4x-x^2}}$; 6) $\int\frac{dx}{\sqrt{2+3x-2x^2}}$.

Ответы: 1) $\operatorname{arctg}(x+2)+C$; 2) $\ln(x+1+\sqrt{x^2+2x+3})+C$;
3) $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x-3}{2}+C$; 4) $\arcsin\frac{x-2}{2}+C$; 5) $\frac{2\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\frac{2x+3}{\sqrt{3}}+C$;
6) $\frac{\sqrt{2}}{2}\arcsin\frac{4x-3}{5}+C$.

6. Интегрирование по частям

Из формулы дифференциала произведения $d(u\upsilon)=ud\upsilon+\upsilon du$ получается формула ***интегрирования по частям***:

$$\boxed{\int ud\upsilon = u\upsilon - \int \upsilon du}\,. \qquad (6)$$

Эта формула чаще всего применяется тогда, когда под интегралом имеется произведение алгебраической и трансцендентной функций, например $\int x^2e^xdx$ или $\int x^2\ln x\,dx$. При этом за u принимается функция, которая дифференцированием упрощается, а за $d\upsilon$ – та часть подынтегрального выражения, содержащая dx, интеграл от которой известен или может быть найден.

Из трансцендентных функций за u обычно принимаются $\ln x$, $arctg\,x$ и $\arcsin x$.

Например, в интеграле $\int x^2\ln x\,dx$ за u нужно принять $\ln x$ (а не x^2), а в интеграле $\int x^2e^xdx$ за u нужно принять x^2 (а не e^x).

<u>Пример 1.</u> Вычислите интегралы: $\int xe^{2x}dx$.

Решение.

Выделим $u=x$, $d\upsilon=e^{2x}dx=\frac{1}{2}de^{2x}=d\frac{1}{2}e^{2x}$. Следовательно, $\upsilon=\frac{1}{2}e^{2x}$. Так как $\int ud\upsilon=u\upsilon-\int\upsilon du$, то получаем:

$$\int xe^{2x}dx = x\cdot\frac{1}{2}e^{2x}-\int\frac{1}{2}e^{2x}dx=\frac{1}{2}xe^{2x}-\frac{1}{4}e^{2x}+C=\frac{1}{2}e^{2x}\left(x-\frac{1}{2}\right)+C.$$

Задания для самостоятельной работы

1. Вычислите интегралы:

1) $\int \ln x\, dx$;	4) $\int e^x \sin x\, dx$;	7) $\int e^x \cos x\, dx$;
2) $\int x \operatorname{arctg} x\, dx$;	5) $\int \sqrt{x} \ln x\, dx$;	8) $\int \operatorname{arctg} x\, dx$;
3) $\int x^2 \cos x\, dx$;	6) $\int x^2 e^{-x/2}\, dx$;	9) $\int \frac{x\,dx}{\cos^2 x}$.

Ответы: 1) $x \ln|x| - x + C$; 2) $\frac{x^2+1}{2}\operatorname{arctg} x - \frac{x}{2} + C$;

3) $x^2 \sin x + 2x\cos x - 2\sin x + C$; 4) $\frac{1}{2}e^x(\sin x - \cos x) + C$;

5) $\frac{2}{5}\sqrt{x^3}\left(\ln|x| - \frac{2}{3}\right) + C$; 6) $-2e^{-x/2}(x^2 + 4x + 8) + C$;

7) $\frac{1}{2}e^x(\sin x + \cos x) + C$; 8) $x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln(1 + x^2) + C$;

9) $x \operatorname{tg} x + \ln|\cos x| + C$.

7. Интегрирование некоторых тригонометрических функций

Правило 1. Интегралы от квадратов и других чётных степеней синуса и косинуса находят, применяя формулы понижения степени:

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2};\ \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2};\ \sin x \cos x = \frac{\sin 2x}{2}.$$

Правило 2. Интегралы от кубов и других нечётных степеней синуса и косинуса находят, отделяя от нечётной степени один множитель и полагая кофункцию равной новой переменной t.

Интеграл $\int \cos^m x \sin^n x\, dx$ находится по правилу 1, если m и n оба чётные, и по правилу 2, если m или n нечётно.

Пример 1. Вычислите интеграл: $\int \sin^5 x\, dx$.

Решение. Имеем интеграл от нечётной степени синуса. Отделим от нечётной степени один множитель:

$\sin^5 x = \sin x \cdot \sin^4 x = \sin x \cdot (\sin^2 x)^2 = \sin x \cdot (1-\cos^2 x)^2$
и положим кофункцию равной новой переменной t:
$\cos x = t$, тогда $-\sin x\, dx = dt$.
Выполним подстановку и вычислим интеграл:

$$\int \sin^5 x\, dx = \int \sin x \cdot (1-\cos^2 x)^2 dx = -\int (1-t^2)^2 dt =$$

$$= -\int (1-2t^2+t^4)\, dt = -\int (1-2t^2+t^4)\, dt = -t + 2\cdot\frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5} + C =$$

$$= -\cos x + \frac{2}{3}\cos^3 x - \frac{1}{5}\cos^5 x + C.$$

Ответ: $-\cos x + \frac{2}{3}\cos^3 x - \frac{1}{5}\cos^5 x + C$.

Задания для самостоятельной работы

1. Вычислите интегралы:

1) $\int \sin^2 3x\, dx$;
2) $\int (1+2\cos x)^2\, dx$;
3) $\int \cos^4 x\, dx$;
4) $\int \cos^7 x\, dx$;
5) $\int \sin^2 x \cos^3 x\, dx$;
6) $\int (1+2\cos x)^3\, dx$.

Ответы: 1) $\frac{1}{2}x - \frac{1}{12}\sin 6x + C$; 2) $3x + 4\sin x + \sin 2x + C$;

3) $\frac{3x}{8} + \frac{\sin 2x}{4} + \frac{\sin 4x}{32} + C$;

4) $\sin x - \sin^3 x + \frac{3}{5}\sin^5 x - \frac{1}{7}\sin^7 x + C$; 5) $\frac{\sin^3 x}{3} + \frac{\sin^5 x}{5} + C$;

6) $7x + 14\sin x + 3\sin 2x - \frac{8\sin^3 x}{3} + C$.

8. Интегрирование некоторых трансцендентных функций

К рациональному алгебраическому виду приводятся интегралы вида $\int R(e^x)\, dx$ подстановкой $e^x = t,\ x = \ln t, dx = \frac{dt}{t}$.

Пример 1. Вычислите интеграл: $\int \frac{e^{3x}}{e^x+2}\,dx.$

Решение. Приведём интеграл к рациональному алгебраическому виду подстановкой $e^x = t,\ x = \ln t, dx = \frac{dt}{t}$:

$$\int \frac{e^{3x}}{e^x+2}\,dx = \int \frac{t^3}{t+2}\frac{dt}{t} = \int \frac{t^2dt}{t+2}.$$

Так как подынтегральная дробь неправильная, то выделим целую часть, а затем представим интеграл в виде суммы интегралов и вычислим его:

$$\int \frac{t^2dt}{t+2} = \int \frac{(t^2-4+4)\,dt}{t+2} = \int \frac{(t-2)(t+2)+4}{t+2}\,dt =$$

$$= \int \frac{(t-2)(t+2)}{t+2}\,dt + \int \frac{4}{t+2}dt = \int (t-2)\,dt + \int \frac{4}{t+2}dt =$$

$$= \frac{t^2}{2} - 2t + 4\ln(t+2) + C = \frac{e^{2x}}{2} - 2e^x + 4\ln(e^x+2) + C.$$

Ответ: $\frac{e^{2x}}{2} - 2e^x + 4\ln(e^x+2) + C.$

Задания для самостоятельной работы

1. Вычислите интегралы:

а) $\int \frac{e^{2x}-2e^x}{e^{2x}+1}\,dx$; б) $\int \frac{e^{3x}}{e^{2x}-1}\,dx$; в) $\int \frac{e^x+1}{e^x-1}\,dx.$

Ответы: 1) $\frac{1}{2}\ln(e^{2x}+1) - 2\,\mathrm{arctg}(e^x) + C$; 2) $e^x + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{e^x-1}{e^x+1}\right| + C$;

3) $2\ln\left|e^x-1\right| - x + C.$

ОПРЕДЕЛЁННЫЙ ИНТЕГРАЛ

9. Определённый интеграл. Формула Ньютона-Лейбница

Пусть на отрезке $[a,b]$ определена функция $f(x)$. Разобъём отрезок $[a,b]$ на n частей точками $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$. Из каждого интервала (x_{i-1}, x_i) возьмём произвольную точку ξ_i и составим сумму $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$, где $\Delta x_i = x_{i-1} - x_i$. Сумма вида $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ называется ***интегральной суммой***, а её предел при $\max \Delta x_i \to 0$, если он существует и конечен, называется ***определённым интегралом*** функции $f(x)$ [в пределах] от a до b и обозначается:

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i}. \tag{7}$$

Читают: интеграл от «а» до «бэ» «эф» от «икс» «дэ» «икс».

Функция $f(x)$ в этом случае называется ***интегрируемой*** на отрезке $[a,b]$. Числа a и b называют соответственно ***нижним и верхним пределами интегрирования***.

Для ***интегрируемости*** достаточно, чтобы на отрезке $[a,b]$ функция была ***непрерывна*** или же имела конечное число конечных разрывов.

Пусть $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$. Тогда на этом отрезке существует неопределённый интеграл $\int f(x)dx = F(x) + C$ и имеет место формула (***формула Ньютона-Лейбница***):

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)}, \tag{8}$$

то есть ***определённый интеграл*** от непрерывной функции ***равен разности значений первообразной функции*** (или неопределённого интеграла) при верхнем и нижнем пределах. Это формула связи между первообразной и интегралом.

Свойства определённого интеграла:

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx}, \tag{9}$$

$$\boxed{\int_a^a f(x)dx = 0}. \tag{10}$$

Пример 1. Вычислите интегралы: $\int_1^3 x^3 dx$; $\int_4^9 \frac{dx}{\sqrt{x}-1}$.

Решение:

1) $\int_1^3 x^3 dx = \left.\frac{x^4}{4}\right|_1^3 = \frac{3^4}{4} - \frac{1^4}{4} = \frac{80}{4} = 20;$

2) $\int_4^9 \frac{dx}{\sqrt{x}-1}$. Применим подстановку $x = t^2$ и изменим пределы интегрирования: $t_1 = \sqrt{x_1} = \sqrt{4} = 2,\ t_2 = \sqrt{x_2} = \sqrt{9} = 3$. Имеем:

$$\int_4^9 \frac{dx}{\sqrt{x}-1} = \int_2^3 \frac{2t\,dt}{t-1} = 2\int_2^3 \frac{t-1+1}{t-1}\,dt = 2\int_2^3 \left(\frac{t-1}{t-1} + \frac{1}{t-1}\right)dt =$$

$$= 2\int_2^3 \left(1 + \frac{1}{t-1}\right)dt = 2\left(t + \ln|t-1|\right)\Big|_2^3 = 2(3 + \ln 2 - 2 - \ln 1) =$$

$$= 2(1 + \ln 2).$$

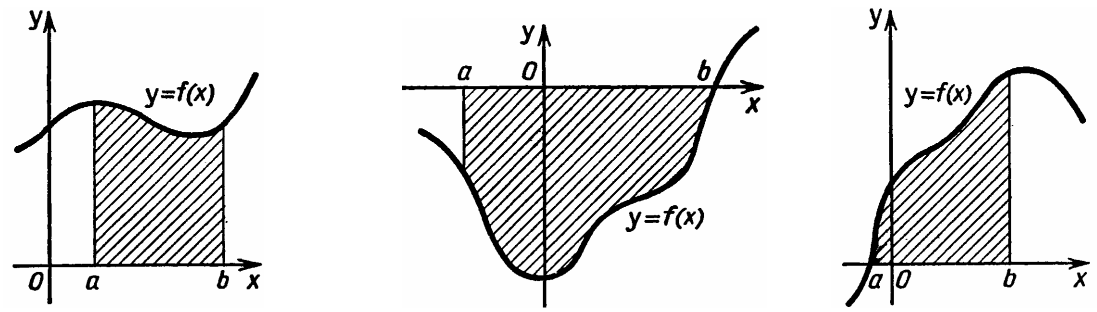
Ответ: $2(1 + \ln 2)$.

10. Применения интеграла

10.1. Вычисление площадей плоских фигур

Интегральное исчисление позволяет решать многие задачи физики и геометрии. Одной из этих задач является вычисление площадей плоских фигур.

Пусть на отрезке $[a;b]$ оси Ox задана непрерывная функция $f(x)$, не меняющая на нём знака. Фигуру, ограниченную графиком функции $f(x)$, отрезком $[a;b]$ и прямыми $x=a$ и $x=b$, называют ***криволинейной трапецией*** (рис. 1 (а-в)):



а б в

Рисунок 1

Теорема. Если $f(x)$ – непрерывная и неотрицательная на отрезке $[a;b]$ функция, а $F(x)$ – её первообразная на этом отрезке, то площадь S соответствующей криволинейной трапеции (рис. 2):

$$\boxed{S = \lim_{\Delta x \to 0} \sum f(x)\Delta x = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)}.$$

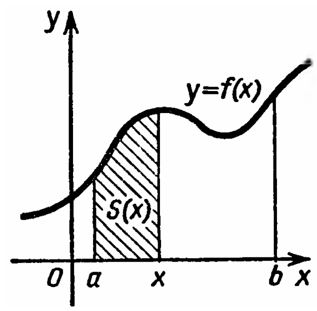


Рисунок 2

Дифференциал переменной площади $S(x)$ равен $dS = f(x)\,dx.$

Пример 1. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями $y=1-x$ и $y=3-2x-x^2$.

Решение. Нарисуем эти линии (рис. 3) и найдём абсциссы точек их пересечения из уравнения $1-x=3-2x-x^2$. Решая это уравнение, находим: $x=1$ и $x=-2$. Искомая площадь может быть получена как разность площадей криволинейной трапеции $BADC$ и треугольника BAC:

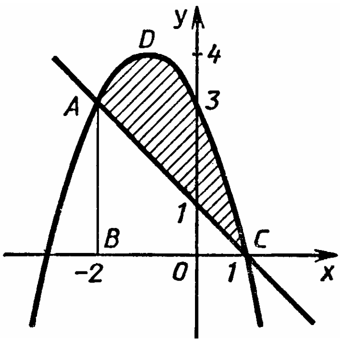


Рисунок 3

$$S_{BADC}=\int_{-2}^{1}(3-2x-x^2)dx=\left(3x-x^2-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-2}^{1}=\left(3-1-\frac{1}{3}\right)-$$

$$-\left(3\cdot(-2)-(-2)^2-\frac{(-2)^3}{3}\right)=9.$$

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot DC=\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 3=4{,}5.$$

Следовательно, площадь заштрихованной фигуры равна:

$$S=S_{BADC}-S_{\Delta ABC}=9-4{,}5=4{,}5.$$

Ответ: 4,5 ед.^{2} .

10.2. Вычисление объёмов тел вращения

Пусть имеем тело объёмом V и ось Ox. Проведём плоскость, перпендикулярную оси Ox. Площадь сечения тела этой плоскостью, которая проходит через точку x из отрезка $[a;b]$ (рис. 4), равна S.

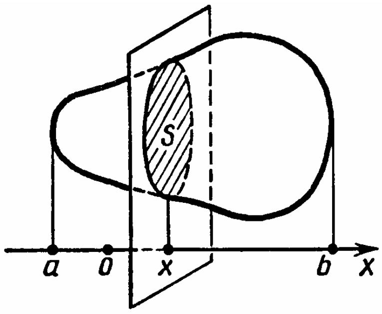


Рисунок 4

Таким образом, каждому числу x из отрезка $[a;b]$ соответствует единственное число $S(x)$ – площадь сечения тела этой плоскостью (рис. 5).

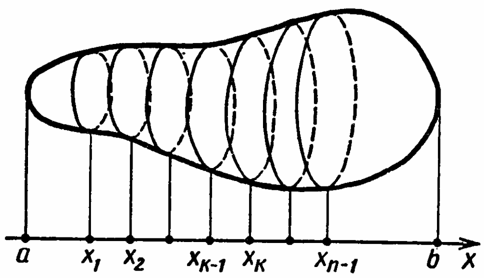
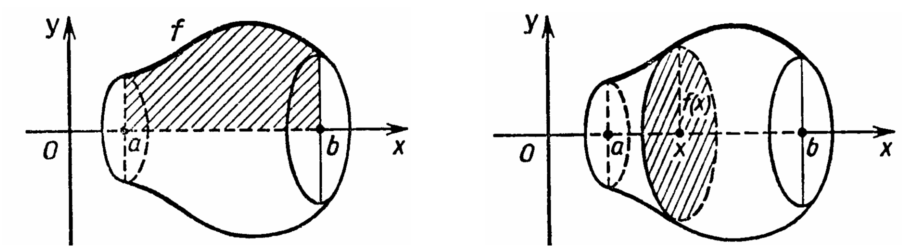


Рисунок 5

Следовательно, на отрезке $[a;b]$ задана функция $S(x)$. Если функция $S(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, то объём тела определяется по формуле:

$$\boxed{V = \int_a^b S(x)\,dx}. \qquad (11)$$

Пусть криволинейная трапеция опирается на отрезок $[a;b]$ оси Ox и ограничена сверху графиком функции $y = f(x)$ (рис. 6, а), неотрицательной и непрерывной на отрезке $[a;b]$. При вращении этой криволинейной трапеции вокруг оси получаем тело. Каждая плоскость, перпендикулярная оси Ox и пересекающая отрезок $[a;b]$ этой оси в точке x, даёт в сечении с телом круг радиуса $f(x)$ и площади $S(x) = \pi f^2(x)$ (рис. 6, б).



а б

Рисунок 6

Следовательно, объём тела, образованного вращением вокруг оси Ox криволинейной трапеции, прилежащей к оси Ox (***тела вращения***), определяется формулой:

$$\boxed{V = \lim_{\Delta x \to 0} \sum \pi f^2(x) \Delta x = \int_a^b \pi f^2(x)\, dx} \qquad (12)$$

Дифференциал переменного объёма равен $dV = \pi f^2(x)\, dx$.

10.3. Применения первообразных и интегралов в физике

Пример. Материальная точка массой 2 кг движется по оси Ox под действием силы, направленной вдоль этой оси. В момент времени t эта сила равна $F(t) = 3t - 2$. Найдите закон $x(t)$ движения точки, если известно, что при $t = 2$с скорость точки равна 3 м/с, а координата равна 1 (F – сила в ньютонах, t – время в секундах, x – путь в метрах).

Решение. Согласно второму закону Ньютона $F = ma$, где a – ускорение. Имеем:

$$a(t) = \frac{F}{m} = \frac{3}{2}t - 1.$$

Скорость $\upsilon(t)$ точки есть первообразная для её ускорения $a(t)$, поэтому:

$$\upsilon(t) = \frac{3}{4}t^2 - t + C_1.$$

Постоянную C_1 находим из условия $\upsilon(2) = 3$:

$$\frac{3}{4} \cdot 2^2 - 2 + C_1 = 3, \text{ то есть } C_1 = 2 \text{ и } \upsilon(t) = \frac{3}{4}t^2 - t + 2.$$

Координата $x(t)$ есть первообразная для скорости $\upsilon(t)$, поэтому

$$x(t) = \frac{1}{4}t^3 - \frac{1}{2}t^2 + 2t + C_2.$$

Постоянную C_2 находим из условия $x(2) = 1$:

$$\frac{1}{4} \cdot 2^3 - \frac{1}{2} \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 + C_2 = 1, \; C_2 = -3.$$

Итак, закон движения точки:

$$x(t) = \frac{1}{4}t^3 - \frac{1}{2}t^2 + 2t - 3.$$

Ответ: $x(t) = \frac{1}{4}t^3 - \frac{1}{2}t^2 + 2t - 3.$

Задания для самостоятельной работы

Задание 1. Прочитайте, напишите, переведите на родной язык новые слова и словосочетания. Запомните их!

интегральное исчисление
определённый интеграл
произвольная точка
интегральная сумма
интегрируемая функция
верхний предел интегрирования
нижний предел интегрирования
формула Ньютона-Лейбница
криволинейная трапеция
переменная площадь
тело вращения

Задание 2. Ответьте на вопросы. Используйте информацию текста.

1. Что называется интегральной суммой?
2. Что называется определённым интегралом функции?
3. Какую формулу называют формулой связи между первообразной и интегралом?
4. Какие есть свойства определённого интеграла?

5. Какие вы знаете применения интеграла?
6. Что называется криволинейной трапецией?
7. Чему равна площадь криволинейной трапеции?
8. Чему равен объём тела вращения?

Задание 3. Закончите предложение. Используйте информацию текста.

Для интегрируемости достаточно, чтобы на отрезке $[a,b]$ функция была …

Формула Ньютона-Лейбница: определённый интеграл от непрерывной функции равен …

Задание 4. Напишите существительные и прилагательные во множественном числе.

Образец: интегрируемая функция – ….
интегрируемая функция – интегрируемые функции.

Определённый интеграл – …; произвольная точка – …; интегральная сумма – …; криволинейная трапеция – …; тело вращения – …

Задание 5. Прочитайте правильно эти обозначения. Используйте информацию текста.

Образец: $\int_a^b f(x)dx$ – интеграл от «а» до «бэ» «эф» от «икс» «дэ» «икс»,

$a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b$ – …

$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ – …

$\max \Delta x_i \to 0$ – …

$\lim_{\Delta x \to 0} \sum f(x)\Delta x$ – …

dS – …

dV – …

Задание 6. Прочитайте правильно эти формулы. Используйте информацию текста.

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

$$S = \lim_{\Delta x \to 0} \sum f(x)\Delta x = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

$$dS = f(x)\,dx$$

$$V = \int_a^b S(x)\,dx$$

$$V = \lim_{\Delta x \to 0} \sum \pi f^2(x)\Delta x = \int_a^b \pi f^2(x)\,dx$$

$$dV = \pi f^2(x)\,dx$$

Задание 7. Выполните упражнения.

1. Вычислите интегралы:

1) $\displaystyle\int_{-3}^{3} \frac{dx}{(x+10)^2}$; 2) $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x}}$; 3) $\displaystyle\int_{\pi/3}^{\pi} \sin x\,dx$.

2. Вычислите интегралы:

1) $\displaystyle\int_1^2 \left(x^2 + \frac{1}{x^4}\right)dx$; 3) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$; 5) $\displaystyle\int_0^3 e^{x/3}dx$;

2) $\displaystyle\int_1^4 \sqrt{x}\,dx$; 4) $\displaystyle\int_a^{a\sqrt{3}} \frac{dx}{a^2+x^2}$; 6) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \sin 4x\,dx$.

Ответы: 1) 20; 2) $\frac{14}{3}$; 3) $\frac{\pi}{6}$; 4) $\frac{\pi}{12a}$; 5) $3(e-1)$; 6) $\frac{1}{2}$.

3. Выполните рисунок и вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями:

а) $y=x^4$, $y=0$, $x=-1$, $x=1$;

б) $y=x^2-4x+5$, $y=0$, $x=0$, $x=4$;

в) $y=1-x^3$, $y=0$, $x=0$;

г) $y=-x^2-4x$, $y=1$, $x=-3$, $x=-1$;

д) $y=x^3$, $y=8$, $x=1$;

е) $y=x^2-2x+4$, $y=3$, $x=-1$;

ж) $y=2\cos x$, $y=1$, $x=-\frac{\pi}{3}$, $x=\frac{\pi}{3}$;

з) $y=\sin x$, $y=\frac{1}{2}$, $x=\frac{\pi}{6}$, $x=\frac{5\pi}{6}$;

и) $y=\frac{16}{x^2}$, $y=2x$, $x=4$;

к) $y=6-2x$, $y=6+x-x^2$;

л) $y=x^2-4x+4$, $y=4-x^2$;

м) $y=x^2$, $y=x^3$.

Ответы: г) $5\frac{1}{3}$; з) $\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}$; к) 4,5; м) $\frac{1}{12}$.

4. Определите объём тела, полученного при вращении вокруг оси абсцисс криволинейной трапеции, ограниченной линиями:

а) $y=x^2+1$, $x=0$, $x=1$, $y=0$;

б) $y=\sqrt{x}$, $x=1$, $x=4$, $y=0$;

в) $y=\sqrt{x}$, $x=1$, $y=0$;

г) $y=1-x^2$, $y=0$.

Ответ: г) $\frac{16\pi}{15}$.

5. Определите объём тела, полученного при вращении вокруг оси абсцисс фигуры, ограниченной линиями:

а) $y = x^2$, $y = x$;

б) $y = 2x$, $y = x + 3$, $x = 0$, $x = 1$;

в) $y = x + 2$, $y = 1$, $x = 0$, $x = 2$;

г) $y = \sqrt{x}$, $y = x$.

Ответ: г) $\dfrac{\pi}{6}$.

6. Точка движется по прямой с ускорением $a(t)$. В начальный момент t_0 её координата равна x_0, а скорость υ_0. Найдите координату $x(t)$ точки как функцию от времени:

а) $a(t) = -2t,\ t_0 = 1,\ x_0 = 4,\ \upsilon_0 = 2;$

б) $a(t) = \sin t,\ t_0 = \dfrac{\pi}{2},\ x_0 = 2,\ \upsilon_0 = 1;$

в) $a(t) = 6t,\ t_0 = 0,\ x_0 = 3,\ \upsilon_0 = 1;$

г) $a(t) = \cos t,\ t_0 = \pi,\ x_0 = 1,\ \upsilon_0 = 0.$

Ответы: а) $x(t) = -\dfrac{t^3}{3} + 3t + 1\dfrac{1}{3};$ б) $x(t) = -\sin t + 3;$

в) $x(t) = t^3 + t + 3;$ г) $x(t) = -\cos t.$

7. Скорость прямолинейно движущейся точки задана формулой $\upsilon(t) = t^2 + 2t - 1$. Запишите формулу зависимости её координаты x от времени t, если известно, что в начальный момент времени $(t = 0)$ точка находилась в начале координат.

Ответ: $x(t) = \dfrac{t^3}{3} + t^2 - t.$

8. Скорость прямолинейно движущейся точки задана формулой $\upsilon(t) = 2\cos\dfrac{t}{2}$. Найдите формулу, которая выражает зависимость координаты точки от времени, если известно, что в

момент $t=\dfrac{\pi}{3}$ с точка находилась на расстоянии 4 м от начала координат.

Ответ: $x(t)=4\sin\dfrac{t}{2}+2.$

9. Точка движется прямолинейно с ускорением $a(t)=12t^2+4$. Найдите закон движения точки, если в момент $t=1$с её скорость равна 10 м/с, а координата равна 12 м (единица измерения ускорения равна 1 м/с^2).

Ответ: $x(t)=t^4+2t^2+2t+7.$

10. Материальная точка массой m движется по оси Ox под действием силы, направленной вдоль этой оси. В момент времени t эта сила равна $F(t)$. Найдите формулу зависимости $x(t)$ от времени t, если известно, что при $t=t_0$ скорость точки равна υ_0, а координата равна x_0 (F измеряется в ньютонах, t – в секундах, υ – в метрах в секунду, m – в килограммах, x – в метрах):

а) $F(t)=6-9t,\ t_0=1,\ \upsilon_0=4,\ x_0=-5,\ m=3;$
б) $F(t)=14\sin t,\ t_0=\pi,\ \upsilon_0=2,\ x_0=3,\ m=7;$
в) $F(t)=25\cos t,\ t_0=\dfrac{\pi}{2},\ \upsilon_0=2,\ x_0=4,\ m=5;$
г) $F(t)=8t+8,\ t_0=2,\ \upsilon_0=9,\ x_0=7,\ m=4.$

Ответы: а) $x(t)=-\dfrac{1}{2}t^3+t^2+3\dfrac{1}{2}t-9;$ б) $F(t)=-2\sin t;$

в) $x(t)=-5\cos t-3t+\dfrac{3\pi}{2}+4;$ г) $x(t)=\dfrac{t^3}{3}+t^2+t-1\dfrac{2}{3}.$

Тест для самопроверки

1. Для функции $y=4x^3$ найдите первообразную $F(x)$, график которой проходит через точку $A(1;1)$.

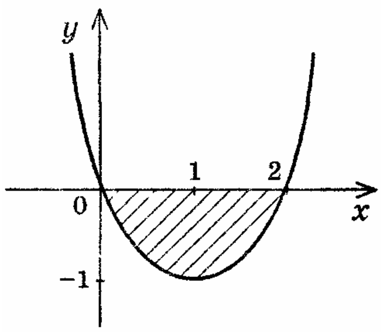
А	Б	В	Г	Д
$F(x)=x^4$	$F(x)=x^4-3$	$F(x)=x^4+2$	$F(x)=\frac{4}{3}x^3-\frac{1}{3}$	Другой ответ

2. Определите значение интеграла $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$, если известно:

$$\int_{-2}^{-1} f(x)\,dx=1,\ \int_{-2}^{1} f(x)\,dx=-2.$$

А	Б	В	Г	Д
3	1	0	–1	–3

3. Укажите формулу для вычисления площади фигуры (смотри рисунок), ограниченной графиком функции $y=x(x-2)$ и осью Ox.



А	Б	В	Г	Д
$\int_0^2 x(2-x)\,dx$	$\int_0^1 x(2-x)\,dx$	$\int_0^2 x(x-2)\,dx$	$\int_0^1 x(x-2)\,dx$	$\int_1^2 x(x-2)\,dx$

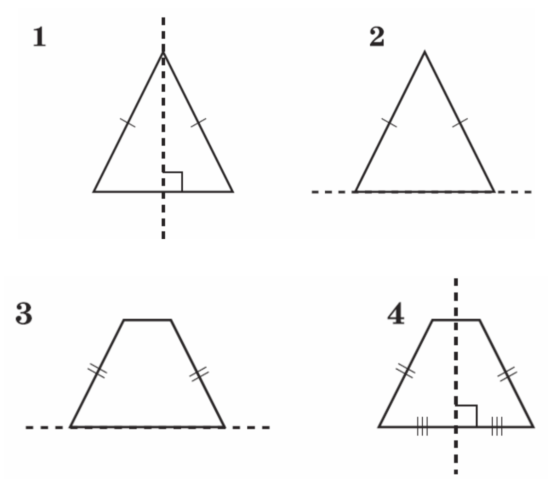
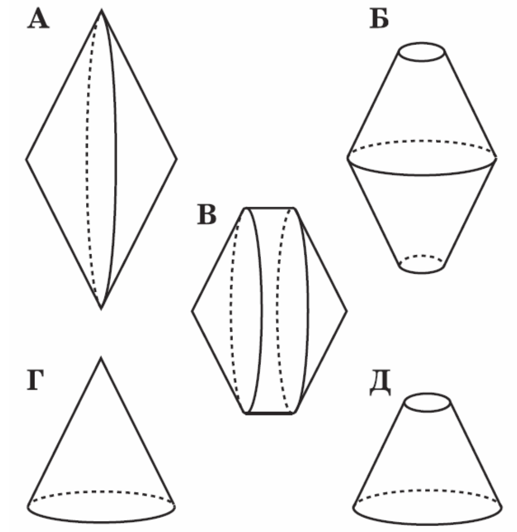
4. Укажите формулу для вычисления площади фигуры, ограниченной линиями $y=x^2$ и $y=-x^2+4x$.

А	Б	В	Г	Д
$\int_0^4 4x\,dx$	$\int_0^4 \left(-2x^2+4x\right)dx$	$\int_0^2 \left(2x^2-4x\right)dx$	$\int_0^2 \left(4x-2x^2\right)dx$	Другой ответ

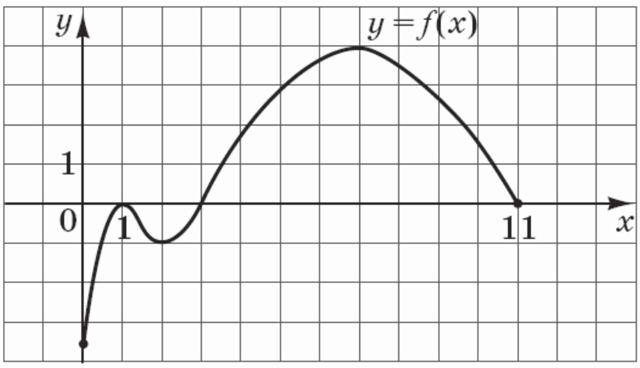
5. Тело движется прямолинейно со скоростью, изменяющейся со временем по закону $\upsilon(t) = (4t - 1)$ м/с. Найдите путь (в метрах), который проходит тело за интервал времени от $t_1 = 1$с до $t_2 = 3$с.

А	Б	В	Г	Д
30	12	2	14	15

6. Установите соответствие между фигурой (1-4) и телом вращения, которое получено при вращении этой фигуры вокруг прямой, изображённой пунктиром.

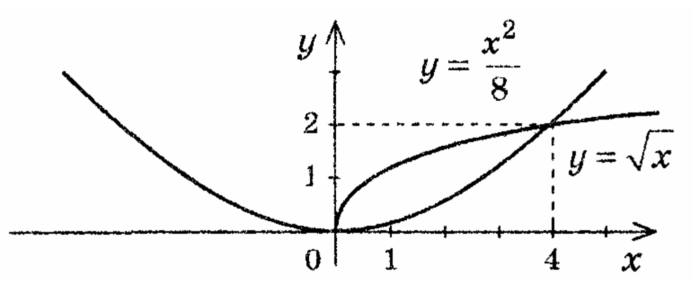
Фигура	Тело вращения
	

7. На рисунке изображён график функции $f(x)$, определённой на интервале $[0;11]$ и дифференцируемой на интервале $(0;11)$. Установите соответствие между числом (1-4) и интервалом (А-Д), которому принадлежит это число.



	Число		Интервал
1	$f(8)$	А	$(-\infty;-2]$
2	$f'(7)$	Б	$(-2;-0,5]$
3	наименьшее значение функции $y=f(x)$ на её области определения	В	$(-0,5;2]$
		Г	$(2;4]$
4	$\int_1^3 f(x)\,dx$	Д	$(4;+\infty)$

8. Укажите формулу для вычисления площади фигуры, ограниченной линиями $y=\frac{x^2}{8}$ и $y=\sqrt{x}$ (смотри рисунок).



А	Б	В	Г	Д
$\int_0^4 \sqrt{x}\,dx$	$\int_0^2 \left(\frac{x^2}{8}-\sqrt{x}\right)dx$	$\int_0^2 \left(\sqrt{x}-\frac{x^2}{8}\right)dx$	$\int_0^4 \left(\frac{x^2}{8}-\sqrt{x}\right)dx$	$\int_0^4 \left(\sqrt{x}-\frac{x^2}{8}\right)dx$

9. Скорость прямолинейного движения точки задана уравнением $\upsilon(t)=3^t+t$ (м/с). Найдите расстояние (в метрах), точки от начального положения в момент $t_1=4$ с, если в момент времени $t_0=2$ с точка находилась на расстоянии 5м от начального положения.

А	Б	В	Г	Д
$72\ln 3$	83	$11+\frac{72}{\ln 3}$	$8+\frac{81}{\ln 3}$	Другой ответ

10. Найдите объём тела, полученного при вращении вокруг оси абсцисс криволинейной трапеции, ограниченной линиями $y = \operatorname{tg} x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = \dfrac{\pi}{4}$.

А	Б	В	Г	Д
3π ед.^{3}	$\dfrac{\pi}{4}(4-\pi)$ ед.^{3}	π ед.^{3}	$\dfrac{\pi}{4}(4+\pi)$ ед.^{3}	Другой ответ

Ответы: 7) В; 9) Б.

Навчальне видання

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до практичних занять з математики
(розділ «Первісна. Інтеграл. Застосування інтегралів»)

для іноземних студентів підготовчих факультетів
вищих навчальних закладів

Укладач: ВОЛОСЮК Марина Андріївна

Авторська редакція

Відповідальний за випуск *Нікітіна Т.Б.*

Комп'ютерна верстка, оформлення оригінал-макета *Волосюк М.А.*