Министерство образования и науки Украины

ХАРЬКОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ
АВТОМОБИЛЬНО-ДОРОЖНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ОСНОВЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ СИГНАЛОВ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

Харьков-2014

Составил: Коваль А. А., к.т.н., доцент

В методических указаниях описан цикл лабораторных работ по дисциплине «Моделирование средств измерительной техники» для специальности 6.051001. Лабораторные работы основаны на использовании программы для научных и инженерных расчетов Mathcad.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Настоящие методические указания предназначены для использования в процессе лабораторного практикума по курсу «Моделирование средств измерительной техники» для специальности 6.051001.

В результате описанного в указаниях цикла лабораторных работ студенты должны иметь представление о системах массового обслуживания различного типа, научиться работать с цепями Маркова, исследовать стационарные характеристики СМО типа G/G/1, использовать формулу Хинчина – Поллячека для анализа вероятностно - временных характеристик СМО.

Лабораторная работа №1

Введение в Mathcad. Переменные, функции, графика

Цель работы: Изучение системы инженерных, финансовых и математических расчётов Mathcad. Выполнение учебного математического расчёта.

Подготовка к лабораторной работе:

1. Ознакомиться с назначением системы Mathcad и с её основными возможностями.
2. Повторить основные разделы высшей математики:
   - алгебраические тригонометрические и трансцендентные функции.
   - системы линейных и нелинейных уравнений.
   - дифференциальное и интегральное исчисление.

Краткая теория:

Mathcad является уникальной системой для работы с формулами, числами текстами и графиками. Mathcad столь же гибок, как самые мощные электронные таблицы и языки программирования, но легок в освоении и удобен в использовании.

Mathcad позволяет записывать на экране компьютера формулы в их привычном виде. Пример записи формулы в системе Mathcad:

$$x := \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$$

С помощью системы Mathcad можно решить почти любую математическую задачу символьно либо численно. Можно размещать текст в любых местах вокруг уравнений, чтобы документировать процесс решения.

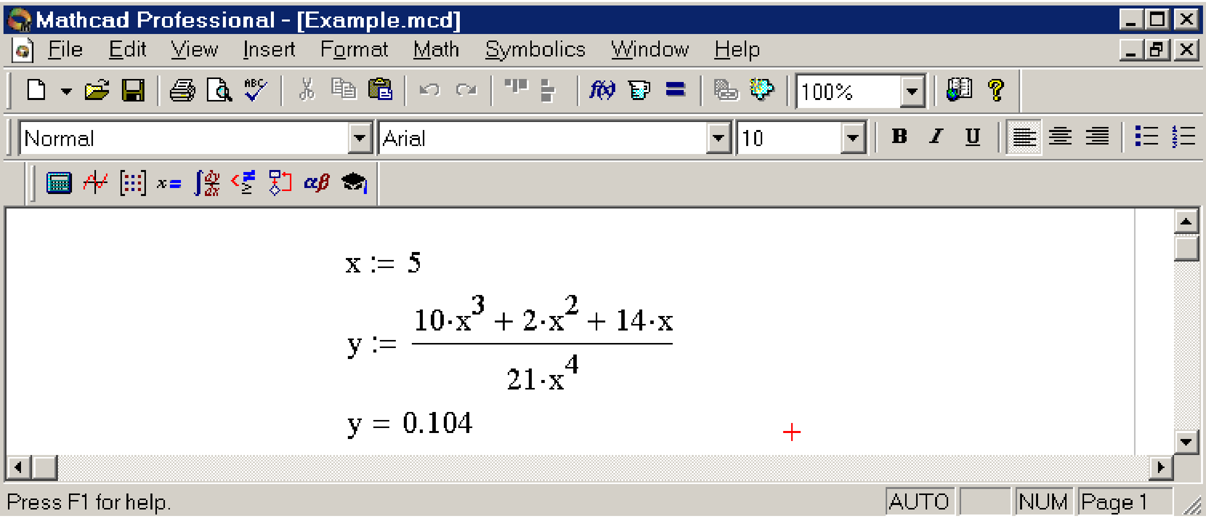


Рисунок 1.1 Экран системы Mathcad:

1.1 Интерфейс пользователя

Интерфейс системы сделан так, чтобы пользователь, имеющий элементарные навыки работы с приложениями Windows мог сразу начать работать с Mathcad.

Основную часть экрана занимает окно редактирования с полосами прокрутки на нижней и правой кромке текущего окна. В нем размещается редактируемый документ.

Верхняя строка экрана – титульная, она содержит название документа.

Вторая строка окна системы – главное меню. Назначение позиций главного меню:

File (Файл)	– работа с файлами, сетью Internet и почтой;
Edit (Правка)	– редактирование документов;
View (Вид)	– изменение средств обзора и включение/выключение элементов интерфейса;
Insert (Вставить)	– установка вставок объектов и их шаблонов (включая графику);
Format (Формат)	– изменение формата объектов;
Math (Математика)	– управление процессом вычислений;
Symbolic (Символика)	– выбор операций символьного процессора;
Window (Окно)	– управление окнами;
Help (Помощь)	– работа со справочной базой данных;

Панель инструментов содержит кнопки для быстрого выполнения наиболее распространенных команд и операций. Панель форматирования предназначена для выбора типа и размера шрифтов и способа выравнивания текстовых комментариев. Эти панели находятся под строкой главного меню.

Для ввода математических символов и операторов служат перемещаемые наборные панели (в оригинале **Palettes** - палитры), которые располагаются ниже панели форматирования или в любом месте окна редактирования.

Рисунок 1.2 Компоненты наборной математической панели.

Используя общую наборную панель, изображенную на рисунке 1.2, можно вывести все панели сразу или только те панели, которые необходимы для выполнения конкретной задачи.

Все панели можно выводить/убирать с экрана, используя меню **«View»** $\Rightarrow$ **«Toolbar» («Вид»** $\Rightarrow$ **«Панели инструментов»).**

1.2 Области рабочего документа

Mathcad допускает ввод формул и текста в любом месте рабочего документа. Каждое математическое выражение, график, функция или фрагмент текста являются областями (регионами). Mathcad создает невидимый прямоугольник, содержащий каждую область. Рабочий документ Mathcad есть совокупность таких областей.

Следует отметить, что порядок регионов определен слева направо и сверху вниз. В приведенном ниже примере значение переменной ***y*** вычислено не будет, т.к. переменная ***x***, участвующая в верхнем выражении описана ниже этого выражения.

Пример:

$$y := x^2$$

$$x := 56$$

1.3 Определение переменных

После щелчка в любом месте рабочего документа появляется визир в виде небольшого красного крестика. Визир указывает место, куда будет производиться ввод данных с клавиатуры, его можно перемещать клавишами перемещения курсора. Не надо путать визир с курсором мыши, который живет своей жизнью и имеет вид жирной наклонной стрелки.

Присваивание значения переменной производится с помощью символа присваивания **:=**. Знак равенства = в Mathcad используется для вывода результата, а для обозначения отношения двух величин используется жирный знак равенства из панели **операторов отношения**.

Чтобы определить переменную необходимо:

- Напечатать имя переменной.
- Набрать двоеточие, чтобы ввести символ присваивания (можно воспользоваться панелью арифметических операторов).
- Справа от символа присваивания появится пустое поле (маленький черный прямоугольник).
- В пустом поле напечатать значение, присваиваемое переменной. Значение может быть числом или выражением.

1.4 Определение дискретного аргумента

Для итерационных вычислений Mathcad использует специальный тип переменной – дискретный аргумент (диапазон значений).

Чтобы определить дискретный аргумент необходимо выполнить следующую последовательность действий:

- Определить переменную, как описано выше.
- После ввода значения поставить запятую и в появившееся пустое поле ввести следующее значение диапазона (по умолчанию шаг изменения дискретного аргумента предполагается равным 1).

- Набрать **;** (Mathcad отобразит его на экране как две точки **..**) и в появившееся пустое поле ввести последнее число диапазона (можно также воспользоваться панелью арифметических операторов).

1.5 Ввод текста

Для ввода текста достаточно ввести символ “ и в появившийся прямоугольник вводить текстовую информацию. Можно также воспользоваться командой меню **«Insert» ⇒ «Text region»** (**«Вставить» ⇒ «Текстовая область»**). Для перехода на русский язык необходимо кроме переключения регистра выбрать в панели шрифтов шрифт, поддерживающий кириллицу (CYR).

1.6 Работа с функциями

Функция – объект входного языка, имеющий имя и параметры, указываемые в круглых скобках. Отличительной чертой функции является ***возврат значения*** (результата вычисления функции) в ответ на обращение к ней. При описании функции в круглых скобках ставят формальные параметры, которые заменяются фактическими значениями при вызове функции.

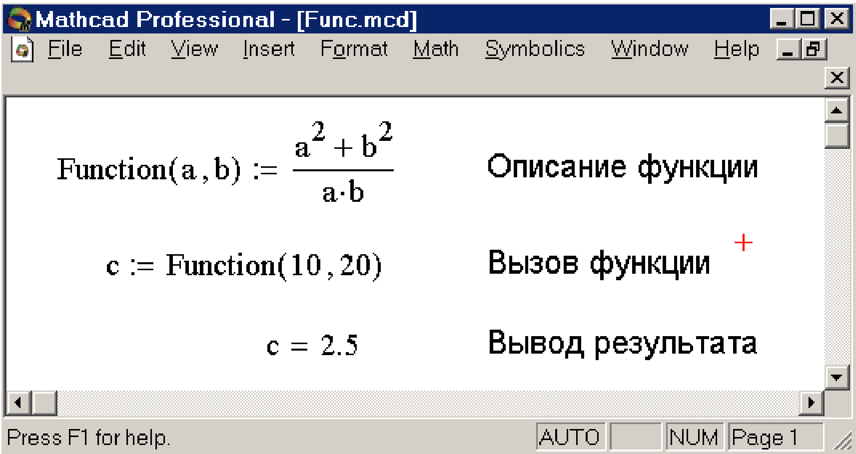


Рисунок 1.3 Пример описания и вызова функции с именем Function.

Mathcad имеет огромное количество встроенных функций (например, sin(x), cos(x), exp(x)), назначение и вызов которых описаны в справочной базе данных. Ввести встроенную функцию в математический регион Mathcad можно набором с клавиатуры или через меню **Вставить ⇒ Функция (Insert ⇒ Function)** или с помощью кнопки ***f(x)*** – *Вставить функцию* на панели инструментов.

1.7 Выделение выражения

Ключевым шагом в редактировании выражений Mathcad является заключение подходящей части выражения в выделяющую рамку (синий угол справа и снизу или слева и снизу от выражения). То, что заключено в выделяющую рамку является операндом следующего вводимого оператора. Для выделения части или всего выражения используются стрелки → ←, клавиша пробел или курсор мыши.

Например, для ввода следующего выражения $y := \dfrac{x^2 + 5}{x}$ необходимо выполнить последовательность действий:

- Ввести $y := x^2$,
- Нажать пробел, чтобы выделить x^2,
- Ввести + 5,
- Снова нажать пробел два раза, чтобы выделить выражение в числителе,
- Нажать знак деления (на клавиатуре или на панели математических операторов из наборной панели),
- Ввести в пустое поле, появившееся в знаменателе - x.

1.8 Построение двумерных графиков в декартовой системе координат

Для построения графиков имеются шаблоны. Для их вызова можно воспользоваться командами меню **Insert ⇒Graph (Вставить⇒ Графика)**. Шаблон двумерного графика в декартовой системе координат обозначается **X-Y Plot @**. Для вставки графического региона можно также воспользоваться панелью графиков из перемещаемой наборной панели.

При выполнении описанных выше действий появляется графический регион, как показано на рисунке 1.4. В пустые поля вводятся значение функции и аргумент функции. Можно также вручную ввести верхнюю и нижнюю границы изменения аргумента и значения функции в отведенные для этого поля, в противном случае Mathcad сам определит эти границы.

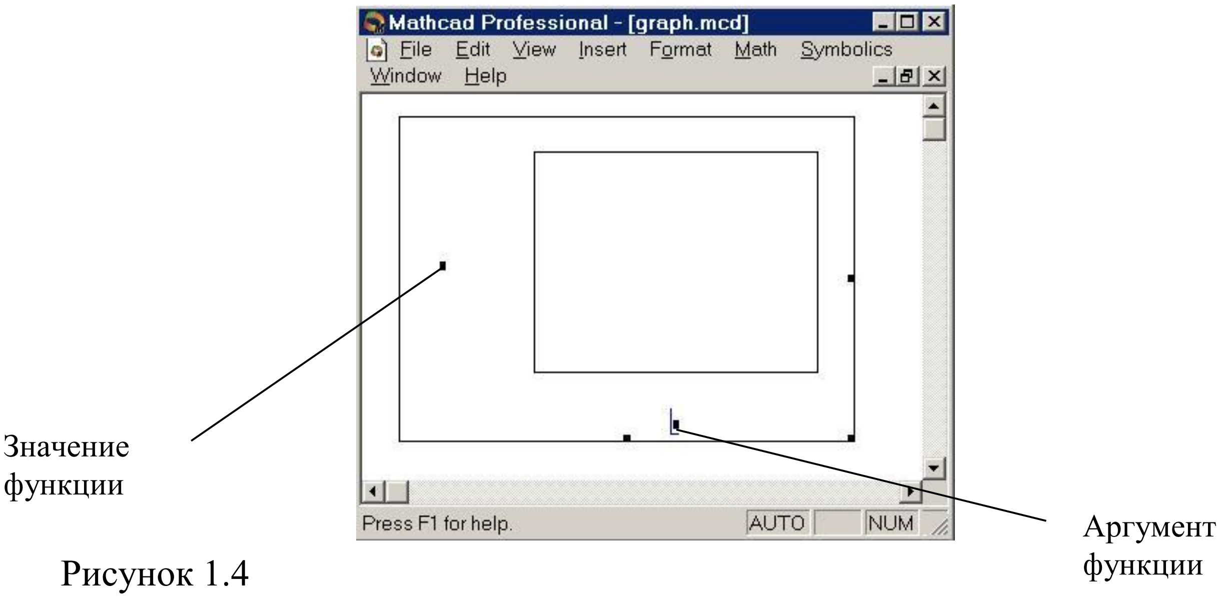


Рисунок 1.4

1.9 Построение графиков в трехмерной системе координат

Шаблон графика поверхности обозначается **Surface Plot CTRL+2**.

Для того чтобы построить график функции от двух переменных (x,y), необходимо вычислить значения функции в узлах сетки системы координат указанных выше переменных. Эти значения функции представляются в виде матрицы, размерность которой определяется числом узлов сетки, определенных по соответствующим переменным.

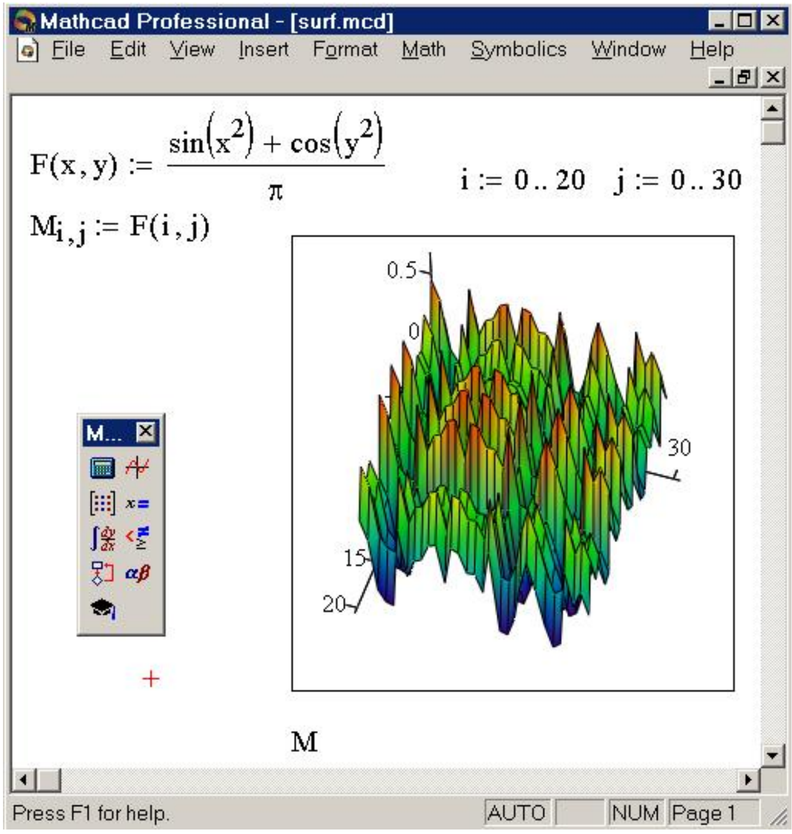


Рисунок 1.5 Пример построения графика поверхности

1.10 Построение нескольких графиков в одном графическом регионе

Для размещения нескольких графиков в одних и тех же осях координат после введенного в поле значения функции (ось ординат) выражения необходимо нажать запятую на клавиатуре. Появится пустое поле для следующего выражения. Проделать это столько раз, сколько графиков необходимо разместить на чертеже. Аналогично вводятся несколько аргументов по оси абсцисс.

1.11 Форматирование графиков

Для форматирования графиков необходимо дважды щелкнуть левой кнопкой мыши на графике, или щелкнуть правой кнопкой мыши на графике и в контекстном меню выбрать команду **Формат (Format)**. Затем в появившемся окне изменить параметры графика.

1.12 Решение уравнений

Для решения уравнения с одной неизвестной в системе Mathcad можно воспользоваться встроенной функцией **root**.

Общий вид функции: **root(s(x), x)**, где **s(x) = 0** – решаемое уравнение, **x** – переменная, значение которой требуется найти.

Например, решение уравнение вида g(x) = f(x) (аналогично g(x) - f(x) = 0) будет найдено следующим образом:

x := 1 (присваиваем начальное значение искомой переменной)

z := root(g(x) – f(x),x)

Переменная **z** будет содержать решение, которое можно посмотреть, набрав **z =** . Если уравнение имеет несколько решений, то Mathcad найдет ближайшее к начальному значению искомой переменной. Чтобы отыскать другие решения нужно просто изменить начальное значение.

<u>Порядок выполнения</u>:

1. Ознакомиться с методическими указаниями к лабораторной работе.
2. Загрузить программу Mathcad.
3. Изучить структуру и назначение меню и кнопок панелей инструментов.
4. Ознакомиться с составом встроенных функций,
5. Определить в математическом регионе функцию $f(x)$, заданную по варианту в таблице 1.1.
6. Создать графические регионы и в них построить графики функции $f(x)$, производной $f(x)$ и интеграла $f(x)$ (в виде $\int_0^x f(y)dy$).
7. Решить графическим и аналитическим методом уравнение вида $a \cdot x + b = f(x)$, коэффициенты a и b задать по своему усмотрению.
8. Определить в математическом регионе функцию двух переменных – $F(x, y)$, заданную по варианту в таблице 1.1.
9. Построить график функции двух переменных – $F(x, y)$ в виде поверхности.
10. Создать текстовые регионы и сделать в них подписи ко всем графикам и расчетам.
11. Оформить полученные данные в виде рабочего листа Mathcad.
12. Сохранить файл в папке «*Мои документы\ОТМО*», имя файла задать следующим образом: *<Группа>.<Фамилия>.<№ лабораторной работы>*.
13. Сдать и защитить работу преподавателю.

<u>Содержание отчёта по лабораторной работе</u>:

1. Название и цель лабораторной работы.
2. Задание к лабораторной работе.
3. Описание результатов выполнения лабораторной работы.
4. Графики и таблицы значений заданных функций.

<u>Контрольные вопросы</u>:

1. Назначение пунктов меню и кнопок панелей инструментов системы Mathcad.
2. Переменная скалярного типа в математическом регионе.
3. Переменная типа дискретный аргумент в математическом регионе.
4. Способы описания и вызова функции в системе Mathcad.
5. Способы построения графиков.
6. Текстовые регионы системы Mathcad.
7. Встроенные функции системы Mathcad.

8. Решение уравнений с помощью встроенных функций системы Mathcad.

Таблица 1.1

№ варианта	Функция одной переменной f(x)	Функция двух переменных F(x,y)
1	$f(x)=\sin(x)^2-e^{-2x}$	$F(x,y)=\frac{\sqrt{x^2-y^2}}{y}$
2	$f(x)=\frac{x^3}{\cos(x)}$	$F(x,y)=\frac{\sqrt{x^2+\pi/y}}{x^2}$
3	$f(x)=\sin(x)^3+\cos(x)^2+tg(x)$	$F(x,y)=\frac{xy}{\sin(y)}$
4	$f(x)=\frac{e^{-\cos(x)}}{x}$	$F(x,y)=\sin(e^x)+\cos(e^y)$
5	$f(x)=x^\pi-x^e$	$F(x,y)=\frac{x^3+y^3}{tg(x\cdot y)}$
6	$f(x)=e^{\sin(x)+\cos(x)}$	$F(x,y)=\frac{1}{x^3}+\frac{1}{y^3}$
7	$f(x)=\frac{\sin(x)^2}{e^{\sin(x)^2}}$	$F(x,y)=\frac{1}{\sin(x)^2}+\frac{1}{\cos(y)^2}$
8	$f(x)=\frac{\sin(x)^4}{x^3}$	$F(x,y)=\frac{e^{x-y}}{e^{x+y}}$
9	$f(x)=a\cdot x^3+b\cdot x^2+c\cdot x$ a, b, c задать произвольно	$F(x,y)=\frac{\ln(x)+\ln(y)}{x+y}$
10	$f(x)=\frac{\sin(x^2)^4}{\ln(x^5)}$	$F(x,y)=a\cdot x^4+b\cdot y^4$ a, b задать произвольно
11	$f(x)=\frac{x^2}{\sqrt{\sin(x)}}$	$F(x,y)=\ln(x)-\ln(y)$
12	$f(x)=\frac{1}{x}\cdot\ln\lvert 1-x\rvert$	$F(x,y)=\arccos(x)+\arcsin(y)$
13	$f(x)=x\cdot(1-e^{-x})$	$F(x,y)=\frac{1}{x^2+y^2}\cdot tg(x\cdot y)$
14	$f(x)=\frac{\ln(x)^2}{1-x^3}$	$F(x,y)=\frac{\sin(x)\cdot\cos(y)}{x\cdot y}$
15	$f(x)=\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}-1$	$F(x,y)=\frac{\ln(x)\cdot\ln(y)}{x+y}$

16	$f(x)=\dfrac{\sin(x)}{x^3+x^2}$	$F(x,y)=\dfrac{1}{y}-\dfrac{1}{x}$
17	$f(x)=\left\|1-e^{2\cdot x}\right\|$	$F(x,y)=\dfrac{\sin(x)}{y}-\dfrac{\cos(y)}{x}$
18	$f(x)=\sin(x)^2-\cos(x)^2$	$F(x,y)=\dfrac{x^2+y^2}{x\cdot y}$
19	$f(x)=\dfrac{\sin(x)+\cos(x)+\arcsin(x)+x^2}{x^3}$	$F(x,y)=\dfrac{x}{y}$
20	$f(x)=\sin(x+\pi)+\cos(x-\pi)$	$F(x,y)=\dfrac{\arcsin(x+y)}{x+y}$
21	$f(x)=x^{10}-x^5+x^3-1$	$F(x,y)=\dfrac{1}{e^{-(x+y)}}$
22	$f(x)=tg(x)+ctg(x)$	$F(x,y)=\dfrac{\sqrt[3]{x}}{x+y}$
23	$f(x)=\dfrac{\sqrt{x^3+x^2+x}}{x}$	$F(x,y)=\ln(x)+\ln(y)+\dfrac{x}{y}$
24	$f(x)=\dfrac{2\cdot\pi\cdot e^{\cos(x)}}{-x^2}$	$F(x,y)=\sqrt{\left\|\ln(x)-\ln(y)\right\|}$
25	$f(x)=a\cdot x^3+b\cdot x^2$, a, b задать произвольно	$F(x,y)=\dfrac{\sin(x)^2-\cos(x)^2}{e^{-x\cdot y}}$
26	$f(x)=\dfrac{x^{\sin(x)}}{\cos(x)}$	$F(x,y)=\dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{x\cdot y}}$
27	$f(x)=e^{tg(x)+ctg(x)}$	$F(x,y)=\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^3}+x\cdot y$
28	$f(x)=e^{-a\cdot\sqrt{x}}\cdot\sin(a\cdot\sqrt{x})$	$F(x,y)=(\sin(x)+\cos(y))^{x+y}$
29	$f(x)=\dfrac{\sin(x)-12\cdot\sqrt[3]{x^2}}{x}$	$F(x,y)=\ln(x)^{\sin(x)-\cos(y)}$
30	$f(x)=e^{x^2}+e^{-x}$	$F(x,y)=(\sin(x)+\cos(x))^{\sin(x)+\cos(x)}$

Лабораторная работа №2

Введение в Mathcad. Матричные операции, программирование функций

Цель работы: Изучение матричных операций и основ программирования в системе Mathcad.

Подготовка к лабораторной работе:

1. Повторить понятия вектор и матрица.
2. Повторить принципы перемножения:
   - двух векторов,
   - вектора и матрицы,
   - двух матриц.
3. Изучить панель программирования в системе Mathcad.
4. Изучить основы программирования в системе Mathcad.
5. Повторить понятия *среднее* (*математическое ожидание*) и *дисперсия.*

Краткая теория:

2.1 Состав панели программирования

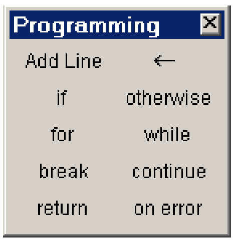


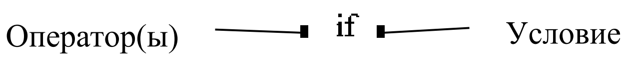
Рисунок 2.1 Панель программирования.

Add line – добавить строку.

← – оператор присваивания в программе.

if – оператор условие.

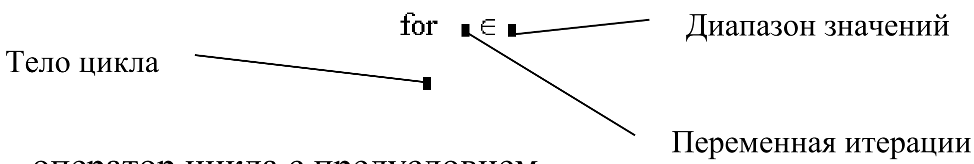
Форма записи оператора условие:



otherwise – иначе (дополняет оператор **if;** операторы, записанные в **otherwise** будут выполняться, если не выполняется условие в операторе **if**).

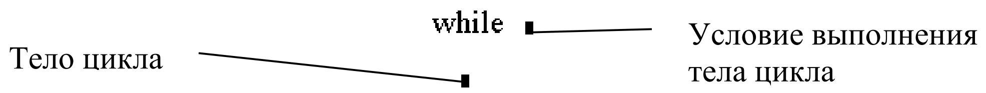
for – оператор цикла с параметром.

Форма записи оператора **for**:



while – оператор цикла с предусловием.

Форма записи оператора **while**:



break – прервать выполнение текущего блока программы.

continue – начать новый виток цикла, не выполняя оставшиеся операторы.

return – возвращает значение функции.

on error – возвращает заданное значение при некорректном завершении вычислений.

2.2 Программирование в системе Mathcad

Программа Mathcad есть частный случай выражения Mathcad. Но если выражение должно быть описано одним оператором, то в программе можно использовать столько операторов, сколько нужно для решения задачи.

Алгоритм создания программы:

- Определить левую часть выражения: имя функции и аргументы функции.
- Набрать знак присваивания **:=** и убедиться, что появилось поле ввода.
- Открыть панель программирования, щелкнув по кнопке программирования в панели управления.
- Нажать на панели кнопку **Add line** или на клавиатуре клавишу **[**. Появится вертикальный столбец с двумя полями ввода для занесения операторов, образующих программу. (Add line добавляет в программу пустые поля).
- Заполнить пустые поля операторами, используя в выражениях оператор присваивания – **←**.
- В последней строке программы записать значение, возвращаемое функцией.

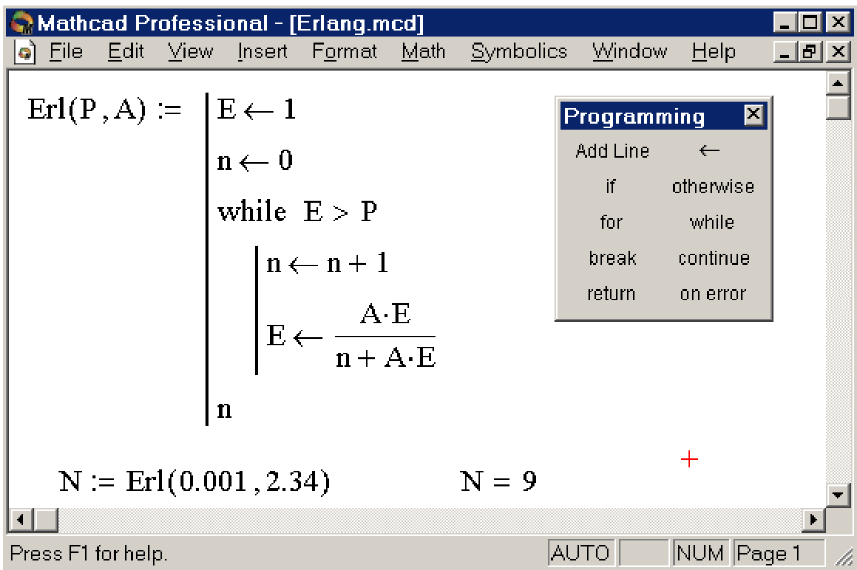


Рисунок 2.2 Пример записи программы.

2.3 Работа с векторами и матрицами

Одиночное число в Mathcad называется **скаляром**. Столбец чисел называется **вектором**, а прямоугольная таблица чисел **матрицей**. Общий термин для вектора или матрицы – **массив**. Строка чисел – это **транспонированный вектор**, (в методических указаниях иногда используется термин **вектор-строка**).

При работе с матрицами надо помнить, что первый индекс – номер строки, второй – номер столбца. Два индекса матрицы отделяются друг от друга запятой.

Имеются три способа создать массив:

- Заполняя массив пустых полей или вводя значение каждого элемента (подходит для небольших массивов),
- Используя дискретный аргумент, чтобы определить элементы с его помощью,
- Считывая их из файлов данных.

2.3.1 Создание вектора или матрицы:

Первый способ

- Выбрать команды меню **«Insert» ⇒ «Matrix» («Вставить» ⇒ «Матрица»).**
- В появившемся диалоговом окне задать количество строк (rows) и столбцов (columns) (для вектора количество столбцов = 1), нажать ОК.

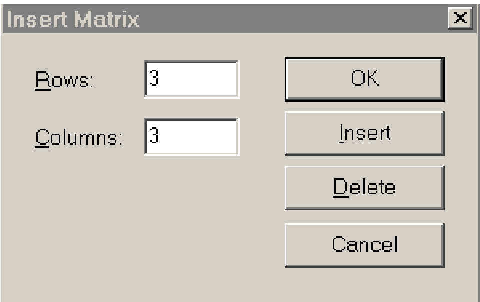


Рисунок 2.3 Окно Вставка матрицы.

- Заполнить числами пустые поля, появившейся на экране матрицы.
- Можно воспользоваться панелью матриц из перемещаемой наборной панели инструментов.
- Можно также присвоить значение каждому элементу массива.

Например

$$M_{1,5} := 5$$

$$M_{0,2} := 1.23$$

Второй способ

- Сначала задать дискретный аргумент, как описано в лабораторной работе №1. Эта переменная будет использоваться в качестве индекса массива. Для матрицы необходимо определить два дискретных аргумента.
- Элементам массива присвоить выражение с использованием дискретного аргумента.

Например

$$i := 0..100$$

$$A_i := \sin(i)$$

Третий способ в методических указаниях не рассматривается.

2.3.2 Перемножение двух матриц:

При перемножении двух матриц количество столбцов первой (стоящей слева) матрицы должно совпадать с количеством строк второй (стоящей справа) матрицы, т.к. действует правило:

$$c_{ij} = \sum_k a_{ik} \cdot b_{kj} \ . \tag{2.1}$$

Таким образом, результатом перемножения матриц размерностью I×K и K×J будет матрица размерностью I×J.

Пример:

$$a := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \qquad b := \begin{pmatrix} 7 & 8 & 9 & 10 \\ 11 & 12 & 13 & 14 \\ 15 & 16 & 17 & 18 \end{pmatrix}$$

$$a \cdot b = \begin{pmatrix} 1 \cdot 7 + 2 \cdot 11 + 3 \cdot 15 & 1 \cdot 8 + 2 \cdot 12 + 3 \cdot 16 & 1 \cdot 9 + 2 \cdot 13 + 3 \cdot 17 & 1 \cdot 10 + 2 \cdot 14 + 3 \cdot 18 \\ 4 \cdot 7 + 5 \cdot 11 + 6 \cdot 15 & 4 \cdot 8 + 5 \cdot 12 + 6 \cdot 16 & 4 \cdot 9 + 5 \cdot 13 + 6 \cdot 17 & 4 \cdot 10 + 5 \cdot 14 + 6 \cdot 18 \end{pmatrix}$$

$$a \cdot b = \begin{pmatrix} 74 & 80 & 86 & 92 \\ 173 & 188 & 203 & 218 \end{pmatrix}$$

То же самое относится к векторам. Результатом перемножения вектора размерностью I и вектора-строки размерностью J будет матрица размерностью I×J. Заметим, что результатом произведения вектора-строки на вектор-столбец будет число.

2.3.3 Среднее и дисперсия:

Математическое ожидание или среднее матрицы определяется следующим образом:

$$E[V] = \frac{\sum_i \sum_j v_{ij}}{I \times J}, \tag{2.2}$$

Дисперсия:

$$D[V] = \frac{\sum_i \sum_j v_{ij}^2}{I \times J} - E[V]^2, \qquad (2.3)$$

где I×J – размерность массива.

Соответственно, для вектора суммирование производится по одному индексу, и сумма делится на число элементов вектора.

Для нахождения этих характеристик можно использовать панель интегралов из перемещаемой панели инструментов (**Math Palette**).

2.4 Генерирование случайных чисел

Для генерирования случайных чисел в Mathcad имеется несколько встроенных функций, с помощью которых можно получать массив значений, распределенных по заданному закону. В данной работе проще всего использовать равномерно распределенные числа на интервале *(0, B)*, которые можно получить с помощью функций **rnd** или **runif**.

Общий вид функций**: rnd(B),** возвращает одно значение, равномерно распределенное на интервале *(0, B)*, **runif(N,A,B) –** возвращает массив из N равномерно распределенных на интервале *(A, B)* чисел.

Пример:

$$S := \mathrm{runif}(4, 0, 10) \qquad S = \begin{pmatrix} 0.013 \\ 1.933 \\ 5.85 \\ 3.503 \end{pmatrix}$$

<u>Порядок выполнения</u>:

1. Создать новый рабочий лист Mathcad.
2. Разработать функцию следующего содержания:
   - Определить вектор – столбец, элементы которого – случайные числа.
   - Определить вектор – строку, элементы которого – случайные числа.
   - Перемножить два вектора.
   - Определить среднее и дисперсию полученной в результате перемножения двух векторов матрицы.

В качестве аргумента функции передавать размерности векторов (см. вариант в таблице 2.1).

3. Произвести расчет с помощью разработанной функции, вывести результат.
4. Оформить полученные данные в виде рабочего листа Mathcad.
5. Сохранить файл в папке «*Мои документы\ОТМО*», имя файла задать следующим образом: *<Группа>.<Фамилия>.<№ лабораторной работы>*.

6. Сдать и защитить работу преподавателю.

<u>Содержание отчёта по лабораторной работе</u>:

1. Название и цель лабораторной работы.
2. Задание к лабораторной работе.
3. Программа.
4. Результат работы программы.
5. Описание результатов выполнения лабораторной работы.

<u>Контрольные вопросы</u>:

1. Переменная скалярного типа в математическом регионе.
2. Переменная типа дискретный аргумент в математическом регионе.
3. Программирование в системе Mathcad.
4. Разработка функции в системе Mathcad.
5. Вектор-строка и вектор-столбец; способы их задания.
6. Матрицы и способы их задания.
7. Перемножение векторов и матриц, а также вектора на матрицу.
8. Среднее и дисперсия массивов.

Таблица 2.1

№ ва-ри-анта	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**	**21**	**22**	**23**	**24**
I	**22**	**17**	**23**	**14**	**11**	**43**	**15**	**21**	**33**	**41**	**28**	**18**	**29**	**24**	**12**	**26**	**38**	**35**	**19**	**46**	**32**	**23**	**44**	**13**
J	**15**	**23**	**13**	**21**	**34**	**11**	**25**	**12**	**20**	**18**	**32**	**33**	**16**	**21**	**41**	**39**	**28**	**17**	**26**	**15**	**27**	**31**	**19**	**42**

Лабораторная работа №3

Марковские цепи. Определение и построение

Цель работы: Построить матрицу переходов для стохастической маршрутизации в сетях с коммутацией пакетов. Проверить матрицу на стохастичность и цепь Маркова на эргодичность.

Подготовка к лабораторной работе:

1. Повторить программирование в системе Mathcad.
2. Изучить свойства дискретной, конечной, однородной цепи Маркова,
3. Повторить определения основных операций с матрицами,
4. Изучить основы функционирования сетей передачи данных с коммутацией пакетов.

Краткая теория:

3.1 Определение

Последовательность случайных величин $X_1, X_2, ..., X_n, ...$ образует дискретную цепь Маркова, если для всех n и всех возможных случайных величин выполняется равенство:

$$P[X_n = j \mid X_1 = i_1, X_2 = i_2, ..., X_{n-1} = i_{n-1}] = P[X_n = j \mid X_{n-1} = i_{n-1}] \qquad (3.1)$$

Если $X_n = j$, то говорят, что на n - ом шаге система находится в состоянии E_j. Выражение в правой части равенства (1) называют вероятностью перехода; оно задает условную вероятность перехода из состояния $E_{i_{n-1}}$ на n *-1*- ом шаге в E_{i_n} на n - ом шаге.

3.2 Стохастическая матрица

Обычно цепь Маркова описывается матрицей вероятностей перехода: $T = \|p_{ij}\|$ и вектором $q = (q_1, q_2, ..., q_L)$, где $q_i = P[X_0 = i]$ – это вектор начальных вероятностей, показывающий в каком состоянии была система на нулевом шаге, L – количество состояний цепи Маркова. p_{ij} и q_i удовлетворяют условию:

$$0 \le p_{ij} \le 1, \; 0 \le q_i \le 1, \quad \sum_{i=1}^{L} q_i = \sum_{j=1}^{L} p_{ij} = 1 \qquad (3.2)$$

Матрицы, удовлетворяющие условию (3.2) называют *стохастическими.*

Пример стохастической матрицы:

$$P = \begin{vmatrix} 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0.3 & 0.4 & 0.3 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Таким образом, чтобы проверить матрицу на стохастичность нужно проверить выполнение условий (3.2) для всех ее элементов.

3.3 Неприводимая и однородная цепь Маркова

Если вероятности перехода не зависят от n (стационарны во времени), то цепь Маркова называется *однородной* и строгое ее определение задается равенством:

$$p_{ij} = P[X_n = j \mid X_{n-1} = i] \tag{3.3}$$

Для однородной цепи Маркова матрица вероятностей перехода за m шагов выглядит следующим образом: $T^{(m)} = T^m$.

Цепь Маркова называется *неприводимой*, если каждое ее состояние может быть достигнуто из любого другого. Для любой пары E_i и E_j существует такое k, что $p_{ij}^{(k)} > 0$.

3.4 Эргодическая цепь Маркова

Обозначим через $\pi_j^{(n)}$ вероятность пребывания системы на n-ом шаге в состоянии E_j: $\pi_j^{(n)} = P[X_n = j]$.

Распределение вероятностей P_j называется *стационарным*, если при его выборе в качестве начального распределения вероятностей $\pi_j^{(0)} = P_j$, для всех n выполняется равенство $\pi_j^{(n)} = P_j$.

Для *эргодической* цепи Маркова (определение смотри в лекции №4) всегда существует стационарное распределение вероятностей состояний системы, не зависящее от начального распределения вероятностей.

Для проверки однородной дискретной цепи Маркова на эргодичность необходимо:

1. Задать вектор начальных вероятностей (например, $\pi^{(0)} = (1 \quad 0 \quad 0 \quad 0)$).
2. Перемножить вектор начальных вероятностей с матрицей переходов за m шагов, значение $m \geq 200$.
3. Проверить не являются ли значения полученного в результате перемножения вектора близкими к нулю с заданной точностью ($P_j \leq \varepsilon$, где ε – точность вычислений).
4. Если появились близкие к нулю значения, значит, данная цепь Маркова не является эргодической и необходимо изменить значения элементов матрицы вероятностей переходов.
5. Изменить вектор начальных вероятностей.
6. Повторить п. 2 – 4.
7. Выполнить проверку цепи Маркова на эргодичность для всех значений вектора начальных вероятностей.

3.5 Стохастическая маршрутизация в сетях с коммутацией пакетов

В лабораторной работе рассматривается телекоммуникационная сеть с коммутацией пакетов, состоящая из L узлов. Для примера по сети передается один пакет, который начинает свой путь в i - ом узле.

Процесс перехода пакета от узла к узлу хорошо описывается однородной дискретной цепью Маркова. Матрица вероятностей переходов играет роль маршрутной матрицы.

Стохастическая маршрутизация предполагает, что каждому узлу приписаны несколько путей к другим узлам с различными вероятностями (в сумме эти вероятности составляют единицу). С помощью генератора случайных чисел, равномерно распределенных на интервале *[0, 1]*, решается вопрос о дальнейшем маршруте пакета.

Задача данной лабораторной работы корректно разработать сеть с коммутацией пакетов и соответствующий ей Марковский процесс.

<u>Порядок выполнения</u>:

1. Определить структуру сети, состоящей из $L = 15$ узлов, в виде ориентированного графа. Каждый узел должен иметь по три исходящих маршрута. Число входящих маршрутов каждого узла должно быть не менее одного. Сделать эскиз сети на черновике.
2. Создать новый рабочий лист Mathcad.
3. Задать матрицу переходов $T = \left\| p_{ij} \right\|, \quad i, j = 0 \ldots L-1$ на основе разработанной структуры.
4. Разработать функцию *stochastic(matrix)*, которая проверяет, является ли матрица, стохастической,
5. Разработать функцию *ergodic(matrix,ε)*, которая проверяет, является ли цепь Маркова, описанная матрицей переходов, эргодической.
6. Проверить построенную в п. 3 матрицу переходов на стохастичность с помощью функции, написанной в п. 4,
7. Проверить цепь Маркова, описанную матрицей переходов в п. 3, на эргодичность с помощью функции из п. 5
8. Оформить полученные данные в виде рабочего листа Mathcad,
9. Сохранить файл в папке «*Мои документы\ОТМО*», имя файла задать следующим образом: *<Группа>.<Фамилия>.<№ лабораторной работы>*.
10. Сдать и защитить работу преподавателю

<u>Содержание отчёта по лабораторной работе</u>:

1. Название и цель лабораторной работы.
2. Задание к лабораторной работе.
3. Описание результатов выполнения лабораторной работы.
4. Матрица вероятностей переходов.
5. Функции для проверки свойств стохастичности и эргодичности.
6. Результаты проверки построенной цепи Маркова.

Контрольные вопросы:

1. Определение цепи Маркова,
2. Классификация цепей Маркова,
3. Свойства цепей Маркова,
4. Состояния цепи Маркова,
5. Что такое неприводимая цепь Маркова?
6. Что такое апериодическая цепь Маркова?
7. Что такое однородная цепь Маркова?
8. Свойство эргодичности.
9. Стационарное распределение состояний цепи Маркова.
10. Общие понятия о вычислительных сетях с коммутацией пакетов, и методах маршрутизации в них.

Лабораторная работа №4

Марковские цепи. Исследование эргодических свойств

Цель работы: Исследовать свойства конечной дискретной, однородной цепи Маркова. Оценить параметры распределения числа коммутаций пакетов в сети.

Подготовка к лабораторной работе:

1. Повторить программирование в системе Mathcad,
2. Изучить свойства дискретной, конечной, однородной цепи Маркова,
3. Повторить определения основных операций с матрицами,
4. Изучить основы функционирования сетей передачи данных с коммутацией пакетов,

Краткая теория:

4.1 Обозначения и расчетные формулы

L – количество узлов в сети с коммутацией пакетов (число состояний цепи Маркова)

$P_{i,j}$, $i, j = \overline{0, L}$ - маршрутная матрица (матрица перехода однородной цепи Маркова); $P_{i,j}$ - вероятность передачи пакета узлом i в узел j (из лабораторной работы №3).

$P_{i,j}^{(m)}$, $i, j = \overline{0, L}$, $m > 0$ – вероятность пребывания пакета в узле j после m коммутаций при условии, что пакет поступил в сеть через узел j:

$$P^{(m)} = P^{m}. \tag{4.1}$$

$f_{i,j}^{(m)}$, $i, j = \overline{0, L}$, $m > 0$ – вероятность первого перехода пакета в узел j из узла i после m коммутаций:

$$f_{i,j}^{(m)} = P_{i,j}^{(m)} \times \prod_{q=1}^{m-1} (1 - P_{i,j}^{(q)}). \tag{4.2}$$

$M_{i,j}$, $i, j = \overline{0, L}$, $m > 0$ – длина кратчайшего пути перехода пакета в узел j из узла i:

$$M_{i,j} = \min_{f_{i,j}^{(m)} > 0} m. \tag{4.3}$$

$\overline{M}_{i,j}$, $i, j = \overline{0, L}$, $m > 0$ – математическое ожидание длины пути перехода пакета в узел j из узла i:

$$\overline{M}_{i,j} = \sum_{m=1}^{\infty} m \times f_{i,j}^{(m)}. \tag{4.4}$$

$D_{i,j}$, $\quad i,j=\overline{0,L}, \quad m>0$ – дисперсия длины пути перехода пакета в узел *j* из узла *i:*

$$\overline{D}_{i,j} = \sum_{m=1}^{\infty} m^2 \times f_{i,j}^{(m)} - \overline{M}_{i,j}^{2}. \qquad (4.5)$$

4.2 Функция для расчета траектории движения пакета по сети

$$
\mathrm{MarkovTrajectory}(P,N,s) := \left|
\begin{array}{l}
E_0 \leftarrow s \\
S \leftarrow \mathrm{cols}(P) - 1 \\
\text{for } i \in 0..S \\
\quad \text{for } j \in 1..S \\
\quad\quad P_{i,j} \leftarrow P_{i,j} + P_{i,j-1} \\
\text{for } i \in 1..N \\
\quad \left|
\begin{array}{l}
r \leftarrow \mathrm{rnd}(1) \\
E_i \leftarrow S \\
\text{for } j \in 0..S-1 \\
\quad \text{if } r < P_{\left(E_{i-1}\right),j} \\
\quad\quad \left|
\begin{array}{l}
E_i \leftarrow j \\
\text{break}
\end{array}
\right.
\end{array}
\right. \\
E
\end{array}
\right.
$$

Здесь *P* – маршрутная матрица, *N* – длина траектории, *s* – начальное состояние цепи Маркова. Принцип стохастической маршрутизации описан в лабораторной работе №3.

Порядок выполнения:

1. Открыть рабочий лист Mathcad, созданный в лабораторной работе №3.
2. С помощью приведённой выше MathCad - функции *MarkovTrajectory(P,N,s)* вычислить и отобразить в виде графика некоторую траекторию движения пакета по сети.
3. Определить точность, с которой будут производиться расчёты – ε.
4. Запрограммировать и рассчитать величины:
    - вероятность пребывания пакета в узле *j* после *m* коммутаций при условии, что пакет поступил в сеть через узел *i*,

- вероятность первого перехода пакета в узел j из узла i после m коммутаций,
- длину кратчайшего пути перехода пакета в узел j из узла i ,
- математическое ожидание длины пути перехода пакета в узел j из узла i ,
- дисперсию длины пути перехода пакета в узел j из узла i,

формулы 4.1 – 4.5.

5. Построить зависимости:
    - вероятностей пребывания пакета в узлах от их номеров,
    - вероятностей первого перехода пакета в узел j из узла i после m коммутаций от номеров узлов,
    - длин кратчайших путей переходов от номеров узлов,
    - математических ожиданий и дисперсий от номеров узлов.
6. Оформить полученные данные в виде рабочего листа Mathcad.
7. Сохранить файл в папке «*Мои документы\ОТМО*», имя файла задать следующим образом: *<Группа>.<Фамилия>.<№ лабораторной работы>*.
8. Сдать и защитить работу преподавателю.

Содержание отчёта по лабораторной работе:

1. Название и цель лабораторной работы.
2. Задание к лабораторной работе.
3. Описание результатов выполнения лабораторной работы.
4. Функции для расчета параметров цепи Маркова.
5. Графики всех зависимостей, полученных в лабораторной работе.

Контрольные вопросы:

1. Определение цепи Маркова.
2. Классификация цепей Маркова.
3. Свойства цепей Маркова.
4. Состояния цепи Маркова.
5. Дискретные и непрерывные цепи Маркова.
6. Вероятности перехода за m шагов.
7. Длины кратчайших путей перехода пакета.
8. Алгоритм функции вычисления траектории цепи Маркова.
9. Общие понятия о вычислительных сетях с коммутацией пакетов, и методах маршрутизации в них.

Лабораторная работа №5

Система массового обслуживания G/G/1. Формирование управляющих случайных последовательностей

Цель работы: Моделирование управляющих случайных последовательностей с различными функциями распределения.

Подготовка к лабораторной работе:

1. Изучить встроенные функции системы Mathcad.
2. Изучить различные законы распределения случайных величин.
3. Повторить обозначения систем массового обслуживания.
4. Повторить понятия входного потока и времени обслуживания.
5. Повторить понятия *математическое ожидание* и *дисперсия*.
6. Изучить формулы для расчета математического ожидания и дисперсии для заданных распределений.

Краткая теория:

5.1 Модель системы массового обслуживания

В предлагаемой лабораторной работе исследуется модель системы массового обслуживания (СМО), состоящей из очереди и прибора.

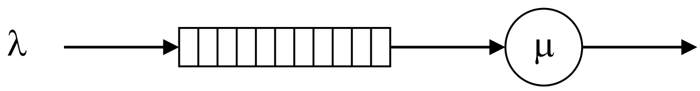


Рисунок 5.1 Модель СМО.

На вход системы поступает поток заявок с интенсивностью λ. Обслуживание осуществляется в единственном приборе с интенсивностью μ. Подразумевается, что очередь имеет неограниченную емкость (т.е. обслуживание без отказов). Любое требование, поступающее в систему, в то время когда прибор занят, ждет пока не обслужатся все стоящие перед ним в очереди требования. Входными параметрами для исследования СМО являются последовательности $\{\tau_n\}$ – последовательность промежутков времени между поступлениями требований и $\{\nu_n\}$ – последовательность промежутков времени обслуживания.

Задача данной лабораторной работы заключается в том, чтобы правильно сформировать управляющие последовательности в зависимости от вида СМО.

Для сравнения систем массового обслуживания различного типа необходимо, чтобы аналитические характеристики (математическое ожидание и дисперсия) распределений случайных величин ($\{\tau_n\}$ и $\{\nu_n\}$), подаваемых на вход этих СМО, совпадали. Таким образом, параметры распределений определяются решением системы уравнений:

$$\begin{cases} E_{\exp} = E_G \\ D_{\exp} = D_G \end{cases} \tag{5.1}$$

5.2 Решение системы уравнений

Для решения системы уравнений в Mathcad можно воспользоваться встроенной функцией **Find.** Это можно сделать следующим образом:

- Присвоить начальные значения всем искомым переменным;
- Ниже ввести ключевое слово **Given** (Дано)**;**
- Перейти на строку ниже и ввести систему уравнений (использовать жирный знак равенства из панели отношений);
- Ниже выполнить вызов функции **Find(x,y)**.

Пример:

$x := 1 \quad y := 1$ Начальные значения

Given

$5 = \frac{x+2}{y} \quad x = 3\cdot y + 10$ Система уравнений

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} := \mathrm{Find}(x, y)$ Вызов функции Fin

$x = ▮ \quad y = ▮$ Вывод результата

5.3 Система M/M/1

Распределение времени между поступлениями – показательное:

$$F(\tau) = 1 - e^{-\lambda\cdot\tau}, \tag{5.2}$$

со средним:

$$E_{\exp} = \bar{\tau} = \frac{1}{\lambda} \tag{5.3}$$

и дисперсией:

$$D_{\exp} = \sigma_\tau^2 = \frac{1}{\lambda^2}. \tag{5.4}$$

Распределение времени обслуживания – показательное $F(\nu) = 1 - e^{-\mu\cdot\nu}$. Среднее и дисперсия вычисляются по формулам 5.3 - 5.4 (с параметром μ). Для генерации показательно распределенных случайных чисел используется встроенная функция Mathcad – **rexp(*N*,*λ*),** где N – размерность вектора λ – параметр распределения.

5.4 Система M/G/1

Распределение времени между поступлениями – показательное (среднее и дисперсия смотри выше). Распределение времени обслуживания – общего вида, в данной лабораторной работе это любое распределение из таблицы 5.1. Характеристики распределений общего вида описаны ниже.

5.5 Система G/M/1

Распределение времени между поступлениями – общего вида. Распределение времени обслуживания – показательное.

5.6 Система G/G/1

Распределение времени между поступлениями заявок и времени обслуживания – общего вида.

5.7 Распределения общего вида и их характеристики

5.7.1 Равномерное распределение

Функция распределения случайной величины x, равномерно распределенной на интервале (a,b) выглядит следующим образом:

$$F(x) = \frac{x-a}{b-a}. \tag{5.5}$$

Плотность вероятности:

$$f(x) = \frac{1}{b-a}, \tag{5.6}$$

со средним:

$$E_{unif} = \bar{x} = \frac{a+b}{2} \tag{5.7}$$

и дисперсией:

$$D_{unif} = \sigma_x^2 = \frac{(b-a)^2}{12}. \tag{5.8}$$

Генерация вектора из N случайных чисел, равномерно распределенных на интервале (a,b), производится с помощью встроенной функции Mathcad – **runif(*N*,*a*,*b*).** Параметры распределения (границы интервала) находятся решением системы уравнений (5.1).

5.7.2 Гамма – распределение

Функция распределения: не выражается в элементарных функциях
Плотность вероятности:

$$f(x) = \left(\frac{x}{b}\right)^{c-1} \cdot \left(\frac{\exp\left(\frac{x}{b}\right)}{b \cdot \Gamma(c)}\right), \tag{5.9}$$

где c – параметр формы, b – параметр масштаба (иногда не используется).
Среднее:

$$E_\Gamma = \bar{x} = b \cdot c. \tag{5.10}$$

Дисперсия:

$$D_{\Gamma} = \sigma_x^2 = b^2 \cdot c. \tag{5.11}$$

Для генерации случайных чисел и используется функция Mathcad – **rgamma(*N,c*)**, где *N* – размерность вектора, *c > 0* – параметр формы. Параметры распределения *b* и *c* определяются решением системы уравнений (5.1).

Необходимо учитывать, что Mathcad генерирует случайные числа с параметром масштаба *b = 1,* поэтому для правильной оценки Гамма – распределения необходимо всю сгенерированную последовательность умножить на параметр масштаба.

5.7.3 Логнормальное распределение

Функция распределения: не выражается в элементарных функциях

Плотность вероятности:

$$f(x) = \left(\frac{1}{x \cdot \sigma \cdot \sqrt{2\pi}}\right) \cdot \exp\left(\frac{-[\ln(x/m)]^2}{2 \cdot \sigma^2}\right), \tag{5.12}$$

где σ *> 0* – параметр формы (стандартное отклонение случайной величины), *m* – параметр масштаба (медиана), $m = \exp(\bar{x})$. Параметры *m* и σ выражаются через характеристики показательного распределения следующим образом:

$$m = \frac{E_{\exp}}{\sqrt{\omega}}, \tag{5.13}$$

$$\sigma = \sqrt{\ln(\omega)}, \tag{5.14}$$

где $\omega = \dfrac{D_{\exp} + E_{\exp}^2}{E_{\exp}^2}$ – вспомогательная переменная, E_{exp} – математическое ожидание показательного распределения, D_{exp} – дисперсия показательного распределения.

Для генерации случайных чисел и используется функция Mathcad – **rlnorm(*N,* υ*,* σ),** где $\upsilon = \ln(m)$. Параметры распределения смотри выше.

5.7.4 Распределение хи - квадрат

Функция распределения:

$$F(x) = \left(\frac{1}{2^{d/2} \cdot \Gamma\left(\frac{d}{2}\right)}\right) \cdot \int_0^y u^{\frac{d}{2}-1} \cdot \exp\left(-\frac{u}{2}\right) du \tag{5.15}$$

Плотность вероятности:

$$f(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{d}{2}-1} \cdot \left(\frac{\exp\left(-\frac{x}{2}\right)}{b \cdot \Gamma\left(\frac{d}{2}\right)}\right), \tag{5.16}$$

где *d > 0* – параметр формы (число степеней свободы).

Среднее:

$$E_{\chi^2} = \bar{x} = d\,. \qquad (5.17)$$

Дисперсия:

$$D_{\chi^2} = \sigma_x^2 = 2 \cdot d\,. \qquad (5.18)$$

Для генерации случайных чисел и используется функция Mathcad – **rchisq(*N, d*).** Параметры распределения определяются решением системы уравнений 5.1.

5.7.5 Распределение Эрланга

Распределение Эрланга – это гамма - распределение с целым параметром *c*.

Функция распределения:

$$F(x) = 1 - \exp\left(\frac{x}{b}\right) \cdot \left[\sum_{i=1}^{c-1} \frac{\left(\frac{x}{b}\right)^i}{i!}\right] \qquad (5.19)$$

Плотность вероятности:

$$f(x) = \frac{\left(\frac{x}{b}\right)^{c-1} \cdot \exp\left(-\frac{x}{b}\right)}{b \cdot [(c-1)!]}, \qquad (5.20)$$

где $c > 0$ – параметр формы (целое число), $b > 0$ – параметр масштаба.

Среднее:

$$E_E = \bar{x} = b \cdot c\,. \qquad (5.21)$$

Дисперсия:

$$D_E = \sigma_x^2 = b^2 \cdot c\,. \qquad (5.22)$$

Для генерации случайных чисел и используется функция Mathcad – **rgamma(*N, c*)**, где *N* – размерность вектора**.** Параметры распределения *c* и *b* определяются решением системы уравнений 5.1.

Необходимо учитывать, что Mathcad генерирует случайные числа с параметром масштаба $b = 1$, поэтому для правильной оценки распределения Эрланга необходимо всю сгенерированную последовательность умножить на параметр масштаба.

5.7.6 Распределение Вейбулла

Функция распределения:

$$F(x) = 1 - \exp\left(-\left(\frac{x}{b}\right)^c\right) \qquad (5.23)$$

Плотность вероятности:

$$f(x) = \left(\frac{c \cdot x^{c-1}}{b^c}\right) \cdot \exp\left(-\left(\frac{x}{b}\right)^c\right), \qquad (5.24)$$

где $c > 0$ – параметр формы, $b > 0$ – параметр масштаба (характерное время жизни).

Среднее:

$$E_W = \bar{x} = b \cdot \Gamma\left(\frac{c+1}{c}\right). \tag{5.25}$$

Дисперсия:

$$D_W = \sigma_x^2 = b^2 \cdot \left[\Gamma\left(\frac{c+2}{c}\right) - \left\{\Gamma\left(\frac{c+1}{c}\right)\right\}^2\right]. \tag{5.26}$$

Для генерации случайных чисел и используется функция Mathcad – **rweibull(*N*, c*)*.** Параметры распределения определяются решением системы уравнений 5.1.

Необходимо учитывать, что Mathcad генерирует случайные числа с параметром масштаба $b = 1$, поэтому для правильной оценки распределения Вейбулла необходимо всю сгенерированную последовательность умножить на параметр масштаба.

5.8 Статистические характеристики

Среднее:

$$M = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N} \tag{5.27}$$

Дисперсия:

$$D = \frac{\sum_{i=1}^{N} {x_i}^2}{N} - M^2 \tag{5.28}$$

<u>Порядок выполнения:</u>

1. Создать новый рабочий лист Mathcad.
2. Задать значения λ и μ (по своему усмотрению, но с учетом выполнения условия стационарности системы).
3. Определить аналитические характеристики (математическое ожидание и дисперсию) показательного распределения (для входного потока и времени обслуживания).
4. Определить параметры распределения общего вида (распределение из таблицы 1, вариант по журналу).
5. Определить аналитические характеристики распределения общего вида.
6. Задать длину последовательности $N \geq 100$.
7. Используя встроенные функции Mathcad сгенерировать управляющие последовательности для системы *M/M/1* ($\{\tau_n\}$ и $\{\nu_n\}$).
8. Сгенерировать управляющие последовательности для потока общего вида ($\{\tau 1_n\}$ и $\{\nu 1_n\}$).

9. Рассчитать статистические характеристики для всех полученных выборок (формулы 5.27 – 5.28).
10. Проверить совпадение аналитических и статистических характеристик, тем самым, оценив точность генерации последовательностей.
11. Проверить совпадение статистических характеристик показательного распределения и распределения общего вида.
12. Добиться наиболее полного совпадения, изменяя параметр *N*.
13. Оформить полученные данные в виде рабочего листа Mathcad.
14. Сохранить файл в папке «*Мои документы\ОТМО*», имя файла задать следующим образом: *<Группа>.<Фамилия>.<№ лабораторной работы>*.
15. Сдать и защитить работу преподавателю.

Содержание отчета по лабораторной работе:

1. Название и цель работы.
2. Задание к лабораторной работе.
3. Расчет и задание параметров распределений.
4. Длина последовательностей.
5. Сгенерированные последовательности.
6. Статистические и аналитические характеристики.
7. Вывод по лабораторной работе.

Контрольные вопросы:

1. Обозначение СМО.
2. Классификация СМО.
3. Функции распределения.
4. Математическое ожидание и дисперсия.
5. Генерирование случайных чисел.
6. Аналитические и статистические характеристики.
7. Решение систем линейных уравнений.

Таблица 5.1

№	**Тип распределения**
1	Распределение Вейбулла
2	Гамма-распределение
3	Равномерное распределение
4	Логнормальное распределение
5	Распределение Эрланга
6	Распределение хи - квадрат
7	Равномерное распределение
8	Распределение Вейбулла
9	Гамма-распределение
10	Распределение Вейбулла
11	Гамма-распределение

12	Равномерное распределение
13	Логнормальное распределение
14	Распределение Эрланга
15	Распределение хи - квадрат
16	Равномерное распределение
17	Распределение Вейбулла
18	Гамма-распределение
19	Распределение Вейбулла
20	Гамма-распределение
21	Равномерное распределение
22	Логнормальное распределение
23	Распределение Эрланга
24	Распределение хи - квадрат
25	Равномерное распределение
26	Распределение Вейбулла
27	Гамма-распределение
28	Распределение Вейбулла
29	Гамма-распределение
30	Равномерное распределение

Лабораторная работа №6

Система массового обслуживания G/G/1. Исследование зависимостей параметров от типа функций распределения управляющих последовательностей

Цель работы: Моделирование поведения системы массового обслуживания. Сравнение аналитических и статистических оценок стационарных характеристик для различных видов управляющих последовательностей.

Подготовка к лабораторной работе:

1. Повторить программирование в системе Mathcad.
2. Повторить различные законы распределения случайных величин,
3. Повторить обозначения систем массового обслуживания.
4. Повторить понятия входного потока, времени обслуживания, времени пребывания требования в системе, среднего числа требований в системе и времени ожидания.

Краткая теория:

В лабораторной работе рассматривается модель системы массового обслуживания (смотри рисунок 5.1 из лабораторной работы №5). Входными параметрами модели являются последовательности $\{\tau_n\}, \{\tau 1_n\}, \{\nu_n\}, \{\nu 1_n\}$, сформированные в лабораторной работе №5.

В зависимости от того, СМО какого типа мы хотим получить, в моделирующую программу передаются различные входные параметры:

M/M/1 – τ, ν,

M/G/1 – τ, $\nu 1$,

G/M/1 – $\tau 1$, ν,

G/G/1 – $\tau 1$, $\nu 1$.

Полное описание модели и полученных в результате моделирования характеристик смотри в прилагающейся к лабораторной работе Mathcad – программе «Система массового обслуживания».

Порядок выполнения:

1. Открыть Mathcad – программу, прилагающуюся к данной лабораторной работе – «*Система массового обслуживания*».
2. Сохранить Mathcad – файл в папке «*Мои документы\ОТМО*» имя файла задать следующим образом: *<Группа>.<Фамилия>.<№ лабораторной работы>*.
3. Установить значения входных параметров λ и μ такими, чтобы соблюдалось условие стационарности. Посмотреть, как изменятся при этом графики.
4. Передать в программу входные параметры, сформированные в лабораторной работе №5, чтобы получить следующие модели:

- СМО *M/M/1;*

- СМО *M/G/1;*
- СМО *G/M/1;*
- СМО *G/G/1.*

5. Получить следующие зависимости для четырех типов СМО (смотри выше):
   - Число поступивших и обслуженных заявок от времени;
   - Число заявок, пребывающих в СМО от времени;
   - Распределение числа заявок в СМО.
6. Построить зависимости для каждого типа СМО на отдельном графике и подписать каждый график.
7. Рассчитать следующие статистические характеристики для каждого типа СМО:
   - Коэффициент загрузки;
   - Среднее число заявок в СМО;
   - Среднее время пребывания заявок в очереди СМО;
   - Среднее время пребывания заявок в СМО;

Подписать характеристики для каждого типа СМО.

8. Сравнить полученные результаты, сделать выводы по лабораторной работе.
9. Оформить отчет в виде Mathcad – файла.
10. Сохранить Mathcad – файл в папке «*Мои документы\ОТМО*».
11. Сдать и защитить работу преподавателю.

<u>Содержание отчёта по лабораторной работе</u>:

1. Название и цель лабораторной работы,
2. Задание к лабораторной работе,
3. Описание результатов выполнения лабораторной работы,
4. Графики всех зависимостей, полученных в лабораторной работе.

<u>Контрольные вопросы</u>:

1. Классификация СМО.
2. Обозначения СМО.
3. Понятие входного потока и процесса обслуживания.
4. Условие стационарности системы.
5. Коэффициент загрузки.
6. Распределение числа требований в системе.
7. Состояния СМО.
8. Зависимость вероятностно-временных характеристик СМО от распределения входного потока и длительности обслуживания.

Лабораторная работа № 7

Система массового обслуживания M/G/1. Формула Хинчина – Поллячека

<u>Цель работы:</u> Проверить корректность формулы Поллячека – Хинчина на примере систем типа M/M/1 и M/D/1.

<u>Краткая теория:</u>

7.1 Характеристики M/G/1

Средняя длина очереди:

$$\overline{N}_q = \rho^2 \frac{(1+C_b^2)}{2(1-\rho)} \tag{7.1}$$

Среднее число заявок в СМО:

$$\overline{N} = \rho + \rho^2 \frac{(1+C_b^2)}{2(1-\rho)} \tag{7.2}$$

Среднее время ожидания:

$$W = \rho \cdot \overline{x} \frac{(1+C_b^2)}{2(1-\rho)} \tag{7.3}$$

Среднее время пребывания требования в системе:

$$T = \overline{x} + \rho \cdot \overline{x} \frac{(1+C_b^2)}{2(1-\rho)} \tag{7.4}$$

7.2 Характеристики M/D/1

Средняя длина очереди:

$$\overline{N}_q = \rho^2 \frac{1}{2(1-\rho)} \tag{7.5}$$

Среднее число заявок в СМО:

$$\overline{N} = \rho^2 \frac{1}{2(1-\rho)} + \rho \tag{7.6}$$

Среднее время ожидания:

$$W = \frac{\rho \cdot x}{2(1-\rho)} \tag{7.7}$$

Среднее время пребывания требования в системе:

$$T = \frac{x(2-\rho)}{2(1-\rho)} \tag{7.8}$$

7.3 Характеристики M/M/1

Средняя длина очереди:

$$\overline{N}_q = \frac{\rho^2}{1-\rho} \tag{7.9}$$

Среднее число заявок в СМО:

$$\overline{N} = \frac{\rho}{1-\rho} \tag{7.10}$$

Среднее время ожидания:

$$W = \frac{\rho \cdot \overline{x}}{1-\rho} \tag{7.11}$$

Среднее время пребывания требования в системе:

$$T = \frac{\overline{x}}{1-\rho} \tag{7.12}$$

где:

$C_b^2 = \frac{\sigma_b^2}{(\overline{x})^2}$ – нормированная дисперсия времени обслуживания,

σ_b^2 – дисперсия времени обслуживания,

$\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ – коэффициент использования системы.

Порядок выполнения работы:

1. Открыть чистый лист Mathcad.
2. Написать Mathcad – программу, рассчитывающую характеристики СМО.
3. Получить зависимости всех вышеописанных характеристик от нормированной дисперсии времени обслуживания и коэффициента загрузки для системы типа *M/G/1* по формулам 7.1 – 7.4. При этом нормированную дисперсию изменять следующим образом: $C_b^2 = 0, 1, 10, 20, 30, \cdots, 100$, Среднее время обслуживания задать по своему усмотрению.
4. Получить зависимости вышеописанных характеристик от коэффициента загрузки для системы *M/D/1* по формулам 7.5 – 7.8.
5. Получить зависимости характеристик от коэффициента загрузки для системы *M/M/1*по формулам 7.9 – 7.12.
6. Построить графики полученных зависимостей (каждая характеристика на отдельном графике, три СМО на одном графике).
7. Сравнить полученные результаты, сделать выводы по лабораторной работе.
8. Оформить отчет в виде Mathcad-файла.
9. Сохранить Mathcad-файл в папке «*Мои документы\OTMO*\».
10. Сдать и защитить работу преподавателю.

Контрольные вопросы:

1. Формула Хинчина –Поллячека для системы массового обслуживания типа M/G/1.

2. Формула Хинчина –Поллячека для системы массового обслуживания типа M/M/1.
3. Формула Хинчина –Поллячека для системы массового обслуживания типа M/D/1.
4. Нормированная дисперсия времени обслуживания.
5. Средняя длина очереди.
6. Среднее число заявок в СМО.
7. Среднее время ожидания.
8. Среднее время пребывания требования в системе.
9. Сравнение вероятностно-временных характеристик систем M/D/1 и M/M/1.

Литература

1. Хинчин А.Я. Работы по математической теории массового обслуживания. – М.: Физматгиз, 1963. – 236 с.
2. Кофман А., Крюон Р. Массовое обслуживание. Теория и приложения. – М.: Мир, 1965. – 302.
3. Саати Т.Л. Элементы теории массового обслуживания и её приложения. – М.: Советское радио, 1971. – 520 с.
4. Гнеденко Б.В., Коваленко И.Н. Введение в теорию массового обслуживания. – М.: Наука, 1987. – 336 с.
5. Клейнрок Л. Теория массового обслуживания. – М.: Машиностроение, 1979. – 432 с.
6. Клейнрок Л. Вычислительные системы с очередями. – М.: Мир, 1979. – 600 с.
7. Уолрэнд Д. Введение в теорию сетей массового обслуживания. – М.: Мир, 1993.–336с.