

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ

**ХАРЬКОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ
АВТОМОБИЛЬНО - ДОРОЖНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ**

КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ
по начертательной геометрии
для студентов технических специальностей
всех форм обучения

Харьков 2003

Составители: Виталий Николаевич Сердюк
Алина Дмитриевна Бирина
Андрей Викторович Новиков

Web-публикация: Черников Александр Викторович
01-07-2003

ПРЕДИСЛОВИЕ

В предложенном учебном пособии в соответствии с программой Министерства образования и науки Украины изложены основные понятия курса начертательной геометрии, составляющие основу инженерного образования машиностроительного профиля. Сжатая форма изложения вместе с основными положениями каждой главы, примерами решений задач, делают **"Конспект лекций по начертательной геометрии"** основным руководством для дистанционного изучения курса. Для студентов, желающих расширить свои познания в этой области, в пособии приводится рекомендуемая литература.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ИЗУЧЕНИЮ КУРСА

ОБЩИЕ УКАЗАНИЯ

1. Последовательность изучения должна соответствовать изложению материала в настоящем пособии.
2. Самостоятельность изучения складывается из следующих видов:
 - изучения теоретического материала с рассмотрением приводимых примеров решений типовых задач;
 - выполнения контрольной работы.
3. При изучении материала курса переходить к каждой из последующих тем (глав) следует только после освоения предыдущего материала.
4. Все построения на чертежах стремиться мысленно представлять в пространстве.
5. При возникновении затруднений студенту рекомендуется обращаться за консультациями в университет, имея при себе данное пособие.

На экзамен следует представить зачтённую контрольную работу и зачётную книжку. Иметь при себе: лист бумаги формата А3, карандаш, два угольника, циркуль, резинку, желательное лекало.

Экзаменационный билет состоит из 4-х вопросов (задач), охватывающих основные темы курса:

- позиционные задачи;
- метрические задачи;
- пересечение поверхностей;
- аксонометрия.

ЛИТЕРАТУРА

Кроме настоящего руководства рекомендуются следующие книги:

1. *Посвянский А.Д., Краткий курс начертательной геометрии.* — М.: Высш. шк., 1974. — 191 с.
2. *Фролов С.А., Начертательная геометрия.* — М.: Машиностроение, 1983.— 240 с.
3. *Бубенников А.В., Громов М.Я. Начертательная геометрия.*— М., Высшая школа, 1973, — 416 с.

ПРИНЯТЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

1. Точки, расположенные в пространстве, обозначаются прописными буквами латинского алфавита:

A, B, C, D,

2. Прямые и кривые линии в пространстве обозначаются строчными буквами латинского алфавита:

a, b, c, d, m, n, k, t,

Линии уровня обозначаются следующими буквами:

горизонтали — *h*;

фронталы — *f*;

профильные прямые — *p*.

3. Плоскости и поверхности в пространстве обозначаются прописными буквами греческого алфавита:

Γ, Δ, Σ, Φ, Ω,

Чтобы отметить способ задания плоскости, рядом с буквенным обозначением плоскости в скобках пишутся обозначения тех элементов, которыми она задана, например,

Σ(A, B, C).

4. Для обозначения углов применяются строчные греческие буквы:

α, β, γ,

Прямой угол отмечается дугой с точкой внутри сектора.

5. Плоскости проекций обозначаются буквой Π с добавлением подстрочного индекса $1, 2, 3, 4, 5, \dots$, например:

$$\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3, \dots$$

6. Проекции точек, линий и плоскостей обозначаются соответствующими буквами с добавлением подстрочного индекса $1, 2, 3, \dots$, соответствующего плоскости проекций, на которой они получены:

$$\text{на плоскости } \Pi_1 — A_1; b_1; \Sigma_1;$$

$$\text{на плоскости } \Pi_2 — A_2; b_2; \Sigma_2; \text{ и т. д.}$$

7. Обозначение основных операций:

- совпадение геометрических фигур отмечается знаком \equiv , например:

$$m \equiv n \text{ или } A_1 \equiv B_1$$

- взаимная принадлежность (инцидентность) фигур или их элементов обозначается знаком \supset или \subset (знак включения). Например, принадлежность точки M плоскости Σ обозначается

$$M \subset \Sigma \text{ или } \Sigma \supset M$$

- пересечение двух фигур обозначается знаком \cap , например:

$$m \cap n; a \cap \Sigma$$

- соединение двух несовпадающих точек обозначается знаком \cup , например,

$$A \cup B$$

- результат геометрического построения обозначается знаком $=$, например,

$$M = a \cap \Sigma$$

это означает, что M является точкой пересечения прямой a с плоскостью Σ ;

- параллельность прямых и плоскостей обозначается знаком \parallel :

$$a \parallel b; c \parallel \Sigma; \Delta \parallel \Sigma$$

- перпендикулярность прямых и плоскостей обозначается знаком \perp :

$$n \perp \Sigma; \Delta \perp \Sigma$$

- скрещивающиеся прямые обозначаются знаком $\overline{\neq}$;

- союзу "и" соответствует знак \wedge ;

- союзу "или" – знак \vee ;
- логическому следствию – знак \Rightarrow . Например, выражение

$$(a \parallel c) \wedge (b \parallel c) \Rightarrow a \parallel b$$

означает: если две прямые параллельны третьей, то они параллельны между собой;

- квантор общности – знак \forall , читается: для всякого, для любого. Например, $\forall a \supset A$, означает: любая прямая, проходящая через точку A .

ВВЕДЕНИЕ

Начертательная геометрия занимает особое положение среди других наук: она является лучшим средством развития у человека пространственного воображения, без которого немислимо никакое инженерное творчество. Эта дисциплина представляет собой тот раздел геометрии, в котором пространственные формы предметов изучаются при помощи изображений на плоскости, т.е. она является теоретической базой для составления чертежа.

Основным методом начертательной геометрии является *метод проецирования*. При этом каждой точке трехмерного пространства ставится в соответствие определенная точка двумерного пространства – плоскости. Основными видами проецирования являются *центральное* и *параллельное*.

Рассмотрим аппарат *параллельного* проецирования.

На рис. 1 изображена операция параллельного проецирования точки A и отрезка BC .

Пусть в пространстве имеется плоскость Π' , которая называется *плоскостью проекций*, и направление проецирования s .

Чтобы спроецировать какую-либо точку A пространства, проводим через нее *проецирующий луч*,

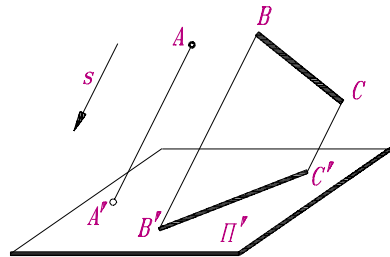


Рис. 1

параллельный направлению проецирования s . Точка пересечения этого луча A' с плоскостью Π' является *параллельной проекцией* точки A (*оригинала*) на плоскость Π' . Проекцией прямой m на плоскость Π' является прямая m' .

К проекционным изображениям предъявляются следующие требования: достаточная точность, простота и обратимость. Последнее условие предполагает возможность определять форму и размеры объекта по его проекционным изображениям. Это требование и обуславливает применение в инженерно-технических чертежах так называемых *ортогональных проекций*, в которых направление проецирования s перпендикулярно к плоскостям проекций ($s \perp \Pi'$). Этот вид проекций мы и будем рассматривать.

Глава 1. ОРТОГОНАЛЬНЫЕ ПРОЕКЦИИ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ФИГУР

А. ТОЧКА

1. Пространственная модель координатных плоскостей проекций

Пусть даны в пространстве три взаимно перпендикулярные *плоскости проекций* Π_1, Π_2, Π_3 и точка A – оригинал (рис. 2). Условимся называть:

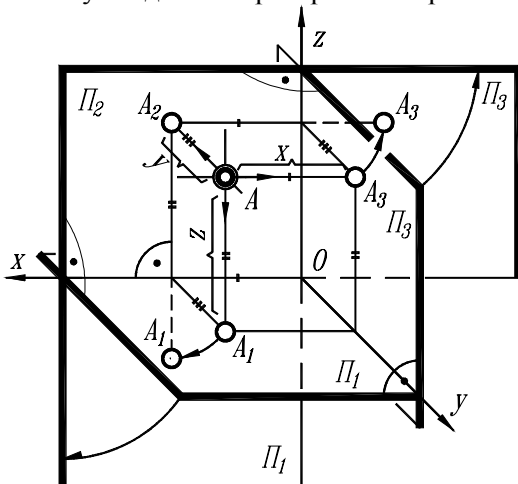


Рис. 2

плоскость Π_1 – *горизонтальной* плоскостью проекций;

плоскость Π_2 – *фронтальной* плоскостью проекций;

плоскость Π_3 – *профильной* плоскостью проекций.

Линии пересечения плоскостей образуют оси координат. Ось x называют осью *абсцисс*, ось y – осью *ординат* и ось z – осью *аппликат*. Точка их пересечения O принимается за *начало координат*.

Положение точки A в пространстве определяется тремя координатами (x, y, z) , показывающими величины расстояний, на которые точка A удалена от плоскостей проекций.

Проведем из точки A перпендикулярные прямые (*проецирующие лучи*) к плоскостям проекций. Основания этих перпендикуляров называются *ортогональными проекциями* точки A , а именно:

A_1 – *горизонтальная* проекция точки A ;

A_2 – *фронтальная* проекция точки A ;

A_3 – *профильная* проекция точки A .

Расстояние AA_1 (z) называют *высотой* точки A , а расстояние AA_2 (y) называют *глубиной* точки A .

2. Плоскостная модель координатных плоскостей проекций

Пользоваться пространственной моделью при выполнении чертежей неудобно ввиду ее громоздкости. Поэтому на практике пользуются *плоским* чертежом. Чтобы получить такой чертеж, вращаем плоскости Π_1 и Π_3 вокруг соответствующих осей x и z до совмещения их с плоскостью Π_2 (рис. 2). Направление вращения указано стрелками.

При этом передняя полуплоскость Π_1 вместе с проекцией A_1 совместится с нижней полуплоскостью Π_2 , а передняя полуплоскость Π_3 вместе с проекцией A_3 совместится с правой полуплоскостью Π_2 .

В результате получим плоский так называемый *комплексный чертеж* точки A (рис. 3), состоящий из трех проекций A_1 , A_2 и A_3 точки A . Прямые A_1A_2 и A_2A_3 называются *линиями связи*. Эти линии всегда перпендикулярны к соответствующим осям проекций.

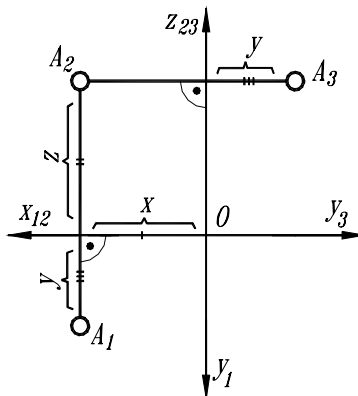


Рис. 3

Так как плоскости не имеют границ, то на комплексном чертеже эти границы не показывают. На пространственной модели (рис. 2) плоскости проекций Π_1 , Π_2 и Π_3 для наглядности показаны условно ограниченными. На комплексном чертеже плоскости проекций не обозначают и не ограничивают (рис. 3).

Пример. Построить комплексный чертеж точки $A(30, 20, 40)$ (рис. 4).

Откладываем от начала координат (от точки O) на оси x значение $x = 30$ мм и проводим вертикальную линию связи. На линии связи по направлению оси y откладываем значение $y = 20$ мм и определяем горизонтальную проекцию точки A (A_1).

На линии связи от оси x по направлению оси z откладываем значение $z = 40$ мм и определяем фронтальную проекцию точки A (A_2).

Для нахождения профильной проекции точки A проводим через проекцию A_2 горизонтальную линию связи и в направлении оси y от оси z откладываем значение $y = 20$ мм, – получаем проекцию A_3 .

Поскольку две проекции точки определяют ее положение в пространстве, то третья проекция оказывается необходимой в тех случаях, когда проекционный чертеж объемно сложен, и требуются дополнительные данные для уточнения его формы.

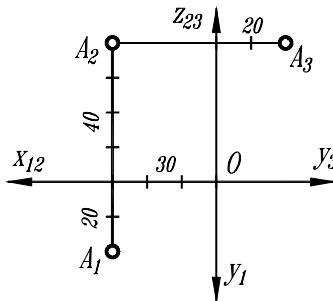


Рис. 4

Б. ПРЯМАЯ

1. Прямые общего положения

Прямая линия считается заданной, если на чертеже даны проекции двух ее точек. Отрезок AB , определяющий прямую l (рис. 5, а), занимает произвольное (*общее*) положение по отношению к плоскостям проекций. Прямая, не параллельная ни одной из плоскостей проекций, называется *прямой общего положения*.

Такая прямая при продолжении пересекает плоскости проекций в точках, называемых *следами прямой*: $M(M_1M_2)$ – горизонтальный

след прямой; $N(N_1, N_2)$ – фронтальный след. На рис. 5, б дан комплексный чертеж прямой l и ее следов.

Прямую можно задать не только проекциями ее отрезка, но и проекциями произвольной части прямой, как это показано на рис.6:

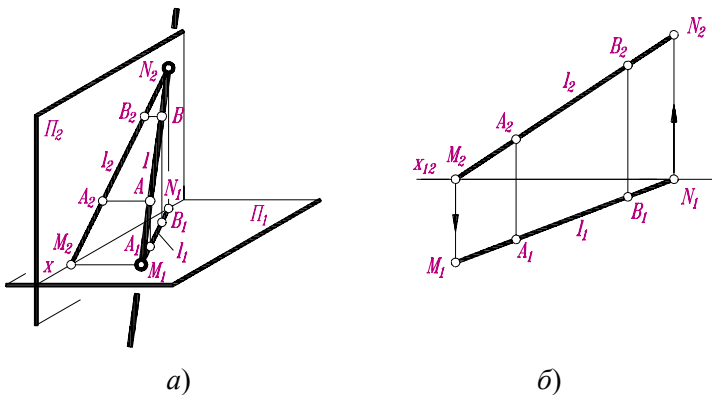


Рис. 5

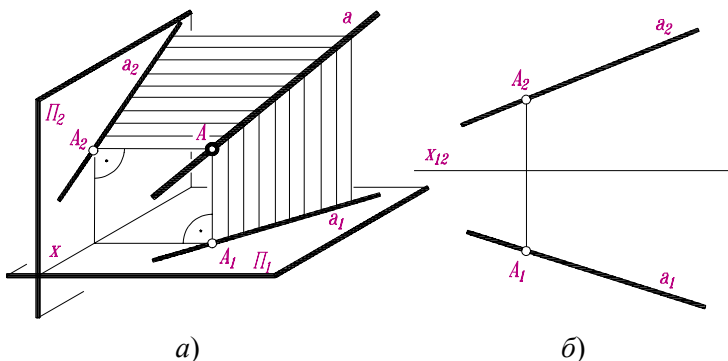


Рис. 6

наглядная модель (а), комплексный чертеж (б). При этом ее можно обозначить одной буквой, например, a .

Заметим также, что плоскости, проходящие через прямую a и перпендикулярные к плоскостям проекций, являются плоскостями, проецирующими эту прямую на плоскости проекций (рис. 6, а). Очевидно и обратное: пара проекций a_1 и a_2 определяет в пространстве прямую a как линию пересечения этих плоскостей.

2. Прямые частного положения

Прямые, параллельные или перпендикулярные плоскостям проекций называются **прямыми частного положения**. Прямые, *параллельные* плоскости проекций, называются **линиями уровня**. Прямые, *перпендикулярные* плоскости проекций, называют **проецирующими прямыми**. Рассмотрим эти случаи.

Прямые, параллельные плоскости проекций (линии уровня)

Горизонталь – прямая, *параллельная горизонтальной* плоскости проекций, $h \parallel \Pi_1$ (рис. 7, а). Она проецируется на эту плоскость в натуральную величину h_1 . Высоты всех ее точек одинаковы: $z = \text{const}$.

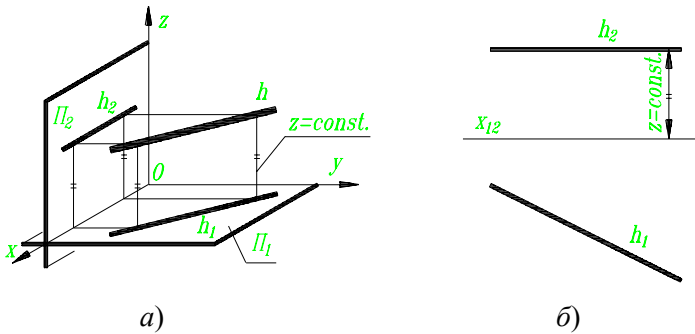


Рис. 7

Поэтому фронтальная проекция горизонтали всегда параллельна оси x : $h_2 \parallel x_{12}$ (рис. 7, б).

Фронталь – прямая, *параллельная фронтальной* плоскости проекций, $f \parallel \Pi_2$ (рис. 8, а). Она проецируется на эту плоскость в натуральную величину f_2 . Глубины (ординаты) всех ее точек одинаковы:

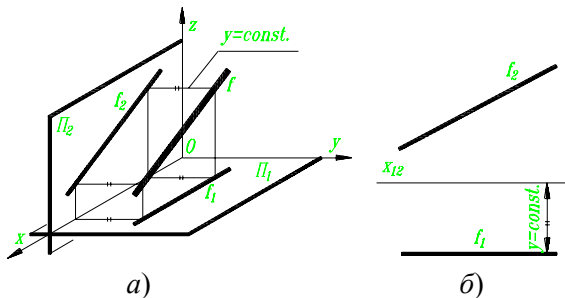


Рис. 8

$y = \text{const}$. Поэтому горизонтальная проекция фронтали всегда параллельна оси x : $f_1 \parallel x_{12}$ (рис. 8, б).

Профильная прямая – прямая, параллельная профильной плоско-

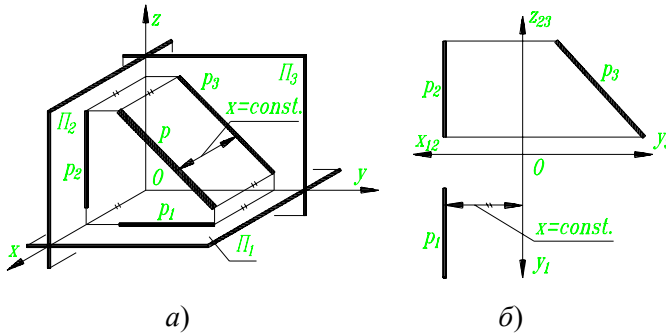


Рис. 9

сти проекций, $p \parallel \Pi_3$ (рис. 9, а). Она проецируется на эту плоскость в натуральную величину p_3 . Все точки этой прямой одинаково удалены от плоскости Π_3 : $x = \text{const}$. Поэтому $p_1 \parallel y_1$ и $p_2 \parallel z_{23}$ (рис. 9, б).

Проецирующие прямые

Горизонтально-проецирующие прямые – прямые, перпендикулярные горизонтальной плоскости проекций, например, $a \perp \Pi_1$ (рис. 10). Она проецируется на эту плоскость в точку (a_1). Фронтальная проекция такой прямой параллельна оси z : $a_2 \parallel z$.

Фронтально-проецирующие прямые – прямые, перпендикулярные фронтальной плоскости проекций, например, $b \perp \Pi_2$ (рис. 10).

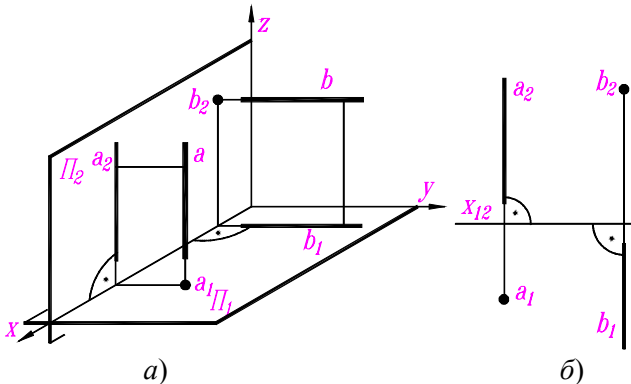


Рис. 10

Она проецируется на эту плоскость в точку (b_2). Горизонтальная проекция такой прямой параллельна оси y : $b_1 \parallel y$.

Профильно-проецирующие прямые – прямые, *перпендикулярные плоскости Π_3* . Например, если $c \perp \Pi_3$, то проекция c_3 – точка, $c_1 \parallel x$, $c_2 \parallel x$. На рис. 10 эта прямая не показана.

3. Взаимное положение прямых линий

Прямые линии в пространстве могут быть **параллельными**, **пересекающимися** и **скрещивающимися**. Они изображаются следующим образом.

Параллельные прямые. Если в пространстве прямые параллельны между собой, то их *одноимённые проекции* также *параллельны* (рис. 11). В символической записи для прямых общего положения это выглядит так:

$$[(\forall a, b) (a \parallel b)] \Rightarrow [(a_1 \parallel b_1) \wedge (a_2 \parallel b_2)]$$

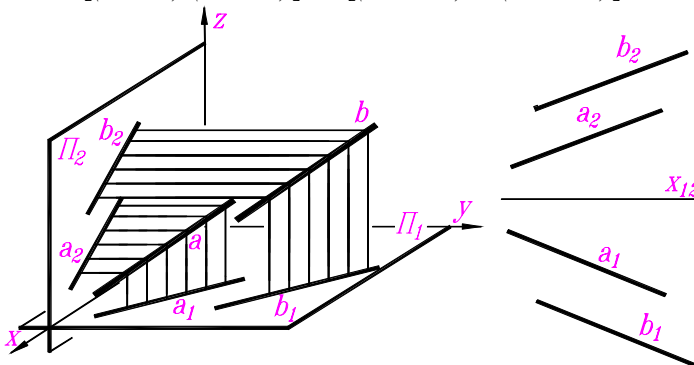


Рис. 11

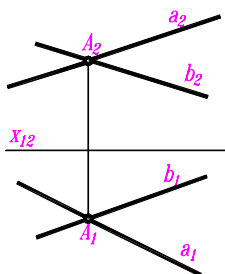


Рис. 12

Пересекающиеся прямые. *Одноимённые проекции пересекающихся прямых пересекаются, и точки их пересечения находятся на одной линии связи* (рис. 12).

Скрещивающиеся прямые. *Одноимённые проекции скрещивающихся прямых могут пересекаться, но точки их пересечения не лежат на одной линии связи* (рис. 13, а). Действительно, на рис.13, б точка пересечения горизонтальных про-

екций прямых представляет собой горизонтальные проекции 1_1 и 2_1 двух несовпадающих точек 1 и 2 . Одна из них – $1 \in a$, другая – $2 \in b$. Обе они лежат на одном горизонтально-проецирующем луче. Такие точки называются **конкурирующими**. Точки 3 и 4 также принадлежат разным прямым: точка $3 \in b$, точка $4 \in a$. Аппликата (высота) точки 1 больше, чем у точки 2 . Следовательно, прямая a в этом месте проходит над прямой b и будет *видимой* на горизонтальной проекции, то есть при взгляде наблюдателя сверху.

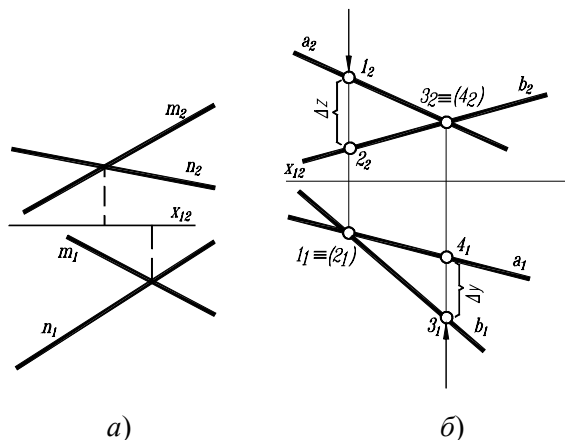


Рис. 13

та точки 3 больше, следовательно, прямая b в этом месте расположена ближе к зрителю и будет *видимой* на фронтальной проекции, т.е. при взгляде спереди.

Обозначения проекций "закрытых" (невидимых) точек помещены в скобках.

Две другие совпадающие на фронтальной проекции конкурирующие точки 3 и 4 имеют разные ординаты (глубины). Ордината

точки 3 больше, следовательно, прямая b в этом месте расположена ближе к зрителю и будет *видимой* на фронтальной проекции, т.е. при взгляде спереди.

В. ПЛОСКОСТЬ

1. Плоскость общего положения

Плоскость определяется тремя точками, не лежащими на одной прямой. Для бóльшей наглядности часто соединяют эти точки, получая задание плоскости в виде треугольника, называемого "отсеком" плоскости. Например, наглядное изображение плоскости ABC представлено на рис. 14.

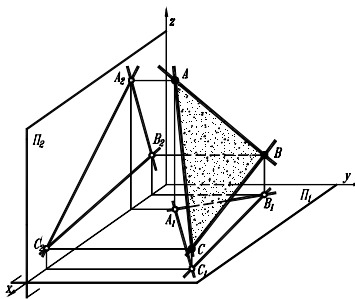


Рис. 14

На рис. 15, *a* представлено изображение некоей плоскости ABC на комплексном чертеже в виде двух проекций $A_1B_1C_1, A_2B_2C_2$. При этом надо иметь в виду, что построения любых элементов в плоскости (точки, прямые и т.д.) можно выполнять и за пределами отсека ввиду безграничности самой плоскости. Кроме того, плоскость можно задать:

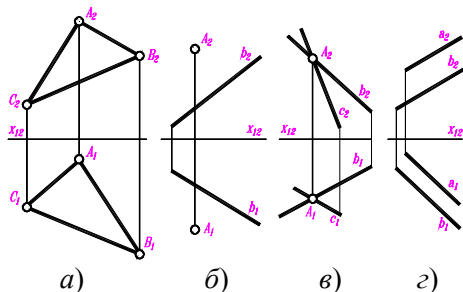


Рис. 15

- проекциями прямой и точки (рис. 15, б),
- проекциями двух пересекающихся прямых (рис. 15, в),
- проекциями двух параллельных прямых (рис. 15, г).

Иногда бывает удобным задавать плоскость прямыми, по которым она пересекает плоскости проекций. Такой способ называют заданием плоскости *следами*.

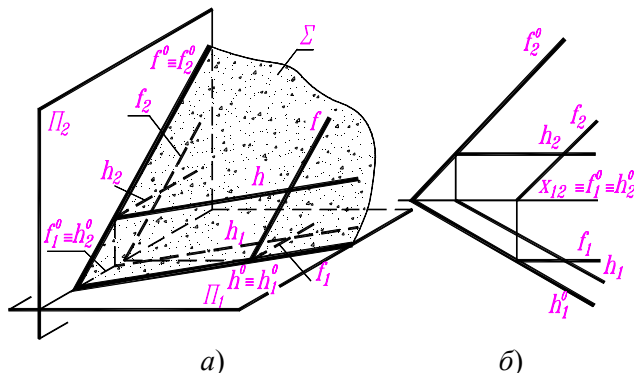


Рис. 16

На рис. 16, *a* представлен наглядный чертеж плоскости Σ , ее следов h^0 и f^0 и произвольных линий уровня h и f ; на рис. 16, *б* – комплексный чертеж плоскости. При этом прямую $h^0(h^0_1, h^0_2)$ называют *горизонтальным следом* плоскости, а прямую $f^0(f^0_1, f^0_2)$ – *фронтальным следом* плоскости.

Все вышеприведенные плоскости занимают в пространстве *общее положение*, т. е. не перпендикулярны ни одной плоскости проекций.

2. Плоскости частного положения

Плоскость может занимать следующие частные положения:

- *перпендикулярные* к одной плоскости проекций, в этом случае она называется *проецирующей*;
- *параллельные* одной из плоскостей проекций – *плоскости уровня*.

На рис. 17 наглядно представлены *горизонтально-проецирующая* плоскость $\Delta \perp \Pi_1$ и *фронтально-проецирующая* плоскость $\Sigma \perp \Pi_2$.

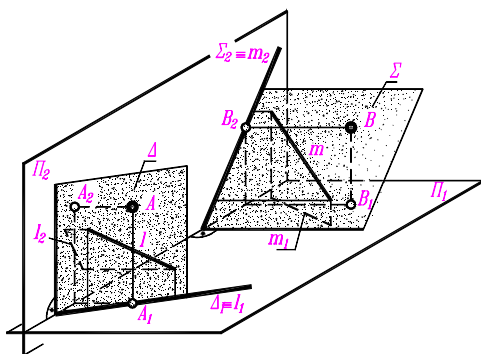


Рис. 17

горизонтальной проекции, совпадают с горизонтальным следом - проекцией плоскости.

Аналогично: фронтальные проекции точки $B(B_2)$ и прямой $m(m_2)$, принадлежащих фронтально-проецирующей плоскости Σ , совпадают с фронтальным следом-проекцией плоскости Σ_2 . Горизонтальная проекция этой плоскости занимает поле точек.

Подобные рассуждения относятся и к профильно-проецирующей плоскости $\Omega \perp \Pi_3$.

Когда нет необходимости в координатном значении расположения геометрических объектов относительно плоскости проекций, применяются *безосные* чертежи. На таких чертежах проекции проецирующихся плоскостей изображаются одной прямой линией – следом-проекцией, как это показано на рис. 18: горизонтально-проецирующая

Горизонтальная проекция плоскости Δ – прямая Δ_1 , которая является горизонтальным следом, а фронтальная проекция этой плоскости занимает поле точек.

Следует обратить внимание, что горизонтальные проекции точки $A(A_1)$ и прямой $l(l_1)$, принадлежащих

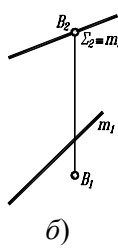
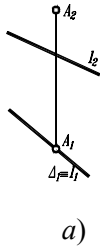


Рис. 18

плоскость $\Delta(A, I)$ – проекцией $\Delta_I(a)$; фронтально-проецирующая плоскость $\Sigma(B, m)$ – проекцией $\Sigma_2(\bar{b})$.

На рис. 19, а представлен наглядный чертёж двух плоскостей уровня: *горизонтальной* плоскости $\Sigma \parallel \Pi_1$ и *фронтальной* плоскости $\Delta \parallel \Pi_2$ с проведенными в них произвольными прямыми h и f соответственно. На рис. 19, б приведен комплексный чертёж этих плоскостей, каждая из которых задана единственной проекцией: горизонтальная плоскость – проекцией Σ_2 , а фронтальная – проекцией Δ_I .

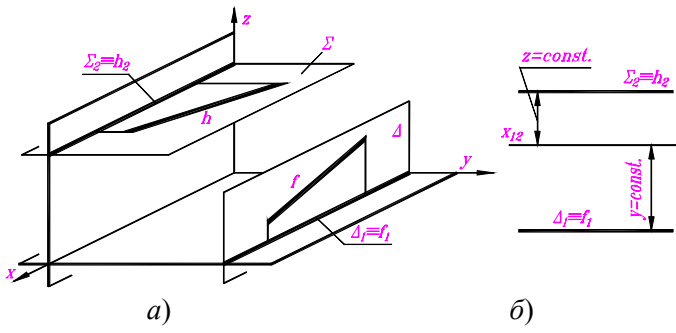


Рис. 19

О *профильной* плоскости уровня можно сказать, что плоскость $\Omega \parallel \Pi_3$. (На чертеже не представлена).

3. Прямые и точки, лежащие в плоскости

Точка принадлежит плоскости, если она расположена на прямой, принадлежащей этой плоскости

$$A \in \Sigma \Leftrightarrow A \in a \subset \Sigma$$

Допустим, требуется построить фронтальную проекцию точки $D(D_2)$, принадлежащей плоскости $ABC(A_1B_1C_1, A_2B_2C_2)$, если задана её горизонтальная проекция D_1 (рис. 20).

Для этого через известную проекцию D_1 проводят проекцию любой прямой в плоскости, например проекцию $A-I(A_I-I_1)$. Поскольку точка $I \in BC$, из ее проекции I_1 проводят линию связи до пересечения с проекцией B_2C_2 и получают проекцию I_2 , которую соединяют с проекцией A_2 . Затем по линии связи находят фронтальную проекцию D_2

на проекции $A_2 - I_2$.

Главные линии плоскости. К главным линиям плоскости относят **линии уровня**.

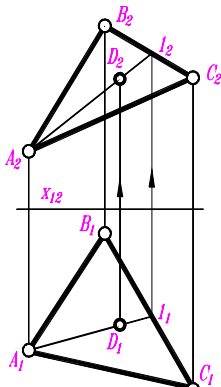


Рис. 20

- **Горизонталь** – прямая, принадлежащая плоскости и *параллельная горизонтальной плоскости* проекций: $h \subset (ABC) \wedge (h \parallel \Pi_1)$ (рис. 21, а).

Допустим, через точку C в заданной плоскости требуется провести **горизонталь**. *Построение начинают с проведения фронтальной проекции*, при этом всегда $h_2 \parallel x_{12}$. Горизонталь пересекла сторону AB в точке I . Поэтому из её проекции I_2 проводят линию связи до пересечения с проекцией A_1B_1 . Соединив I_1 с C_1 , проводят горизонтальную проекцию h_1 .

- **Фронталь** – прямая, принадлежащая плоскости и *параллельная фронтальной плоскости* проекций: $f \subset (DEF) \wedge (f \parallel \Pi_2)$ (рис. 21, б).

Допустим, в заданной плоскости через точку E требуется провести **фронталь**. *Построения начинают с проведения горизонтальной проекции*, при этом всегда $f_1 \parallel x_{12}$.

Дальнейшие построения видны из чертежа.

- **Профильная прямая** – прямая, принадлежащая плоскости и *параллельная профильной плоскости* проекций.

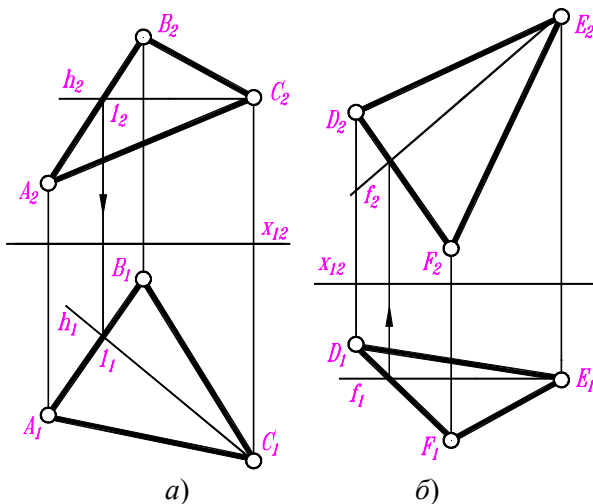


Рис. 21

4. Параллельность прямой и плоскости, двух плоскостей

Прямая параллельна плоскости, если она параллельна одной из прямых, лежащих в этой плоскости. Т.е.

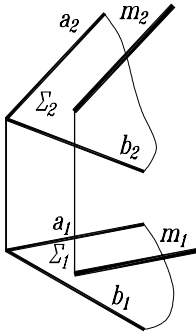


Рис. 22

$$[(m \parallel a) \wedge (a \subset \Sigma)] \Rightarrow m \parallel \Sigma$$

На ортогональном чертеже это выглядит так (рис. 22):

$$(m_1 \parallel a_1) \wedge (m_2 \parallel a_2).$$

Две плоскости параллельны, если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум пересекающимся прямым другой плоскости (рис. 23):

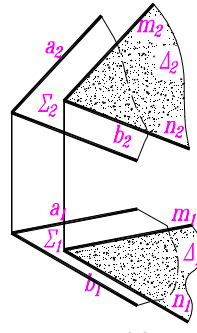


Рис. 23

$$[\Sigma(a \cap b) \wedge \Delta(m \cap n)] \wedge [(m \parallel a) \wedge (n \parallel b)] \Rightarrow \Sigma \parallel \Delta$$

Г. ПОВЕРХНОСТИ

1. Многогранные поверхности

Поверхность, образованная частями пересекающихся плоскостей (гранями), называется **многогранной** поверхностью. Из всего многообразия этих поверхностей наибольший практический интерес представляют призмы и пирамиды. Рассмотрим наиболее простые примеры.

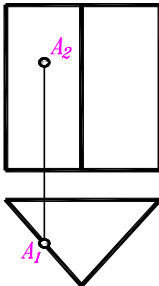


Рис. 24

Призма. На рис. 24 приведен комплексный безосный чертеж прямой треугольной призмы, простейшим образом ориентированной относительно плоскостей проекций. Боковые грани этой призмы представляют собой части горизонтально-проецирующих плоскостей, поэтому горизонтальные проекции их изображены в виде отрезков прямых.

Верхнее и нижнее основания являются частями горизонтальных плоскостей, поэтому их фронтальные проекции представляют собой отрезки горизонтальных

прямых.

На рисунке показаны проекции точки $A(A_1, A_2)$, принадлежащей боковой грани призмы.

Пирамида. На рис. 25 даны проекции правильной пятиугольной пирамиды $SABCDE$. Невидимые линии (рёбра) показаны штриховыми линиями. Линии связи между проекциями вершин основания не показаны, чтобы не затемнять чертёж.

На этой же фигуре показано построение точки M , расположенной на грани SAB и заданной своей горизонтальной проекцией M_1 .

Для нахождения M_2 через точку $M(M_1)$ проведена прямая, параллельная ребру $AB(A_1B_1)$ основания пирамиды. Ход построения показан стрелками.

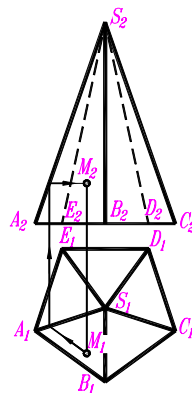


Рис. 25

2. Кривые поверхности. Частные виды поверхностей вращения

Поверхность можно рассматривать как совокупность последовательных положений какой-либо линии, перемещающейся в пространстве по определённому закону.

Если эта линия вращается вокруг какой-либо прямой, то она описывает поверхность, называемую **поверхностью вращения**. Если образующая линия – прямая, то поверхность называется еще и **линейчатой**.

Рассмотрим простейшие, наиболее распространённые в технике поверхности вращения.

Цилиндр. Эта поверхность образуется вращением прямой a вокруг оси i (рис. 26, а). При этом образующая прямая a остаётся параллельной оси вращения. На проекционных чертежах обычно ось вращения располагают перпендикулярно какой-либо плоскости проекций.

На рис. 26, б дано наглядное изображение цилиндрической поверхности. На фронтальной плоскости проекций показан **очерк** цилиндра, состоящий из **очерковых образующих** a_2 и \bar{a}_2 и параллелей m_2 и n_2 .

Горизонтальной проекцией цилиндра является окружность.

Образующие, на которых лежат точки A , B , C и D занимают промежуточное положение.

Из рисунка видно, что часть цилиндрической поверхности, находящаяся *перед* наблюдателем при проецировании на

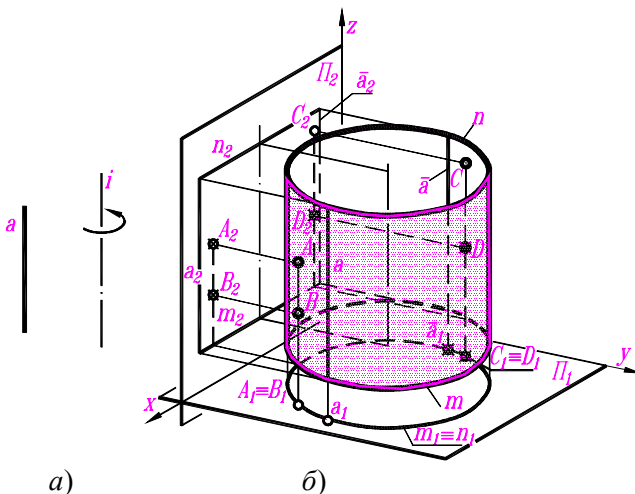


Рис. 26

фронтальную плоскость Π_2 , является *видимой*. Эту часть называют *передней*, на ней лежат точки C и D .

Вторая часть цилиндрической поверхности, находящаяся за образующими a и \bar{a} , т.е. ближе к плоскости Π_2 , является *невидимой*; на ней лежат точки A и B . Поэтому фронтальные проекции этих точек A_2 и B_2 показаны невидимыми, (т.е. условно перечеркнуты).

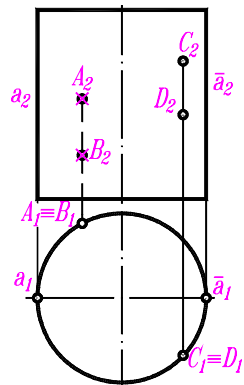


Рис. 27

На рис. 27 изображен подобный цилиндр на комплексном чертеже.

Конус. Коническая поверхность образуется вращением прямой l , проходящей через неподвижную точку S , находящуюся на оси вращения i (рис. 28, a).

Наглядное изображение конуса представлено на рис. 28, b . Фронтальный очерк этой поверхности складывается из **очерковых** (крайних) образующих и параллели – прямой линии, которая является проекцией окружности основания.

Часто приходится строить проекции точек, принадлежащих поверхности. Это построение основывается на общем утверждении: *если*

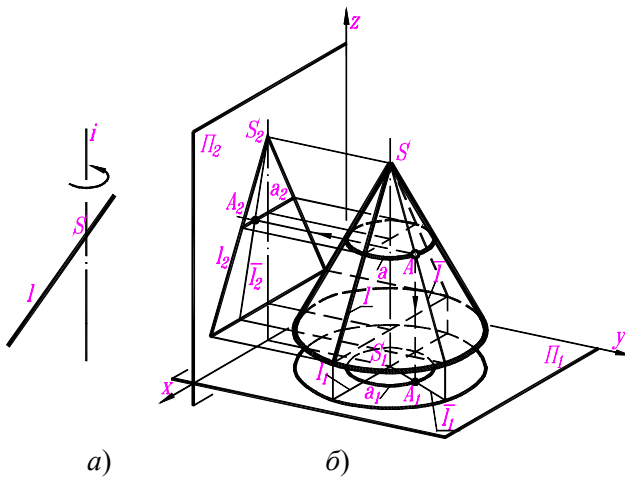


Рис. 28

точка принадлежит поверхности, то она принадлежит какой-либо линии этой поверхности (см. В., п. 3.). В качестве этой вспомогательной линии выбирают простейшую – прямую или окружность.

На рис. 28, б через точку $A(A_1, A_2)$ на поверхности проведены обе линии – образующая $\bar{l}(l_1, l_2)$, и окружность $\bar{a}(a_1, a_2)$.

Вопрос видимости решается аналогично примеру с цилиндром. На горизонтальной проекции конуса (т.е. при взгляде сверху) все точки оказываются видимыми. На рис. 29 показано нахождение недостающих проекций точек I и 2 при помощи вспомогательных образующих. Так, для нахождения проекции I_1 через известную проекцию I_2 проведена проекция образующей S_2D_2 , построена горизонтальная проекция образующей S_1D_1 , и затем на линии связи найдена проекция I_1 .

Точка 2 была задана своей горизонтальной проекцией 2_1 . Нахождение фронтальной проекции этой точки показано стрелками. Поскольку точка 2 находится в задней части конуса, то ее фронтальная проекция показана невидимой.

Проекция точек $E(E_1, E_2)$ и $F(F_1, F_2)$ принадлежат проекциям соответствующих образующих SA и SB .

На рис. 30 представлено нахождение недостающих проекций точек при помощи вспомогательных окружностей.

На рис. 28, б через точку $A(A_1, A_2)$ на поверхности проведены обе линии – образующая $\bar{l}(l_1, l_2)$, и окружность $\bar{a}(a_1, a_2)$.

Вопрос видимости решается аналогично примеру с цилиндром. На горизонтальной проекции конуса (т.е. при взгляде сверху) все точки оказываются видимыми. На рис. 29 показано нахождение недостающих проекций точек I и 2 при помощи вспомогательных образующих. Так, для нахождения проекции I_1 через известную проекцию I_2 проведена проекция образующей S_2D_2 , построена горизонтальная проекция образующей S_1D_1 , и затем на линии связи найдена проекция I_1 .

Точка 2 была задана своей горизонтальной проекцией 2_1 . Нахождение фронтальной проекции этой точки показано стрелками. Поскольку точка 2 находится в задней части конуса, то ее фронтальная проекция показана невидимой.

Проекция точек $E(E_1, E_2)$ и $F(F_1, F_2)$ принадлежат проекциям соответствующих образующих SA и SB .

На рис. 30 представлено нахождение недостающих проекций точек при помощи вспомогательных окружностей.

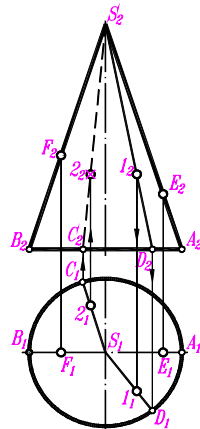


Рис. 29

Например, для построения горизонтальных проекций точек 1 и 2 по известным их фронтальным проекциям 1_2 и 2_2 проведена вспомогательная окружность l , проекция которой l_2 спроецирована в отрезок прямой линии, равный диаметру окружности. Дальнейшие построения видны из чертежа.

Видимость точек на фронтальной проекции указывает, в какой части конуса они находятся – передней или задней. Этим определяется положение их горизонтальных проекций.

Точка 3 задана своей горизонтальной проекцией 3_1 . Через эту проекцию проведена окружность. Дальнейшие построения указаны стрелками.

Точка $A(A_1, A_2)$ лежит в передней части основания конуса.

Как видно, цилиндрическая и коническая поверхности относятся к линейчатым.

Рассмотрим поверхности, у которых образующей является окружность.

Сфера. Сферическая поверхность образуется в результате

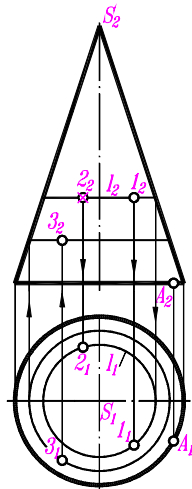


Рис. 30

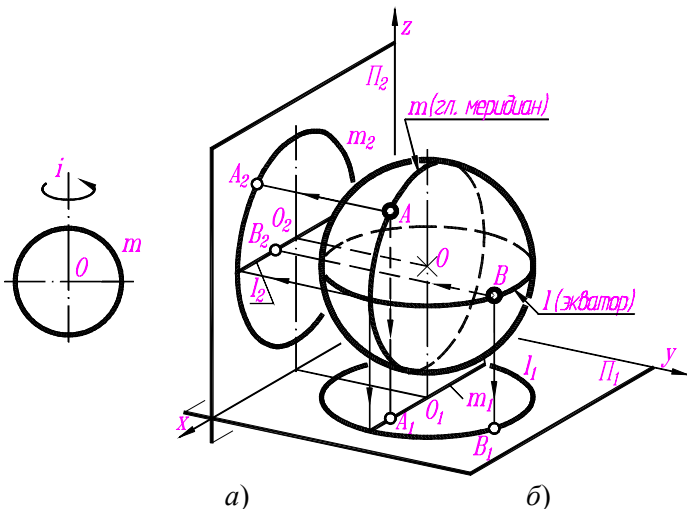


Рис. 31

вращения какой-либо окружности m вокруг ее диаметра (рис. 31, а).

Воображаемая плоскость, проходящая через ось вращения окружности и параллельная фронтальной плоскости проекций Π_2 , пересекает сферу по окружности $m(m_1, m_2)$, называемой **главным меридианом** (рис. 31, б).

Легко видеть, что на плоскость Π_2 она проецируется в натуральную величину, а сама проекция m_2 является **фронтальным очерком** сферы. Проекция m_1 представляет собой отрезок, равный диаметру окружности и параллельный плоскости Π_2 ($m_1 \parallel \Pi_2$). **Главный меридиан** является границей, делящей сферу на два полушария – *переднее* и *заднее*, находящееся ближе к плоскости Π_2 . Следовательно, его проекция m_1 делит горизонтальную проекцию сферы соответственно на *переднюю* и *заднюю* части, являющиеся проекциями этих полушарий.

Если мысленно через центр сферы провести горизонтальную плоскость, то она пересечёт поверхность по самой большой параллели – окружности $l(l_1, l_2)$, называемой **экватором**. Естественно, что на плоскость Π_1 она проецируется в натуральную величину l_1 и является **горизонтальным очерком** сферы. На плоскость Π_2 экватор проецируется в отрезок, равный диаметру и параллельный Π_1 ($l_2 \parallel \Pi_1$). **Экватор** также делит сферу на два полушария – *верхнее* и *нижнее*, что и отражено на фронтальной проекции.

Построение проекций точек A и B указано стрелками. Проекции A_2 и B_1 называют **очерковыми точками**.

Положение любой точки на поверхности вращения определяется при помощи окружности, проходящей через эту точку (рис. 32, 33).

На рис. 32 в качестве такой вспомогательной окружности взята параллель $a(a_1, a_2)$. По-

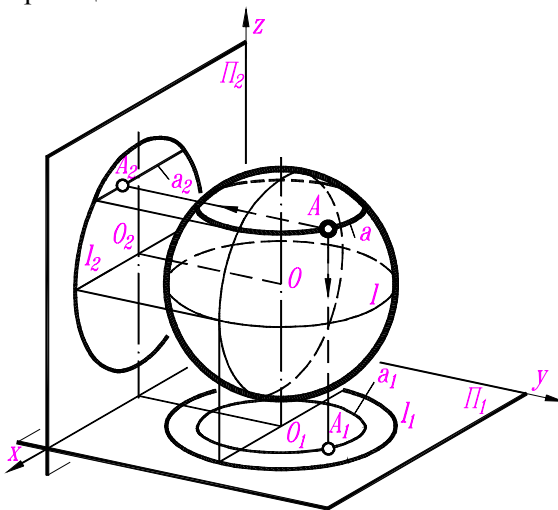


Рис. 32

сколькo точка A находится в *верхней передней* части сферы (см. как это отражено на проекциях), то обе ее проекции A_1 и A_2 оказываются *видимыми*.

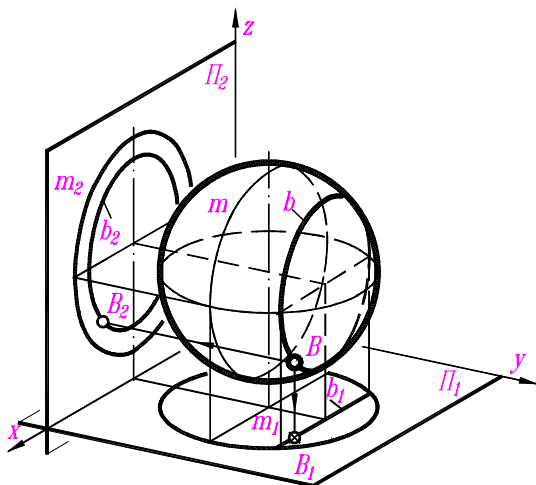


Рис. 33

видимыми.

На рис. 33 для нахождения проекций точки B использована вспомогательная фронтальная окружность $b(b_1, b_2)$. Поскольку точка B находится в *передней* части сферы, то ее проекция B_2 видима.

В то же время точка B лежит в *нижнем* полушарии, что отражено на фронтальной проекции. Это обстоятельство делает ее *горизонтальную*

проекцию B_1 *невидимой* (условно перечеркнута).

Следует обратить внимание, что окружности, расположенные в плоскостях уровня (горизонтальных или фронтальных) проецируются на одноименные плоскости проекций в натуральную величину. Так, $a = a_1$ (рис. 32), а $b = b_2$ (рис. 33).

На другую плоскость проекций они проецируются в отрезки прямых, параллельных оси x .

Так, $a_2 \parallel x$ (рис. 32); $b_1 \parallel x$ (рис. 33).

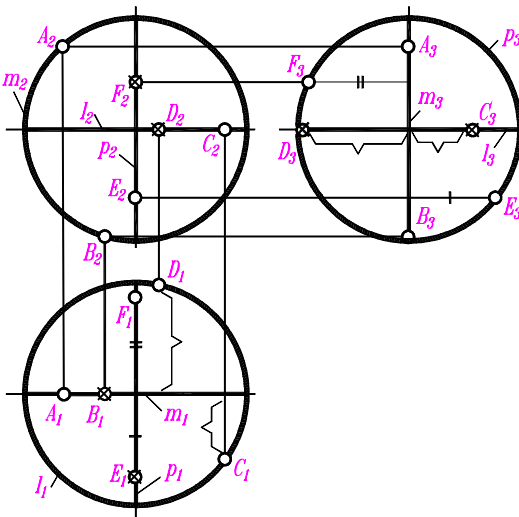


Рис. 34

Комплексный безосный трехкартинный чертеж сферы показан на рис. 34.

На нем в качестве примера приведены проекции точек, принадлежащих очерковым окружностям (*очерковые точки*). Так, точки $A(A_1, A_2, A_3)$ и $B(B_1, B_2, B_3)$ принадлежат *главному меридиану* сферы, точки $C(C_1, C_2, C_3)$ и $D(D_1, D_2, D_3)$ – *экватору*, а точки $E(E_1, E_2, E_3)$ и $F(F_1, F_2, F_3)$ – *профильному меридиану* сферы.

Построение профильных проекций всех точек видно из чертежа. Проекции невидимых точек условно перечёркнуты.

Рассмотрим на примере построение проекций произвольных точек, принадлежащих сфере (рис. 35).

Допустим, задана фронтальная проекция *видимой* точки $A(A_2)$. Чтобы построить ее горизонтальную проекцию A_1 , проведем через точку $A(A_2)$ горизонтальную окружность $a(a_2)$, которая спроецируется в отрезок прямой (см. рис. 32), а горизонтальная проекция – в натуральную величину a_1 . По линии связи находим на ней проекцию A_1 в передней части сферы. Горизонтальная проекция также оказывается *видимой*, т.к. A_2 лежит в верхнем полушарии.

Рассмотрим построение фронтальной проекции точки B , если задана ее горизонтальная проекция B_1 (при виде сверху точка *невидима*). Через $B(B_1)$ проводим фронтальную окружность $b(b_1)$, которая проецируется в отрезок прямой, а фронтальная проекция b_2 – в натуральную величину (см. рис. 33). Проекция B_2 находится на линии связи под *экватором*. Положение проекции B_1 (передняя часть сферы) говорит о том, что на виде спереди точка $B(B_2)$ будет *видимой*.

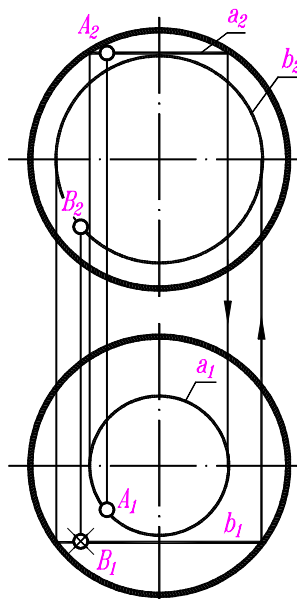


Рис. 35

Тор. Эта поверхность получается при вращении *производящей окружности a* вокруг оси *i*, расположенной в плоскости этой окружности, но не проходящей через ее центр (рис. 36, а).

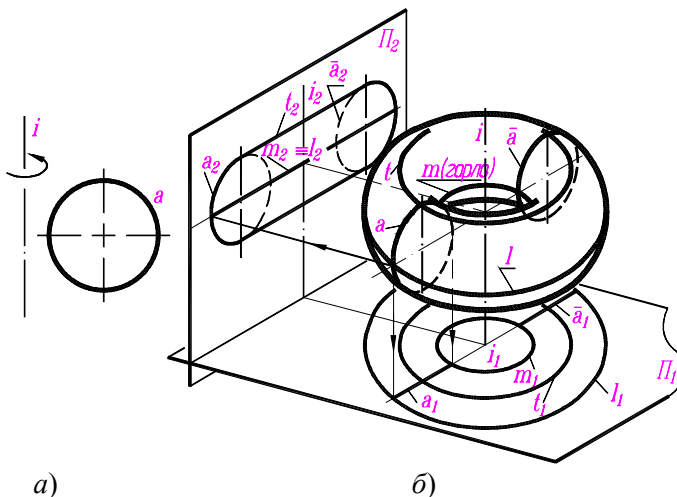


Рис.36

Тор имеет две системы круговых сечений: в плоскостях, перпендикулярных к его оси, например, окружности *t*, *m*, *l* (рис. 36, б), и в плоскостях, проходящих через ось тора – положение окружности *a* при ее вращении.

Внешняя по отношению к оси вращения полуокружность образует *выпуклую* часть поверхности тора, *внутренняя* полуокружность образует *вогнутую* часть поверхности тора. Линии *t* (верхняя и нижняя) разграничивают эти части.

Самая удаленная от оси *i* точка производящей окружности при вращении образует самую большую по величине окружность *l*(*l*₁, *l*₂).

Самая ближняя точка – самую маленькую окружность *m*(*m*₁, *m*₂), называемую *горлом*.

На рис. 37 представлены ортогональные проекции части тора, у которого ось вращения $i \perp \Pi_2$. На чертеже показаны проекции точек, принадлежащих основным окружностям тора: точка *A* принадлежит самой большой полуокружности, *B* – горловой полуокружности, *C* – полуокружности, разделяющей внешнюю и внутреннюю части тора.

Основные положения главы 1

А. Точка

$A_1A_2 \perp x_{12}; B_1B_2 \perp x_{12}; \dots; A_2A_3 \perp z_{23}; B_2B_3 \perp z_{23}; \dots;$

Б. Прямая

Положение прямых в пространстве

Прямая общего положения: $a \not\parallel \Pi_1, a \not\parallel \Pi_2, a \not\parallel \Pi_3.$

Прямые уровня:

- горизонталь $h \parallel \Pi_1 \Rightarrow h_2 \parallel x_{12};$
- фронталь $f \parallel \Pi_2 \Rightarrow f_1 \parallel x_{12};$
- профильная прямая $p \parallel \Pi_3 \Rightarrow [(p_1 \parallel y_1) \wedge (p_2 \parallel z_{23})].$

Проецирующие прямые:

- $(a \perp \Pi_1)$ при этом a_1 – точка, $a_2 \parallel z_{23};$
- $(b \perp \Pi_2)$ при этом b_2 – точка, $b_1 \parallel y_1;$
- $(c \perp \Pi_3)$ при этом c_3 – точка, $(c_1 \parallel x_{12}) \wedge (c_2 \parallel x_{12}).$

Взаимное положение прямых

- $(a \parallel b) \Rightarrow [(a_1 \parallel b_1) \wedge (a_2 \parallel b_2)]$
- $[(a \cap b) = k] \Rightarrow [(a_1 \cap b_1) = k_1 \wedge (a_2 \cap b_2) = k_2],$ при этом $k_1k_2 \perp x_{12}$
- $(a \dashv b) \Rightarrow [(a_1 \cap b_1) = (1_1 \equiv 2_1)] \wedge [(a_2 \cap b_2) = (3_2 \equiv 4_2)],$
при этом $(z1_2 > z2_2) \Rightarrow (1_1 - \text{видима, а } 2_1 - \text{невидима});$
 $(y3_1 > y4_1) \Rightarrow (3_2 - \text{видима, а } 4_2 - \text{невидима}).$

В. Плоскость

Положение плоскости в пространстве

Плоскость общего положения $\Sigma \not\perp \Pi_1, \Sigma \not\perp \Pi_2, \Sigma \not\perp \Pi_3.$

Проецирующие плоскости:

- $(\Delta \perp \Pi_1) \Rightarrow \Delta_1$ – прямая;
- $(\Sigma \perp \Pi_2) \Rightarrow \Sigma_2$ – прямая;
- $(\Omega \perp \Pi_3) \Rightarrow \Omega_3$ – прямая.

Плоскости уровня:

- *горизонтальная* $(\Sigma \parallel \Pi_1) \Rightarrow (\Sigma_2 \parallel x_{12})$
- *фронтальная* $(\Delta \parallel \Pi_2) \Rightarrow (\Delta_1 \parallel x_{12})$
- *профильная* $(\Omega \parallel \Pi_3) \Rightarrow [(\Omega_1 \parallel y_1) \wedge (\Omega_2 \parallel z_{23})]$

Прямые и точки, лежащие в плоскости

$$(A \subset \Sigma) \Leftrightarrow (A \subset a \subset \Sigma),$$

при этом $(A \subset a) \Rightarrow [(A_1 \subset a_1) \wedge (A_2 \subset a_2)]$.

Главные линии плоскости

- *горизонталь* $h \subset \Sigma \wedge h \parallel \Pi_1$, при этом $h_2 \parallel x_{12}$;
- *фронталь* $f \subset \Delta \wedge f \parallel \Pi_2$, при этом $f_1 \parallel x_{12}$;
- *профильная прямая* $p \subset \Omega \wedge p \parallel \Pi_3$,
при этом $(p_1 \parallel y_1), (p_2 \parallel z_{23})$.

Параллельность прямой и плоскости, двух плоскостей

$$[(m \parallel a), (a \subset \Sigma)] \Rightarrow (m \parallel \Sigma);$$
$$[\Sigma(a \cap b), \Delta(m \cap n), (a \parallel m), (b \parallel n)] \Rightarrow (\Sigma \parallel \Delta)$$

Г. Поверхность

Принадлежность точки поверхности

$$(A \subset \Phi) \Leftrightarrow (A \subset l \subset \Phi),$$

при этом $(A \subset l) \Rightarrow [(A_1 \subset l_1) \wedge (A_2 \subset l_2)]$.

Вопрос *видимости* точек у поверхностей вращения в общем случае решается следующим образом. Судить о видимости точек на горизонтальной проекции следует по их расположению на фронтальной проекции. И наоборот, чтобы определить видимость точек на фронтальной проекции, анализируют расположение их на горизонтальной проекции.

Глава 2. ОСНОВНЫЕ ПОЗИЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ

Под *позиционными задачами* будем понимать задачи на определение общих элементов различных геометрических фигур. К таким задачам относятся:

- задачи на принадлежность точки поверхности, при этом, плоскость рассматривается как частный случай поверхности ;
- задачи на определение точек пересечения линии с поверхностью;
- задачи на построение линий пересечения двух поверхностей.

Первая группа задач была рассмотрена ранее.

Предварительно разберём две вспомогательные задачи.

Задача 1. *Определить точку пересечения прямой l с проецирующей плоскостью $\Sigma (\Sigma_1)$. $A = \Sigma \cap l$ (рис. 39, а, б).*

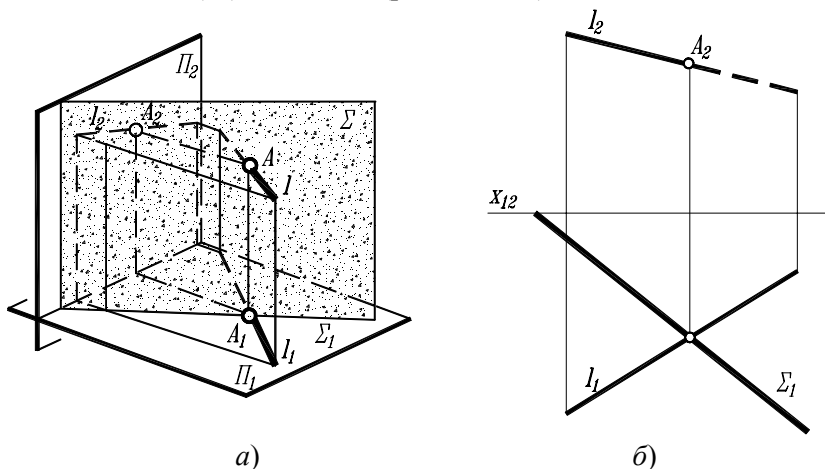


Рис. 39

На основании вышеизложенного (см. Гл. 1, В., п. 2) горизонтальная проекция точки A определяется как точка пересечения горизонтальной проекции Σ_1 плоскости Σ с горизонтальной проекцией l_1 прямой l . Фронтальная проекция A_2 точки A находится по линии связи на фронтальной

проекция l_2 прямой l (рис. 39, б). На рис. 39, а представлена наглядная модель.

Задача 2. Определить прямую пересечения плоскости общего положения с проецирующей плоскостью. (рис. 40, а, б).

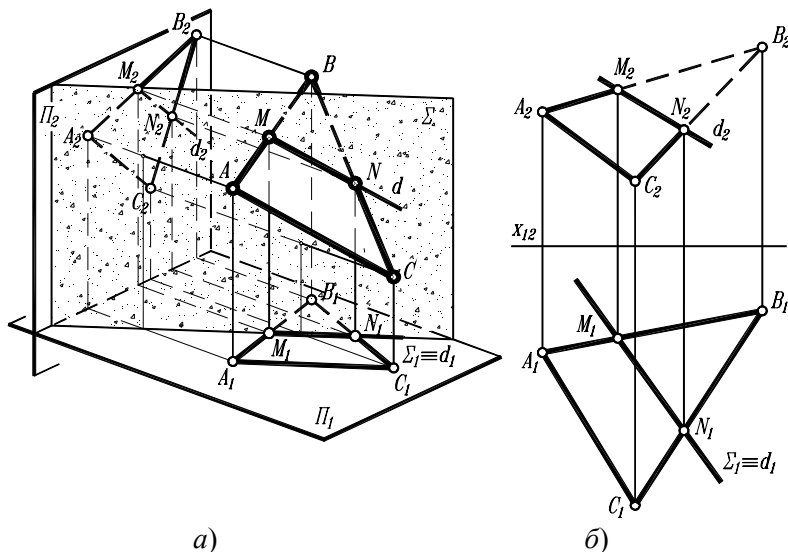


Рис. 40

Для наглядности и удобства решения зададим плоскость общего положения в виде треугольной пластины ABC ($A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$) (рис. 40, а). В качестве проецирующей плоскости возьмём горизонтально-проецирующую плоскость $\Sigma(\Sigma_1)$. Чтобы найти линии пересечения этих плоскостей, необходимо найти две общие точки, принадлежащие обеим плоскостям.

Найдем, например, точки, в которых плоскость Σ пересекает стороны треугольника ABC : $M = \Sigma \cap AB$, $N = \Sigma \cap BC$. Выполнив указанные в Задаче 1 построения, найдем точки $M(M_1, M_2)$ и $N(N_1, N_2)$ (рис. 40, б). Соединив M_2 с N_2 , получим фронтальную проекцию d_2 линии пересечения d . Естественно, что горизонтальная проекция d_1 этой прямой совпадает со следом-проекцией плоскости $\Sigma(\Sigma_1)$.

Рассмотренные задачи позволяют решать следующие **основные позиционные задачи**.

1. ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПРЯМОЙ С ПЛОСКОСТЬЮ

Положим, что имеется плоскость ABC и прямая l общего положения (рис. 41). Определение точки пересечения $L = l \cap ABC$ полностью основывается на решении предыдущей задачи, а именно:

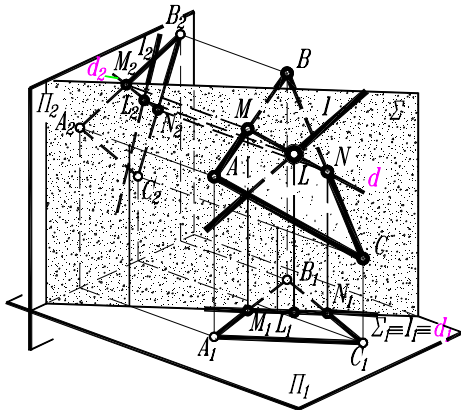


Рис. 41

1) заключаем прямую l в проецирующую плоскость Σ :

$$l \subset \Sigma;$$

2) находим линию пересечения d плоскости ABC с плоскостью Σ (Σ_1):

$$d = ABC \cap \Sigma,$$

3) определяем точку L пересечения полученной прямой d с данной прямой l :

$$L = l \cap d.$$

Итак, необходимо выполнить

следующие построения (рис. 42).

Провести через прямую l вспомогательную проецирующую плоскость, например, $\Sigma(\Sigma_1)$. Тогда $\Sigma_1 \equiv l_1$.

Способом, указанным в предыдущей задаче, находим прямую $d(d_1, d_2)$ пересечения плоскости Σ с плоскостью ABC . Прямые l и d , как лежащие в одной плоскости Σ , пересекаются в точке L : ($L_2 = l_2 \cap d_2$), а L_1 находится по линии связи на прямой l_1 .

Запишем кратко алгоритм построения точки L :

- $l \subset \Sigma, l_1 \equiv \Sigma_1;$
- $d = ABC \cap \Sigma,$
 $(d_1 \subset A_1B_1C_1) \wedge (d_2 \subset A_2B_2C_2);$
- $L = l \cap d,$
 $L_2 = (l_2 \cap d_2) \wedge (L_1 \subset l_1).$

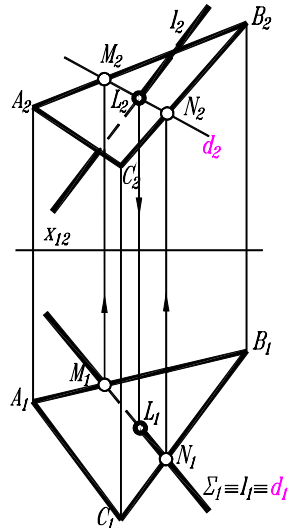


Рис. 42

Отметим, что в качестве вспомогательной плоскости можно брать и фронтально-проецирующую.

Решение задачи завершается определением видимых участков прямой при помощи *конкурирующих* точек (см. рис. 13, б).

На рис. 43 показано определение видимости прямой l . Для определения видимости прямой l на горизонтальной проекции рассмотрим точки $K \in l$ и $M \in AB$, совпадающие в горизонтальной проекции, следовательно, лежащие на одном горизонтально-проецирующем луче MK .

По фронтальной проекции видим, что точка M находится *выше*, чем точка K . Значит на горизонтальной проекции *видимой* является точка M , а точка K закрыта ею. Следовательно, в проекции на Π_1 отрезок KL прямой l является *невидимым*.

На фронтальной проекции видимость прямой l можно определить, взяв, например, *конкурирующие* точки $P \in l$ и $Q \in AB$, совпадающие в проекции на плоскости Π_2 . По горизонтальной проекции устанавливаем, что точка P удалена дальше, чем точка Q от плоскости Π_2 , и, следовательно, находится *ближе* к наблюдателю, а значит, *видима* на фронтальной проекции. Итак, этот участок прямой до точки пересечения L будет *видимым* на фронтальной проекции. Точка пересечения служит границей видимости линии, поэтому оставшаяся часть прямой на участке слева от точки L_2 будет *невидимой*, т.к. закрыта плоскостью треугольника.

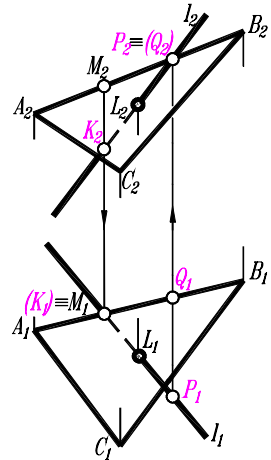


Рис. 43

2. ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ДВУХ ПЛОСКОСТЕЙ

Две плоскости пересекаются по прямой линии. Поэтому для построения линии пересечения плоскостей необходимо определить две точки этой прямой.

На рис. 44 показано построение линии пересечения KL двух треугольных пластинок ABC и DEF . Построение свелось к решению предыдущей задачи, а именно: найдена точка пересечения K стороны AB с плоскостью треугольника DEF и точка пересечения L стороны EF с треугольником ABC . Соединением одноимённых проекций этих точек

получены проекции линии пересечения K_1L_1 и K_2L_2 . Нахождение каждой из точек K и L осуществлялось по уже известному алгоритму.

Так, для нахождения точки K были выполнены следующие построения:

- 1) $AB \subset \Sigma$: $A_1B_1 \subset \Sigma_1$.
- 2) $(1-2) = \Sigma \cap DEF$:
 $(1_1-2_1) \subset D_1E_1F_1$;
 $(1_2-2_2) \subset D_2E_2F_2$.
- 3) $K = AB \cap DEF$:
 $K_2 = A_2B_2 \cap (1_2-2_2)$;
 $K_1 \subset A_1B_1$.

Точка L была найдена аналогично:

- 1) $EF \subset \Delta$: $E_1F_1 \subset \Delta_1$.
- 2) $(3-4) = \Delta \cap ABC$:
 $(3_1-4_1) \subset A_1B_1C_1$;
 $(3_2-4_2) \subset A_2B_2C_2$.
- 3) $L = EF \cap ABC$:
 $L_2 = E_2F_2 \cap (3_2-4_2)$;
 $L_1 \subset E_1F_1$.

Видимость треугольников определяется при помощи конкурирующих точек, как это было описано выше (рис. 45). Видимость треугольников относительно горизонтальной плоскости проекций определяется при помощи точек 4 и 5, находящихся на одном горизонтально-проецирующем луче. По фронтальным проекциям 4₂ и 5₂ устанавливаем, что точка 4 стороны BC ближе к наблюдателю: она находится *выше*, чем точка 5, принадлежащая стороне EF . Следовательно, часть треугольника ABC по эту сторону

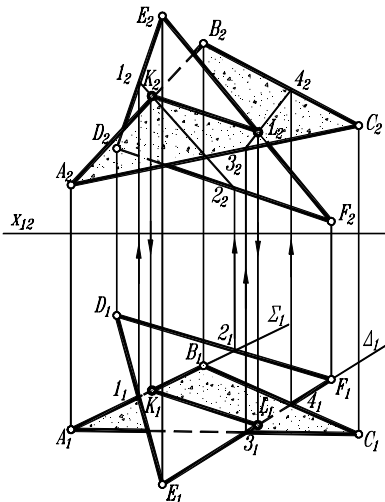


Рис. 44

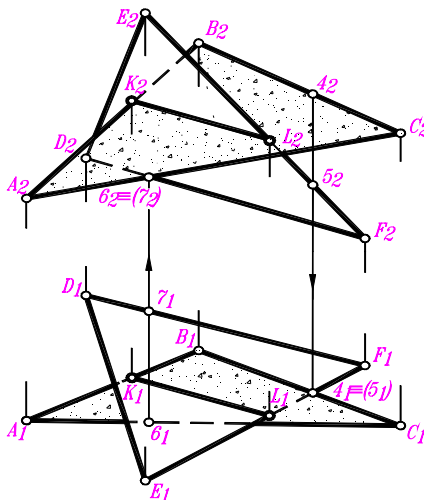


Рис. 45

фронтальным проекциям 4₂ и 5₂ устанавливаем, что точка 4 стороны BC ближе к наблюдателю: она находится *выше*, чем точка 5, принадлежащая стороне EF . Следовательно, часть треугольника ABC по эту сторону

от линии пересечения KL *видима*, по другую сторону – *невидима* на *горизонтальной* проекции. Естественно, что видимость треугольника DEF будет противоположной.

Аналогично решается вопрос видимости относительно *фронтальной* плоскости проекций. Для этого рассмотрим положение *конкурирующих* точек 6 и 7 , лежащих на одном фронтально-проецирующем луче и принадлежащих сторонам AC и DF соответственно. По их горизонтальным проекциям видим, что точка 6 находится *ближе* к наблюдателю, чем точка 7 , поэтому на *фронтальной* проекции по эту сторону от линии пересечения треугольник ABC закрывает часть треугольника DEF . По другую сторону, наоборот – треугольник DEF перекрывает часть треугольника ABC .

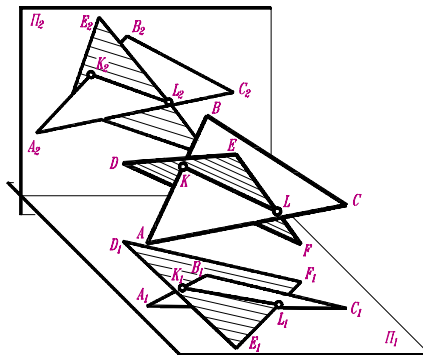


Рис. 46

Пространственный чертеж пересечения двух треугольных пластинок с их проекциями показан на рис. 46.

3. ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПОВЕРХНОСТИ ПЛОСКОСТЬЮ

При пересечении какой-либо поверхности или тела с плоскостью получается некоторая фигура, называемая *сечением*. Ввиду краткости курса будем рассматривать в качестве секущих плоскостей только плоскости частного положения.

В случае с **многогранником** сечение может быть ограничено только отрезками прямых. Вершинами многоугольника сечения являются точки пересечения рёбер многогранника с секущей плоскостью.

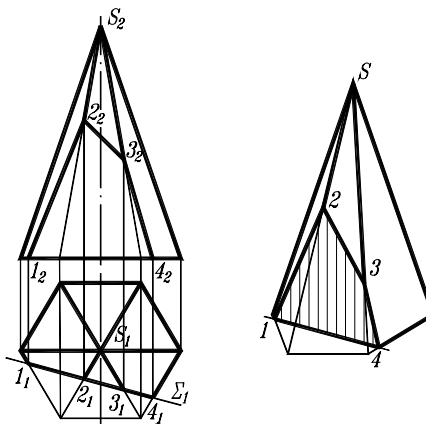


Рис. 47

На рис. 47 представлен чертёж правильной шестиугольной пирамиды, отсечённой горизонтально-проецирующей плоскостью $\Sigma(\Sigma_1)$.

Такого рода задачи решаются весьма просто, поскольку одна из проекций сечения, в данном случае – горизонтальная, вырождается в отрезок прямой линии. По линиям связи находятся фронтальные проекции вершин сечения как точки пересечения рёбер с плоскостью.

Линия пересечения **кривой поверхности** плоскостью представляет собой плоскую кривую, для построения которой необходимо определить её отдельные точки и соединить их плавной кривой.

Среди точек кривой пересечения имеются такие точки, которые выделяются своим *особым* расположением по отношению к плоскостям проекций или же занимают *особые* места на кривой. Такие точки называются **опорными**. К ним относятся *самая близкая* и *самая удалённая* точки относительно той или иной плоскости проекций, **очерковые точки** видимости.

Как правило, **опорные** точки находятся каждая своим приёмом построения. Остальные точки линии пересечения называются произвольными и находятся с помощью одного и того же приёма, выбранного для решения рассматриваемой задачи.

Основным способом является **способ вспомогательных секущих плоскостей**.

Пример. Построить линию пересечения сферы фронтально-проецирующей плоскостью (рис. 48).

Сфера сечётся плоскостью $\Sigma(\Sigma_2)$ по окружности, которая на плоскости Π_1 проецируется в виде эллипса. Фронтальная проекция этой окружности как совпадающая с проекцией Σ_2 уже имеется.

Сначала находим проекции **опорных** точек. *Нижшая* **A** и *высшая* **B** точки линии пересечения определяются пересечением фронтального следа плоскости с **очерком** сферы. Точки **E** и **F** лежат на *экваторе* – **горизонтальном очерке** сферы и разделяют горизонтальную проекцию

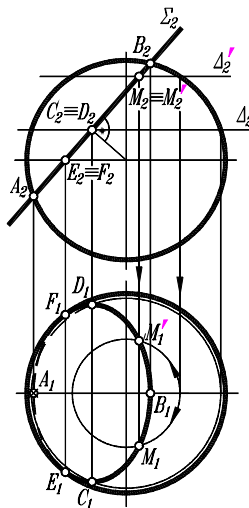


Рис. 48

кривой на *видимую* и *невидимую* части. Точки **C** и **D**, расположенные на середине отрезка A_2B_2 , определяют на горизонтальной проекции *большую ось* эллипса. Они построены с помощью горизонтальной окружности, по которой плоскость $\Delta(\Delta_2)$ пересекает сферу.

Аналогично построены произвольные промежуточные точки **M**(M_1) и **M'**(M'_1). Построение показано линиями со стрелками.

На основании изложенного можно сделать вывод:

если секущая плоскость – проецирующая, или пересекаемая поверхность занимает проецирующее положение относительно плоскости проекций, то решение задачи сводится к построению при помощи линий связи недостающих проекций точек линии пересечения.

Конические сечения

Линии, которые получаются при пересечении поверхности прямого кругового конуса с плоскостью, называются **коническими сечениями** (рис. 49, а, б, в). Плоскость, проходящая через вершину конуса, пересекает его по прямым линиям – *образующим*.

Сечением конуса вращения плоскостью, перпендикулярной к его оси $\Sigma'(\Sigma'_2)$, является **окружность** (рис. 49, а).

Если секущая плоскость $\Sigma(\Sigma_2)$ пересекает все образующие конуса и не перпендикулярна его оси, то в сечении получается **эллипс** (рис. 49, а).

Если секущая плоскость $\Sigma(\Sigma_2)$ параллельна одной образующей конуса, то сечением будет **парабола** (рис. 49, б).

Если секущая плоскость $\Sigma(\Sigma_2)$ параллельна двум образующим конуса, то в сечении будет **гипербола** (рис. 49, в). Следует обратить внимание на распространённый частный случай расположения секущей

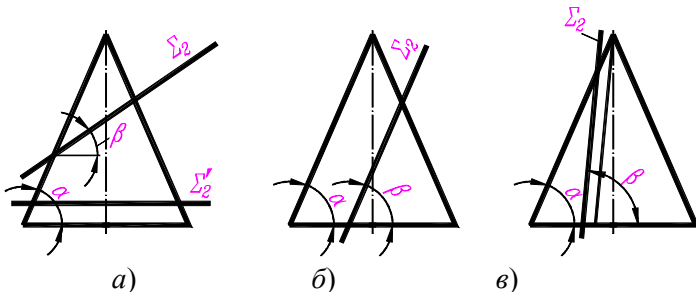


Рис. 49

плоскости, когда она параллельна оси конуса, т.е. перпендикулярна его основанию. Тогда ось гиперболы параллельна оси конуса.

Из рис. 49 видно, что если обозначить угол наклона образующей конуса вращения к основанию через α , а угол между секущей плоскостью и основанием через β , то при:

- $\alpha > \beta$, сечение – эллипс;
- $\alpha = \beta$, сечение – парабола;
- $\alpha < \beta$, сечение – гипербола.

Горизонтальные проекции всех названных сечений строятся тем же способом, который был рассмотрен в предыдущем примере со сферой.

Рис. 50 иллюстрирует построение трех проекций сечения конуса на бесосном чертеже.

Горизонтальные проекции опорных точек A , B , C и D , как отмечено, найдены известным методом.

Что касается точек E и F , то их профильные проекции E_3 и F_3 находятся по линии связи как принадлежащие соответствующему очерку. Эти *очерковые точки* делят проекцию эллипса на *видимую* и *невидимую* части.

Ввиду того, что конус и плоскость $\Sigma(\Sigma_2)$ имеют общую плоскость симметрии в виде фронтальной плоскости $\Phi(\Phi_1, \Phi_3)$, проходящей через ось конуса, то и проекции фигуры сечения будут также симметричны относительно этой плоскости.

Проекции точек C_3 и D_3 построены на линии связи с учетом удаления их от плоскости $\Phi(\Phi_3)$ на величину, измеренную на горизонтальной проекции.

Проекции точек $E(E_1)$ и $F(F_1)$ построены с учетом удаления их от плоскости $\Phi(\Phi_1)$ на расстояние, измеренное на профильной проекции.

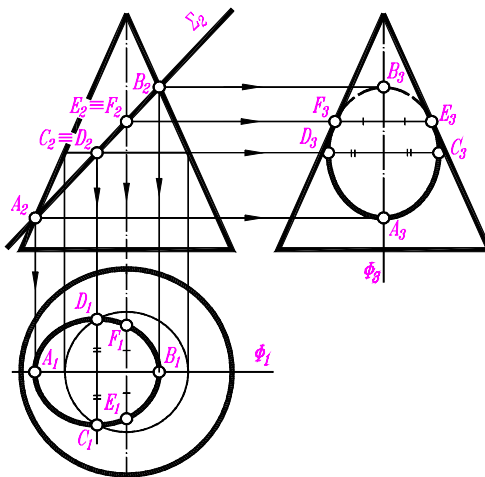


Рис. 50

Последний этап – определение видимости прямой. На виде *сверху* точки будут *видимыми*, т.к. расположены *выше экватора*. На виде *спереди* *видимой* будет точка $B(B_2)$, поскольку она размещается в *передней* половине сферы.

Если прямая занимает *проецирующее* положение, то решение задачи сводится к отысканию недостающих проекций точек пересечения, поскольку одна из проекций определена.

Так, на рис. 54, *а* представлены построения проекций точек пересечения проецирующих прямых: $b \perp \Pi_1$ и $l \perp \Pi_2$ со сферой.

На рис. 54, *б* фронтальная проекция точки пересечения $A(A_2)$ прямой l с конусом определена двумя способами:

1. Через $l_1 \equiv A_1$ проведена проекция образующей конуса.
2. Через $l_1 \equiv A_1$ проведена проекция окружности.

Построены фронтальные проекции этих линий, на которых находится точка A_2 . Видимость прямой устанавливается известным способом.

Второй способ обычно применяется в случае усечённого конуса при недоступной вершине.

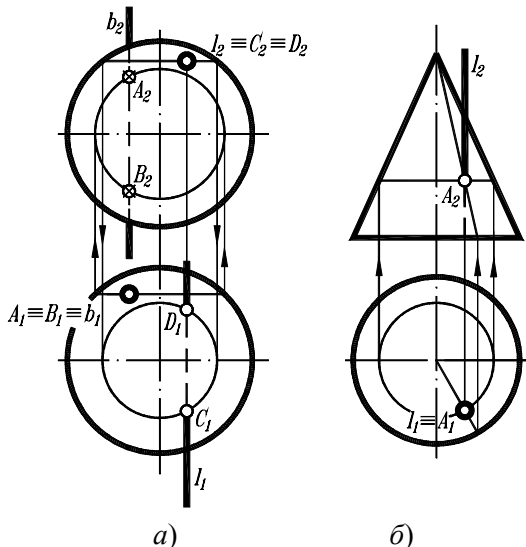


Рис. 54

5. ВЗАИМНОЕ ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Линия пересечения двух поверхностей находится с помощью приема, который называется *способом вспомогательных секущих поверхностей*. Суть его заключается в следующем.

- Заданные поверхности Φ и Θ пересекают третьей вспомогательной поверхностью Σ , называемой *посредником*.

- Находят линии пересечения вспомогательной поверхности с каждой из них:

$$l = \Sigma \cap \Phi; \quad m = \Sigma \cap \Omega.$$

- Далее отмечают точки пересечения линий l и m .
- Проведя несколько вспомогательных поверхностей, получают ряд точек, принадлежащих линии пересечения заданных поверхностей.
- После этого полученные точки соединяют плавной кривой по лекалу в определенной последовательности.

Чаще всего в качестве *вспомогательных поверхностей* используют *плоскости* или *сферы*. В соответствии с этим из общего способа выделяются два, которые называют *способом вспомогательных секущих плоскостей* и *способом вспомогательных сфер*.

Начинать построение линии пересечения всегда следует с нахождения ее *опорных* точек, а уже затем – промежуточных.

1. Способ параллельных вспомогательных секущих плоскостей

Этот способ применяется тогда, когда вспомогательные параллельные плоскости дают в пересечении с каждой из данных поверхностей простые линии: *прямые* или *окружности*.

На рис. 55 дана пространственная модель применения этого способа на примере построения линии пересечения t сферы Φ с конусом Ω .

Как видно, точки 1 и 2 найдены при помощи вспомогательной плоскости Σ , пересекающей сферу по экватору l и конус по окружности m .

$$\Sigma \cap \Phi = l; \quad \Sigma \cap \Omega = m;$$

$$(1, 2) = l \cap m.$$

Над экватором проведена плоскость $\Delta \parallel \Sigma$.

$$\Delta \cap \Phi = n; \quad \Delta \cap \Omega = k;$$

$$(3, 4) = n \cap k.$$

Таким же образом можно провести новые вспомогательные плоскости, получая тем самым дополнительные точки, которые и

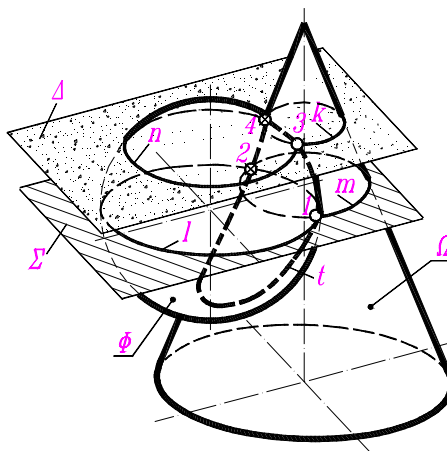


Рис. 55

соединяются плавной линией. $1 \cup \dots \cup 2 \cup 4 \cup \dots \cup 3 \cup 1 = t$

Рассмотрим реализацию этого способа на ортогональном чертеже.

Пример 1. Построить линию пересечения кругового конуса с полусферой (рис. 56).

Заметим, что у обеих фигур имеется общая фронтальная плоскость симметрии, определяющая фронтальные очерки обеих поверхностей. Поэтому точка $A(A_2)$ принадлежит одновременно обоим очеркам и является высшей. Проекция A_1 найдена по линии связи.

Основание конуса и экватор сферы лежат в одной горизонтальной плоскости и пересекаются в точках B и B' . Их фронтальные проекции найдены по линии связи.

Итак, опорные точки найдены без дополнительных построений.

Далее определяются промежуточные точки. Для этого в произвольном месте вводится вспомогательная горизонтальная плоскость $\Delta(\Delta_2)$, которая пересекает полусферу по окружности $l(l_1, l_2)$, а конус – по окружности $m(m_1, m_2)$. Построив горизонтальные проекции этих окружностей, находим проекции точек искомой линии l_1 и l'_1 . Фронтальные проекции этих точек лежат на фронтальной проекции $\Delta(\Delta_2)$.

Таким же образом найдены точки 2 и $2'$ при помощи вспомогательной плоскости $\Sigma(\Sigma_2)$.

Как видно, линия пересечения этих поверхностей также симметрична.

Рассмотрим случаи, когда одна из пересекающихся поверхностей занимает проецирующее положение относительно какой-либо плоскости проекций.

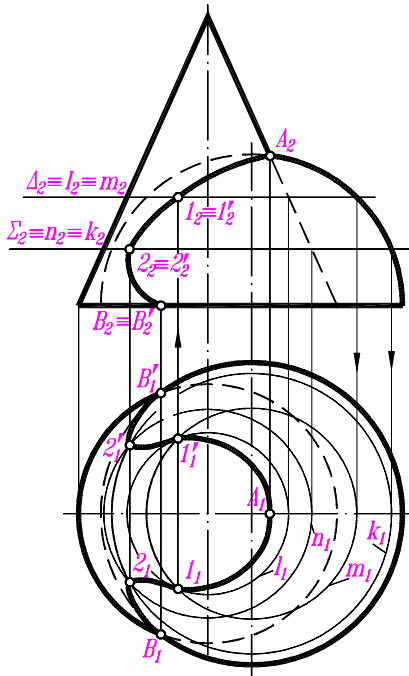


Рис. 56

Пример 2. Построить линию пересечения конуса вращения с цилиндром (рис. 57).

Боковая поверхность цилиндра является *фронтально-проецирующей*, следовательно, *фронтальная проекция* линии пересечения известна. Она совпадает с проекцией боковой поверхности цилиндра.

Заметим, что обе поверхности имеют общую фронтальную плоскость симметрии. *Опорными* точками искомой линии являются:

- точки A и D , в которых пересекаются фронтальные проекции очерков (A_2, D_2). Точка D является одновременно и *высшей*. Горизонтальные проекции этих точек определяются по линии связи;
- точки C и C' – точки, горизонтальные проекции которых (C_1 и C'_1) принадлежат *очерку* цилиндра и в которых происходит изменение *видимости* кривой;
- точки B и B' – *низшие*.

Горизонтальные проекции точек C и C' найдены при помощи вспомогательной плоскости $\Sigma(\Sigma_2)$, которая пересекла конус по окружности, а цилиндр – по образующей. Общие точки этих двух линий – искомые C_1 и C'_1 .

Горизонтальные проекции точек B и B' найдены при помощи плоскости $\Sigma'(\Sigma'_2)$ аналогичным образом.

Таким же способом найдены проекции промежуточных точек, обозначенных $I, I', 2, 2'$.

Порядок соединения полученных точек определяется их очередностью на фронтальной проекции.

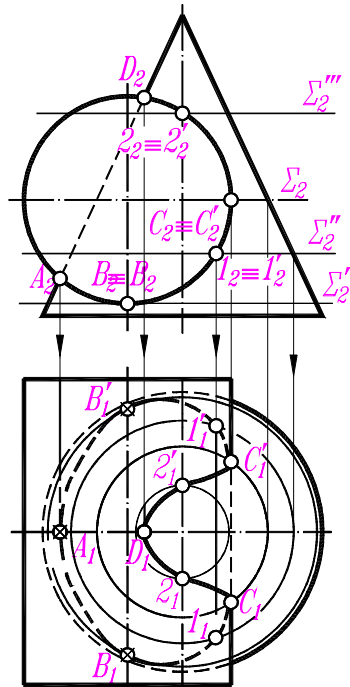


Рис. 57

Пример 3. Построить линию пересечения конуса вращения с цилиндром (рис. 58).

В данном случае боковая поверхность цилиндра является горизонтально-проецирующей, следовательно, горизонтальная проекция искомой линии известна.

На данном примере рассмотрим построение проекций точек искомой линии исходя из условия их принадлежности поверхности. Напомним правило: *если точка принадлежит поверхности, то она принадлежит линии на этой поверхности.*

Итак, отметим горизонтальные проекции точек.

Точки $A(A_1)$ и $B(B_1)$ принадлежат основаниям и являются *нижними*; их фронтальные проекции находятся по линии связи.

Точка $C(C_1)$ является *вышей*, т.к. лежит в общей плоскости симметрии, проходящей через оси обеих поверхностей. Для нахождения фронтальной проекции этой точки через точку C_1 проведена проекция образующей конуса, построена фронтальная проекция этой образующей, на которой и лежит точка C_2 .

Точки D_1 и E_1 являются проекциями точек D и E , принадлежащих *очерковому* образующим конуса, их фронтальные проекции находятся по линии связи.

Точки F_1 и G_1 являются проекциями точек F и G , принадлежащих *очерковому* образующим цилиндра. Фронтальная проекция F_2 найдена при помощи образующей конуса, а проекция G_2 – при помощи окружности, проведенной через G_1 и проецирующейся на Π_2 в горизонтальную прямую, на которой и лежит точка G_2 .

На этой же окружности лежит промежуточная точка $I(I_1, I_2)$.

Поскольку ось цилиндра находится ближе к наблюдателю, чем ось

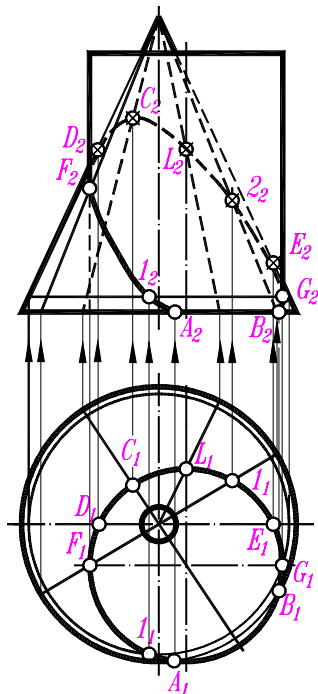


Рис. 58

конуса (это видно по горизонтальной проекции), то в точках F_2 и G_2 происходит изменение *видимости* кривой.

Точка $L(L_1)$ является самой *удаленной* от наблюдателя, ее фронтальная проекция найдена при помощи образующей.

Точки соединяются в той же последовательности, что и на горизонтальной проекции.

Пример 4. Построить линию пересечения сферы с фронтально-проецирующей призмой (рис. 59).

Здесь призма занимает *фронтально-проецирующее* положение, значит фронтальная проекция линии пересечения известна. Три грани призмы пересекают сферу по окружностям, одна из которых проецируется на плоскость Π_1 в натуральную величину.

Две другие проецируются в эллипсы, построение которых можно произвести так, как это было описано в примере на рис. 48.

В точках B_1 и B'_1 происходит изменение видимости кривой. Большой эллипс полностью невидим, так как закрыт верхними гранями призмы.

Пример 5. Построить линию пересечения сферы с горизонтально-проецирующей призмой (рис. 60).

В данном случае призма занимает *горизонтально-проецирующее* положение, поэтому горизонтальная проекция искомой линии известна, т.к. совпадает с горизонтальной проекцией призмы.

Построения аналогичны предыдущим с той только разницей, что вспомогательные секущие плоскости – *фронтальные*.

Укажем *опорные* точки.

Точка A принадлежит *экватору* сферы.

Фронтальные проекции B, B' и C, C' принадлежат *очерку* сферы.

В точках E, E' и D, D' ребра призмы пересекают сферу.

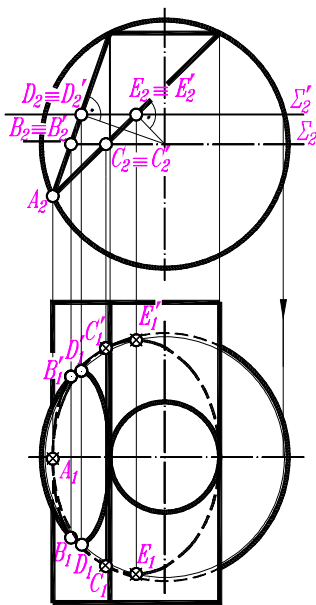


Рис. 59

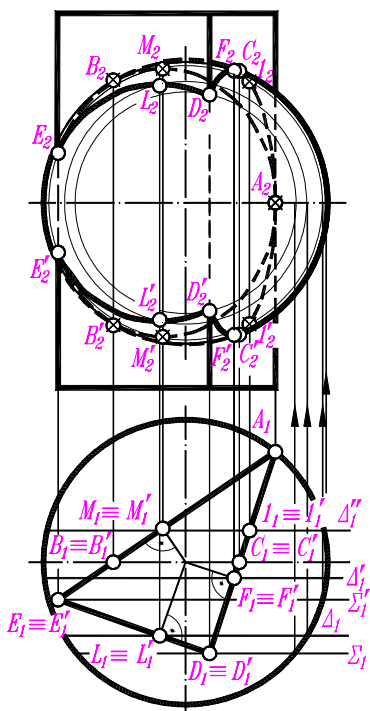


Рис. 60

Пары точек F_2 и F'_2 , L_2 и L'_2 , M_2 и M'_2 определяют концы больших осей эллипсов.

Точки I и I' – промежуточные.

Вопрос *видимости* элементов решается с помощью горизонтальной проекции. По ней видно, что изменение видимости на фронтальной проекции произойдет в точках $E(E_2)$ и $E'(E'_2)$ на ребре призмы, $C(C_2)$ и $C'(C'_2)$ на очерке сферы.

Очерковые точки $B(B_2)$, и $B'(B'_2)$ будут *невидимыми* ввиду их размещения на задней грани призмы.

Обратите внимание на видимость фронтального очерка (главного меридиана) сферы и ребер призмы.

Пример 6. Построить линию пересечения конуса вращения с призмой (рис. 61).

Здесь также горизонтальная проекция линии пересечения известна, она совпадает с горизонтальной проекцией призмы.

В данном случае в пересечении призмы с конусом получают участки *гипербол*. Один из них $A-I-F-D$ проецируется на фронтальной проекции в натуральную величину.

Опорными точками являются:

- точка A принадлежит основанию конуса;

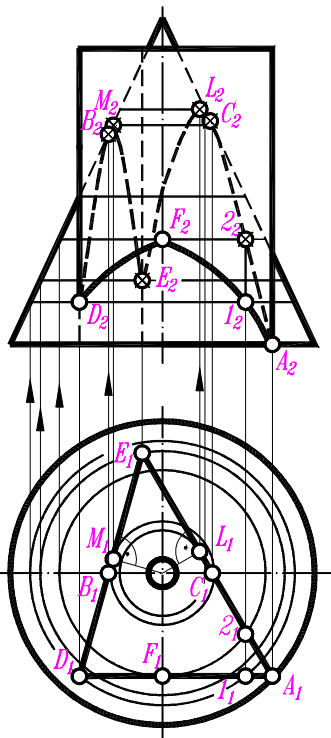


Рис. 61

- точки $B(B_2)$ и $C(C_2)$ лежат на *очерковых образующих* конуса;
- точки D и E – точки пересечения ребер призмы с конусом;
- точки F , L и M – вершины гипербол.

Фронтальные проекции точек можно было бы построить так, как было рассмотрено в Примере 3, (рис. 58), т.е. при помощи образующих. Здесь же предложен способ построения при помощи окружностей.

Точки 1 и 2 – промежуточные.

На фронтальной проекции *видимой* будет только *передняя* грань призмы с линией пересечения. Все остальные точки (линии) будут закрыты этой гранью, т.е. *невидимы*.

Пример 7. Построить линию пересечения тора с призмой (рис. 62).

На рисунке изображена 1/4 часть тора. Построение сводится к нахождению фронтальных проекций линии пересечения, принадлежащих тору.

Все точки, отмеченные на чертеже – *опорные*, за исключением точки B' . Точки A , B и C принадлежат горизонтальной образующей окружности тора. Точки D , E и E' лежат на *очерковых* окружностях: D и E – на большей, E' – на горле. Точка F лежит на окружности, фронтальная проекция которой совпадает с осевой линией кольца.

Фронтальные проекции всех перечисленных точек отмечаются сразу без специальных построений (см. рис. 37). Точки пересечения ребра с тором L и L' находятся при помощи фронтальных окружностей, как это было показано в Примере 1, рис.38.

Таким образом, задняя грань призмы пересекает тор по двум дугам окружностей: внешней и внутренней.

Произвольная точка B' находится тем же приёмом.

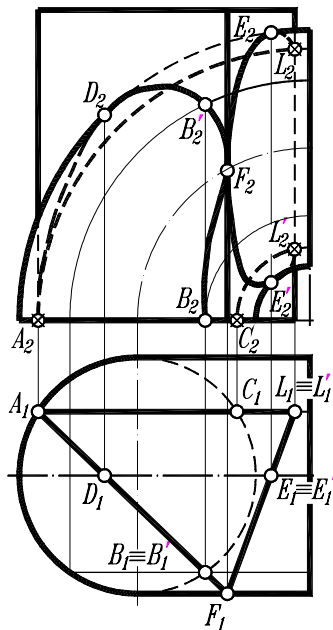


Рис. 62

При этом условии в пересечении получатся окружности m и n . На рис. 64, б даны ортогональные проекции этих поверхностей и их линий пересечения.

На рис. 65 даны примеры пересекающихся соосных поверхностей: цилиндра и сферы (а), бочонка и сферы (б).

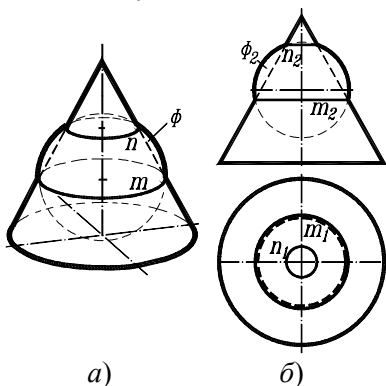


Рис. 64

Поскольку оси всех этих поверхностей расположены параллельно плоскости Π_2 , то получаемые в пересечении окружности m и n проецируются на Π_2 в виде прямолинейных отрезков.

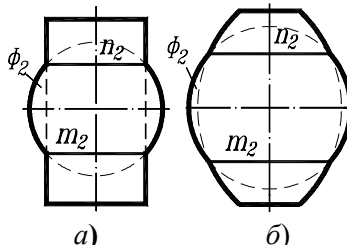


Рис. 65

Итак, свойство сферы, имеющей центр на оси поверхности вращения, пересекать эту поверхность по окружностям, является основой **способа вспомогательных сфер**.

Рассмотрим некоторые частные случаи взаимного расположения пересекающихся поверхностей вращения.

Способ концентрических сфер

Пример 1. Построить линию пересечения конуса с цилиндром (рис. 66).

В данном случае оси поверхностей вращения пересекаются и параллельны фронтальной плоскости проекций, поэтому здесь рационально применить способ **вспомогательных концентрических сфер**.

Рассмотрим поэтапное решение задачи.

- Определяем точки пересечения *очерковых* образующих без специальных построений $A(A_1, A_2)$, $B(B_1, B_2)$, $C(C_1, C_2)$, $D(D_1, D_2)$ (рис. 66, а).
- Перед тем, как проводить окружности, изображающие произ-

вольные сферы, нужно выяснить размеры радиусов наибольшей и наименьшей сфер.

Центр всех концентрических сфер должен находиться в точке пересечения осей конуса и цилиндра.

Максимальный радиус равен расстоянию от центра до наиболее удаленной от центра точки $A(A_2)$. Сфера минимального радиуса должна быть такой, чтобы она касалась одной из поверхностей (т.е. была в нее вписана) и одновременно пересекала бы другую. Поэтому из двух малых сфер, вписываемых в каждую из поверхностей выбирается наибольшая. Такой сферой является та, которая изображена на рис. 66, б.

Эта сфера, вписанная в конус, коснулась его по окружности, а цилиндр пересекла по двум окружностям. Эти окружности изобразились отрезками прямых, перпендикулярных оси конуса и цилиндра соответственно.

В пересечении этих окружностей мы получили проекции точек $E(E_2)$, $E'(E'_2)$ и $F(F_2)$, $F'(F'_2)$. Горизонтальные проекции этих точек найдены из условия их принадлежности к окружности конуса. Эти точки относятся к **опорным**, как наиболее близко расположенные к оси конуса.

- Чтобы уточнить вид кривой, проведем еще одну вспомогательную сферу произвольного радиуса для получения промежуточных точек $I, I', 2, 2'$ (рис. 66, в).

Величина ее радиуса должна находиться в пределах от **R_{min}** до **R_{max}** , определенных ранее.

На фронтальной проекции в пересечении этой сферы с конусом получим окружность в виде отрезка прямой, перпендикулярного к оси конуса, а в пересечении с цилиндром – две окружности в виде отрезков, перпендикулярных к оси цилиндра. На пересечении этих отрезков находятся проекции искомых точек $I_2, I'_2, 2_2, 2'_2$.

Горизонтальные проекции этих точек легко определить при помощи окружности конуса, которой они принадлежат.

- Соединяем все точки на фронтальной проекции плавной линией (рис. 66, г).

Прежде, чем сделать то же самое на горизонтальной проекции, следует отметить еще четыре **опорные** точки – точки *видимости* на гори-

горизонтальной проекции $L(L_1)$, $L'(L'_1)$, $M(M_1)$, $M'(M'_1)$. Они принадлежат очерку цилиндра. Фронтальные проекции этих точек специальным образом не определяют – их берут непосредственно на уже готовой проекции линии пересечения.

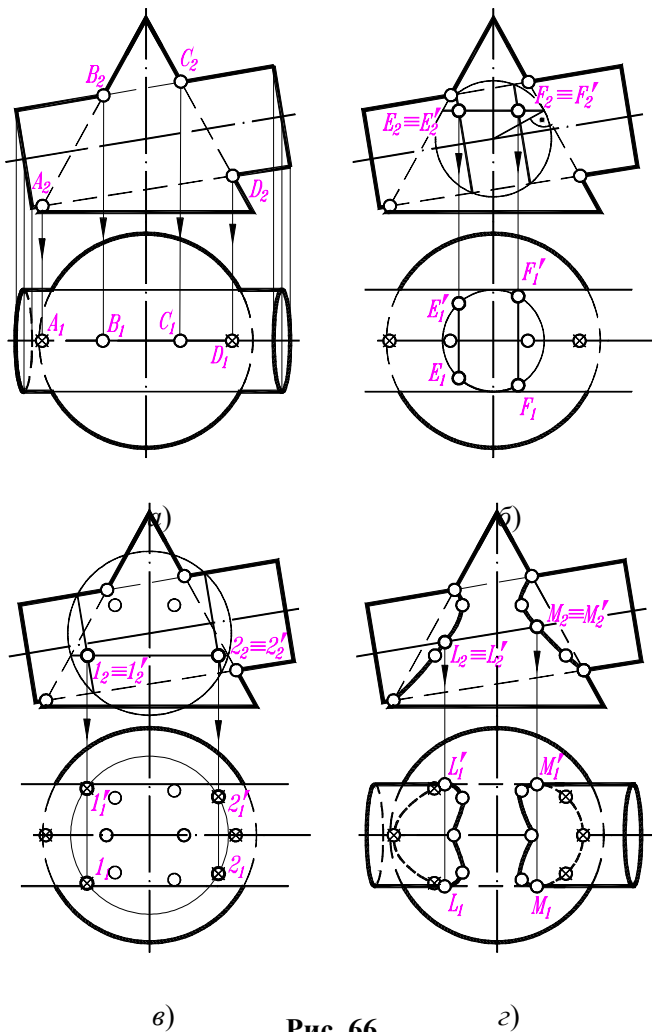


Рис. 66

В заключение следует отметить, что характер кривой линии пересечения зависит также и от относительных размеров пересекающихся поверхностей.

Для сравнения см. рис. 67, где вспомогательная сфера минимального радиуса вписана в цилиндр.

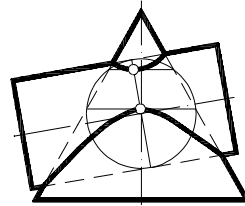


Рис. 67

Способ эксцентрических сфер

Как это следует из самого названия способа, он заключается в применении **вспомогательных сфер**, имеющих *различные центры*.

Пример 2. Построить линию пересечения поверхности вращения $\Omega(\Omega_2)$ с тором $\Phi(\Phi_2)$ (рис. 68).

Ось поверхности Ω лежит в одной плоскости с осевой линией кольца Φ . Эта плоскость является общей плоскостью симметрии.

Вначале отмечаем *опорные* точки A_2 и B_2 .

Для построения произвольных точек через ось тора $i(i_2)$ проводим вспомогательную фронтально-проецирующую плоскость $\Sigma(\Sigma_2)$, которая рассечёт тор по окружности $k(k_2)$. Центр этой окружности находится на осевой линии. Проведём из этого центра перпендикуляр к k_2 до пересечения его с осью конуса в точке $O(O_2)$.

Используя точку $O(O_2)$ в качестве центра, построим такую сферу, на которой лежала бы окружность $k(k_2)$. Для изображения этой сферы проведём окружность, проходящую через концы отрезка, изображающего окружность $k(k_2)$.

Построенная вспомогательная сфера одновременно пересечёт поверхность $\Omega(\Omega_2)$ по окружности $m(m_2)$. Точки пересечения окружностей $k(k_2)$ и $m(m_2)$ являются точками искомой линии пересечения.

$$(I, I') = k \cap m; \quad (I_2, I_2') = k_2 \cap m_2.$$

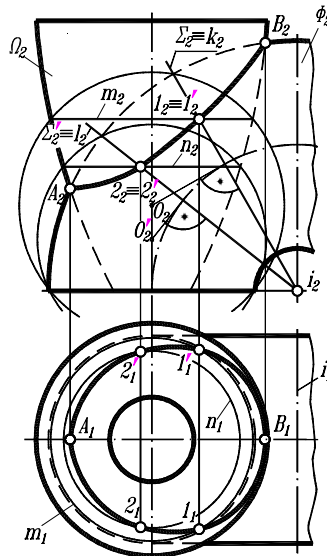


Рис. 68

Взяв другую плоскость $\Sigma'(\Sigma'_2)$ и получив в сечении тора окружность $l(l_2)$, аналогичным построением найдем центр $O'(O'_2)$ новой вспомогательной сферы. Из этого центра проведём окружность (проекцию сферы), проходящую через концы отрезка, изображающего окружность $l(l_2)$. Эта сфера пересечёт поверхность $\Omega(\Omega_2)$ по окружности $n(n_2)$.

$$(2, 2') = l \cap n; \quad (2_2, 2'_2) = l_2 \cap n_2.$$

Соединив полученные точки, построим фронтальную проекцию линии пересечения тора с поверхностью вращения.

Горизонтальные проекции найденных точек строятся из условия их принадлежности окружностям m и n . Приняв, что у поверхности вращения Ω отсутствует верхнее основание, горизонтальную проекцию линии пересечения показываем видимой.

Основные положения главы 2

1. Пересечение прямой с плоскостью

Дано: l, Δ . Найти: L ?

Алгоритм решения:

1. $L \subset \Sigma$;
2. $d = \Delta \cap \Sigma$;
3. $L = l \cap d$.

2. Пересечение двух плоскостей

Для построения линии пересечения необходимо найти две точки этой линии и соединить их. Точки находятся по указанному выше алгоритму.

3. Пересечение поверхности плоскостью

- Если плоскость пересекает линейчатую (цилиндр, конус) или гранную поверхность, то построение сечения сводится к нахождению точек пересечения прямых линий (образующих или ребер) с секущей плоскостью.
- Если плоскость пересекает нелинейчатую поверхность (сфера, тор), то при помощи плоскостей уровня строят окружности и ищут точки пересечения этих окружностей с секущей плоско-

стью. Если плоскость при этом проецирующая, то строят только недостающие проекции линии пересечения.

• К коническим сечениям относятся:

- ♦ эллипс, если $\alpha > \beta$,
- ♦ парабола, если $\alpha = \beta$,
- ♦ гипербола, если $\alpha < \beta$,

где α – угол наклона образующей к основанию конуса вращения, а β – угол между секущей плоскостью и основанием конуса.

4. Пересечение прямой с поверхностью

Дано: l, Φ . Найти: (A, B) ?

Алгоритм решения:

1. $l \subset \Sigma$;
2. $t = \Sigma \cap \Phi$;
3. $(A, B) = l \cap t$.

5. Взаимное пересечение поверхностей

Поверхность пересекают рядом поверхностей-*посредников* (плоскостями или сферами) и ищут общие точки.

Если одна из поверхностей занимает частное положение (проецирующая призма или цилиндр), то решение сводится к построению недостающей проекции линии пересечения (методом *вспомогательных секущих плоскостей*).

Если *оси поверхностей вращения пересекаются* и параллельны плоскости проекций, то применяют *метод концентрических сфер*.

Если *поверхности вращения имеют общую плоскость симметрии*, параллельную плоскости проекций, (оси их могут скрещиваться), применяют метод *эксцентрических сфер*, т.е. сфер, имеющих различные центры. Этот метод применяется сравнительно редко.

Глава 3. МЕТРИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ. ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТЬ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЭЛЕМЕНТОВ.

На практике часто приходится решать задачи, связанные с определением расстояний, углов, площадей и т.п.. Такие задачи называются *метрическими* в отличие от позиционных, связанных с определением взаимного расположения геометрических элементов.

1. Определение длины отрезка прямой

Ортогональные проекции отрезка прямой общего положения всегда меньше длины самого отрезка. Длину отрезка прямой можно определить способом, получившим название «МЕТОД ПРЯМОУГОЛЬНОГО ТРЕУГОЛЬНИКА» (рис. 69), т.е.

Натуральная величина отрезка равна гипотенузе прямоугольного треугольника, у которого один катет равен одной из проекций этого отрезка, а второй равен разности расстояний концов отрезка от той же плоскости проекций.

Если прямоугольный треугольник строить на плоскости Π_1 , то одним катетом будет проекция A_1B_1 , а другим катетом – разность координат его концов (Δz), взятая из другой проекции. Гипотенуза A_1B_0 и есть длина отрезка, его *натуральная величина*. Угол α определяет угол наклона отрезка к плоскости Π_1 , поскольку углом между прямой и плоскостью называют угол между прямой и её проекцией на эту плоскость.

Если строить прямоугольный треугольник на плоскости Π_2 , то одним катетом этого треугольника будет проекция A_2B_2 , а другим – разность координат его концов (Δy), взятая из горизонтальной проекции. Гипотенуза A_2B_0 – *натуральная величина* отрезка. Угол β определяет наклон отрезка AB к плоскости Π_2 .

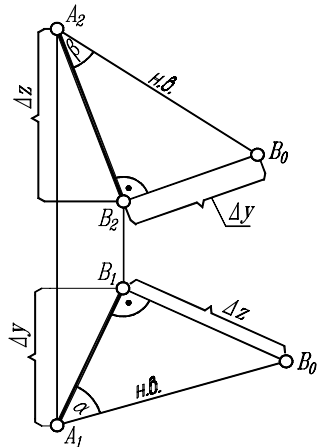


Рис. 69

Если необходимо определить только натуральную величину отрезка, достаточно построить только один из треугольников. При этом откладывать всегда нужно разность тех координат, которые отсутствуют на плоскости проекций.

Решение многих метрических задач требует построения перпендикулярных прямых и плоскостей.

2. Проецирование прямого угла

В общем случае, если обе стороны прямого угла являются прямыми общего положения, то угол проецируется искажённо. Однако, *если одна из сторон прямого угла параллельна плоскости проекций, то прямой угол проецируется на эту плоскость без искажений.*

На рис. 70 изображена пространственная модель пересекающихся под прямым углом прямых b и c . При этом $c \parallel \Pi_1$, и, следовательно, $b_1 \perp c_1$.

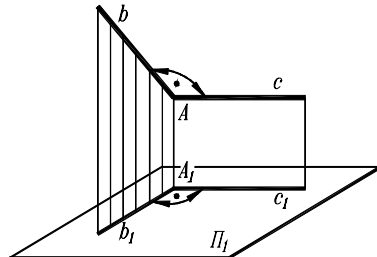


Рис. 70

Рассмотрим примеры.

Пример 1. Из точки $A(A_1, A_2)$ опустить перпендикуляр на горизонталь $h(h_1, h_2)$.

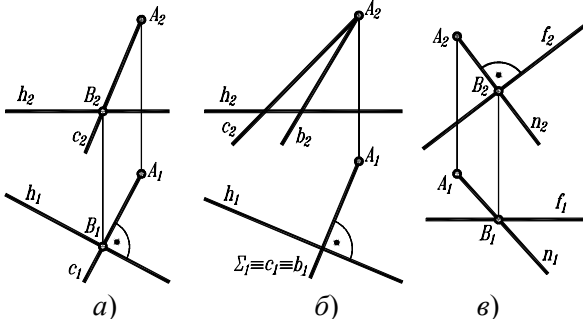


Рис. 71

(рис. 71, а)

На комплексном чертеже проводим через точку A_1 прямую $c_1 \perp h_1$.

Обратим внимание, что на Π_2 прямой угол при вершине B проецируется с искажением. Здесь $c \cap h$.

Если надо определить величину отрезка AB , т.е. расстояние от A до h , то надо продолжить построение, применив СПОСОБ ПРЯМОУГОЛЬНОГО ТРЕУГОЛЬНИКА, изложенный в п. 1.

Пример 2. Из точки $A(A_1, A_2)$ опустить перпендикуляр на горизонталь $h(h_1, h_2)$ так, чтобы он скрещивался с прямой f (рис. 71, б).

Прямые, проходящие через точку A перпендикулярно к h , образуют проецирующую плоскость $\Sigma \perp h$. Горизонтальные проекции всех этих прямых совпадают, т.е. $\Sigma_1 \equiv c_1 \equiv b_1$. Фронтальные проекции c_2 и b_2 проведутся через точку A_2 произвольно. При этом $b \perp h$ и $c \perp h$.

Пример 3. Из точки $A(A_1, A_2)$ опустить перпендикуляр $n(n_1, n_2)$ на фронталь $f(f_1, f_2)$. (Рис. 71, в).

Здесь $n \cap f$, и при этом прямой угол проецируется в натуральную величину на фронтальной проекции, а на горизонтальной – с искажением.

3. Перпендикулярность прямой и плоскости

Прямая перпендикулярна плоскости, если она перпендикулярна двум пересекающимся прямым, лежащим в этой плоскости.

Для ортогонального чертежа это положение формулируется следующим образом: **прямая перпендикулярна плоскости, если ее проекции перпендикулярны соответствующим проекциям горизонтали и фронтали** (рис. 72, а, б).

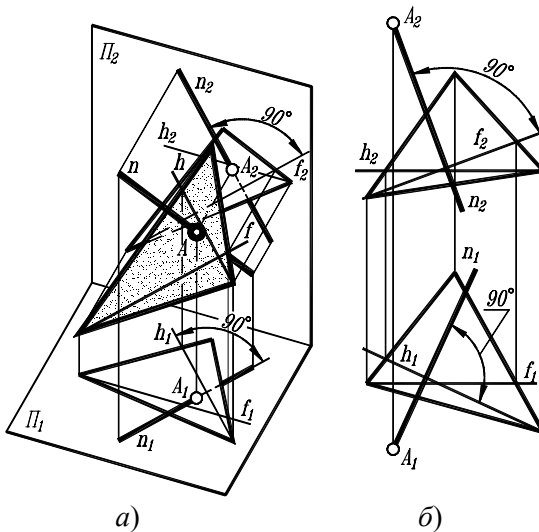


Рис. 72

$$(n \perp \Sigma) \Rightarrow [(n \perp h) \wedge (n \perp f)] \wedge [(n \cap f) \subset \Sigma]$$

На рис. 72, а представлена иллюстрация этого положения. Здесь перпендикуляр n скрещивается с линиями уровня h и f .

Для того, чтобы через заданную точку $A(A_1, A_2)$ построить прямую, перпендикулярную плоскости общего положения (рис. 72, б), необхо-

димом сначала в произвольном месте плоскости построить *горизонталь* $h(h_1, h_2)$ и *фронталь* $f(f_1, f_2)$, а затем через точку провести проекции перпендикуляра под прямым углом к одноимённым проекциям этих линий уровня, т.е.

$$A_2 \subset n_2 \perp f_2;$$

$$A_1 \subset n_1 \perp h_1.$$

Приведенное положение дает возможность решать ряд задач:

- опустить или восстановить перпендикуляр к плоскости,
- провести плоскость перпендикулярную прямой,
- определить расстояние от точки до плоскости,
- определить расстояние до прямой и т.д..

Задача 1. *Определить расстояние от точки до плоскости.*

Иными словами, необходимо определить длину перпендикуляра, опущенного из данной точки на плоскость.

Задача решается в три этапа, каждый из которых представляет собой одну из рассмотренных ранее задач:

- 1) определить направление проекций перпендикуляра к плоскости (рис. 72, б);
- 2) построить точку пересечения прямой с плоскостью (см. Гл. 2, п. 1);
- 3) определить длину перпендикуляра способом прямоугольного треугольника (см. рис. 69).

Рассмотрим следующую задачу.

Задача 2. *Из точки A , лежащей в плоскости, восстановить к этой плоскости перпендикуляр заданной длины (рис. 73).*

Порядок решения:

1. Из точки $A(A_1, A_2)$ восстанавливаем перпендикуляр произвольной длины, ограничив его, допустим, точкой $M(M_1, M_2)$.
2. Определяем натуральную величину этого отрезка методом прямоугольного треугольника (A_1M_0).

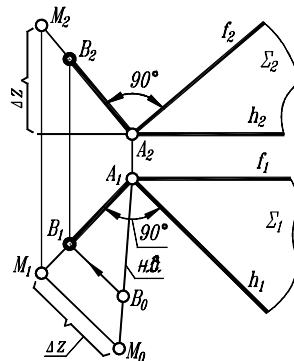


Рис. 73

3. На натуральной величине откладываем заданную длину A_1B_0 и обратным проецированием определяем искомую проекцию перпендикуляра, т.е. $AB(A_1B_1, A_2B_2)$.

4. Взаимно перпендикулярные плоскости

Две плоскости взаимно перпендикулярны, если одна из них проходит через прямую, перпендикулярную к другой.

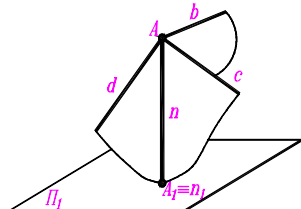


Рис. 74

Рассмотрим модель (рис. 74). Через прямую $n \perp \Pi_1$ можно провести множество

плоскостей, перпендикулярных заданной плоскости и проходящих через произвольные прямые b, c, d и т.д.

На рис. 75 показано построение плоскости Σ , проходящей через прямую $m(m_1, m_2)$ и перпендикулярной к плоскости ABC .

На прямой $m(m_1, m_2)$ взята произвольная точка $D(D_1, D_2)$, через которую проведена прямая $n(n_1, n_2)$, перпендикулярная к плоскости ABC , как это было описано выше.

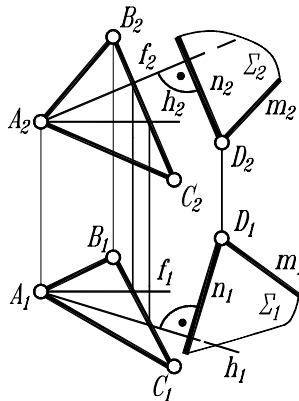


Рис. 75

Основные положения главы 3

Определение длины отрезка

Натуральная величина отрезка равна гипотенузе прямоугольного треугольника, у которого один катет равен одной из проекций этого отрезка, а второй равен разности расстояний концов отрезка от той же плоскости проекций.

Проецирование прямого угла

Если одна из сторон прямого угла параллельна плоскости проекций, то угол проецируется на эту плоскость без искажений.

Перпендикулярность прямой и плоскости

$$(n \perp \Sigma) \Rightarrow [(n_1 \perp h_1) \wedge (n_2 \perp f_2)] \wedge [(h \cap f) \subset \Sigma]$$

Глава 4. СПОСОБЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПРОЕКЦИЙ

Способы преобразования проекций предназначены для решения *метрических задач*. Решение многих задач значительно упрощается, если заданные геометрические элементы занимают в пространстве *частное положение*, при этом *величина* и *форма* объекта проецируется *без искажения*.

Основными преобразованиями являются такие, после которых прямая общего положения становится прямой уровня или проецирующей, плоскость общего положения преобразуется в проецирующую или плоскость уровня.

1. СПОСОБ ЗАМЕНЫ ПЛОСКОСТЕЙ ПРОЕКЦИЙ

Сущность способа замены плоскостей проекций заключается в том, что *при неизменном положении объекта* в пространстве производится замена одной из плоскостей проекций на новую, нужным образом расположенную относительно объекта; при этом новая плоскость должна быть перпендикулярной к остающейся (незаменяемой) плоскости проекций.

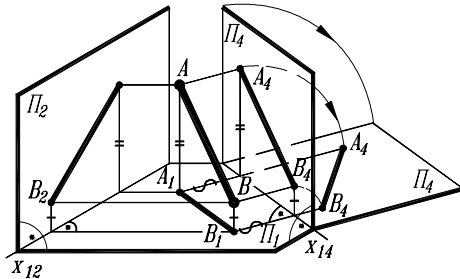


Рис. 76

На рис. 76 представлена пространственная модель решения задачи на определение натуральной величины отрезка AB .

Взамен фронтальной плоскости Π_2 выбрана новая плоскость проекций $\Pi_4 \perp \Pi_1$ и параллельная отрезку AB . Т.е. новая ось $x_{14} \parallel A_1B_1$. Расстояние плоскости Π_4 от отрезка AB произвольное. При этом, как видно из чертежа, высоты точек A и B (координаты z) не изменяются и на Π_4 изображаются расстояниями от новой оси x_{14} до новых проекций A_4 и B_4 , равными расстояниям от заменяемой оси x_{12} до заменяемых проекций A_2B_2 .

Итак, чтобы спроецировать отрезок в натуральную величину,

достаточно выполнить одну замену плоскости проекций, например, $\frac{\Pi_1}{\Pi_2} \rightarrow \frac{\Pi_1}{\Pi_4}$, как показано на чертеже. Отметим, что заменять можно любую из плоскостей проекций. При замене горизонтальной плоскости $\frac{\Pi_2}{\Pi_1} \rightarrow \frac{\Pi_2}{\Pi_4}$ неизменными остаются глубины точек (координаты y), что в дальнейшем отражено на рис. 79, б.

При решении некоторых задач бывает необходимым *спроецировать прямую в точку*. Для этого производится *вторая замена плоскостей проекций*. При этом следует помнить, что новые линии связи всегда перпендикулярны новым осям.

Рассмотрим решение этой задачи на комплексном чертеже (рис. 77).

Вначале следует прямую AB сделать *линией уровня*. Для этого новую ось проекций x_{14} проводим параллельно A_1B_1 . Затем перпендикулярно этой оси проводим линии связи и откладываем на них от оси x_{14} высоты точек A и B (показаны на чертеже штрихами). Соединив полученные проекции A_4 и B_4 , получаем новую проекцию прямой A_4B_4 .

Итак, исходная прямая в новой системе $AB(A_1B_1, A_4B_4)$ стала *линией уровня*, поэтому проекция A_4B_4 представляет собой *натуральную величину* отрезка AB .

Для проецирования отрезка AB в точку выполним еще одну замену.

Новую плоскость Π_5 проводим перпендикулярно к прямой AB , т.е. проводим новую ось проекций $x_{45} \perp A_4B_4$. Следовательно, линии связи A_4A_5 и B_4B_5 будут в данном случае совпадать с прямой A_4B_4 . Откладывая от оси x_{45} расстояние от заменяемой оси x_{14} до заменяемой проекции A_1B_1 (отмеченный тремя штрихами отрезок), получаем проекцию отрезка AB на плоскость Π_5 в виде точки $A_5 \equiv B_5$.

Таким образом, после двух преобразований прямая стала проецирующей относительно плоскости Π_5 .

Рассмотрим решение некоторых метрических задач.

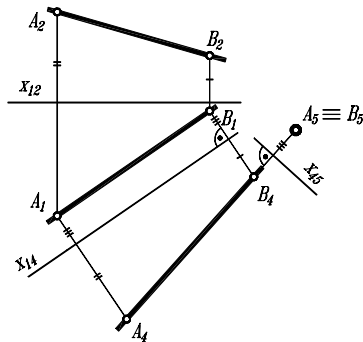


Рис. 77

Задача 1. *Определить расстояние между скрещивающимися прямыми $b(b_1, b_2)$ и $a(a_1, a_2)$ (рис. 78).*

Если одна из заданных прямых (любая) спроецируется на плоскость проекций в точку, то искомое расстояние спроецируется на эту же плоскость в истинную величину.

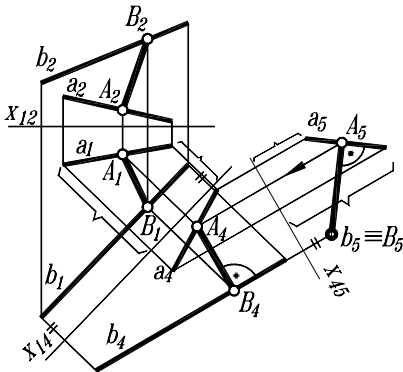


Рис. 78

Как было сказано выше, для того, чтобы прямую сделать проецирующей, необходимо последовательно выполнить два преобразования:

первое – преобразовать прямую общего положения в прямую уровня,

второе – прямую уровня – в проецирующую.

Рассмотрим ход решения этой задачи.

Спроецируем в точку, например, прямую b .

1-е преобразование.

Для того, чтобы прямая b спроецировалась *линией уровня*, введем новую плоскость проекций Π_4 , расположив ее параллельно этой прямой. При этом новая ось должна быть параллельна одной из проекций прямой b , например, $x_{14} \parallel b_1$. В итоге эта прямая спроецируется на Π_4 в *истинную величину* (новая фронтальная проекция прямой – b_4).

Новая ось x_{14} может быть расположена на любом расстоянии от прямой. Линии связи проводятся перпендикулярно оси x_{14} . На них от этой оси откладываются *высоты* (аппликаты) концов отрезков, которыми для удобства ограничены прямые. Величины этих высот берутся на фронтальной проекции.

2-е преобразование.

Для того, чтобы прямая b спроецировалась в *точку*, необходимо расположить новую плоскость проекций Π_5 перпендикулярно к ней. Т.е. новая ось $x_{45} \perp b_4$. При этом линии связи перпендикулярны к этой оси.

Поскольку расстояния всех точек прямой $b(b_1)$ до оси x_{14} одинаковы, то, отложив их величину, отмеченную штрихами, от оси x_{45} , полу-

чим проекцию прямой b в виде точки b_5 . Переносимые координаты концов второго отрезка отмечены фигурными скобками.

В результате, опустив перпендикуляр из b_5 на a_5 , получим искомое расстояние $AB(A_5B_5)$. Возврат полученного отрезка на исходные проекции показан на чертеже.

Задача 2. Определить величину двугранного угла при ребре $AB(A_1B_1, A_2B_2)$ (рис. 79).

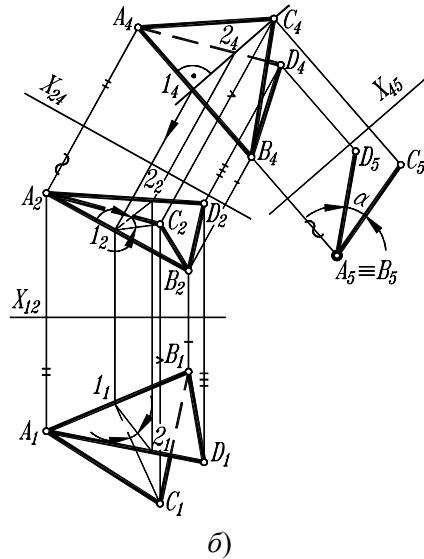
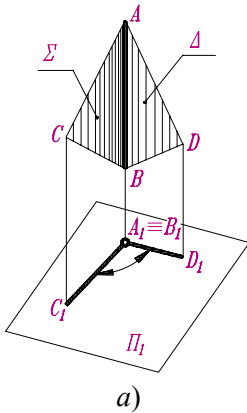


Рис. 79

Мерой двугранного угла служит линейный угол, который изображается без искажения на плоскость проекций, перпендикулярную к ребру двугранного угла (рис. 79, а).

На рис. 79, б ребро $AB(A_1B_1, A_2B_2)$ занимает общее положение относительно плоскостей проекций. Решение сводится к тому, чтобы спроецировать это ребро в точку. Грани этого угла при этом спроецируются в прямые линии.

Эти построения были изложены выше с той лишь разницей, что первой была заменена не фронтальная, а горизонтальная плоскость проекций (см. рис. 77).

В данном случае перемена плоскостей произведена в следующем порядке:

$$\frac{\Pi_2}{\Pi_1} \rightarrow \frac{\Pi_2}{\Pi_4} \rightarrow \frac{\Pi_5}{\Pi_4}.$$

Переносимые координаты отмечены на чертеже штрихами и знаками « \vee », « \sim ».

Чтобы получить на исходном чертеже проекцию линейного угла, на плоскости Π_4 в любом месте проводим плоскость, перпендикулярную ребру $AB(A_4, B_4)$, которая пересечет ребра в точках $1(I_4)$ и $2(2_4)$ (на чертеже плоскость проведена через вершину $C(C_4)$).

Дальнейшие действия ясны из чертежа.

Задача 3. *Определить истинную величину плоской фигуры – треугольника ABC , занимающего в пространстве общее положение.*

Для решения этой задачи необходимо преобразовать проекции так, чтобы плоскость треугольника стала *параллельной* одной из плоскостей проекций новой системы.

Как и в предыдущих случаях, необходимо выполнить два преобразования, но в иной последовательности:

- преобразовать плоскость общего положения в *проецирующую*;
- преобразовать проецирующую плоскость в *плоскость уровня*.

На рис. 80 дана пространственная модель, где

плоскость Π_2 (не показана) заменена на Π_4 , *перпендикулярную* плоскости треугольника. Это выполнено с помощью линии уровня h , которая на новую плоскость спроецировалась в точку, а заданная плоскость стала проецирующей.

Решение всей задачи представлено в ортогональных проекциях на рис. 81.

1-е преобразование: $\frac{\Pi_2}{\Pi_1} \rightarrow \frac{\Pi_4}{\Pi_1}$, при этом $x_{14} \perp h_1$.

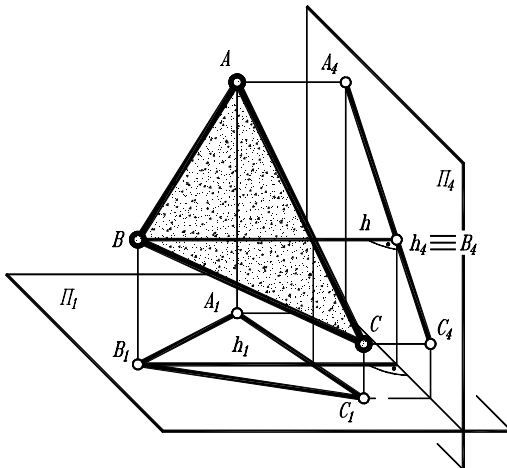


Рис. 80

2-е преобразование: $\frac{\Pi_4}{\Pi_1} \rightarrow \frac{\Pi_4}{\Pi_5}$, при этом $x_{45} \parallel A_4C_4B_4$, т.е. плоско-

сти треугольника.

Построенная на Π_5 проекция определяет истинную величину и форму треугольника.

Задача 4. Найти расстояние от точки $D(D_1, D_2)$ до плоскости $ABC(A_1B_1C_1, A_2B_2C_2)$ (рис. 82).

Если преобразовать плоскость общего положения в проецирующую, то, опустив перпендикуляр из точки D на прямую (проекцию плоскости), получим решение задачи.

Как видно, эта задача решается при помощи одной замены (см. предыдущий пример).

Возврат проекции DK на исходный чертеж производится при помощи следующего рассуждения.

Проекция D_4K_4 представляет собой натуральную величину, следовательно этот отрезок расположен параллельно плоскости Π_4 , что и отражено проведением $D_1K_1 \parallel x_{14}$. Высота точки $K(K_2)$ взята на плоскости Π_4 (отмечена значком « \sim »).

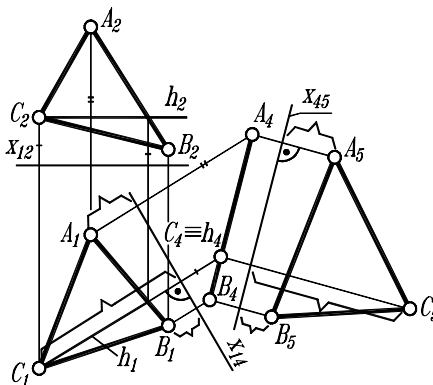


Рис. 81

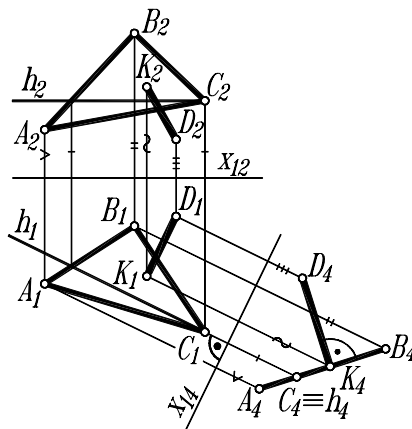


Рис. 82

2. СПОСОБ ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОГО ПЕРЕМЕЩЕНИЯ

В отличие от предыдущего способа в данном случае остаются неизменными плоскости проекций, а объект перемещается в пространстве таким образом, чтобы занять по отношению к ним частное положение. При этом все точки движутся по произвольной траектории, параллельной какой-либо плоскости проекций (рис. 83).

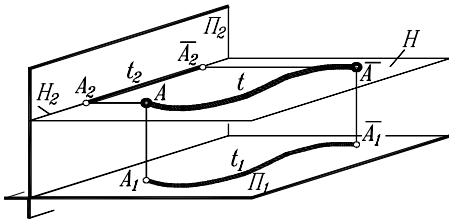


Рис. 83

Траектория движения t точки A в положение \bar{A} лежит в горизонтальной плоскости $H \parallel \Pi_1$. При этом фронтальная проекция t_2 представляет собой отрезок, параллельный оси x_{12} , а t_1 – проекцию, равную t .

Рассмотрим применение этого

способа.

Пример. Спроецировать отрезок $AB(A_1B_1, A_2B_2)$ в точку (рис. 84).

Здесь также следует выполнить два преобразования, т.е. два плоско-параллельных перемещения: сначала спроецировать отрезок в натуральную величину, а затем – в точку.

Первым перемещением отрезок приведён в положение, параллельное фронтальной плоскости проекций. При этом, $|\bar{A}_1 \bar{B}_1| = |A_1 B_1|$, $\bar{A}_1 \bar{B}_1 \parallel x_{12}$ и располагается в произвольном месте. Перемещение концов отрезка на фронтальной проекции отражено стрелками, т.е. движение отрезка производится параллельно плоскости Π_1 .

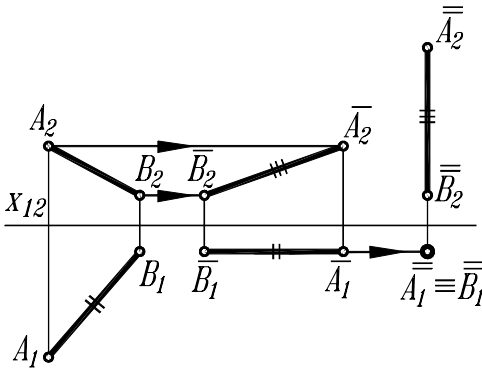


Рис. 84

Второе перемещение производится параллельно фронтальной плоскости проекций, т.е. $|\bar{\bar{A}}_2 \bar{\bar{B}}_2| = |A_2 B_2|$, $\bar{\bar{A}}_2 \bar{\bar{B}}_2 \perp x_{12}$ и располагается на свободном поле чертежа в любом месте.

В итоге двумя последовательными плоскопараллельными перемещениями отрезок AB спроецирован в точку ($\bar{\bar{A}}_1 \equiv \bar{\bar{B}}_1$).

3. СПОСОБЫ ВРАЩЕНИЯ

В этих способах плоскости проекций остаются неподвижными, а объект вращается вокруг оси таким образом, чтобы определённые его элементы заняли относительно плоскости проекций частное положение.

Чаще всего применяются следующие способы вращения:

- вращение вокруг проецирующих осей;
- вращение вокруг линий уровня.

Вращение вокруг проецирующих осей. При вращении точки вокруг оси, перпендикулярной плоскости проекций, одна ее проекция перемещается по окружности, а вторая – по прямой, перпендикулярной проекции оси вращения (рис. 85).

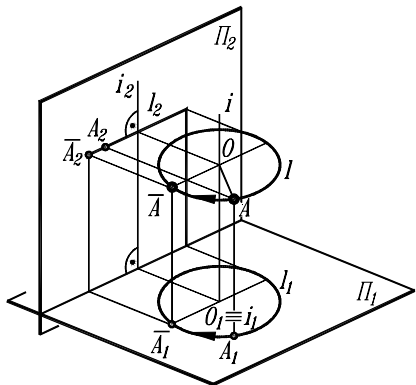


Рис. 85

Окружность, описываемая точкой A , спроецируется на плоскость Π_1 без искажения, а на плоскость Π_2 – в виде отрезка прямой.

При вращении точки вокруг фронтально-проецирующей оси, ее траектория проецируется на Π_2 окружностью, а на Π_1 – отрезком прямой, перпендикулярным проекции оси.

При решении задач этим способом этапы преобразований аналогичны тем, которые выполнялись предыдущими способами.

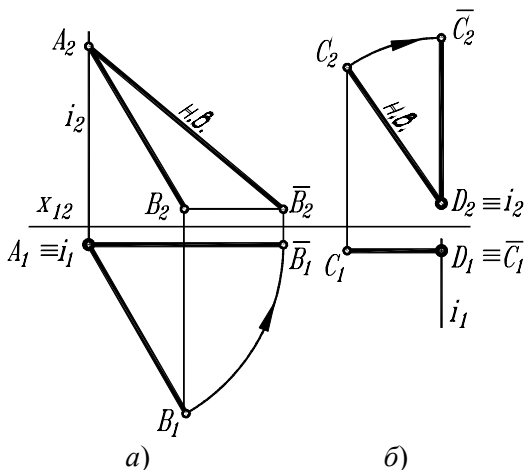


Рис. 86

На рис. 86, *а* отрезок общего положения $AB(A_1B_1, A_2B_2)$ вращением вокруг горизонтально-проецирующей оси $i(i_1, i_2)$ повернут в положение, параллельное плоскости Π_2 , и, тем самым, определена его натуральная величина $A_2 \bar{B}_2$.

На рис. 86, *б* фронталь $CD(C_1D_1, C_2D_2)$ одним вращением вокруг фронтально-проецирующей оси $i(i_1, i_2)$ спроецирована в точку $D_1 \equiv C_1$.

Вращение вокруг линии уровня. На рис. 87, а представлена пространственная модель вращения точки A вокруг линии уровня, в частности, горизонтали h , которая принята за ось вращения ($h \subset H$).

Точка A вращается по дуге окружности в плоскости Δ до совмещения с плоскостью H . При этом $\Delta \perp H$. Дуга окружности проецируется на горизонтальную плоскость проекций в отрезок, перпендикулярный горизонтали, т.е. $A_1 \bar{A}_1 \perp h_1$. Радиус вращения r проецируется в натуральную величину $O_1 \bar{A}_1$.

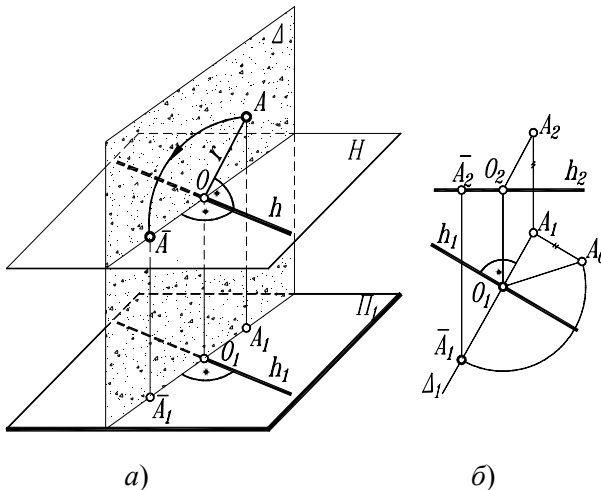


Рис. 87

Вращение точки A на ортогональных проекциях показано на рис. 87, б. Здесь натуральная величина радиуса A_0O_1 определена методом прямоугольного треугольника.

Метод вращения вокруг линии уровня рационально применять для определения величины плоской фигуры, одним вращением вокруг горизонтали или фронтали переведа ее в положение плоскости уровня.

4. РАЗВЕРТЫВАНИЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Развертыванием называется такое преобразование поверхности, в результате которого она совмещается с плоскостью. Плоская фигура, полученная в результате развертывания поверхности и совмещения ее с плоскостью, называется *разверткой*.

Разверткой многогранной поверхности называется плоская фигура, полученная в результате последовательного совмещения всех её граней с плоскостью.

На рис. 88 представлено построение развертки боковой поверхности пирамиды. Основание пирамиды параллельно плоскости Π_1 , поэтому его горизонтальная проекция $A_1B_1C_1D_1$ представляет собой натуральную величину.

Чтобы определить натуральную величину боковых граней – треугольников, необходимо найти длины рёбер. Длина каждого ребра определена вращением его вокруг оси, проходящей через вершину S , перпендикулярно плоскости Π_1 . Повернув ребра до положения, параллельного плоскости Π_2 , получим их натуральные величины: $S_2 A_2$, $S_2 \bar{B}_2$, $S_2 \bar{C}_2$, $S_2 \bar{D}_2$.

Затем на свободном поле чертежа из точки S в произвольном направлении откладывают натуральную величину какого-либо ребра, например, SC . Для этого из точки C проводят дугу радиусом, равным длине отрезка основания $CB(C_1B_1)$. На полученной дуге засекают из точки S длиной $S_2 \bar{B}_2$ точку B . Так получают совмещенное с плоскостью чертежа положение грани SBC .

Далее из точки S проводят дугу радиусом $S_2 \bar{A}_2$, а из точки B дугу радиусом A_1B_1 . Точка пересечения этих засечек A будет третьей вершиной грани SAB .

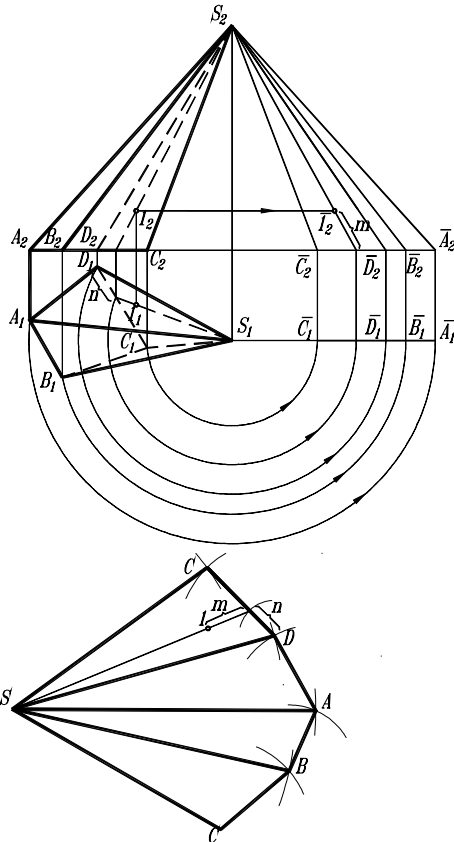


Рис. 88

Затем аналогичным образом строят развернутое положение других граней.

Для построения полной развертки присоединяют основание пирамиды к любой из его сторон.

Если необходимо на развертке построить точку, то поступают следующим образом. Через заданную точку I и вершину S проводят прямую, длину которой определяют тем же способом вращения. На ней отмечают положение точки I_2 (указано стрелкой). Затем на развертку переносят натуральные величины отрезков n и m .

Основные положения главы 4

- **Способы преобразования проекций** применяются для приведения элементов объекта в *частное положение* относительно какой-либо плоскости проекций. Такого положения элементов можно достичь заменой плоскостей проекций, плоскопараллельным перемещением или приёмами вращения объекта.
- **Прием замены плоскостей проекций** состоит в том, что *новой плоскостью проекций* заменяют одну из плоскостей данной системы, в результате чего неподвижные элементы объекта оказываются расположенными частным образом относительно новой плоскости. Такую замену выполняют столько раз, сколько требуется для решения задачи.
- При **плоскопараллельном перемещении** и **способе вращения** перемещается объект относительно неподвижной системы плоскостей проекций, занимая относительно неё частное положение. При **плоскопараллельном перемещении** объект движется *по произвольной траектории в плоскости, параллельной какой-либо плоскости проекций*.
- В **способе вращения вокруг проецирующей оси** одна из проекций точки перемещается *по окружности*, а другая – *по прямой*, перпендикулярной проекции этой оси.
- **Метрические задачи** на измерение расстояний, плоских фигур, углов решаются просто, если отдельные элементы объекта занимают частное положение, т.е. перпендикулярны или параллельны одной из плоскостей проекций.

- ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕЛИЧИНЫ ОТРЕЗКА

Отрезок приводят в положение, параллельное одной из плоскостей проекций *одной заменой плоскости* проекций либо *одним плоскопараллельным перемещением*, либо *одним вращением* вокруг оси.

- ОПРЕДЕЛЕНИЕ РАССТОЯНИЯ ОТ ТОЧКИ ДО ПРЯМОЙ

Следует спроецировать прямую в точку. Тогда расстояние между ее проекцией и проекцией заданной точки будет искомым. Решение выполняется при помощи двух преобразований.

- ОПРЕДЕЛЕНИЕ КРАТЧАЙШЕГО РАССТОЯНИЯ МЕЖДУ СКРЕЩИВАЮЩИМИСЯ ПРЯМЫМИ

Одну из прямых располагают перпендикулярно плоскости проекций, тогда кратчайшее расстояние между прямыми изобразится на этой плоскости без искажения. Осуществить это можно *двумя заменами* плоскостей проекций, что предпочтительнее других методов (рис.78).

- ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДВУГРАННОГО УГЛА

Ребро двугранного угла располагают *перпендикулярно плоскости проекций*, тогда линейный угол, являющийся мерой этого угла, изобразится без искажения на этой плоскости проекций. Эта задача более рационально решается методом замены плоскостей проекций. (рис. 79,б).

- ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕЛИЧИНЫ ПЛОСКОЙ ФИГУРЫ

Плоскую фигуру необходимо привести в положение, параллельное плоскости проекций, на которой она изобразится без искажений. Для этого необходимо выполнить *две замены* плоскостей проекций: сначала преобразовать плоскую фигуру в проецирующую, а затем – в плоскость уровня.

Чтобы спроецировать плоскость общего положения в прямую линию, необходимо, во-первых, провести в ней горизонталь или фронталь, а затем ввести новую плоскость проекций перпендикулярно проведенной линии уровня.

При второй замене новую плоскость проекций устанавливают параллельно отрезку, в который спроецировался отсек плоскости (рис. 81).

- ОПРЕДЕЛЕНИЕ РАССТОЯНИЯ ОТ ТОЧКИ ДО ПЛОСКОСТИ

Плоскость располагают перпендикулярно плоскости проекций, на которой расстояние между прямой (проекцией плоскости) и проекцией точки является искомым. Задачу решают при помощи *одной замены* плоскостей проекций (рис. 82).

- **Разверткой** поверхности многогранника является плоская фигура, полученная совмещением с плоскостью всех его граней.

Развертывание конической и цилиндрической поверхностей в общем случае сводится к построению разверток, соответственно вписанных в них пирамиды или призмы, рёбра которых совпадают с образующими.

построение аксонометрических изображений объекта, что будет рассмотрено ниже.

Отложим на осях пространственной системы координат натуральные единицы измерения e и спроецируем их на плоскость Π' . В зависимости от положения осей координат и направления проецирования эти масштабные единицы в общем случае проецируются с искажением e'_x , e'_y , e'_z . Отношение длины аксонометрической единицы к ее истинной длине называется *показателем искажения* для данной оси и обозначается соответственно: по оси x' – u , по оси y' – v , по оси z' – w .

Аксонометрические проекции называются *изометрическими*, если показатели искажения по всем осям равны ($u=v=w$); *диметрическими*, если показатели искажения равны по двум осям ($u=w$).

Аксонометрическая проекция называется *прямоугольной*, если направление проецирования s перпендикулярно плоскости проекций, в иных случаях – *косоугольной*.

2. Стандартные аксонометрические проекции

На практике чаще всего используют рекомендованные стандартом прямоугольные аксонометрические проекции двух основных видов: *прямоугольную изометрию* и *прямоугольную диметрию*.

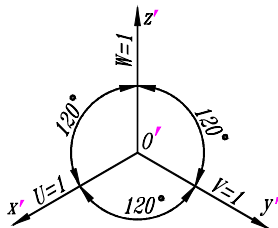


Рис. 90

Прямоугольная изометрия (рис. 90).

Этот вид аксонометрии широко распространен благодаря хорошей наглядности изображений и простоте построений. Здесь координатные оси расположены под равными углами к плоскости проекций, поэтому и аксонометрические оси также расположены под равными углами (120°) одна к другой.

Показатели искажения по всем осям равны 0.82 . Однако дробный показатель искажения неудобен для практических построений, поэтому пользуются так называемыми *приведенными показателями искажения*, равными единице, и обозначают их соответственно $U=V=W=1$.

В результате применения приведенных показателей искажения получают пропорционально увеличенное изображение объекта в 1.22 раза, но построение значительно упрощается, т.к. натуральные координаты

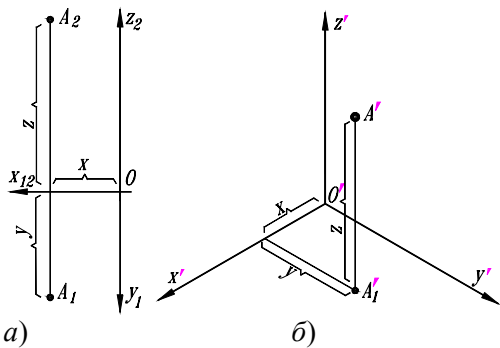


Рис. 91

одной из трёх координатных плоскостей, *изобразятся эллипсами*, имеющими величину *большой оси*, равную $\approx 1.22d$, и *малой оси*, равную $\approx 0.71d$, где d – *диаметр* окружности (рис. 92).

При этом большая ось эллипса всегда перпендикулярна отсутствующей координатной оси. Например, *большая ось* эллипса, изображающего *горизонтальную* окружность, перпендикулярна оси z' ; *фронтальную* окружность – перпендикулярна оси y' и *профильную* – перпендикулярна оси x' . Малые оси соответственно совпадают с направлениями этих осей.

точки A , заданные на ее комплексном чертеже (рис. 91, а) не приходится умножать на дробные величины, а можно непосредственно откладывать в качестве аксонометрических координатных отрезков (рис. 91, б).

В прямоугольной изометрии все *окружности*, параллельные или принадлежащие

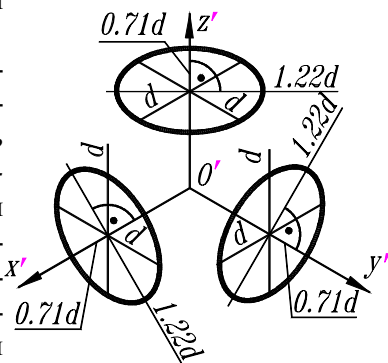


Рис. 92

Концы осей эллипса дают четыре

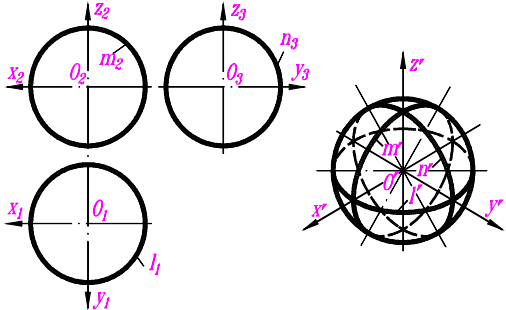


Рис. 93

точки. К ним можно добавить еще четыре точки – проекции концов двух диаметров окружности, параллельных соответствующим координатным осям с показателями искажения, равными единице. Затем по восьми точкам строят при помощи лассала эллипс.

Аксонометрическим изо-

бражением *сферы* будет окружность, радиус которой равен **1.22** радиуса заданной сферы (рис. 93).

Для придания большей наглядности изображению сферы, кроме очерка строят еще аксонометрические проекции трёх больших взаимно перпендикулярных кругов, соответственно параллельных координатным плоскостям.

Этими кругами являются *экватор* *l* и два взаимно перпендикулярных ("главных") *меридиана* сферы *m*, *n*. Экватор и меридианы изображаются эллипсами *l'*, *m'* и *n'*, построение которых было изложено выше.

Прямоугольная диметрия (рис. 94). При построении осей прямоугольной диметрии пользуются транспортиром или уклонами осей, равными **1:8** (ось *x'*) и **7:8** (ось *y'*). Показатели искажения по осям *x'* и *z'* равны **0.94**, а по оси *y'* – **0.47**. Для практических целей применяют также *приведенные показатели искажения* $U=W=1$ и $V=0.5$. В результате получают изображение, увеличенное в **1.06** раза.

В прямоугольной диметрии все *окружности*, параллельные или принадлежащие одной из трёх координатных плоскостей, *изобразятся эллипсами*, имеющими величину *большой оси*, равную **1.06d** (рис. 95). Величины же малых осей будут одинаковыми и равными **0.35d** только при изображении окружностей, параллельных или принадлежащих плоскостям Π_1 и Π_3 .

Величина *малой оси* эллипса, являющегося проекцией *фронтальной* окружности, будет **0.94d**.

Ориентация осей эллипсов следует тому же правилу, что и для прямоугольной изометрии. Проекции диаметров, параллельных соответствующим аксонометрическим осям, откладываются с учётом приведенных показателей искажений.

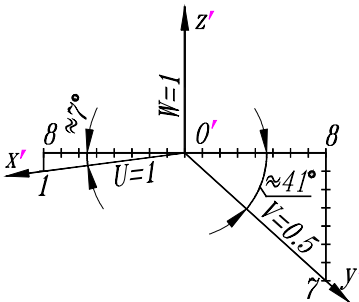


Рис. 94

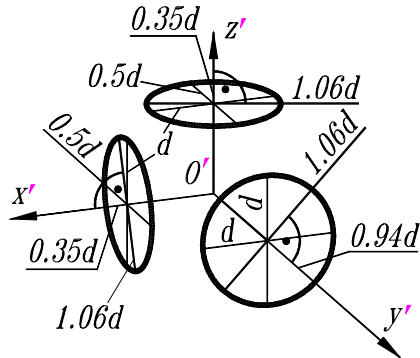


Рис. 95

3. Построение аксонометрии по ортогональным проекциям объекта

При построении аксонометрических изображений применяют *способ координат*. Аксонометрические проекции отдельных точек строят по координатам, взятым с ортогональных проекций объекта.

Пример. Построить изометрическую проекцию пирамиды, усечённой фронтально-проецирующей и профильной плоскостями. (рис. 96).

Построение выполним в такой последовательности:

- ◆ Предварительно построим горизонтальную проекцию сечения.

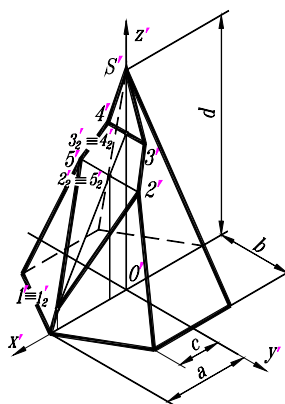
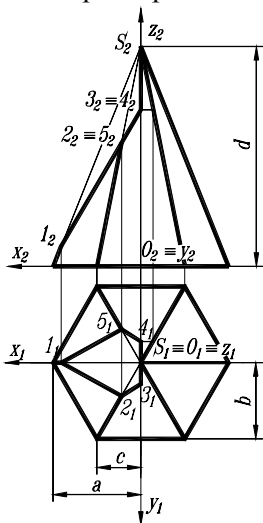


Рис. 96

- ◆ На комплексном чертеже нанесём дополнительные оси *внутренней* системы координат $x(x_1, x_2)$, $y(y_1, y_2)$, $z(z_1, z_2)$, совмещая их с осями симметрии объекта.

- ◆ Построим аксонометрические оси $x' y' z'$.

- ◆ По размерам, взятым с ортогональных проекций, строим аксонометрическую проекцию основания, используя симметрию и параллельность прямых (эти свойства сохраняются на аксонометрическом изображении).

А именно, две стороны основания параллельны оси x и удалены от нее на расстояние b по обе стороны.

- ◆ Строим проекцию вершины S' , откладывая от центра основания O' величину d в направлении оси z' . Затем, соединив вершины основания с вершиной S' , получим проекции рёбер пирамиды.

- ◆ Строим *вторичную* фронтальную проекцию опорных точек линии пересечения $1'_2$, $2'_2 \equiv 5'_2$, $3'_2 \equiv 4'_2$, замеряя их координаты x и z на фронтальной проекции и откладывая их в направлении соответствующих аксонометрических осей.
- ◆ Отложив от вторичных проекций точек параллельно оси y' соответствующие отрезки, взятые на горизонтальной проекции, получаем аксонометрические проекции этих точек $1'$, $2'$, $3'$, $4'$, $5'$.

Заметим, что для построения точек $2'$ и $5'$ достаточно было бы провести прямую линию через их вторичные проекции параллельно оси y' до пересечения с соответствующими рёбрами.

На аксонометрических изображениях принято показывать только видимые элементы. Невидимые рёбра показаны на чертеже в учебных целях.

Основные положения главы 5

- Целью аксонометрических изображений является получение *наглядности* объекта.
- Основным способом построения аксонометрии является *способ координат*, а само аксонометрическое изображение обладает свойством *обратимости*.
- Аксонометрическая проекция представляет собой однокартинное изображение объекта, полученное в результате проецирования его вместе с координатными осями на некоторую плоскость Π' .
- *Вторичными* проекциями точек называются аксонометрические проекции горизонтальной, фронтальной и профильной проекций той же точки.
- Прямоугольной аксонометрией называется аксонометрическая проекция, в которой направление проецирования перпендикулярно плоскости проекций Π' .
- В *прямоугольной изометрии* аксонометрические оси расположены под углом 120° одна к другой. Приведенные показатели искажения равны $U = V = W = 1$. Изображение увеличивается в **1.22** раза.

Проекцией окружности является *эллипс*, *большая ось* которого равна $1.22d$ и направлена *перпендикулярно отсутствующей оси*. *Малая ось* равна $0.71d$.

- В *прямоугольной диметрии* угол между осью x' и горизонтальной прямой составляет $\approx 7^\circ$, а между осью y' и той же прямой – $\approx 41^\circ$ в направлении часовой стрелки. Приведенные показатели искажения равны: $U = V = 1$; $W = 0.5$. Изображение увеличивается в 1.06 раза.

Проекцией окружности является *эллипс*, *большая ось* которого равна $1.06d$ и направлена *перпендикулярно отсутствующей оси*. Величины *малых осей* при изображении окружностей, *параллельных* плоскостям Π_1 и Π_3 равны $0.35d$, а *параллельных* плоскости Π_2 – $0.94d$.

- Изображением сферы в *прямоугольной изометрии* является окружность радиусом $1.22d$, а в *прямоугольной диметрии* – окружность радиусом $1.06d$.

ОГЛАВЛЕНИЕ

стр.

ПРЕДИСЛОВИЕ	3
МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ИЗУЧЕНИЮ КУРСА	3
ВВЕДЕНИЕ	6
ГЛАВА 1. ОРТОГОНАЛЬНЫЕ ПРОЕКЦИИ	
ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ФИГУР	7
А. Точка	7
Б. Прямая	9
1. Прямые общего положения	9
2. Прямые частного положения	11
3. Взаимное положение прямых линий	13
В. Плоскость	14
1. Плоскость общего положения	14
2. Плоскости частного положения	16
3. Прямые и точки, лежащие в плоскости	17
4. Параллельность прямой и плоскости, двух плоскостей	19
Г. Поверхности	19
1. Многогранные поверхности	19
2. Кривые поверхности	20
Основные положения главы 1	29
ГЛАВА 2. ПОЗИЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ	31
1. Пересечение прямой с плоскостью	33
2. Пересечение двух плоскостей	34
3. Пересечение поверхности плоскостью	36
4. Пересечение прямой с поверхностью	40
5. Взаимное пересечение поверхностей	41
Основные положения главы 2	54
ГЛАВА 3. ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТЬ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ	
ЭЛЕМЕНТОВ. МЕТРИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ	56
1. Определение длины отрезка прямой	56
2. Проецирование прямого угла	57

3. Перпендикулярность прямой и плоскости	58
4. Взаимно перпендикулярные плоскости	60
Основные положения главы 3	60
ГЛАВА 4. СПОСОБЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПРОЕКЦИЙ	61
1. Способ замены плоскостей проекций	61
2. Способ плоскопараллельного перемещения	66
3. Способы вращения	67
4. Развертывание поверхностей	69
Основные положения главы 4	71
ГЛАВА 5. АКСОНОМЕТРИЯ	74
1. Сущность метода и основные понятия	74
2. Стандартные аксонометрические проекции	75
3. Построение аксонометрии по ортогональным проекциям объекта	77
Основные положения главы 5	79