Министерство образования и науки Украины

ХАРЬКОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ
АВТОМОБИЛЬНО-ДОРОЖНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ГЕОМЕТРИЯ, ЧЕРЧЕНИЕ
(базовый курс)

Харьков 2005

Пр***и***нятые усл***о***вные обознач***е***ния

Фиг***у***ры	Обознач***е***ние	
	Фиг***у***ра в простр***а***нстве	Про***е***кция фиг***у***ры
Т***о***чка	***A, B, C***	***A_1, B_2, C_3, A^0***
Прям***а***я (л***и***ния)	***a, b, AB***	***$a_1, a_2, b_1, b_2,$ A_1B_1, A_2B_2***
Крив***а***я (л***и***ния)	***a, b, ABC***	***$a_1, a_2, \ldots,$ $A_1B_1C_1, A_2B_2C_2, \ldots$***
Пов***е***рхность (в том числ***е*** пл***о***скость)	***Σ, Ω, Ψ***	***$\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Omega_1, \Omega_2, \ldots,$ $\Psi_1, \Psi_2, \ldots$***
Пл***о***скость про***е***кций	***$\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3, \Pi'$***	
Оси про***е***кций	***x, y, z***	
Оси координ***а***т	***x, y, z***	
Координ***а***ты	***X, Y, Z***	
Нач***а***ло координ***а***т	***O***	***O***
Угл***ы***	***$\alpha, \beta, \gamma, \psi$***	

Равн***о***	$=$
Не равн***о***	$\neq$
Б***о***льше	$>$
М***е***ньше	$<$
Угол	$\angle$
Угол 90° (прям***о***й)	∟
Перпендикул***я***рный	$\perp$
Не перпендикул***я***рный	$\not\perp$
Паралл***е***льный	$\parallel$
Не паралл***е***льный	$\nparallel$
Совпад***а***ет	$\equiv$
Принадлеж***и***т	$\in$
Не принадлеж***и***т	$\notin$
Произв***о***льный, люб***о***й	$\forall$
Существ***у***ет	$\exists$
Треуг***о***льник	$\triangle$

ОСНОВЫ ГРАФИЧЕСКИХ ПОСТРОЕНИЙ

Введение

Черт***е***ж – ***э***то так***о***е изображ***е***ние предм***е***та, по кот***о***рому ***э***тот предм***е***т м***о***жно изгот***о***вить. Рис***у***нок и фотогр***а***фия – т***о***же изображ***е***ния предм***е***та, но по ним невозм***о***жно т***о***чно определ***и***ть ег***о*** разм***е***ры и ф***о***рму. На ур***о***ках по черч***е***нию (осн***о***вам инжен***е***рной и компь***ю***терной гр***а***фики) студ***е***нты изуч***а***ют пр***а***вила выполн***е***ния чертеж***е***й. Он***и*** ***у***чатся чит***а***ть и самосто***я***тельно разраб***а***тывать чертеж***и*** основн***ы***х дет***а***лей. Чертеж***и*** выполн***я***ют по определенным правилам – станд***а***ртам ГОСТ ЕСКД (госуд***а***рственный станд***а***рт ед***и***ной сист***е***мы констр***у***кторской документ***а***ции).

На рис. 1 пок***а***зано нагл***я***дное изображ***е***ние дет***а***ли и е***ё*** черт***ё***ж.

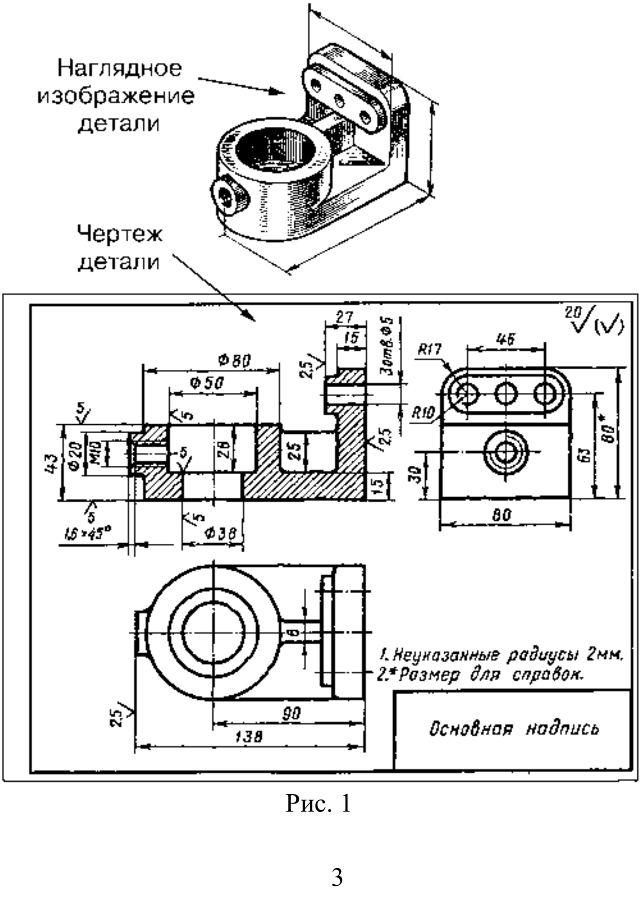
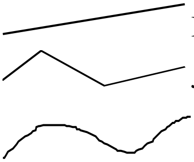


Рис. 1

§ 1. Линии

Л***и***нии быв***а***ют прям***ы***е, крив***ы***е и л***о***маные. Прям***а***я м***о***жет быть горизонт***а***льной, вертик***а***льной ***и***ли накл***о***нной (***о***бщего полож***е***ния).



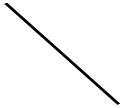
Прям***а***я

Л***о***маная

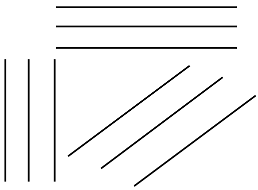
Крив***а***я

горизонт***а***льная прям***а***я

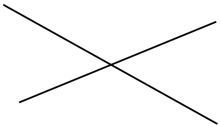
вертик***а***льная прям***а***я



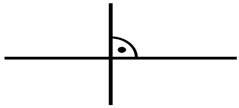
накл***о***нная прям***а***я



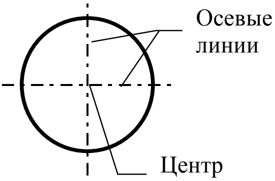
Паралл***е***льные прям***ы***е



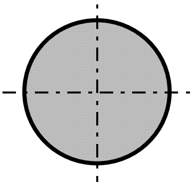
Пересек***а***ющиеся прям***ы***е



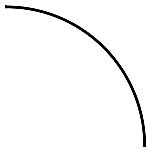
Вза***и***мно-перпендику-л***я***рные прям***ы***е



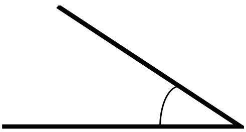
Окр***у***жность



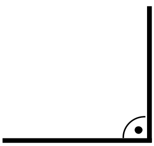
Круг



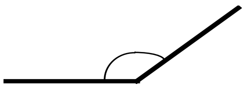
Дуг***а***



Острый ***у***гол



Прям***о***й ***у***гол



Туп***о***й ***у***гол

§ 2. Чертёжные инструменты.

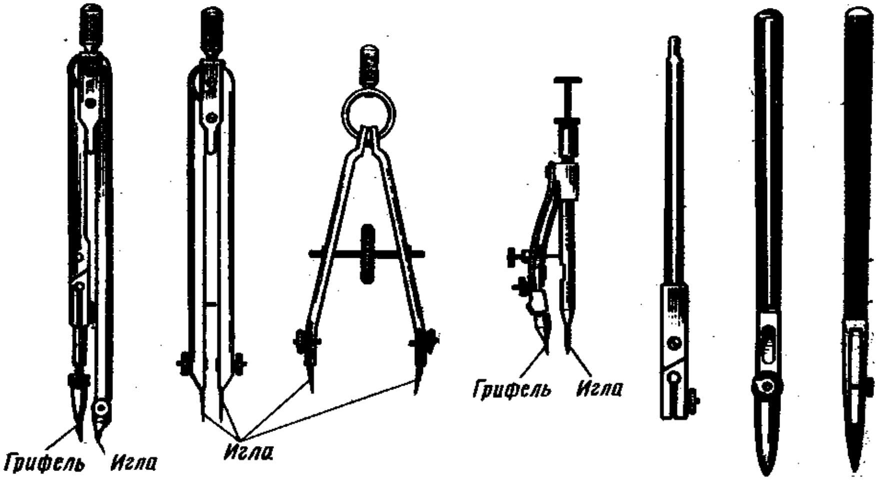


Рис. 2

Готовальня – футляр с чертёжными инструментами.

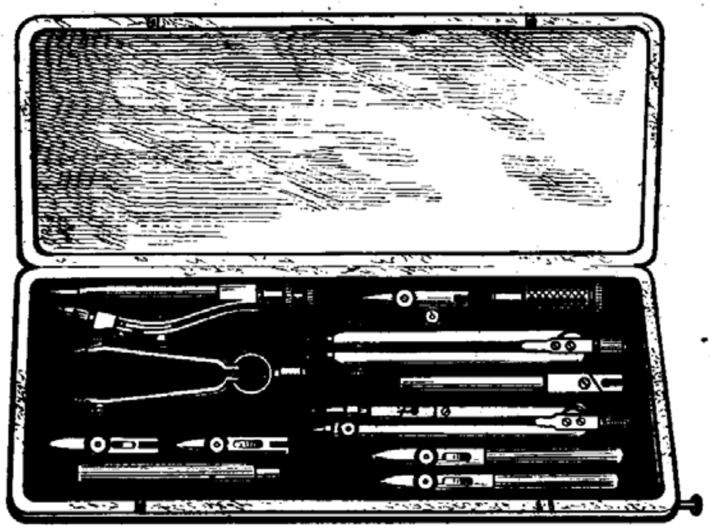


Рис. 3

Карандаш***и***

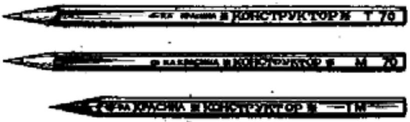


Рис. 4

Ц***а***нговый каранд***а***ш

Рис. 5

Лин***е***йка

Рис. 6

Рейсш***и***на

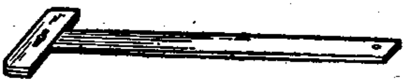


Рис. 7

Угольники

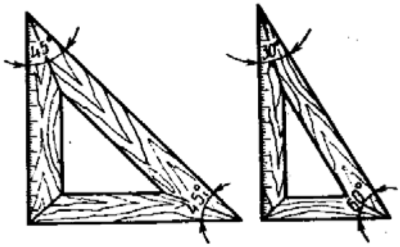


Рис. 8

Лек***а***ла

Рис. 9

Транспорт***и***р

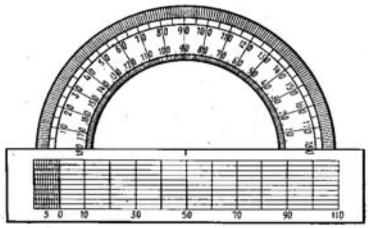


Рис. 10

Рез***и***нка (л***а***стик)

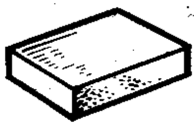


Рис. 11

Чертеж***и*** выполн***я***ют с п***о***мощью черт***е***жных инструм***е***нтов (рис. 2-11). Карандаш***и*** быв***а***ют: тв***ё***рдые (Т; 2Т; 3Т; Н; 2Н; 3Н), м***я***гкие (М; 2М; В; 2В), ср***е***дние (ТМ; НВ; F).

Черт***ё***жная бум***а***га леж***и***т на черт***ё***жной доск***е***. Кн***о***пки закрепл***я***ют черт***ё***жную бум***а***гу на доск***е*** (рис. 12).

Каранд***а***ш д***о***лжен быть пр***а***вильно зат***о***чен (рис. 13).

Горизонт***а***льные прям***ы***е ч***е***ртят с п***о***мощью рейсш***и***ны (рис. 14). Вертик***а***льные (рис. 15) и накл***о***нные прям***ы***е ч***е***ртят с п***о***мощью рейсш***и***ны и уг***о***льника (рис. 16).

Крив***ы***е ч***е***ртят с п***о***мощью лек***а***ла (рис. 17).

Угол измер***я***ют с п***о***мощью транспорт***и***ра (рис. 18).

Окр***у***жность ч***е***ртят с п***о***мощью ц***и***ркуля. Как держ***а***ть ц***и***ркуль пок***а***зано на рис. 19. М***а***ленькие окр***у***жности ч***е***ртят с п***о***мощью кронц***и***ркуля. Держ***а***ть кронц***и***ркуль н***а***до так (рис. 20). Больш***и***е окр***у***жности ч***е***ртят с п***о***мощью ц***и***ркуля и удлин***и***теля (рис. 21).

Расст***о***яния измер***я***ют с п***о***мощью измер***и***теля и лин***е***йки (рис. 22).

Черт***ё***жная доск***а*** и принадл***е***жности

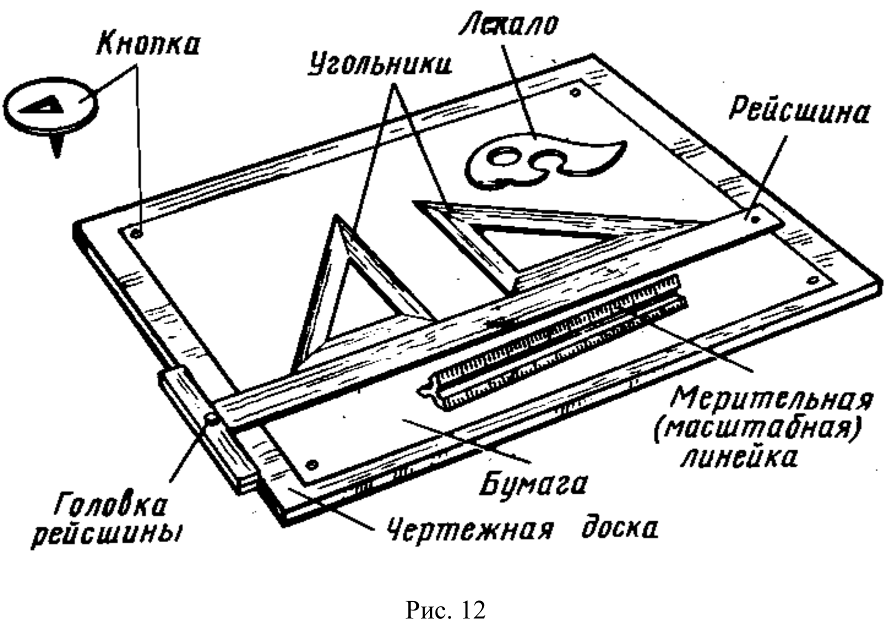


Рис. 12

Зат**о**чка карандаш**е**й

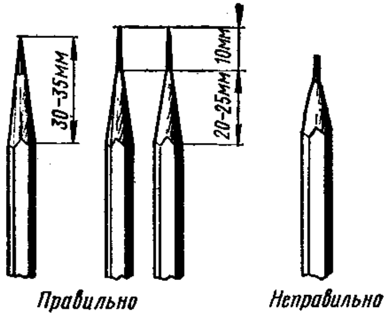


Рис. 13

Постро**е**ние горизонт**а**льных и верти**к**альных прям**ы**х

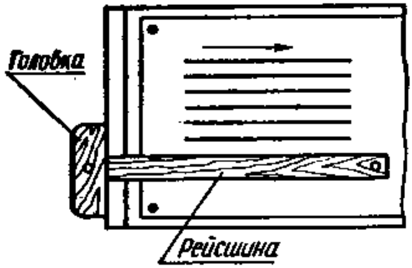


Рис. 14

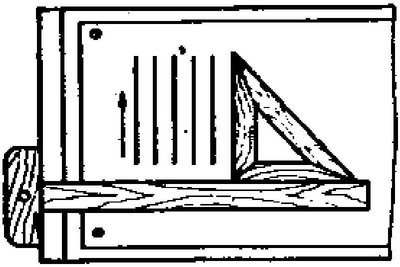


Рис. 15

Постро**е**ние накл**о**нных прям**ы**х

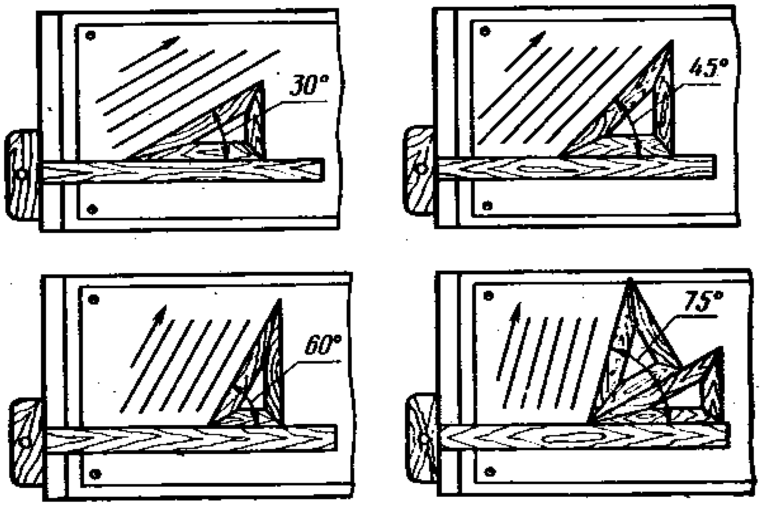


Рис. 16

Постро***е***ние крив***ы***х

Рис. 17

Постро***е***ние угл***о***в

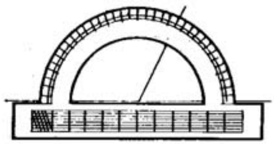


Рис. 18

Постро***е***ние окр***у***жностей

Рис. 19

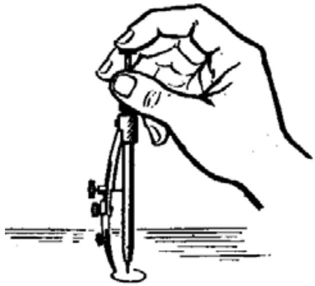


Рис. 20

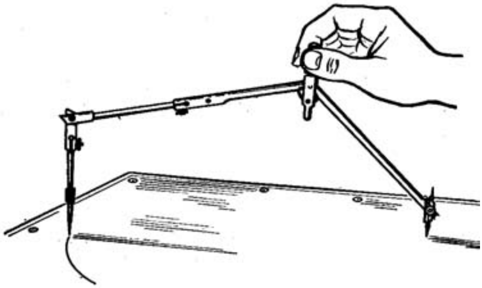


Рис. 21

Измер***е***ние и откл***а***дывание расст***о***яний

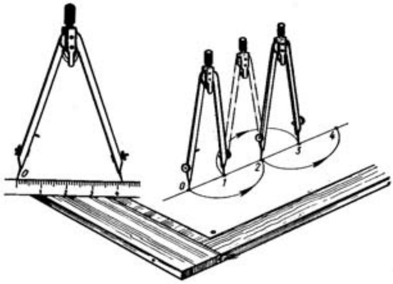


Рис. 22

§ 3. Прямые линии.

Точка и прямая – основные понятия геометрии на плоскости. Прямая линия бесконечна; через любые две точки плоскости можно провести прямую, причём только одну. Линии обозначают строчными буквами латинского алфавита – *a, b, c, d*...Точки обозначают прописными буквами латинского алфавита – *A, B, C, D* …

На рис. 23 показаны ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ ПРЯМЫЕ. Расстояние между параллельными прямыми одинаково в любом месте. Параллельные прямые обозначают $\boldsymbol{a \parallel b}$.

На рис. 24 показаны ПЕРЕСЕКАЮЩИЕСЯ ПРЯМЫЕ. Они имеют одну общую точку ***K***. Пересекающиеся прямые обозначают $\boldsymbol{a \cap b = K}$.

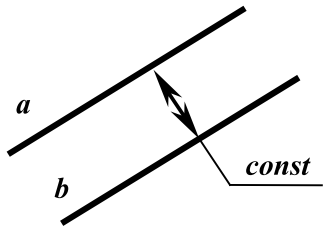


Рис. 23. $a \parallel b$.

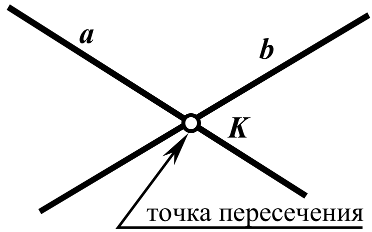


Рис. 24. $a \cap b = K$.

Если пересекающиеся прямые образуют прямой угол, – это взаимно-перпендикулярные прямые (рис. 25). Прямая ***a*** есть перпендикуляр к прямой ***b***. Прямая ***b*** есть перпендикуляр к прямой ***a***. Такие прямые обозначаются $\boldsymbol{a \perp b}$ или $\boldsymbol{b \perp a}$.

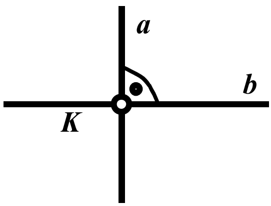
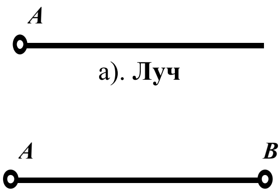


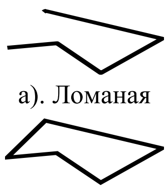
Рис. 25. $a \perp b$, $b \perp a$.



а). **Луч**

б). **Отрезок** *AB*

Рис. 26



а). Ломаная

б). Замкнутая ломаная

Рис. 27

ЛУЧ (полупрямая) – часть прямой, ограниченная точкой ***A*** (рис. 26, а). ОТРЕЗОК – часть прямой линии между точками ***A*** и ***B*** (рис. 26, б). Линия, состоящая из нескольких отрезков, никакие два соседние из которых не лежат на одной прямой, называется ЛОМАНОЙ (рис. 27, а). Если концы ломаной совпадают, – она называется ЗАМКНУТОЙ (рис. 27, б).

Рассмотрим решение некоторых задач.

Паралл***е***льные прям***ы***е.

Зад*а*ча. Т***о***чка ***A*** не леж***и***т на прям***о***й ***a***. Ч***е***рез т***о***чку ***A*** провест***и*** прям***у***ю ***b***, паралл***е***льную прям***о***й ***a***.

Зад***а***ча м***о***жет быть решен***а*** н***е***сколькими сп***о***собами.

1). Постро***е***ние прям***о***й с п***о***мощью уг***о***льника и лин***е***йки пок***а***зано на рис. 28.

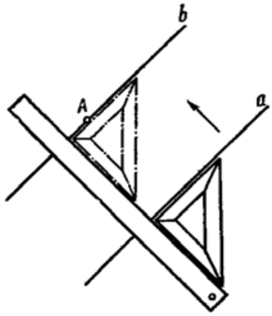
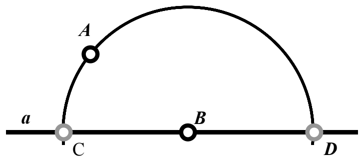


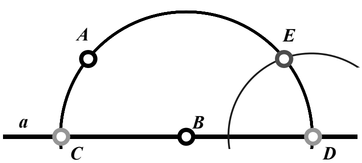
Рис. 28

2). Посл***е***довательность постро***е***ния такой прям***о***й с п***о***мощью ц***и***ркуля и лин***е***йки пок***а***зана на рис. 29.

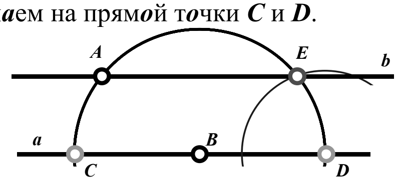
a). Дан***а*** прям***а***я ***a*** и т***о***чка ***A***.



b). Берём произв***о***льную т***о***чку ***B*** на прям***о***й ***a***. Из т***о***чки ***B***, как из ц***е***нтра, прово***д***им дуг***у*** р***а***диуса ***R***=***AB***. Получ***а***ем на прям***о***й т***о***чки ***C*** и ***D***.



c). Измер***я***ем ц***и***ркулем расст***о***яние ***CA*** и прово***д***им этим р***а***диусом дуг***у*** из т***о***чки ***D***. Т***о***чку пересеч***е***ния с п***е***рвой дуг***о***й обозн***а***чим ***E***.

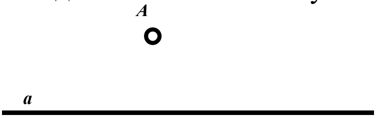


d). Ч***е***рез т***о***чку ***A*** и т***о***чку ***E*** прово***д***им прям***у***ю ***b***, ***b***‖***a***.

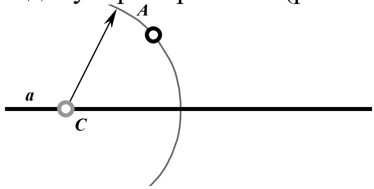
Рис. 29

Перпендикул***я***рные прям***ы***е.

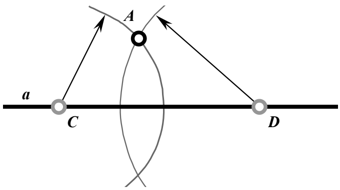
Зад*а*ча. Из т***о***чки А опуст***и***ть перпендикул***я***р к прям***о***й ***a*** (рис. 30).



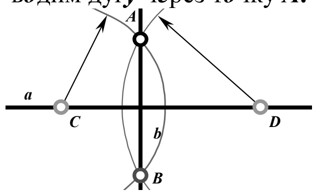
а). Дан***ы*** т***о***чка ***A*** и прям***ая*** ***a***.



b). Из люб***о***й т***о***чки ***C*** прям***ой*** ***a*** проводим дуг***у*** ч***е***рез т***о***чку ***A*.**



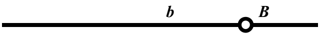
c). Из друг***ой*** т***о***чки ***D*** прям***ой*** ***a*** пров***о***дим втор***у***ю дуг***у*** ч***е***рез т***о***чку ***A*.**



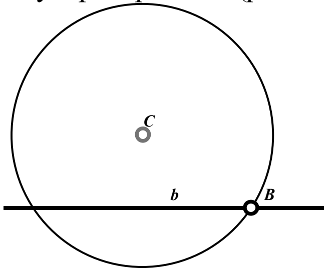
d). Ч***е***рез т***о***чки пересеч***е***ния дуг ***B*** и ***A*** прово***д***им иск***о***мую прям***у***ю ***b***.

Рис. 30

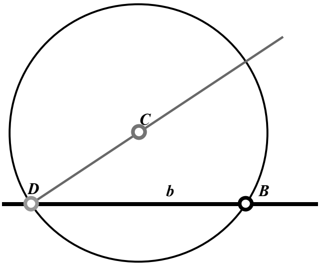
Зад*а*ча. В т***о***чке ***B*** восст***а***вить перпендикул***я***р к прям***о***й *b* (рис. 31).



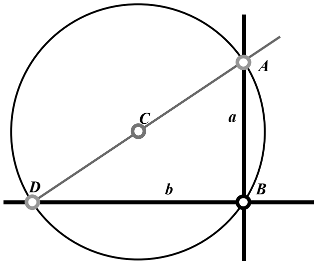
а). Дан***ы*** т***о***чка ***B*** и прям***ая*** ***b***.



b). Из люб***о***й т***о***чки ***C*** вне прям***о***й ***b*** прово***д***им окр***у***жность ч***е***рез т***о***чку ***B*.**



c). Определ***я***ем т***о***чку ***D*** и прово***д***им луч [***DC***)**.**



d). Определ***я***ем т***о***чку ***A*** и прово***д***им иск***о***мую пр***я***мую ***AB*** ⊥ ***b*.**

Рис. 31

Задача. Разделить отрезок AB на две равные части (рис. 32).

1) Дан отрезок AB.
2) Из центра A проводим дугу радиуса R. Из центра B проводим дугу радиуса R. Радиус R берём произвольно, но так, чтобы $R>|AB|/2$. Получаем точки C и D, отрезок $CD \perp AB$.
3) $CD \cap AB = K$. Точка K делит отрезок AB на две равные части $AK=KB$.

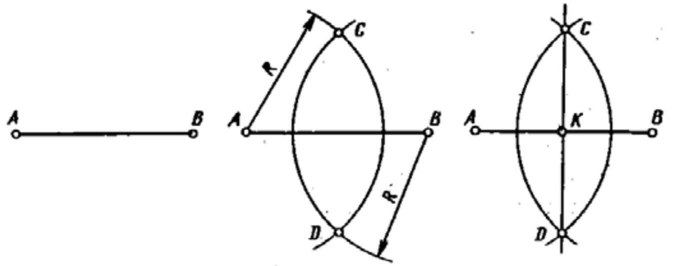


Рис. 32

Задача. Разделить отрезок MN на пять равных частей (рис. 33).

Решение основано на известном свойстве отрезков, отсекаемых параллельными прямыми. Если на одной стороне угла (рис. 34) отложить равные отрезки $[AB] = [BC] = [CD]$ и через их концы провести параллельные прямые $BE \parallel CF \parallel DQ$, пересекающие другую сторону угла, то и на ней отложатся равные между собой отрезки $[AE] = [EF] = [FQ]$. Верно и обратное: если $[AB] = [BC] = [CD]$ и $[AE] = [EF] = [FQ]$, то $BE \parallel CF \parallel DQ$.

Для решения проведём из точки M произвольный луч и отложим на нем циркулем пять равных отрезков $[M1]$, $[12]$, $[23]$, $[34]$, $[45]$. Последнюю полученную точку 5 соединим с точкой N. Через точки 1, 2, 3 и 4 проведём прямые, параллельные прямой $N5$. Отрезок MN будет разделён на пять равных частей.

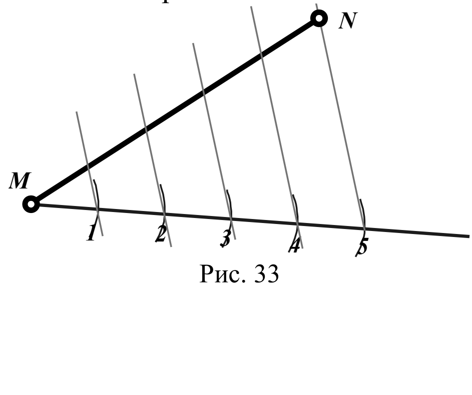


Рис. 33

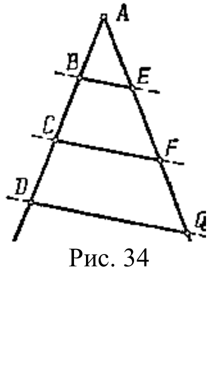


Рис. 34

Задача. Разделить отрезок AB в отношении 1:2.

Указание. Для решения задачи на отрезке AB необходимо найти точку C, удовлетворяющую условию: $|AC|/|CB| = ½$, то есть отрезок AB надо разделить на три равные части.

§ 4. Углы.

Два луча, которые выходят из одной точки, образуют УГОЛ (рис. 35). Каждый луч называется СТОРОНОЙ угла, их общая точка – ВЕРШИНОЙ угла.

Угол может быть острым, прямым, тупым и развёрнутым. Величина угла измеряется в градусах или радианах.

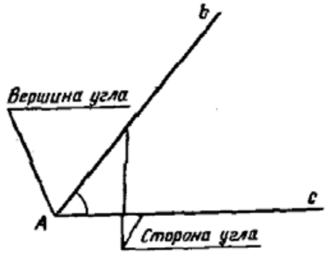


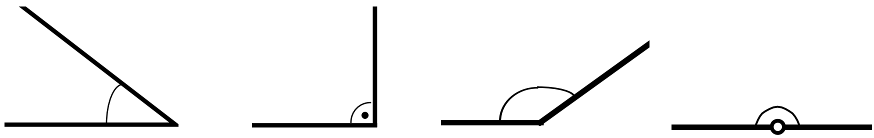
Рис. 35

Острый угол меньше 90° или меньше $\pi/2$ радиан (рис. 36, а).

Прямой угол равен 90° или $\pi/2$ радиан (рис. 36, б).

Тупой угол больше 90° или больше $\pi/2$ радиан (рис. 36, в).

Развернутый угол равен 180° или π радиан (рис. 36, г).



а б в г

Рис. 36

Две пересекающиеся прямые образуют четыре угла (рис. 37). Два угла, стороны одного из которых являются продолжениями сторон другого, называются ВЕРТИКАЛЬНЫМИ (углы 1 и 3, 2 и 4). Два угла, у которых одна сторона общая, а две другие составляют прямую линию, называются СМЕЖНЫМИ (углы 1 и 2, 2 и 3, 3 и 4, 4 и 1).

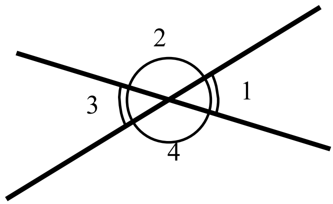


Рис. 37

С п***о***мощью транспорт***и***ра м***о***жно постр***о***ить люб***о***й ***у***гол (рис. 38).

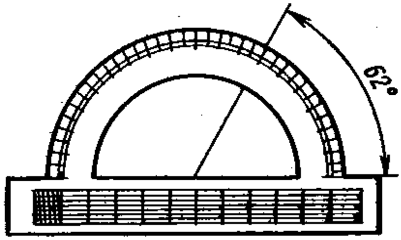


Рис. 38

Чт***о***бы постр***о***ить угл***ы*** в 15°, 30°, 45°, 60°, 75°, 105°, м***о***жно использовать уг***о***льники (рис. 39).

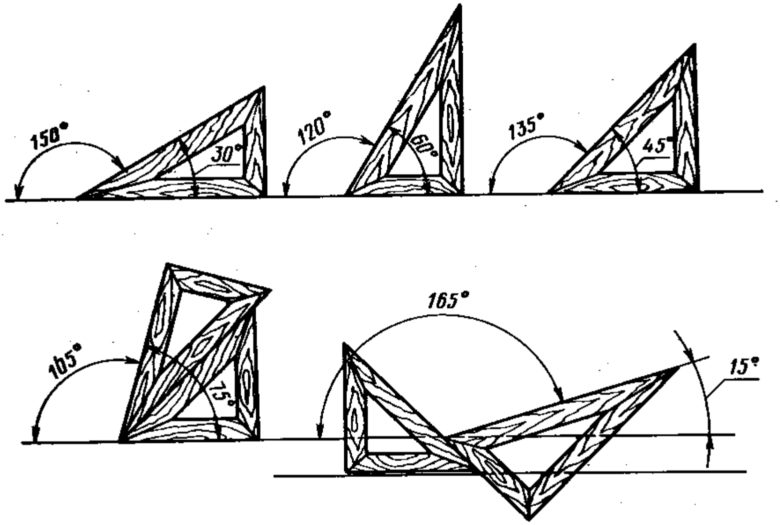


Рис. 39

Прям***а***я, кот***о***рая прох***о***дит ч***е***рез верш***и***ну угл***а*** и д***е***лит ***у***гол на две р***а***вные ч***а***сти, есть БИССЕКТР***И***СА угл***а*** (рис. 40).

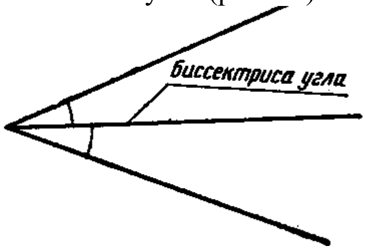


Рис. 40

Задача. Построить биссектрису угла (рис. 41).

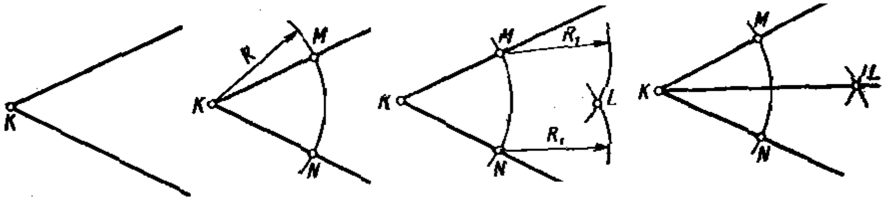


Рис. 41

1) Дан угол *K*.
2) Из вершины угла *K,* как из центра, проводим дугу радиуса *R (R* берём произвольно). Дуга пересекает стороны угла в точке *M* и точке *N*.
3) Из центра *M* и центра *N* проводим дуги радиуса R_1 (радиус R_1 берём также произвольно, например, $R_1=R$). Дуги пересекаются в точке *L*.
4) Прямая *KL* есть биссектриса угла *K*.

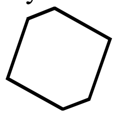
§ 5. Многоугольники.

Многоугольник – это плоская фигура, ограниченная замкнутой ломаной. Каждый отрезок ломаной называется стороной многоугольника.

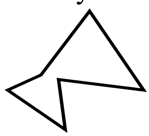
В зависимости от числа сторон многоугольники разделяются на треугольники, четырёхугольники и т.д. Многоугольник называется ВЫПУКЛЫМ, если он расположен по одну сторону от прямой, проведённой через любую его сторону (смотри рис.).

Многоугольник называется ПРАВИЛЬНЫМ, если все его стороны и углы равны между собой.

выпуклый *и*



невыпуклый

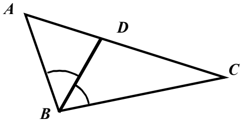


многоугольники

ТРЕУГОЛЬНИКИ

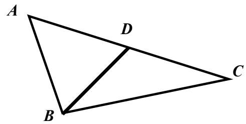
Стороны и углы треугольника – это его основные элементы. Кроме того, в треугольнике можно построить три биссектрисы, три высоты и три медианы.

БИССЕКТРИСОЙ треугольника называют отрезок биссектрисы угла треугольника от его вершины до противолежащей стороны – ***[BD]***;
все три биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке.



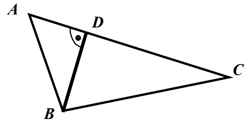
$\angle ABD=\angle DBC$

МЕДИ***А***НОЙ треуг***о***льника назыв***а***ют отр***е***зок, соедин***я***ющий верш***и***ну треуг***о***льника с серед***и***ной противолеж***а***щей сторон***ы*** – ***[BD]***; все три меди***а***ны треуг***о***льника пересек***а***ются в одн***о***й т***о***чке, в кот***о***рой к***а***ждая меди***а***на д***е***лится в отнош***е***нии 2:1, счит***а***я от верш***и***ны.



$|AD| = |DC|$

ВЫСОТ***О***Й треуг***о***льника назыв***а***ют отр***е***зок перпендикул***я***ра, оп***у***щенного из верш***и***ны угл***а*** на противолеж***а***щую ст***о***рону ***и***ли е***ё*** продолж***е***ние – ***[BD]***; все три высот***ы*** треуг***о***льника пересек***а***ются в одн***о***й т***о***чке.



$BD \perp AC$

Треуг***о***льники в зав***и***симости от величин***ы*** их угл***о***в подраздел***я***ются на ОСТРОУГ***О***ЛЬНЫЕ (все три угла – ***о***стрые), ТУПОУГ***О***ЛЬНЫЕ (есть туп***о***й ***у***гол), ПРЯМОУГ***О***ЛЬНЫЕ (есть прям***о***й ***у***гол).

Ст***о***роны прямоуг***о***льного треуг***о***льника им***е***ют ос***о***бые назв***а***ния: сторон***а***, леж***а***щая пр***о***тив прям***о***го угл***а***, называ***е***тся ГИПОТЕН***У***ЗОЙ, остальн***ы***е ст***о***роны – К***А***ТЕТАМИ.

В зав***и***симости от сравн***и***тельной длин***ы*** стор***о***н треуг***о***льники подраздел***я***ются на РАВНОСТОР***О***ННИЕ (все три сторон***ы*** равн***ы***), РАВНОБ***Е***ДРЕННЫЕ (две сторон***ы*** равн***ы***) и РАЗНОСТОР***О***ННИЕ (все три сторон***ы*** им***е***ют разл***и***чные дл***и***ны).

Сторон***а*** равноб***е***дренного треуг***о***льника, не р***а***вная двум остальн***ы***м, об***ы***чно назыв***а***ется ег***о*** ОСНОВ***А***НИЕМ, а противолеж***а***щая ей верш***и***на – ВЕРШ***И***НОЙ равноб***е***дренного треуг***о***льника.

Равноб***е***дренный треуг***о***льник облад***а***ет сл***е***дующими в***а***жными св***о***йствами:

- углы при основании равнобедренного треугольника равны между собой.
- биссектриса угла при вершине равнобедренного треугольника является одновременно его медианой и высотой.

Отсюда как следствие вытекает, что:

- в равностороннем треугольнике все внутренние углы равны между собой.
- в равностороннем треугольнике биссектриса любого его угла является одновременно и медианой, и высотой.
- в прямоугольном треугольнике катет, лежащий против угла в 30°, равен половине гипотенузы.

Равносторонний треугольник является правильным многоугольником.

Отрезок, соединяющий середины двух сторон треугольника, называется его средней линией. Средняя линия треугольника параллельна, третьей стороне и равна ее половине.

Четырехугольники

Наиболее распространены следующие четырехугольники:

- ПАРАЛЛЕЛОГРАММ и его частные случаи (прямоугольник, ромб, квадрат),
- ТРАПЕЦИЯ.

Параллелограмм – это четырехугольник, у которого противоположные стороны попарно параллельны.

Параллелограмм обладает следующими свойствами:

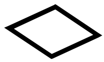
1) противоположные углы равны, а сумма углов, прилежащих к одной стороне, равна 180°;
2) противоположные стороны равны между собой;
3) диагонали в точке пересечения делятся пополам.

Прямоугольник – это параллелограмм, у которого все углы прямые.

Поэтому прямоугольник обладает всеми свойствами 1), 2), 3) параллелограмма, и, кроме того:

4) Диагонали прямоугольника равны между собой.

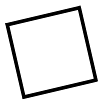
Ромб –это параллелограмм, у которого все стороны равны.



Ромб имеет свойства 1), 2), 3) параллелограмма, и, кроме этого:

4) Диагонали ромба взаимно перпендикулярны и являются биссектрисами его углов.

Квадрат – частный случай ромба (ромб с прямыми углами) и частный случай прямоугольника (прямоугольник с равными сторонами).

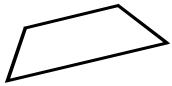


Следовательно, квадрат обладает всеми свойствами ромба и прямоугольника: его диагонали равны и в точке пересечения делятся пополам (как у прямоугольника), взаимно перпендикулярны и являются биссектрисами углов (как у ромба).

Свойства, которые определяют вид четырехугольника, называются его признаками. Отметим некоторые из них.

- четырехугольник является параллелограммом, если у него
  1) две противоположные стороны равны и параллельны, или
  2) противоположные стороны попарно равны, или
  3) диагонали в точке пересечения делятся пополам.
- четырехугольник, диагонали которого равны и в точке пересечения делятся пополам, является прямоугольником.
- четырехугольник, диагонали которого взаимно перпендикулярны и в точке пересечения делятся пополам, является ромбом.
- четырехугольник, диагонали которого взаимно перпендикулярны и равны и в точке пересечения делятся пополам, является квадратом.

ТРАПЕЦИЯ – это четырехугольник, у которого две противоположные стороны параллельны.



Эти параллельные стороны называются основаниями трапеции. Две другие стороны называются боковыми сторонами трапеции.

Трапеция называется РАВНОБЕДРЕННОЙ, если ее боковые стороны равны. Она называется ПРЯМОУГОЛЬНОЙ, если одна из ее боковых сторон перпендикулярна к основанию.

В равнобедренной трапеции углы при основаниях равны и, следовательно, сумма противоположных углов равна 180°.

Отрезок, соединяющий середины боковых сторон трапеции, называется ее средней линией. Средняя линия трапеции параллельна ее основаниям; её длина равна полусумме длин оснований.

§ 6. Окружность.

ОКР***У***ЖНОСТЬ – ***э***то з***а***мкнутая пл***о***ская крив***а***я л***и***ния, состоящая из точек, равноудаленных от некоторой точки $\boldsymbol{O}$, называемой центром (рис. 42). Расст***о***я***ние от ц***е***нтра до люб***о***й т***о***чки окр***у***жности есть р***а***диус окр***у***жности (например, $\boldsymbol{OA=OB=OC=OD=R}$). КРУГ – ***э***то часть пл***о***скости, леж***а***щая внутр***и*** окр***у***жности (рис. 43).

Прям***ая*** $\boldsymbol{l}$, кот***о***рая пересек***а***ет окружность, есть СЕК***У***ЩАЯ (рис. 42). Отр***е***зок е***ё*** $\boldsymbol{AB}$, леж***а***щий внутр***и*** окр***у***жности, есть Х***О***РДА. Х***о***рда, кот***о***рая прох***о***дит ч***е***рез центр, есть ДИ***А***МЕТР ($\boldsymbol{CD}$). Ди***а***метр р***а***вен двум р***а***диусам ($\boldsymbol{d=2R}$) Х***о***рда перпендикул***я***рна р***а***диусу, кот***о***рый, прох***о***дит ч***е***рез е***ё*** серед***и***ну.

Часть окружности есть дуга (например, ***AnB,*** рис. 44).

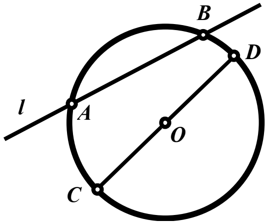


Рис. 42

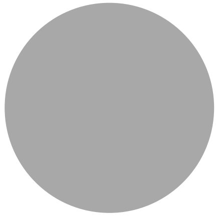


Рис. 43

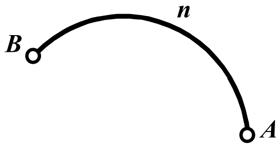


Рис. 44

Через три точки ***A***, ***B*** и ***C***, если они не лежат на одной прямой, можно провести только одну окружность. Центр этой окружности лежит на пересечении перпендикуляров, восставленных к отрезкам ***AB*** и ***BC*** в их середине (смотри рис. 54).

Окружность, проходящая через три вершины треугольника, называется описанной около треугольника (при этом Δ***ABC*** называется вписанным в окружность).

Из вышесказанного вытекает, что:

1) Центр описанной около треугольника окружности лежит на пересечении перпендикуляров, восставленных к сторонам треугольника в их середине (серединных перпендикуляров).

2) Перпендикуляры, восставленные к сторонам треугольника в их середине, пересекаются в одной точке. Эта точка является четвертой «замечательной» точкой в треугольнике (первые три – точки пересечения высот, биссектрис и медиан).

Взаимное расположение прямой и окружности, двух окружностей. Прямая и окружность не могут иметь более двух общих точек, поэтому возможны лишь следующие случаи расположения прямой относительно окружности:

1) Прямая не имеет ни одной общей точки с окружностью.

2) Прямая имеет лишь одну общую точку с окружностью.

3) Прямая имеет две общие точки с окружностью.

Прямая, пересекающая окружность в двух точках, называется СЕКУЩЕЙ. Прямая, имеющая с окружностью только одну общую точку, называется КАСАТЕЛЬНОЙ к окружности, а их общая точка называется точкой касания (смотри рис. 67).

Радиус, проведенный в точку касания, перпендикулярен к касательной. Обратно, прямая, перпендикулярная к радиусу в его конечной точке, лежащей на окружности, является касательной к окружности. Отрезки касательных, проведенных к окружности из одной и той же внешней точки, равны между собой.

Рассмотрим взаимное расположение двух окружностей. Так как две различные окружности не могут иметь более двух общих точек, то возможны следующие случаи их взаимного расположения:

1) Окружности имеют две общие точки (окружности пересекаются). В этом случае расстояние между центрами окружностей O_1O_2 (рис. 45) меньше суммы их радиусов и больше разности радиусов, т.е.

$$R_1 - R_2 < O_1O_2 < R_1 + R_2.$$

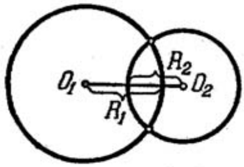
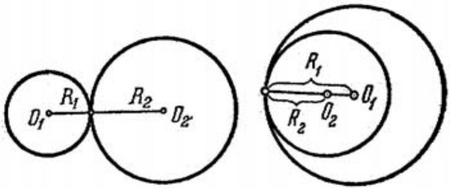


Рис. 45

2) Окружности имеют одну общую точку. Такие окружности называются КАСАЮЩИМИСЯ (внешнее касание показано на рис. 46, *а*, и внутреннее касание – на рис. 46, *б*). В случае внешнего касания $O_1O_2=R_1+R_2$, в случае внутреннего касания $O_1O_2=R_1-R_2$ ($R_1>R_2$).



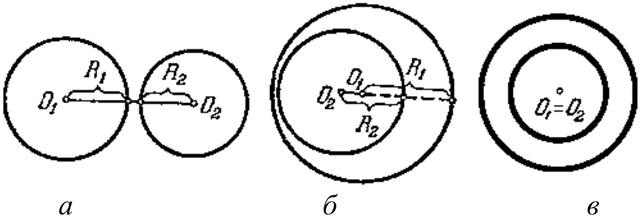
а *б*

Рис. 46

3) Окружности не имеют ни одной общей точки. Здесь возможны следующие положения:

а) Окружности лежат одна вне другой (рис. 47, *а*). Тогда $R_1+R_2<O_1O_2$.

б) Одна окружность лежит внутри другой. Если при этом их центры не совпадают, то $0<\boldsymbol{O_1O_2}<\boldsymbol{R_1}-\boldsymbol{R_2}$ (рис. 47, *б*). Если же их центры совпадают, то $\boldsymbol{O_1O_2}=0$. Окружности, имеющие общий центр, называются концентрическими (рис. 47, *в*).



а *б* *в*

Рис. 47

Углы в круге. Если повернуть радиус OA на полный угол (360°), то его конец – точка A – опишет полную окружность. Поэтому полной окружности приписывают 360 дуговых градусов.

Дуговые градусы обозначаются так же, как и угловые. Например, половина окружности содержит 180° (дуговых), развернутый угол содержит 180° (угловых).

ЦЕНТРАЛЬНЫЙ угол AOB (рис. 48) и дуга AB, на которую он опирается, измеряются одним и тем же числом градусов: угол – угловыми, а дуга – дуговыми.

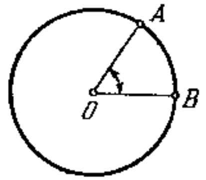


Рис. 48

Угол, вершина которого находится на окружности, а стороны являются хордами, называется ВПИСАННЫМ. Вписанный угол измеряется половиной дуги, на которую он опирается. Это означает, что если дуга AnB (рис. 49) содержит α дуговых градусов, то угол ACB содержит $\frac{1}{2}\alpha$ угловых градусов.

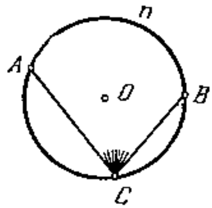


Рис. 49

Отсюда вытекает, что:

1) Все вписанные углы, опирающиеся на дугу AnB, равны между собой.

2) Вписанные углы, опирающиеся на диаметр, равны 90°.

Угол, образованный касательной и хордой (рис. 50), измеряется половиной дуги, заключенной между его сторонами:

$$\angle BAC = \tfrac{1}{2}\, AC.$$

Угол, образованный секущими (рис. 50), измеряется полуразностью дуг, которые он отсекает на окружности, т. е.

$$\angle ADC = \tfrac{1}{2}\,(AC - KL).$$

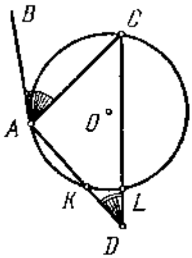


Рис. 50

Угол с вершиной внутри круга измеряется полусуммой дуг, заключенных между хордами, образующими этот угол (рис. 51), т. е.

$$\angle AED = \tfrac{1}{2}\,(AD + CB).$$

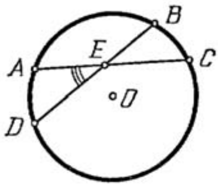


Рис. 51

Вписанные и описанные многоугольники. Многоугольник, все вершины которого лежат на окружности, называется ВПИСАННЫМ в окружность. Многоугольник называется ОПИСАННЫМ около окружности, если все его стороны касаются окружности.

Любой треугольник можно вписать в окружность. Четырехугольник можно вписать в окружность только в том случае, когда сумма его противоположных углов равна 180°. Отсюда вытекает, что параллелограмм, ромб и неравнобочную трапецию нельзя вписать в окружность. Можно вписать в окружность прямоугольник, равнобочную трапецию, квадрат.

В любой треугольник можно вписать окружность. Центр вписанной окружности должен быть равноудален от всех трех сторон треугольника и поэтому является точкой пересечения биссектрис треугольника. В четырехугольник можно вписать окружность в том случае, когда суммы длин его противоположных сторон равны между собой. Отсюда следует, что нельзя вписать окружность в параллелограмм и в прямоугольник. Можно вписать окружность в ромб, в квадрат, в трапецию (если сумма длин оснований трапеции равна сумме длин ее боковых сторон).

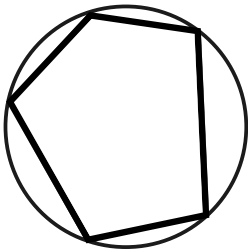


Рис. 52. Вписанный многоугольник, описанная окружность.

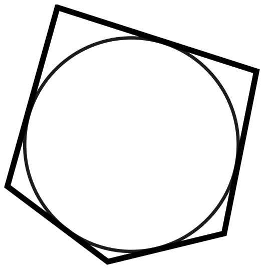


Рис. 53. Описанный многоугольник, вписанная окружность.

Рассмотрим решение некоторых задач.

Зад***а***ча. Провест***и*** окр***у***жность ч***е***рез три т***о***чки (рис. 54).

1) Дан***ы*** т***о***чки ***A***,***B***,***C***.
2) Соедин***я***ем т***о***чку ***A*** с т***о***чкой ***B***, т***о***чку ***C*** с т***о***чкой ***B***.
3) Д***е***лим отр***е***зок ***AB*** и отр***е***зок ***BC*** на две р***а***вные ч***а***сти к***а***ждую (с п***о***мощью постро***е***ния серед***и***нных перпендикул***я***ров).
4) Т***о***чка ***O*** есть ц***е***нтр окр***у***жности, кот***о***рая прох***о***дит ч***е***рез т***о***чки ***A***,***B,C.***

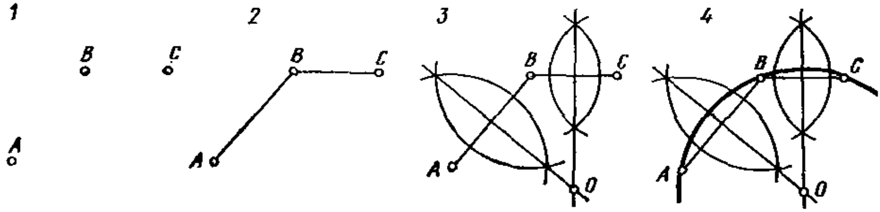


Рис. 54

<u>Зад***а***ча</u>. Найт***и*** ц***е***нтр дуг***и*** (рис. 55).

1) Дан***а*** дуг***а a.***
2) На дуг***е a*** произв***о***льно берём три т***о***чки ***A***, ***B***,***C***.
3) Пров***о***дим х***о***рду ***AB*** и х***о***рду ***BC***.
4) Д***е***лим х***о***рду ***AB*** и х***о***рду ***BC*** на р***а***вные ч***а***сти (с п***о***мощью постро***е***ния серед***и***нных перпендикул***я***ров). Т***о***чка ***O*** есть ц***е***нтр дуг***и a***.

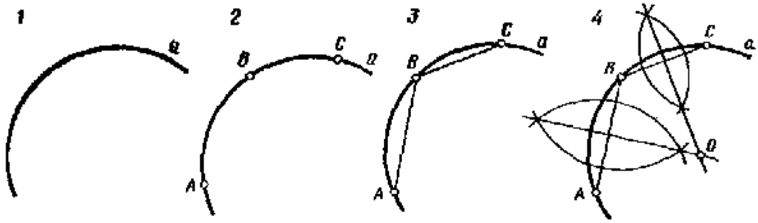


Рис. 55

<u>Дел***е***ние окр***у***жности на 4, 8 р***а***вных част***е***й.</u>

На рис. 56 пок***а***зана дет***а***ль, в кот***о***рой им***е***ется 4 отв***е***рстия.

Вза***и***мно перпендикул***я***рные ди***а***метры ***AC*** и ***BD*** д***е***лят окр***у***жность на 4 р***а***вные ч***а***сти. ***ABCD*** – квадр***а***т.

Пров***о***дим биссектр***и***су угл***а AOB*** и угл***а BOC***. Т***о***чки ***1***,***2***,***3***, … ***8*** д***е***лят окр***у***жность на 8 р***а***вных част***е***й.

Зад***а***чу м***о***жно реш***и***ть с п***о***мощью уг***о***льника с угл***о***м 45° (рис. 57). Гипотен***у***за уг***о***льника прох***о***дит ч***е***рез ц***е***нтр ***O*** окр***у***жности.

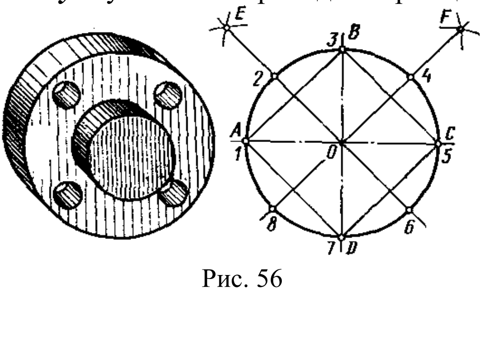


Рис. 56

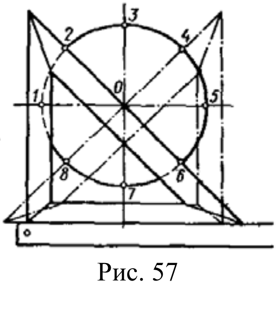


Рис. 57

Деление окружности на 3, 6, 12 равных частей.

Часто встречаются детали, в которых число одинаковых элементов кратно трём, например, на рис. 58 показана деталь (и её чертёж) с тремя отверстиями и тремя пазами.

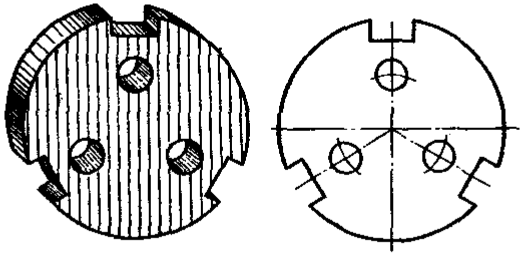


Рис. 58

1. Деление окружности на три равные части выполняем с помощью циркуля (рис. 59). Ставим иглу циркуля в точку ***A*** окружности и чертим дугу радиуса ***R***, которая пересекает окружность в точках 2 и 3. Точки 1, 2, 3 делят окружность на 3 равные части.

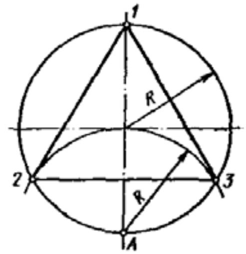
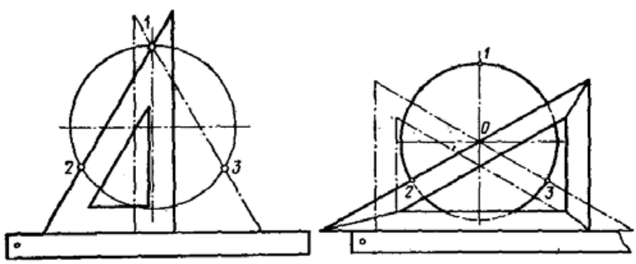


Рис. 59

Деление окружности на 3 равные части можно выполнить с помощью угольника с углом 30° и углом 60°. Первый способ показан на рис. 60, а – гипотенуза угольника проходит через верхнюю точку окружности. Второй способ изображён на рис. 60, б – гипотенуза угольника проходит через центр ***O*** окружности.



а б

Рис. 60

2. Дел***е***ние окр***у***жности на 6 р***а***вных част***е***й. На рис. 61 пок***а***зана дет***а***ль, кот***о***рая им***е***ет 6 отв***е***рстий. Из центра в т***о***чке 1 и т***о***чке 4 (рис. 62) пров***о***дим д***у***ги р***а***диуса ***R***. Т***о***чки 1, 2, 3, … 6 д***е***лят окр***у***жность на 6 р***а***вных част***е***й.

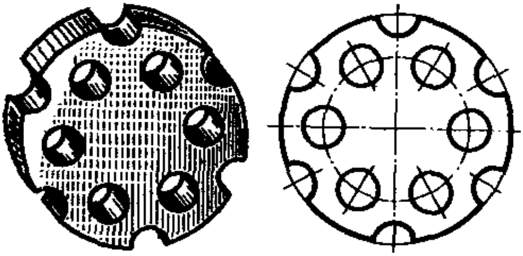


Рис. 61

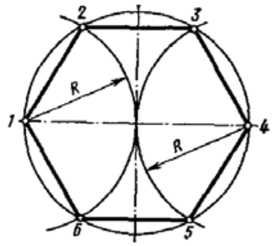
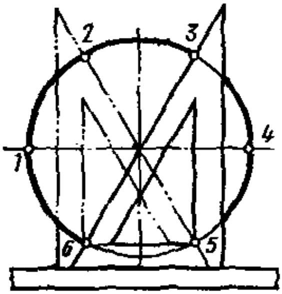
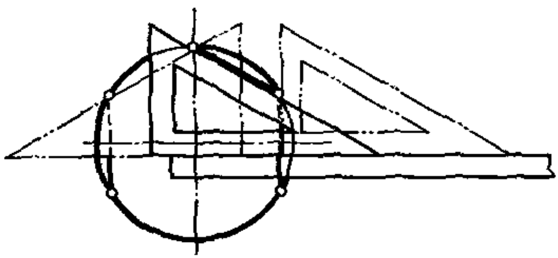


Рис. 62

Дел***е***ние окр***у***жности на 6 р***а***вных част***е***й м***о***жно в***ы***полнить с п***о***мощью уг***о***льника с угл***о***м 30° и угл***о***м 60° (рис. 63, а). Гипотен***у***за уг***о***льника прох***о***дит ч***е***рез центр окр***у***жности. С п***о***мощью уг***о***льника легк***о*** впис***а***ть в окр***у***жность пр***а***вильный шестиуг***о***льник (рис. 63, б).



а



б

Рис. 63

3. Дел***е***ние окр***у***жности на 12 р***а***вных част***е***й. На рис. 64 пок***а***зана дет***а***ль, кот***о***рая им***е***ет двен***а***дцать отв***е***рстий. Ст***а***вим игл***у*** ц***и***ркуля в т***о***чки 1, 4, 7 и10 (рис. 65) и пров***о***дим д***у***ги р***а***диуса ***R***. Т***о***чки 1, 2, 3 … 12 д***е***лят окр***у***жность на 12 р***а***вных част***е***й. Дел***е***ние окр***у***жности на 12 р***а***вных част***е***й с п***о***мощью уг***о***льника пок***а***зано на рис. 66. Гипотен***у***за уг***о***льника прох***о***дит ч***е***рез центр окр***у***жности.

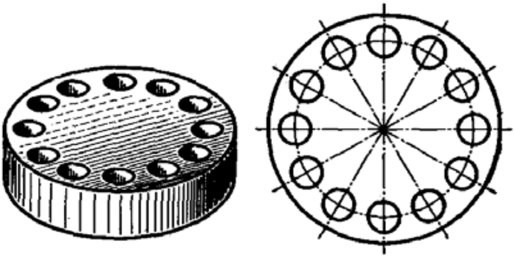


Рис. 64

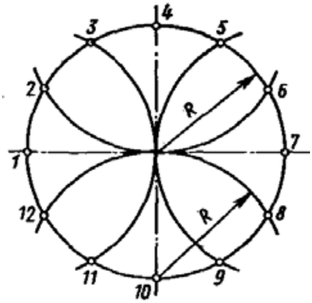


Рис. 65

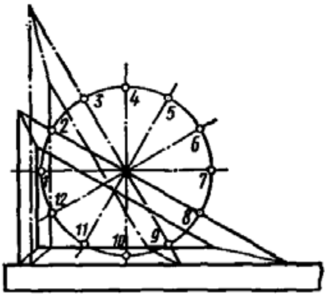


Рис. 66

§ 7. Касательные.

Из***у***чим св***о***йства прям***о***й, кот***о***рая ка-с***а***ется окр***у***жности.

КАС***А***ТЕЛЬНАЯ К ОКР***У***ЖНОСТИ – это прям***а***я, кот***о***рая им***е***ет т***о***лько одн***у*** ***о***бщую т***о***чку с окр***у***жностью. Эта т***о***чка есть Т***О***ЧКА КАС***А***НИЯ. Кас***а***тельная к окр***у***жности перпендикул***я***рна к р***а***диусу ***OE***, проведённому в т***о***чку кас***а***ния (рис. 67).

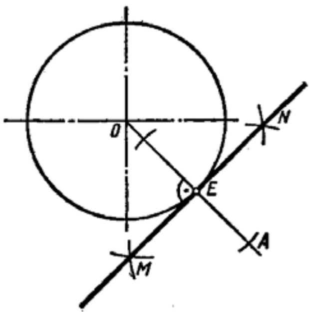


Рис. 67

Разберем предложенные задачи.

Задача 1. Провест***и*** кас***а***тельную к окр***у***жности ч***е***рез т***о***чку ***E***, кот***о***рая леж***и***т на окр***у***жности (рис. 67).

Ч***е***рез т***о***чку ***E*** прово***д***им прям***у***ю ***OA*** и стр***о***им перпендикул***я***р ***MN*** к прям***о***й ***OA*** в т***о***чке ***E***.

MN – есть кас***а***тельная к д***а***нной окр***у***жности в т***о***чке ***E***

Задача 2. Провест***и*** кас***а***тельную к окр***у***жности из т***о***чки ***A***, кот***о***рая не леж***и***т на окр***у***жности (рис. 68, 1-4).

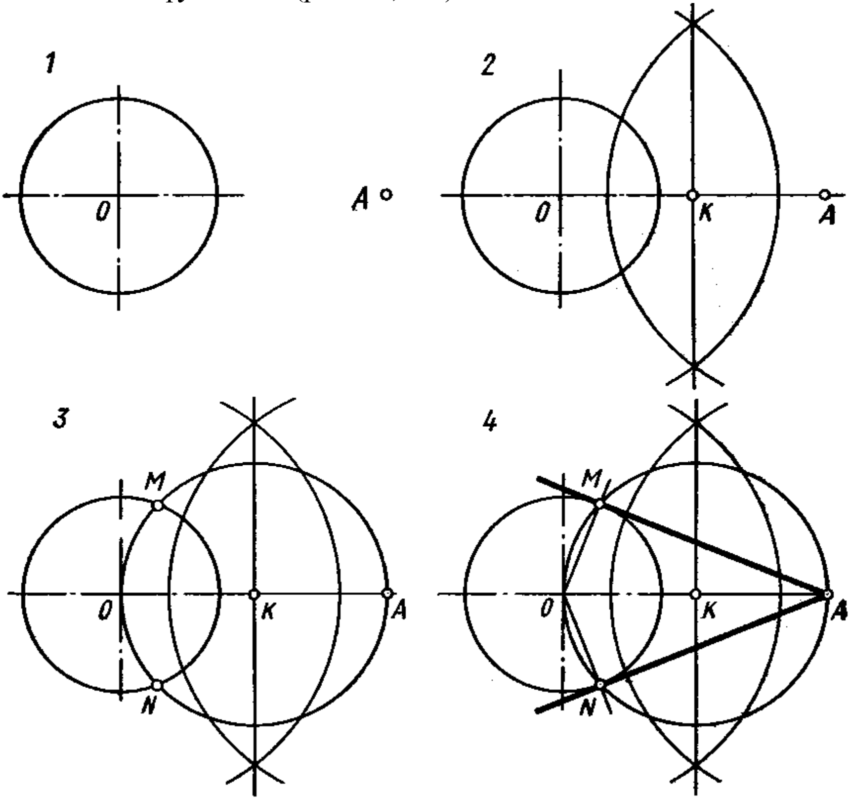


Рис. 68

1) Дан***а*** окр***у***жность и т***о***чка ***A***.
2) Соедин***я***ем центр окр***у***жности ***O*** с т***о***чкой ***A***. Отр***е***зок ***OA*** д***е***лим на две р***а***вные ч***а***сти. Получ***а***ем т***о***чку ***K***.
3) Из ц***е***нтра ***K*** пров***о***дим окр***у***жность. Её р***а***диус ***R=KA***. Получ***а***ем т***о***чки ***M*** и ***N***.
4) ***AM*** и ***AN*** кас***а***тельные к окр***у***жности.

Задача 3. Провест***и*** кас***а***тельную к двум окр***у***жностям. Кас***а***тельная м***о***жет быть вн***е***шняя или вн***у***тренняя. ***Е***сли ***о***бе окр***у***жности леж***а***т по одн***у*** ст***о***рону кас***а***тельной, так***а***я кас***а***тельная назыв***а***ется *ВН**Е**ШНЕЙ* (рис. 69, а). ***Е***сли окр***у***жности леж***а***т по р***а***зные ст***о***роны кас***а***тельной, так***а***я кас***а***тельная назыв***а***ется *ВН**У**ТРЕННЕЙ* (рис. 69, б).

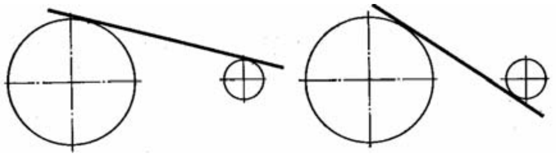


Рис. 69

Построить внешнюю общую касательную к двум окружностям.

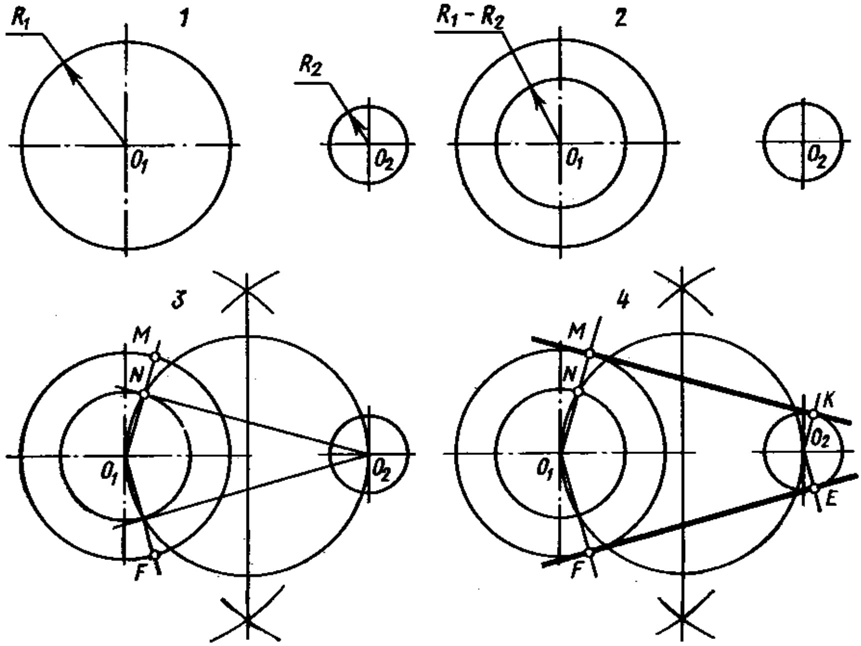


Рис. 70

1) Даны две окружности с центрами $\boldsymbol{O_1}$ и $\boldsymbol{O_2}$. Их радиусы $\boldsymbol{R_1}$ и $\boldsymbol{R_2}$.
2) Из центра $\boldsymbol{O_1}$ проводим окружность радиуса ($\boldsymbol{R_1}$-$\boldsymbol{R_2}$).
3) Строим касательную $\boldsymbol{O_2N}$ к этой окружности из точки $\boldsymbol{O_2}$. Прямая $\boldsymbol{O_1N}$ пересекает б***о***льшую окружность в точке ***M***.
4) Из точки $\boldsymbol{O_2}$ проводим прямую $\boldsymbol{O_2K}$ параллельно $\boldsymbol{O_1M}$ и соединяем точки ***M*** и ***K***. Прямая ***MK*** есть внешняя касательная к данным окружностям. Вторая внешняя касательная проходит через точки ***F*** н ***E***.

Построить внутреннюю общую касательную к двум окружностям.

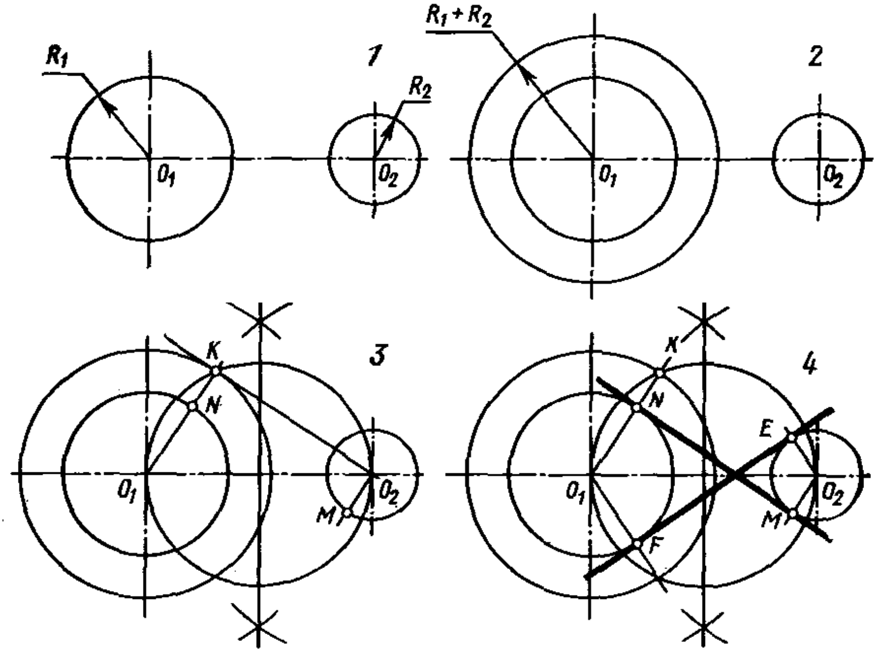


Рис. 71

1) Даны две окружности с центрами $\boldsymbol{O_1}$ и $\boldsymbol{O_2}$ радиуса $\boldsymbol{R_1}$ и $\boldsymbol{R_2}$.
2) Из центра $\boldsymbol{O_1}$ проводим окружность радиуса ($\boldsymbol{R_1}$+$\boldsymbol{R_2}$).
3) Строим касательную $\boldsymbol{O_2K}$ к этой окружности из точки $\boldsymbol{O_2}$. Соединяем точки $\boldsymbol{O_1}$ и ***K***. Отмечаем на первой окружности точку ***N***.
4) Из точки $\boldsymbol{O_2}$ проводим прямую $\boldsymbol{O_2M}$ параллельно $\boldsymbol{O_1K}$. ***N*** и ***M*** – точки касания. ***NM*** — искомая внутренняя касательная. Вторая внутренняя касательная строится так же.

§ 8. Сопряжения.

На рис. 72 пок***а***зана дет***а***ль маш***и***ны. Мы в***и***дим, как в е***ё*** контуре прям***а***я л***и***ния пл***а***вно перех***о***дит в дуг***у*** окр***у***жности ***и***ли друг***у***ю прям***у***ю.

ПЛ***А***ВНЫЙ ПЕРЕХ***О***Д ОДН***О***Й Л***И***НИИ В ДРУГ***У***Ю НАЗЫВ***А***ЕТСЯ СОПРЯЖ***Е***НИЕМ.

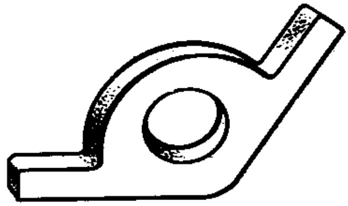


Рис. 72

Быв***а***ют сопряж***е***ния одн***о***й прям***о***й с друг***о***й прям***о***й, прям***о***й с крив***о***й, одн***о***й крив***о***й с друг***о***й крив***о***й. Одн***а*** л***и***ния перех***о***дит в друг***у***ю по дуг***е*** окр***у***жности. ***Э***та дуг***а*** называ***е***тся СОПРЯГ***А***ЮЩЕЙ ДУГ***О***Й (рис. 73). Р***а***диус ***э***той дуг***и*** окр***у***жности – Р***А***ДИУС СОПРЯЖ***Е***НИЯ. Центр ***э***той дуг***и*** – ЦЕНТР СОПРЯЖ***Е***НИЯ. Т***о***чка, где одн***а*** л***и***ния перех***о***дит в друг***у***ю – Т***О***ЧКА СОПРЯЖ***Е***НИЯ.

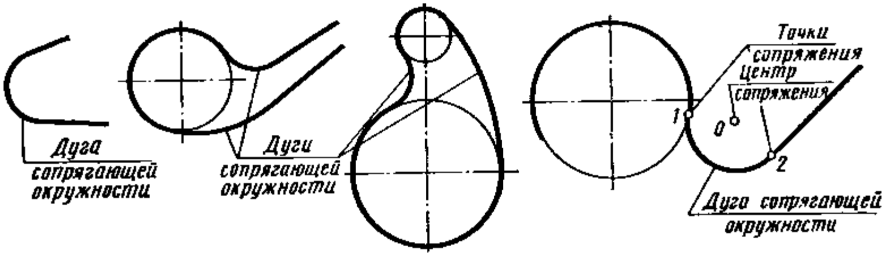


Рис. 73

Сопряж***е***ние прям***о***й л***и***нии с окр***у***жностью и сопряж***е***ние окр***у***жности с окр***у***жностью быв***а***ет

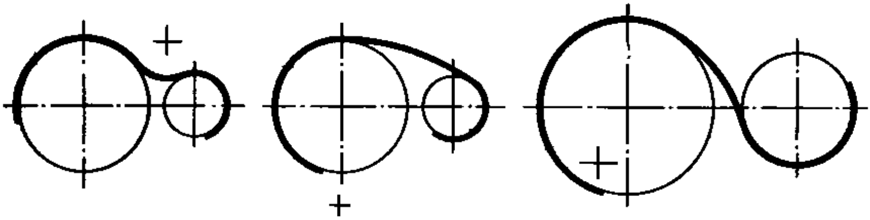
ВН***Е***ШНЕЕ, ВН***У***ТРЕННЕЕ, СМ***Е***ШАННОЕ.

ВН***Е***ШНЕЕ СОПРЯЖ***Е***НИЕ (рис. 74, а). Сопряг***а***ются две окр***у***жности. Их ц***е***нтры леж***а***т вне сопряг***а***ющей окр***у***жности. Так***о***е сопряж***е***ние назыв***а***ется вн***е***шним.

ВН***У***ТРЕННЕЕ СОПРЯЖ***Е***НИЕ (рис. 74, б). Сопряг***а***ются две окр***у***жности. Их ц***е***нтры леж***а***т внутр***и*** сопряг***а***ющей окр***у***жности. Так***о***е сопряж***е***ние назыв***а***ется вн***у***тренним.

СМ***Е***ШАННОЕ СОПРЯЖ***Е***НИЕ (рис. 74, в). Сопряг***а***ются две окр***у***жности. Центр одн***о***й окр***у***жности леж***и***т вне сопряг***а***ющей окр***у***жности, центр друг***о***й окр***у***жности леж***и***т внутр***и*** сопряг***а***ющей окр***у***жности. Так***о***е сопряж***е***ние назыв***а***ется см***е***шанным.

Постр***о***ить сопряж***е***ние – ***э***то зн***а***чит найт***и*** центр сопряж***е***ния и т***о***чки сопряж***е***ния.



а б в

Рис. 74

Разберем и решим предложенные задачи:

Задача 1. Сопряжение сторон острого угла дугой окружности заданного радиуса ***R*** (рис. 75). Расстояние от центра сопряжения до каждой стороны угла равно радиусу сопряжения ***R***.

Чтобы найти центр сопряжения, проводим две вспомогательные прямые, параллельные каждой стороне угла на расстоянии ***R*** от них. Эти вспомогательные прямые пересекаются в точке ***O***. Точка ***O*** есть центр сопряжения. Чтобы найти точки сопряжения, из точки ***O*** опускаем перпендикуляры на стороны угла. Точки 1 и 2 – это точки сопряжения. Из центра сопряжения ***O*** проводим сопрягающую дугу радиуса ***R*** от точки 1 до точки 2.

Задача 2. Сопряжение сторон прямого угла дугой радиуса ***R*** (рис. 76).

Из вершины ***A*** прямого угла как из центра проводим дугу радиуса ***R***. Точки 1 и 2 пересечения этой дуги с каждой стороной угла – это точки сопряжения. Из центра 1 и центра 2 проводим дуги радиуса ***R***. Дуги пересекаются в точке ***O***. Точка ***O*** – это центр сопряжения. Из него проводим дугу сопрягающей окружности.

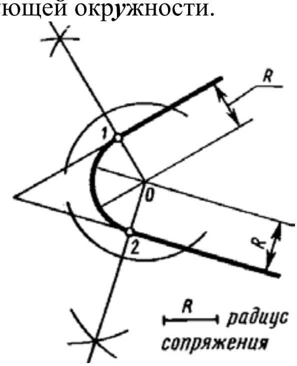


Рис. 75

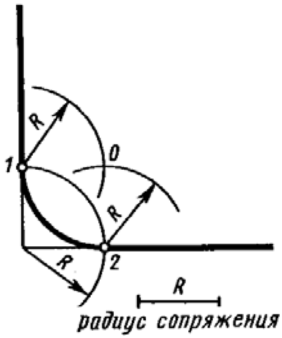


Рис. 76

Задача 3. Построить внешнее сопряжение дуги и прямой рис. 77.

1) Дана дуга окружности радиуса R_1 с центром O_1 и прямая a.
2) Проводим вспомогательную дугу радиуса (R + R_1) с центром O_1.
3) Проводим вспомогательную прямую b, параллельную прямой a, на расстоянии R. Получаем точку O – центр сопряжения.
4) Проводим прямую OO_1, получаем точку сопряжения ***1***. Опускаем из точки O перпендикуляр на прямую a. Получаем точку сопряжения ***2***. Проводим сопрягаемую дугу радиуса R от точки ***1*** до точки ***2***.

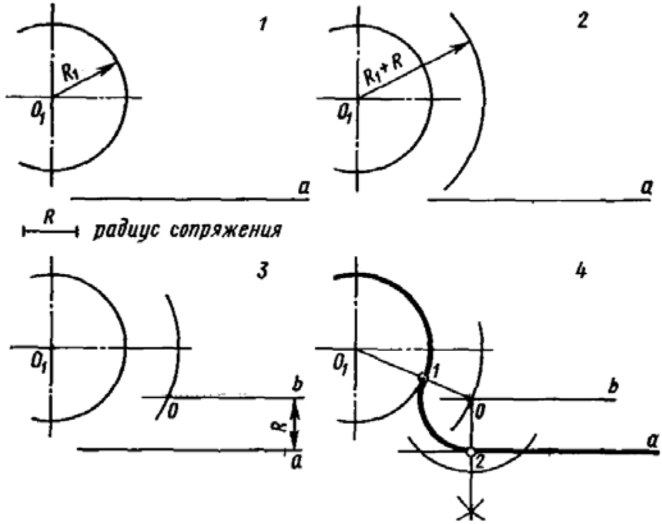


Рис. 77

Задача 4. Построить внутреннее сопряжение дуги и прямой рис. 78.

1) Дана дуга окружности радиуса R_1 с центром O_1 и прямая a.
2) Проводим вспомогательную дугу радиуса (R–R_1) с центром O_1.
3) Проводим прямую b, параллельную прямой a, на расстоянии R. Получаем точку O – центр сопряжения.
4) Проводим прямую OO_1, отмечаем точку сопряжения ***1***. Из точки O опускаем перпендикуляр на прямую a. Получаем точку сопряжения ***2***. Проводим сопрягающую дугу из центра O радиуса R от точки ***1*** до точки ***2***.

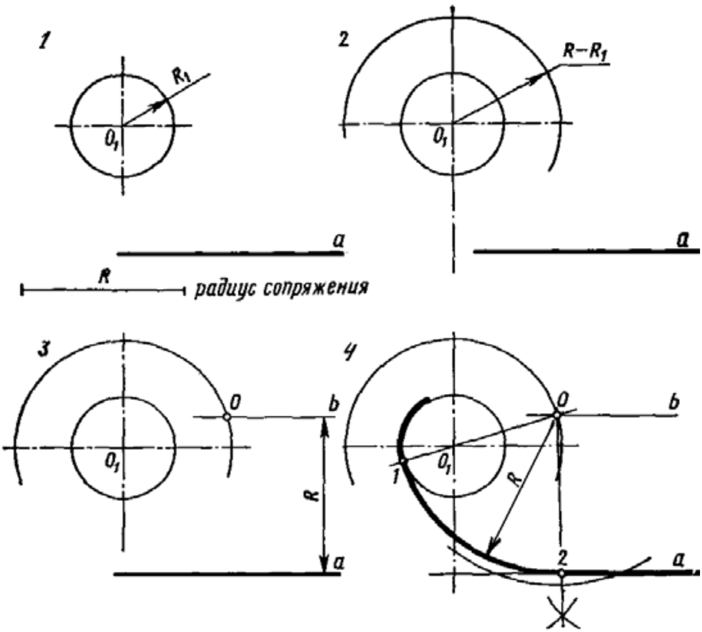


Рис. 78

Задача 5. Постр*о*ить вн*е*шнее сопряж*е*ние (рис. 79).

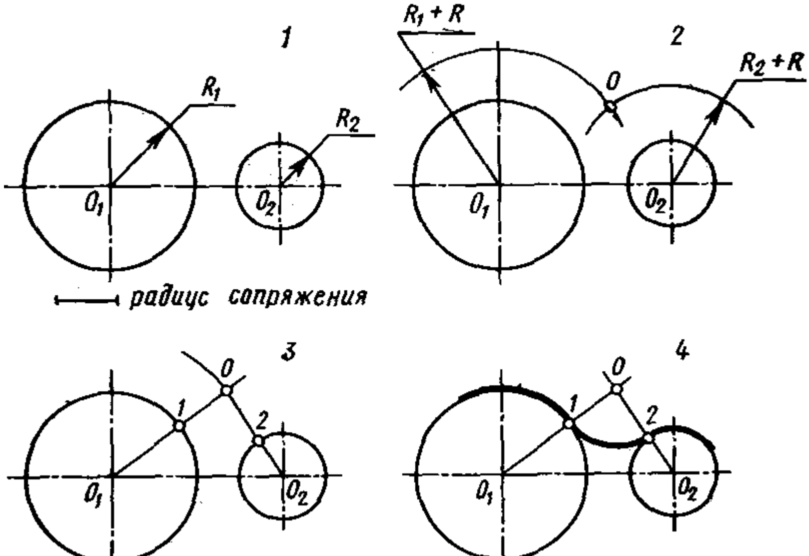


Рис. 79

1) Даны две окружности радиуса $\boldsymbol{R_1}$ и радиуса $\boldsymbol{R_2}$.
2) Проводим вспомогательную дугу радиуса ($\boldsymbol{R_1}$+$\boldsymbol{R}$) из центра $\boldsymbol{O_1}$ н вспомогательную дугу радиуса ($\boldsymbol{R_2}$+$\boldsymbol{R}$) из центра $\boldsymbol{O_2}$. Получаем центр сопряжения $\boldsymbol{O}$.
3) Проводим прямую $\boldsymbol{O_1O}$. Получаем точку сопряжения ***1***. Проводим прямую $\boldsymbol{OO_2}$, получаем точку сопряжения ***2***.
4) Проводим сопрягающую дугу радиуса $\boldsymbol{R}$ из центра $\boldsymbol{O}$ от точки ***1*** до точки ***2***.

Задача 6. Постр*о*ить см*е*шанное сопряж*е*ние (рис. 80).

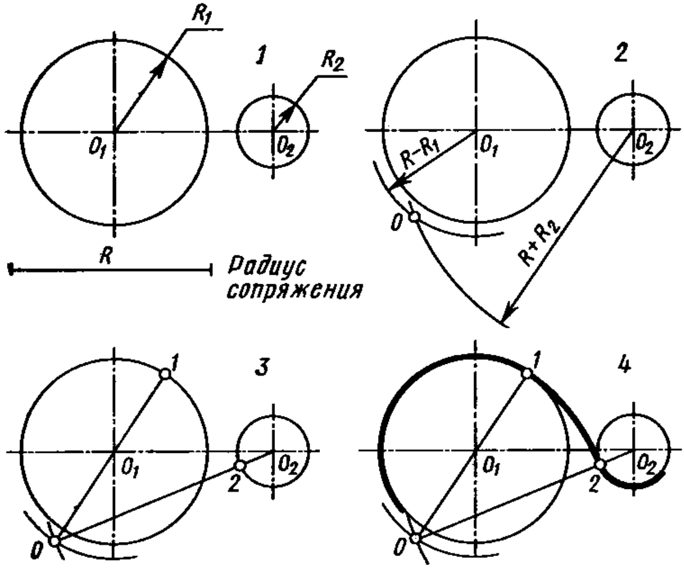
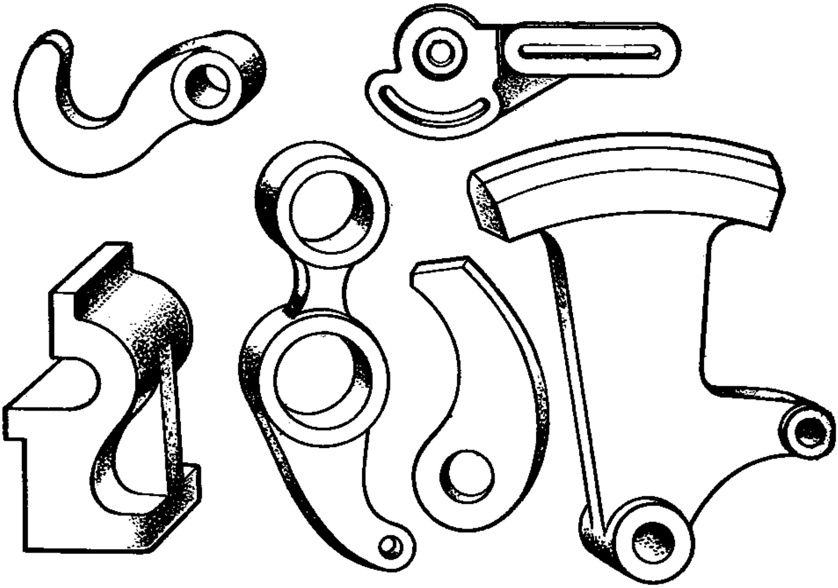


Рис. 80

1) Даны две окружности радиуса $\boldsymbol{R_1}$ и $\boldsymbol{R_2}$.
2) Проводим вспомогательную дугу радиуса ($\boldsymbol{R}$–$\boldsymbol{R_1}$) из центра $\boldsymbol{O_1}$ и дугу радиуса ($\boldsymbol{R}$+$\boldsymbol{R_2}$) из центра $\boldsymbol{O_2}$. Получаем точку $\boldsymbol{O}$ – центр сопряжения.
3) Проводим прямую $\boldsymbol{OO_1}$, получаем точку сопряжения ***1***. Проводим прямую $\boldsymbol{OO_2}$, получаем точку сопряжения ***2***.
4) Проводим сопрягающую дугу радиуса $\boldsymbol{R}$ из центра $\boldsymbol{O}$ от точки ***1*** до точки ***2***.

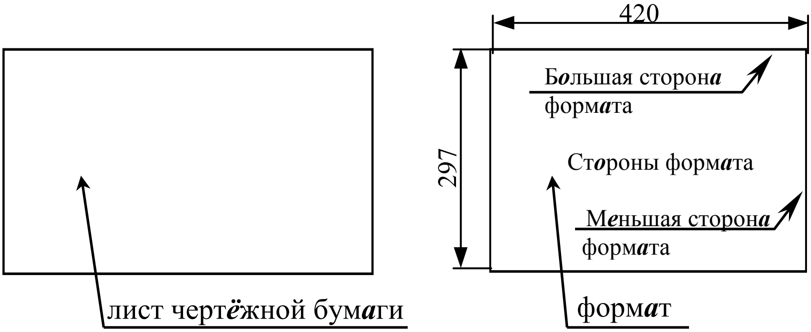
Прим***е***ры сопряж***е***ний, кот***о***рые встреч***а***ются при выч***е***рчивании к***о***нтуров техн***и***ческих дет***а***лей, пок***а***заны на рисунке.



ОСНОВНЫЕ ПРАВИЛА ВЫПОЛНЕНИЯ ЧЕРТЕЖЕЙ

§ 9. Форматы (ГОСТ 2.301—68).

Все чертежи выполняют на чертежной бумаге. Черт***ё***жная бум***а***га должна иметь определ***ё***нные разм***е***ры. Формат – это лист чертёжной бумаги стандартных размеров. Возможные размеры определяет государственный стандарт ГОСТ 2.301—68.



РАЗМ*Е*Р ЛИСТ*А* БУМ*А*ГИ – ЭТО ФОРМ*А*Т ЧЕРТЕЖ*А*.

Размеры листа обозначают буквой А и цифрой. Листы могут располагаться горизонтально или вертикально. Лист А4 располагают только вертикально.

Стандарт определяет следующие основные форматы: ***Таблица 1.***

Обозначение формата	А0	А1	А2	А3	А4
Размеры сторон формата, мм	841x1189	594x841	420x594	297x420	210x297

Когд***а*** ***э***то необход***и***мо, м***о***жно исп***о***льзовать дополн***и***тельные форм***а***ты. Обознач***е***ние дополн***и***тельного форм***а***та состо***и***т из обозначения основн***о***го форм***а***та, умн***о***женного на числ***о*** увелич***е***ния м***е***ньшей сторон***ы*** форм***а***та. Наприм***е***р, А4x4 (разм***е***ры 841x297).

Кр***о***ме ***э***того, разреш***а***ется исп***о***льзовать форм***а***т А5, кот***о***рый име***е***т разм***е***ры 210x148 мм (распол***а***гается т***о***лько горизонт***а***льно).

На лист***е*** ч***е***ртят р***а***мку чертеж***а***. Когд***а*** мы ч***е***ртим р***а***мку, то откл***а***дываем так***и***е расст***оя***ния от стор***о***н форм***а***та (вн***е***шней р***а***мки):

сл***е***ва – 20 мм, спр***а***ва – 5 мм, св***е***рху – 5 мм, сн***и***зу – 5 мм.

Вн***е***шнюю р***а***мку форм***а***та ч***е***ртим сплошн***о***й т***о***нкой л***и***нией. Р***а***мку чертеж***а*** (вн***у***треннюю р***а***мку) ч***е***ртим сплошн***о***й т***о***лстой основн***о***й л***и***нией. Сплошн***а***я основн***а***я л***и***ния в два р***а***за т***о***лще т***о***нкой л***и***нии.

ОСНОВН***А***Я Н***А***ДПИСЬ чертеж***а*** располаг***а***ется в н***и***жнем пр***а***вом угл***у*** форм***а***та. Е***ё*** габар***и***тные разм***е***ры – 185×55 мм. Гран***и***цу основн***о***й н***а***дписи т***а***кже ч***е***ртят сплошн***о***й т***о***лстой основн***о***й л***и***нией. Там п***и***шут назв***а***ние чертеж***а***, н***о***мер чертеж***а***, н***о***мер гр***у***ппы, фам***и***лию студ***е***нта, фам***и***лию преподав***а***теля и др. Вн***у***тренние разм***е***ры основн***о***й н***а***дписи прив***е***дены на рис. 81.

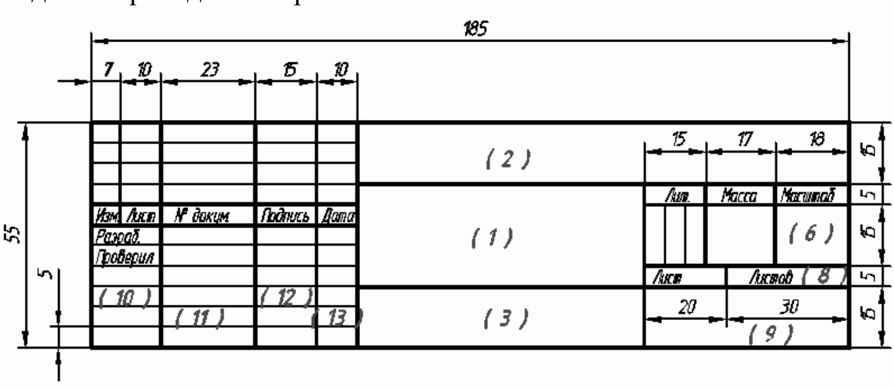


Рис. 81

Упражнение 1. В***ы***чертите в тетр***а***ди основн***у***ю н***а***дпись по разм***е***рам, прив***е***денным на рис. 81.

Мы чертим чертежи на форматах. Формат – это лист чертежной бумаги, стороны которого имеют стандартные размеры. Есть пять основных форматов: A0, A1, A2, A3, A4. Можно использовать формат A5, когда нужно.

Формат A3 имеет стандартные размеры 420×297 мм. Когда мы чертим стороны формата (внешнюю рамку), мы чертим сплошные тонкие линии. Их толщина 1/3 мм.

Когда чертят рамку чертежа, откладывают расстояния от сторон формата: слева – 20 мм, справа, сверху и снизу – 5 мм. Линии рамки – это сплошные толстые основные линии. Их толщина 1 мм. Расстояние слева – 20 мм используют для брошюровки.

На всех чертежах имеется основная надпись. Она находится на чертеже справа внизу (ГОСТ 2.104-68). Стандарт устанавливает форму, размеры и порядок заполнения основной надписи. Основная надпись имеет размеры 185х55 мм. Когда студенты чертят контуры основной надписи, они откладывают расстояния от нижнего правого угла внутренней рамки (рамки чертежа): вверх – 55 мм, влево – 185 мм. На формате А4 основную надпись чертят только по короткой (меньшей) стороне формата.

Основная надпись имеет графы. Расположение и размеры граф даны на рис. 81. Пишут в графах стандартным шрифтом. На учебных чертежах заполняют графы 1, 2, 3, 6, 8-13 (см. таблицу 2 и рис. 81).

Таблица 2

№ графы	Содержание	Размер шрифта
1	Наименование изделия или название темы в именительном падеже, на первом месте имя существительное, например: "Шрифты чертежные"	5-7
2	Обозначение (номер) чертежа, например: *АИКГ. 010203. 001* где АИКГ - название факультета (например, автомобильный) и дисциплины (инженерно-компьютерная графика), 01 - номер группы, 02 - номер темы (задания), 03 - номер варианта (студента по списку) 001 - номер листа в задании.	7
3	Обозначение материала (только для деталей)	3.5
6	Масштаб изображения	5
8	Количество листов. Если чертеж выполнен на одном листе, пишут цифру 1.	3.5
9	Название университета (**ХНАДУ**)	5
10	"Разработал", "Проверил"	3.5
11	Фамилия учащегося и преподавателя	3.5
12	Подписи	
13	Дата	3.5

Чертеж имеет рамку и основную надпись. Основную надпись выполняют по правилам ГОСТ 2.104-68. Она находится на чертеже справа внизу. Основная надпись имеет размеры 185х55 мм.

Мы измеряем расстояния 55 и 185 мм при помощи измерителя и линейки. Мы откладываем эти размеры от нижнего правого угла рамки чертежа. Чертим горизонтальные и вертикальные линии – контур основной надписи. Чертим графы основной надписи. Все вертикальные линии и 6 горизонтальных линий основной надписи – это сплошные толстые основные линии. Их толщина – 1 мм. Остальные горизонтальные линии – сплошные тонкие линии. Их толщина – 1/3 мм.

Когда мы заполняем основную надпись, мы пишем в графах основной надписи: обозначение чертежа – (2), название чертежа или наименование изделия – (1), масштаб – (6), название университета – (9), "Разраб.", "Пров." – (10), свою фамилию и фамилию преподавателя – (11), подписи – (12), дату – (13). Когда мы чертим чертеж детали, в графе 3 мы пишем обозначение материала.

Остальные графы учащиеся не заполняют. В графах 1 и 2 мы пишем шрифтом размера 7; в графах 3, 10-13 – шрифтом размера 3.5; в графах 6 и 9 – шрифтом размера 5.

§ 10. Масштабы (ГОСТ 2.302 – 68).

МАСШТ***А***Б – ЭТО ОТНОШ***Е***НИЕ РАЗМ***Е***РОВ ИЗОБРАЖ***Е***НИЯ ПРЕДМ***Е***ТА К РАЗМ***Е***РАМ САМОГ***О*** ПРЕДМ***Е***ТА.

Масшт***а***б 1 : 1 – натур***а***льная величин***а***.

Масшт***а***б 1 : 2 – масшт***а***б уменьш***е***ния (М 1 : 2).

Масшт***а***б 2 : 1 – масшт***а***б увелич***е***ния (М 2 : 1).

Масштаб 1:1 показывает, что изображение предмета на чертеже имеет такие же размеры, как и сам предмет.

Масштаб 2:1 показывает, что изображение предмета на чертеже в два раза больше, чем сам предмет.

Масштаб 1:2 показывает, что изображение предмета на чертеже в два раза меньше, чем сам предмет.

Разм***е***рные ч***и***сла на чертеж***е*** всегд***а*** пок***а***зывают натур***а***льные разм***е***ры предм***е***та.

Основные масштабы приведены в таблице 3.

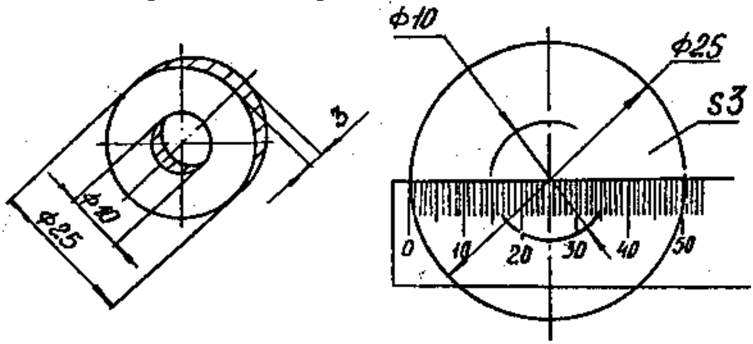
Таблица 3.

Масшт***а***бы уменьш***е***ния	1 : 2	1 : 2,5	1 : 4	1 : 5	1 : 10
Натур***а***льная величин***а***	1 : 1				
Масшт***а***бы увелич***е***ния	2 : 1	2,5 : 1	4 : 1	5 : 1	10 : 1

МАСШТАБЫ - ГОСТ 2.302-68

Размерные числа на чертеже – это действительные размеры детали.

Когда чертят чертеж детали, не всегда откладывают ее действительные линейные размеры. Когда чертят большие детали, линейные размеры детали уменьшают. Чтобы узнать размеры изображения детали, мы измеряем их на чертеже.



M2:1

а

Это деталь. Ее название – шайба. Шайба имеет размеры: ∅25, ∅10, 3 – это действительные линейные размеры детали.

б

Это чертеж детали. На чертеже мы имеем изображение детали. ∅25, ∅10, 3 – это размерные числа.

Рис. 82

Измеряем размеры изображения детали (рис. 82, б). Имеем ∅50, ∅20. Размеры изображения детали больше, чем действительные размеры детали (размерные числа) ∅10, ∅25 в два раза:

$$\frac{\varnothing 20}{\varnothing 10} = \frac{\varnothing 50}{\varnothing 25} = 2 = 2:1$$

Изображение детали больше в два раза, чем сама деталь.

Изображение детали вычерчено в масштабе.

МАСШТАБ – это отношение линейных размеров изображения предмета к действительным линейным размерам предмета.

$$\text{Масштаб} = \frac{\text{линейные размеры изображения}}{\text{действительные линейные размеры}} = \frac{\text{длина размерной линии на чертеже}}{\text{размерное число}}$$

Масштаб обозначают буквой "М" и пишут: М1:1, М1:2, М2:1 и т.д. В графе "Масштаб" основной надписи букву М не пишут. Слово "Масштаб" есть в заголовке графы. Пишут только отношение: 1:1, 1:2, 2:1 и т.д.

По ГОСТ 2.302-68 в черчении разрешается применять следующие масштабы:

Масштабы уменьшения:	1:2; 1:2.5; 1:4; 1:5; 1:10; 1:15; 1:20 и т.д.
Натуральная величина	1:1
Масштабы увеличения:	2:1; 2.5:1; 4:1; 5:1; 10:1; 20:1; 40:1 и т.д.

Изображение одной и той же детали в разных масштабах показано на рис. 83.

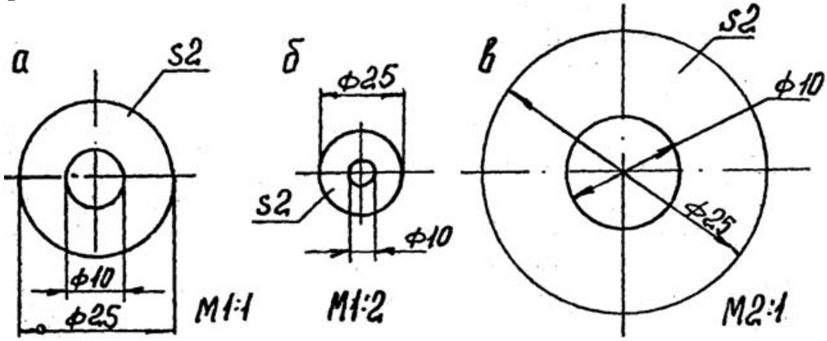


Рис. 83

а) Линейные размеры изображения равны действительным линейным размерам детали. Разделим размеры изображения детали на ее действительные размеры:

$$\frac{\varnothing 25}{\varnothing 25} = 1 = 1:1 \qquad \frac{\varnothing 10}{\varnothing 10} = 1 = 1:1$$

М1:1 – это натуральная величина (рис. 83, а).

б) Размеры изображения детали (длины размерных линий) равны: ∅5; ∅12.5, т.е. в два раза меньше, чем действительные линейные размеры (размерные числа):

$$\frac{\varnothing 12.5}{\varnothing 25} = 0.5 = 1:2 \qquad \frac{\varnothing 5}{\varnothing 10} = 0.5 = 1:2$$

М1:2 – это масштаб уменьшения (рис. 83, б).

в) Размеры изображения детали равны: ∅20, ∅50, т.е. в два раза больше, чем действительные линейные размеры:

$$\frac{\varnothing 50}{\varnothing 25} = 2 = 2:1 \qquad \frac{\varnothing 20}{\varnothing 10} = 2 = 2:1$$

М2:1 – это масштаб увеличения (рис. 83, в).

Детали бывают маленькие и большие. Чтобы сделать детали, надо иметь их чертежи. Когда чертят чертежи, используют масштаб.

Масштаб показывает, во сколько раз линейные размеры изображения детали больше или меньше, чем действительные линейные размеры детали.

Когда чертят детали, которые имеют маленькие действительные размеры, используют масштаб увеличения.

Когда чертят детали, которые имеют большие действительные размеры, используют масштаб уменьшения.

Когда используют масштаб 1:1, размеры изображения равны действительным размерам детали.

Масштаб изображения предмета определяет формат.

§ 11. Линии чертежа (ГОСТ 2.303—68).

Станд***а***рт 2.303—68 устан***а***вливает начерт***а***ние и назнач***е***ние л***и***ний, кот***о***рые примен***я***ются при выполн***е***нии чертеж***е***й дет***а***лей.

1. Сплошн***а***я т***о***лстая основн***а***я л***и***ния (рис. 85, 1).
2. Сплошн***а***я т***о***нкая л***и***ния (рис. 85, 2).
3. Штрихов***а***я л***и***ния (рис. 85, 3).
4. Штрих-пункт***и***рная л***и***ния (рис. 85, 4).

Линии, которые мы видим на предмете, – это линии видимого контура. Когда чертят линии видимого контура, используют сплошную основную линию (рис. 85, 5).

Линии, которые мы не видим на предмете – это линии невидимого контура. Когда чертят линии невидимого контура, используют штриховую линию (рис. 85, 5).

Выносные и размерные линии показывают размер предмета. Когда чертят выносные и размерные линии, используют сплошную тонкую линию (рис. 85, 5).

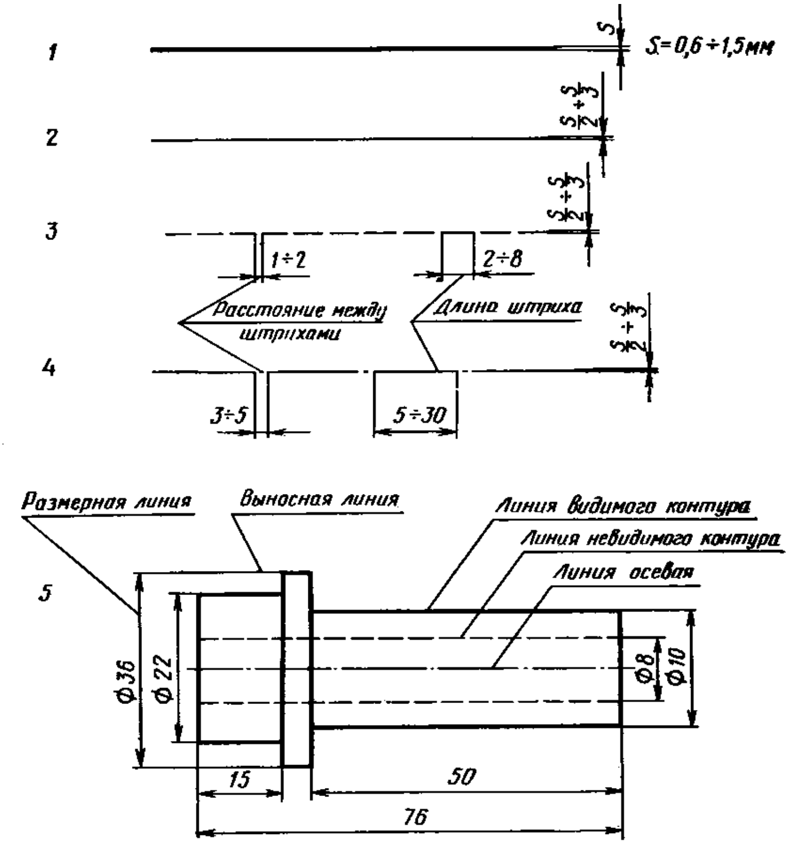


Рис. 85

Когда чертят осевые и центровые линии, используют штрих-пунктирную линию (рис. 85, 5). Штрихи штриховой линии имеют одинаковую длину (рис. 85, 3). Штрихи штрих-пунктирной линии тоже имеют одинаковую длину (рис. 85, 4). Расстояние между штрихами одинаково.

На рис. 86 показано пересечение линий на чертеже. Пересечение штриховых линий, штриховых и сплошных, штрих-пунктирных линий выполняют обязательно на штрихе.

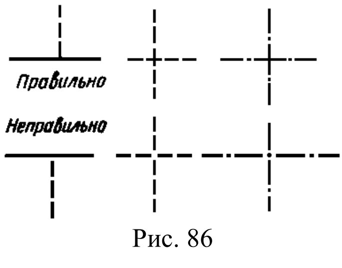


Рис. 86

На рис. 87 вы видите круг. Наклонные параллельные линии – это линии штриховки. Когда чертят линии штриховки, используют сплошную тонкую линию. Расстояние между линиями штриховки 2-5 мм.

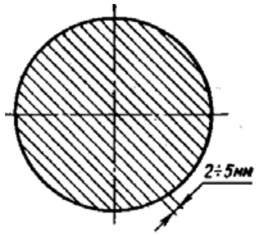


Рис. 87

Когда чертят сплошную толстую основную линию, используют карандаш М или ТМ (В, НВ, или F).

Когда чертят штриховую линию, используют карандаш Т.

Когда чертят сплошную тонкую или штрих-пунктирную линию, используют карандаш Т или 2Т (Н или НВ).

Когда пишут буквы и цифры, используют карандаш ТМ (НВ или F).

ЛИНИИ ЧЕРТЕЖА

Мы чертим и видим на чертеже только стандартные линии. Линии на чертежах мы чертим по правилам ГОСТ 2. 303-68.

Это сплошная толстая основная линия.

Ее толщина $\boldsymbol{S}$ = 0.6 – 1.4 мм (от 0.6 до 1.4 миллиметра).

Это сплошная тонкая линия.

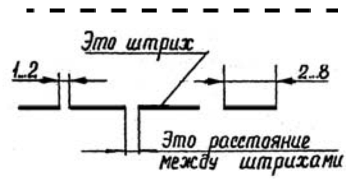
Ее толщина $\frac{\boldsymbol{S}}{3}-\frac{\boldsymbol{S}}{2}$.

Это штриховая линия.

Ее толщина $\frac{\boldsymbol{S}}{3}-\frac{\boldsymbol{S}}{2}$.

Длина штриха 2 – 8 мм.

Расстояние между штрихами 1 – 2 мм.



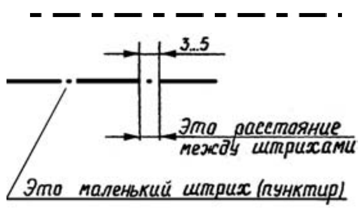
Это штрих-пунктирная тонкая линия.

Ее толщина $\frac{\boldsymbol{S}}{3}-\frac{\boldsymbol{S}}{2}$.

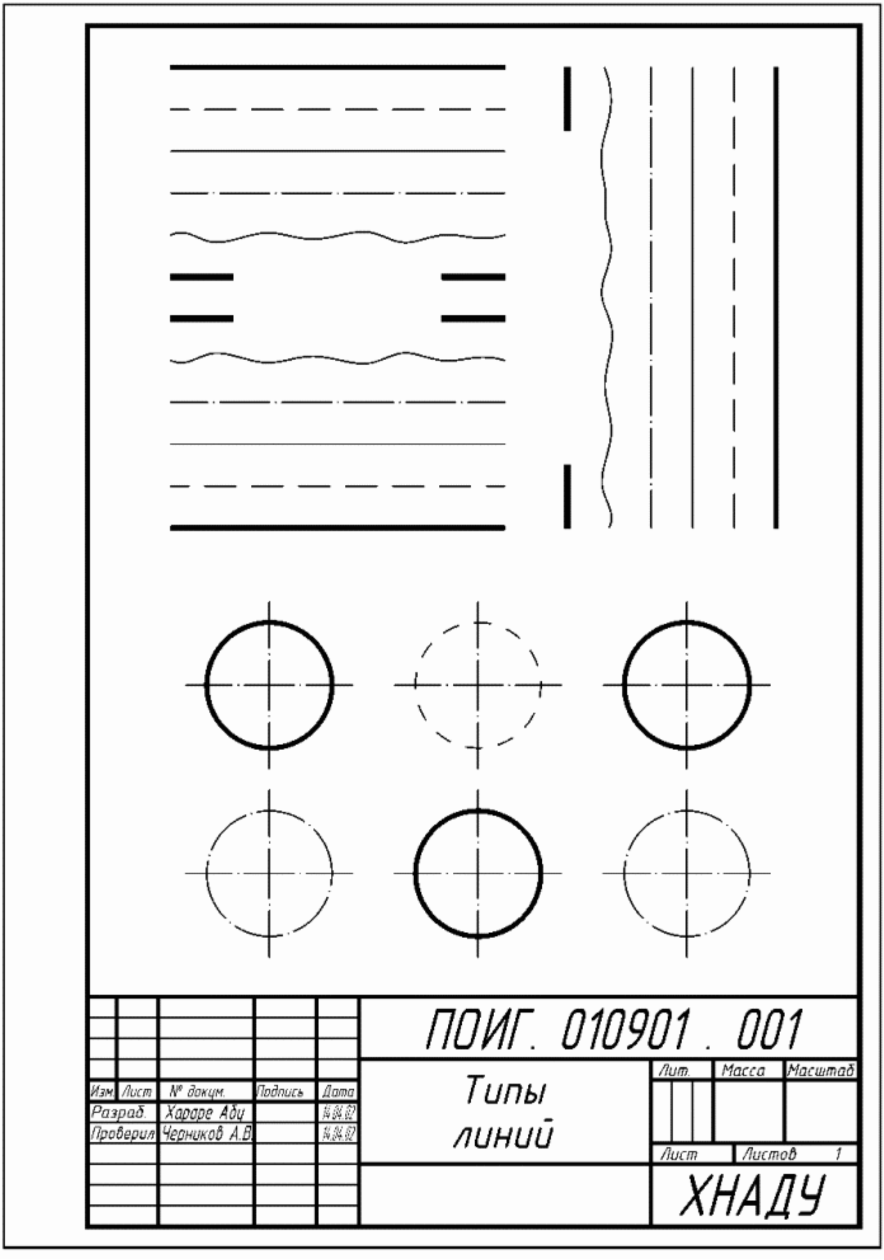
Расстояние между штрихами 3 – 5 мм.

Длина штриха 5 – 30 мм

Длина маленького штриха – 1 мм



Упражнение 2. Начертите на формате А4 линии, показанные на образце (рис. 88).



ПОИГ. 010901 . 001
Лит.
Масса
Масштаб
Изм.
Лист
№ докум.
Подпись
Дата
Разраб.
Хараре Аду
Проверил
Черников А.В.
Типы линий
Лист
Листов 1
ХНАДУ

Рис. 88

Студенты выполняют учебные чертежи.

Запомните размеры для учебного чертежа.

Толщина сплошной основной линии – $S = 1$ мм

Толщина сплошной тонкой линии – $\frac{S}{3} = 1/3$ мм

Толщина штриховой линии. – $\frac{S}{2} = 1/2$ мм

Длина штриха – 5 мм,

расстояние между штрихами – 1 мм.

Толщина штрих-пунктирной тонкой линии. – $\frac{S}{3} = 1/3$ мм

Длина штриха 10–15 мм,

расстояние между штрихами – 3 мм.

Пересечение штрихов в центре окружности обязательно (рис. 89).

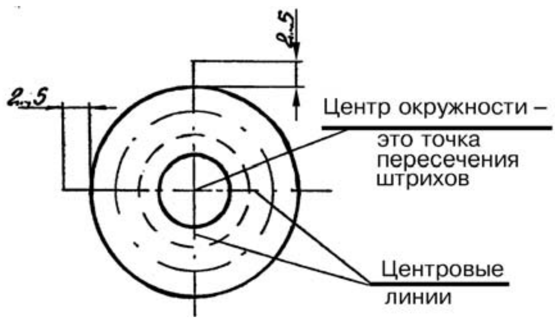


Рис. 89

Детали выполняют из разных материалов. На чертеже материал показывают (штрихуют) по правилам ГОСТ 2. 306-68.

Линии штриховки – это параллельные наклонные сплошные тонкие линии. Угол наклона здесь 45°. Расстояние между линиями штриховки может быть равно 1–10 мм. Для учебного чертежа оно равно 2 мм (рис. 90).

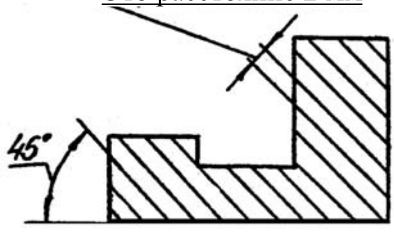


Рис. 90

Это чертеж детали (рис. 91). Деталь – это часть машины или механизма. На чертеже мы видим стандартные линии чертежа (ГОСТ 2. 303-68).

Контур детали – это сплошные толстые основные линии. Их толщина S (S = 1 мм). Мы видим сплошные тонкие линии. Толщина сплошной тонкой линии S/3.

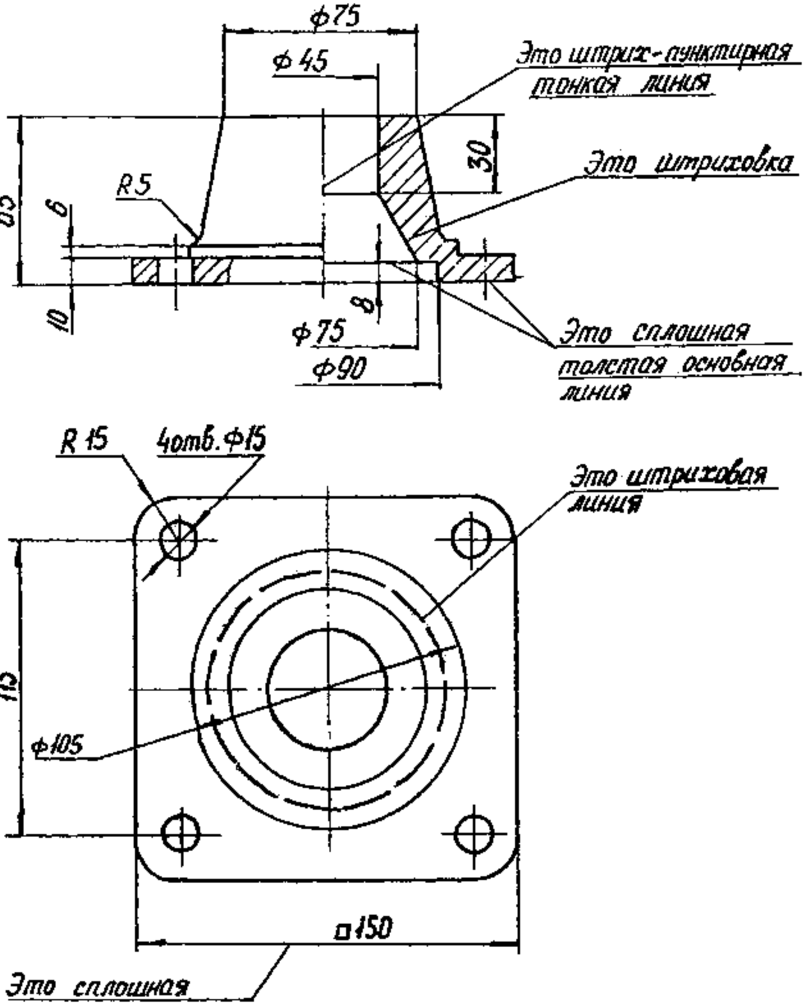


Рис. 91 **Чертеж детали**

Линии невидимого контура детали мы чертим при помощи штриховых линий. Толщина штриховой линии – S/2. На чертеже длина всех штрихов одинаковая, расстояние между штрихами также одинаковое.

Центровые линии – это штрих-пунктирные тонкие линии. Их толщина – S/3. На чертеже длина всех штрихов одинаковая, расстояние между штрихами одинаковое.

Центр окружности – это точки пересечения штрихов. Когда студенты чертят линии построения, они используют твердый карандаш (Т или 2Т). Линия построения – это сплошная тонкая линия.

Когда студенты обводят тонкие и штрих-пунктирные линии, они используют твердый или средний карандаш. Когда обводят штриховые линии – используют средний карандаш. Сплошные толстые линии обводят при помощи мягкого карандаша. Линии штриховки – это наклонные параллельные линии. Их толщина S/3. Их угол наклона к линии контура или осевой линии детали равен 45° (см. рис. 92).

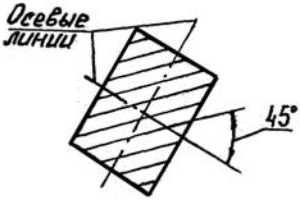


Рис. 92

Если угол наклона контура детали равен 45°, то угол штриховки равен 30° или 60° (рис. 93). Тонкие детали ≤ 2 мм не штрихуют. Чертят сплошную толстую линию. Ее толщина равна толщине детали (рис. 94).

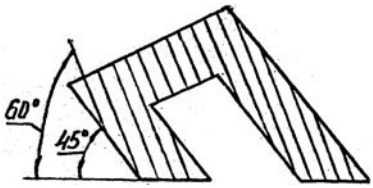


Рис. 93

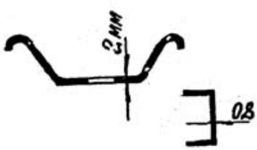


Рис. 94

§ 12. Шрифт (ГОСТ 2.304—81).

К***а***ждый черт***ё***ж им***е***ет н***а***дписи, б***у***квы и ц***и***фры. Черт***ё***жный шрифт – ***э***то прописн***ы***е б***у***квы, стр***о***чные б***у***квы, ц***и***фры и зн***а***ки на чертеж***е***. **РАЗМ*Е*Р ШР*И*ФТА – ЭТО ВЫСОТ*А* ПРОПИСН*О*Й БУКВЫ** (в мм).

Разм***е***р шр***и***фта *h* быв***а***ет: 2,5; 3,5; 5; 7; 10; 14. Б***у***квы и ц***и***фры могут им***е***ть ***у***гол накл***о***на 75° или 90°. Шрифт быв***а***ет т***и***па А и т***и***па Б.

Тип Б им***е***ет толщин***у*** л***и***ний *d = 1/10h*. Высот***а*** стр***о***чных букв, рассто***я***ние м***е***жду б***у***квами, ширин***а*** букв, миним***а***льный шаг строк, миним***а***льное рассто***я***ние м***е***жду слов***а***ми определ***я***ются по с***е***тке.

Все надписи на чертежах должны выполняться чертежным шрифтом. Шрифт чертежный – это стандартные буквы, цифры и знаки, которые пишут на чертеже. Шрифт пишут по правилам ГОСТ 2.304-81. Стандарт устанавливает два типа шрифта: А и Б (каждый из них может быть без наклона или с наклоном около 75°). При выполнении учебных чертежей используют шрифт типа Б с наклоном (рис. 99). Угол наклона шрифта – 75°

Когда мы пишем стандартные буквы, нам нужно знать такие параметры: высоту букв, ширину букв, толщину линии букв (рис. 95).

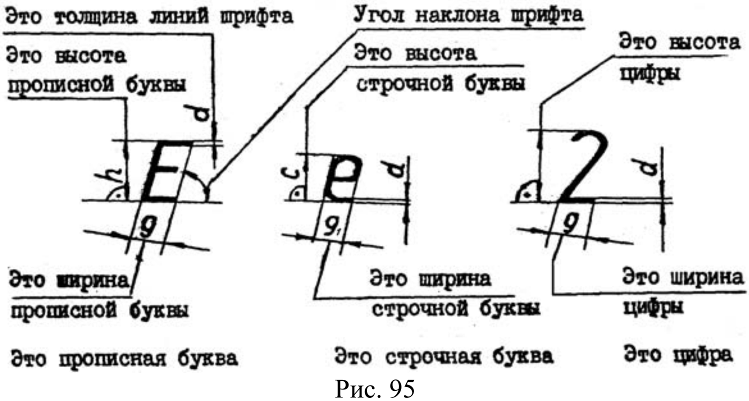


Рис. 95

Параметры ***c***, ***g***, $\boldsymbol{g_1}$ и ***d*** зависят от высоты прописных букв **h** (смотри таблицу 4).

Высота прописных букв – это размер шрифта.

Есть такие стандартные размеры шрифта: 2.5; 3.5; 5; 7; 10; 14; 20; 28; 40. Шрифт размером 1.8 не рекомендуется.

Высота прописных букв 3.5 мм – это размер шрифта 3.5. Высота прописных букв 7 мм - это размер шрифта 7 и т.д.

Размер шрифта 2.5 – это высота прописных букв 2.5 мм; размер шрифта 3.5 – это высота прописных букв 3.5 мм и т.д.

Когда мы пишем слова и предложения, нам нужно знать такие параметры: расстояние между буквами, расстояние между словами и расстояние между строками (рис. 96).

Таблица 4

Зависимость параметров ***c***, ***g***, ***g_1*** от ***h***

Элемента шрифта	Параметры шрифта	
	Высота	Ширина
Прописные буквы и цифры	***h***	***g***
1	h	3/10h
Г Е З С 2 3 5 6 7 8 9 0	h	5/10 h
Б В И Й К Л Н О П Р Т У Ч Ь Э Я 4	h	6/10 h
А Д М Х Ц Ы Ю	h	7/10 h
Ж Ш Ф Ъ	h	8/10 h
Щ	h	9/10 h
Строчные буквы	***c***	***g_1***
з с	7/10h	4/10h
г е и й к л н о п х ч ь э я	7/10h	5/10h
б в д р у	h	5/10h
а м ц ъ ы ю	7/10h	6/10h
ж т ш	7/10h	7/10h
ф	12/10h	7/10h
щ	7/10h	8/10h

Толщина линии шрифта ***d***=1/10***h***.

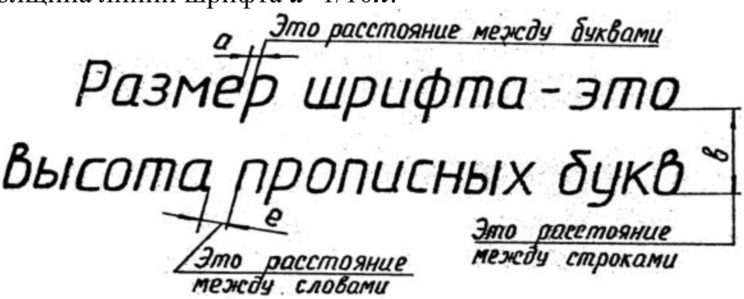


Рис. 96

Параметры ***a***, ***b*** и ***e*** также зависят от ***h***. Расстояние между буквами и цифрами ***a***=2/10***h***. Минимальное расстояние между словами и числами ***e***=6/10***h***. Минимальное расстояние между строками ***b***=17/10***h***.

Нельзя писать прописные буквы в середине слова или фразы (кроме аббревиатур, имен собственных).

Расстояния между буквами, соседние линии которых непараллельны (ГА, АГ, ТА, РА, АФ, ЕЖ, ГД, Ге, Те и т.д.), уменьшают на величину 1/10***h*** (***d***).

Шрифты пишут по сетке. Вспомогательная сетка образуется вспомогательными линиями с шагом ***d*** (***h***/10). Она применяется для развития навыков выполнения шрифтов (рис. 97, слева).

Упрощенная вспомогательная сетка, которой пользуются при получении навыков. Ширина букв и цифр равна основанию параллелограмма, в который они вписаны (рис. 97, справа).

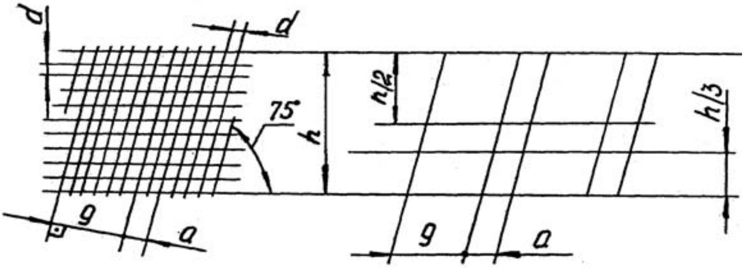


Рис. 97

Так чертят сетку при помощи рейсшины или линейки и двух угольников (рис. 98) ∠75° = (∠45° + ∠30°). Изучать написание букв, цифр и знаков чертежного шрифта рекомендуется не в алфавитном порядке, а по сложности и однотипности их начертания.

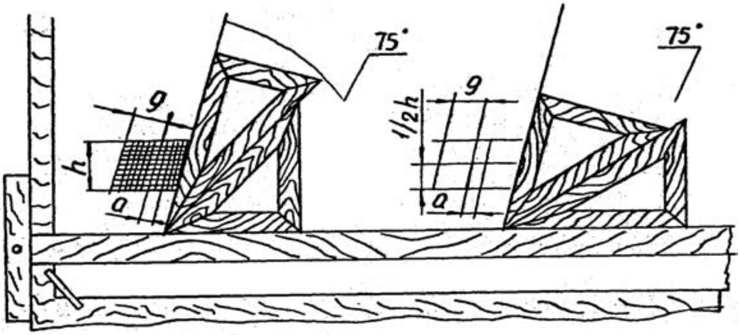


Рис. 98

Упражнение 3. Начертите буквы и цифры на отдельном листе по сетке, как показано на рис. 99.

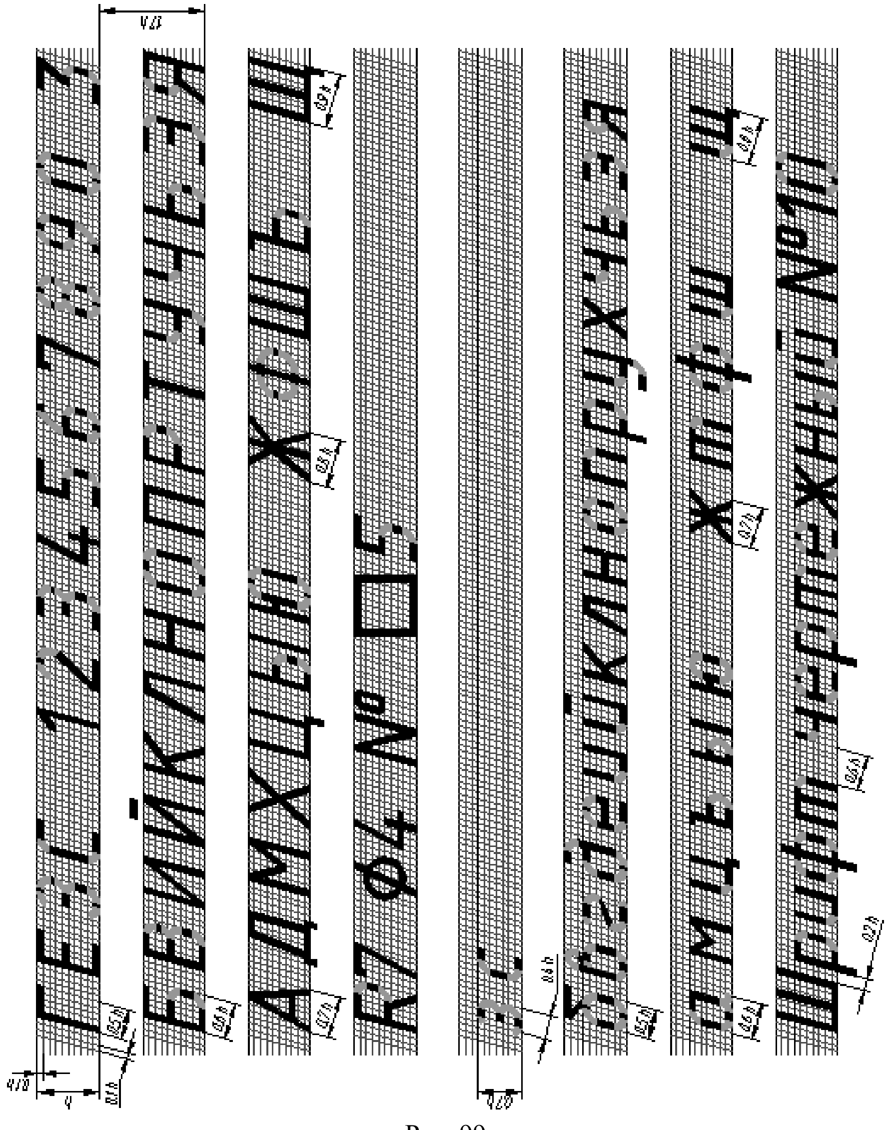


Рис. 99

Когда пишут слова и числа на чертеже, используют чертежный шрифт по ГОСТ 2.304-81. Чертежный шрифт – это стандартные буквы, цифры и знаки, которые мы пишем и видим на чертеже. Угол наклона шрифта равен 75°.

Когда мы пишем буквы и цифры, мы должны знать их параметры: высоту букв и цифр, ширину букв и цифр, толщину линий букв в цифр. Параметры (***c***, ***g***, $\boldsymbol{g_1}$ и ***d***) зависят от ***h***.

Прописные буквы и цифры имеют одинаковую высоту.

Все буквы и цифры имеют толщину линий d = 1/10h.

Параметры ***c***, ***g*** и $\boldsymbol{g_1}$ находим в табл. 4.

Когда мы пишем слова и числа, мы должны знать расстояние между буквами и цифрами, расстояние между словами и числами. Расстояние между буквами и цифрами – ***a*** – зависит от ***h***. Оно равно 2/10***h***. Расстояние между словами и числами – ***e*** – тоже зависит от ***h***. Оно равно 6/10***h***.

Когда мы пишем предложение в несколько строк, мы должны знать расстояние между строками ***b***. Оно тоже зависит от ***h*** и равно 17/10***h***.

2. Составьте план текста и расскажите текст по этому плану.

3. Напишите слова "Линии чертежа". Размер шрифта 10. Все буквы прописные.

Образец: Прописные буквы и цифры имеют высоту ***h*** = 10 мм. Слова "Линии чертежа" мы будем писать по сетке. Мы чертим сетку в линиях построения (рис. 100).

1) Чертим две параллельные горизонтальные линии (I и II). Расстояние между ними равно высоте прописных букв ***h*** = 10 мм (рис. 100, а).

2) Считаем ширину букв ***g*** размера шрифта 10 (см. таблицу 4 или рис. 99).

Буква Е имеет ширину		g=5/10h= 5x10/10 = 5 (мм);
Буквы Л, И, Н, Ч, Р, Т	–	g=6/10h= 6 (мм);
Буква А	–	g=7/10h= 7 (мм);
Буква Ж	–	g=8/10h= 8 (мм);
Расстояние между буквами		a=2/10h= 2 (мм).
Расстояние между словами		e=6/10h= 6 (мм).

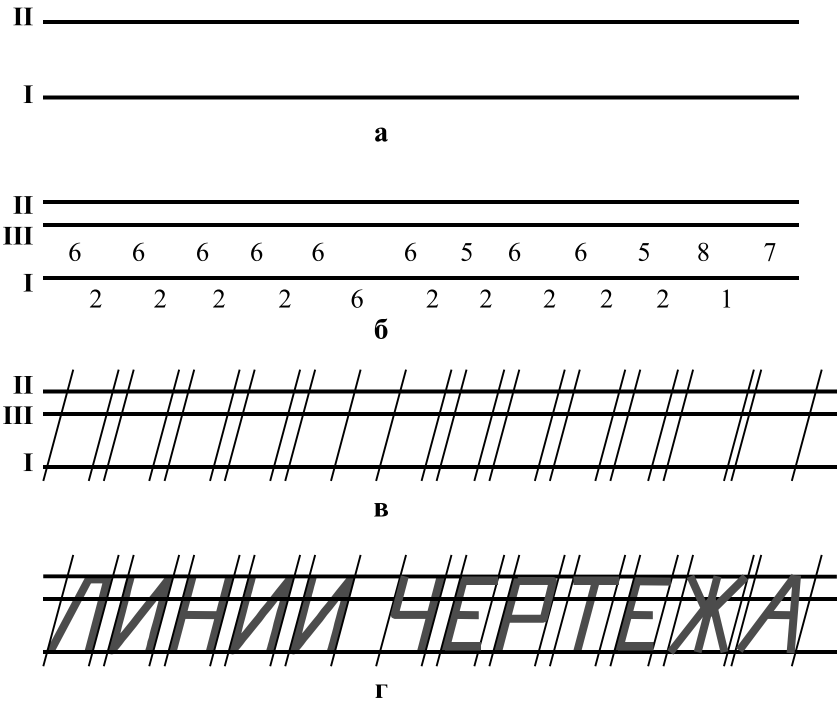


Рис. 100

На нижней линии (I) откладываем ширину букв, расстояние между буквами, расстояние между словами. Чертим третью (III) горизонтальную линию (рис. 100, б).

3) Чертим сетку при помощи рейсшины и двух угольников ($\angle 30° + \angle 45° = \angle 75°$) (рис. 100, в).

4) Пишем при помощи твердого карандаша слова "Линии чертежа" по сетке (рис. 100, г).

5) Обводим буквы при помощи мягкого карандаша. Буквы имеют толщину линии d=1/10h= 1 (мм).

§ 13. Размеры (ГОСТ 2.307 – 68).

К***а***ждый предм***е***т им***е***ет разм***е***ры: длин***у***, ширин***у***, высот***у***. Эти разм***е***ры нан***о***сят на чертёж в миллим***е***трах. Б***у***квы «мм» не п***и***шут.

Чт***о***бы нанест***и*** разм***е***ры, ч***е***ртят выносн***ы***е и разм***е***рные л***и***нии. Выносн***ы***е и разм***е***рные л***и***нии – это сплошн***ы***е т***о***нкие л***и***нии (рис. 102).

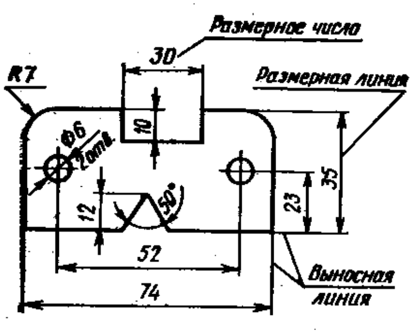


Рис. 102

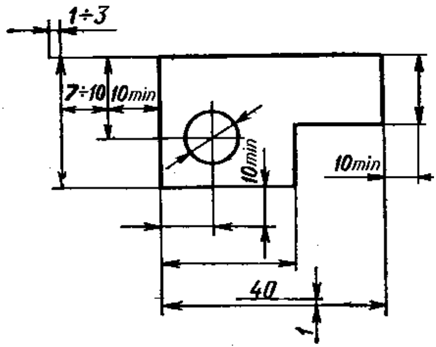


Рис. 103

Разм***е***рную л***и***нию ч***е***ртят паралл***е***льно измер***я***емой л***и***нии (рис. 103). Миним***а***льное расст***о***яние от л***и***нии к***о***нтура до разм***е***рной л***и***нии – 10 мм. Разм***е***рную л***и***нию ч***е***ртят вне к***о***нтура предм***е***та и огран***и***чивают е***ё*** стр***е***лками (рис. 104). Все стр***е***лки на чертеж***е*** один***а***ковые.

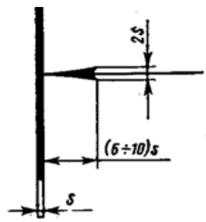


Рис. 104

Выносн***ы***е л***и***нии перпендикул***я***рны разм***е***рной л***и***нии. Выносн***ы***е л***и***нии продолж***а***ют за разм***е***рную л***и***нию на 2 – 3 мм. Над разм***е***рной л***и***нией пишут разм***е***рное числ***о***. Расстояние от разм***е***рной л***и***нии до разм***е***рного числ***а*** ~ 1 мм (рис. 103).

Если разм***е***рная л***и***ния вертик***а***льная, разм***е***рное числ***о*** п***и***шут сл***е***ва от разм***е***рной л***и***нии (рис. 105).

Если разм***е***рная л***и***ния накл***о***нная, разм***е***рное числ***о*** п***и***шут над разм***е***рной л***и***нией ***и***ли на п***о***лочке л***и***нии в***ы***носки так, как пок***а***зано на рис. 106.

Если на чертеж***е*** н***е***сколько паралл***е***льных разм***е***рных л***и***ний, то разм***е***рные ч***и***сла п***и***шут спр***а***ва и сл***е***ва от ос***е***й (рис. 107). Снач***а***ла п***и***шут м***е***ньший, пот***о***м б***о***льший разм***е***р (рис. 108). Расст***о***яние м***е***жду паралл***е***льными разм***е***рными л***и***ниями 7 – 10 мм (рис. 103).

Если на разм***е***рной л***и***нии нет м***е***ста для стр***е***лок, разм***е***рную л***и***нию продолж***а***ют за выносн***ы***е л***и***нии (рис. 109). В ***э***том сл***у***чае стр***е***лки ч***е***ртят снар***у***жи от выносн***ы***х л***и***ний. М***о***жно т***а***кже нанест***и*** т***о***чки ***и***ли штрих***и***. Штрих***и*** им***е***ют ***у***гол накл***о***на 45° к разм***е***рной л***и***нии.

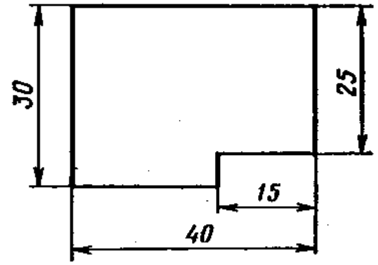


Рис. 105

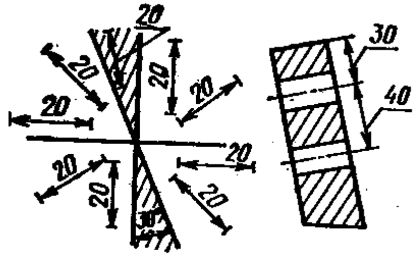


Рис. 106

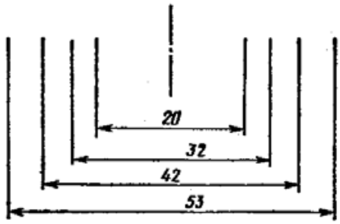


Рис. 107

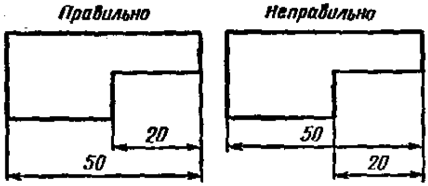


Рис. 108

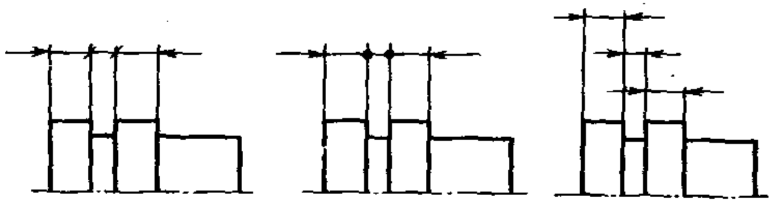


Рис. 109

Угловые размеры наносят так, как показано на рис. 110. Величину угла показывают в градусах (например, 50°, 30°). Размерная линия – это дуга окружности. Центр дуги расположен в вершине угла.

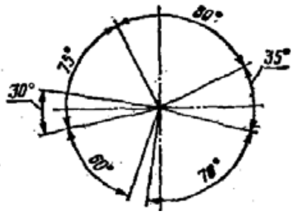


Рис. 110

Размер окружности всегда показывают размером диаметра. Перед размерным числом наносят знак ∅ (рис. 111).

Размер дуги окружности всегда показывают размером радиуса. Перед размерным числом наносят знак ***R*** (рис. 112). Когда на чертеже показаны одинаковые окружности, размер диаметра наносят один раз (рис. 113).

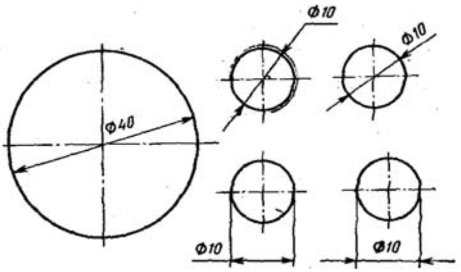


Рис. 111

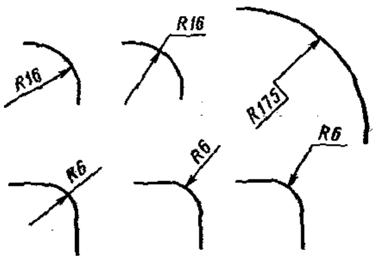


Рис. 112

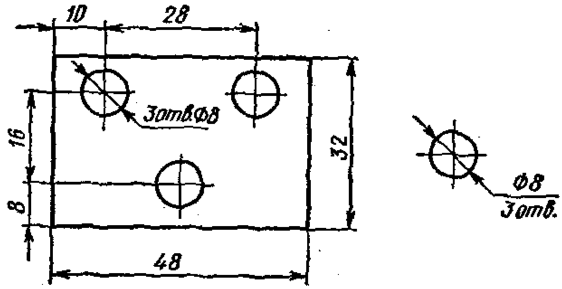


Рис. 113

НАНЕСЕНИЕ РАЗМЕРОВ

Дано изображение детали (рис. 114). Чтобы сделать деталь, нужно знать ее размеры. Студенты должны уметь графически грамотно наносить размеры. Размеры на чертежах наносят по правилам ГОСТ 2.307-68. Величину изображенного предмета на чертеже определяют числовые размеры.

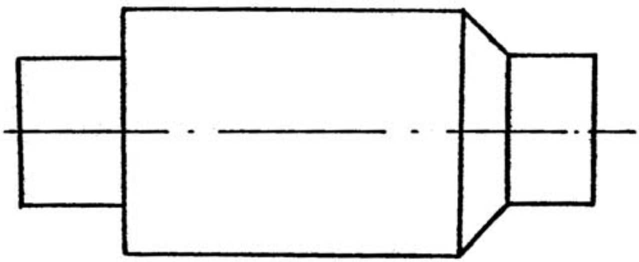


Рис. 114

Когда наносят размеры:

1. Чертят выносные линии (рис. 115, а).

2. Чертят размерные линии.

Размерные линии желательно чертить справа и снизу от изображения (рис. 115, б).

Линии контура детали и размерные линии – это параллельные линии.

Расстояние между линией контура и размерной линией должно быть не менее 10 мм.

Выносные и размерные линии – это сплошные тонкие линии.

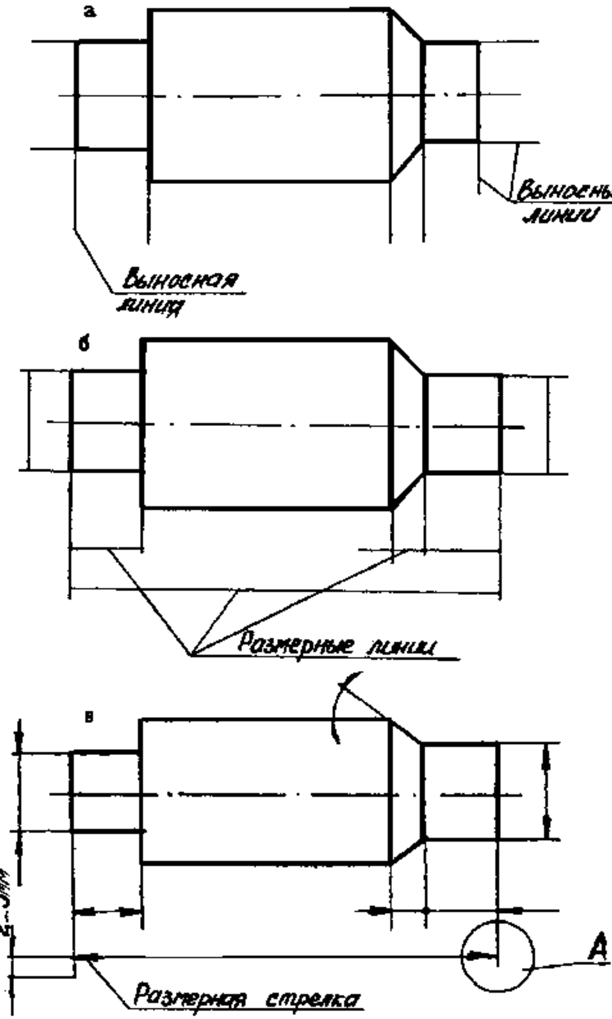


Рис. 115

3. Чертят размерные стрелки (рис. 116).

Размерные стрелки чертят на размерной линии. Все размерные стрелки на чертеже имеют одинаковую длину и ширину.

Длина выносной линии после размерной стрелки равна 2-3 мм.

4. Пишут размерные числа и знаки (рис. 117).

Расстояние между размерным числом и размерной линией равно 1 мм.

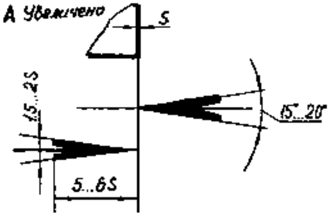


Рис. 116

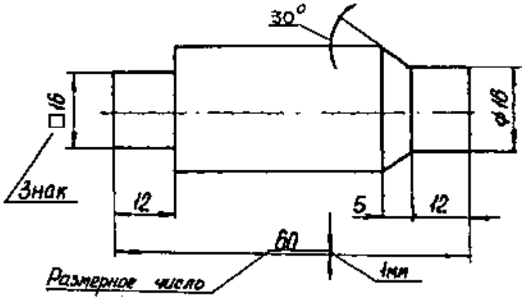


Рис. 117

Правила нанесения размеров по ГОСТ 2.307-68

1. Размерное число наносят над размерной линией в миллиметрах, но слово "мм" не пишут (рис. 118).

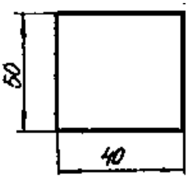


Рис. 118

2. Количество размеров на чертеже всегда минимальное, но достаточное (рис. 119).

Это неправильно

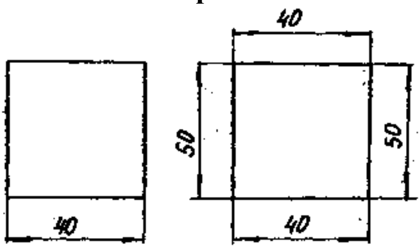


Рис. 119

Здесь нет высоты прямоугольника

Здесь не минимальное количество размеров

3. Выносные линии чертят не всегда. Можно использовать линии контура (рис. 120).

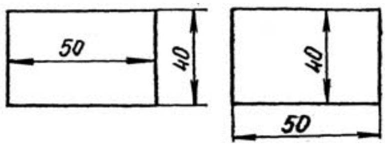
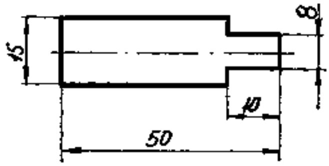
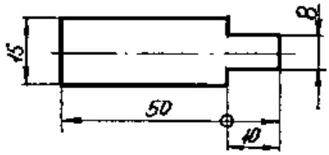


Рис. 120

4. Размерные и выносные линии не должны пересекаться.



Это правильно.



Это неправильно.
Здесь пересекаются размерные и выносные линии.

Рис. 121

5. Так наносят размерные числа, если имеется несколько параллельных размерных линий [для симметричной детали] (рис. 122).

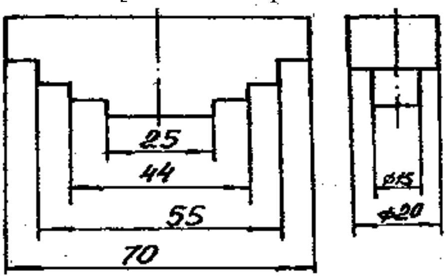


Рис. 122

Это правильно.

Это неправильно.
Размерные линии пересекаются.

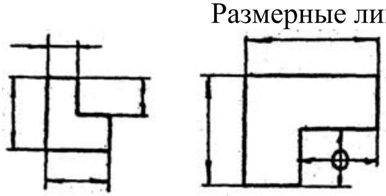


Рис. 123

6. Так пишут размеры на вертикальных, горизонтальных и наклонных размерных линиях, (рис. 124).

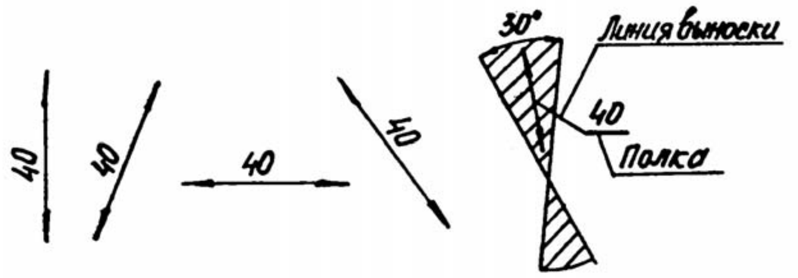
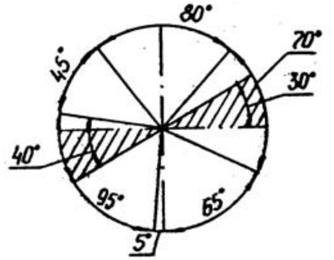


Рис. 124

7. Угловые размеры наносят над дугой в градусах (рис. 125).



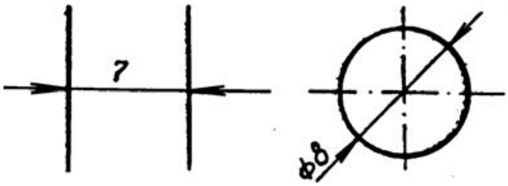


Рис. 125 Рис. 126

8. Когда длина размерной линии равна или меньше 10 мм, стрелки чертят "снаружи" (рис. 126).

9. Когда на размерной линии мало места для стрелок, наносят точки или засечки (рис. 127).

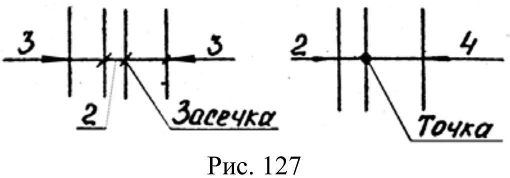


Рис. 127

10. Перед некоторыми размерными числами наносят знаки:

∅	диаметр окружности (рис. 128, а);
□	квадратный элемент (рис. 128, б);
R	радиус дуги окружности, сферы (рис. 128, в);
s	толщина детали (рис. 128, г).

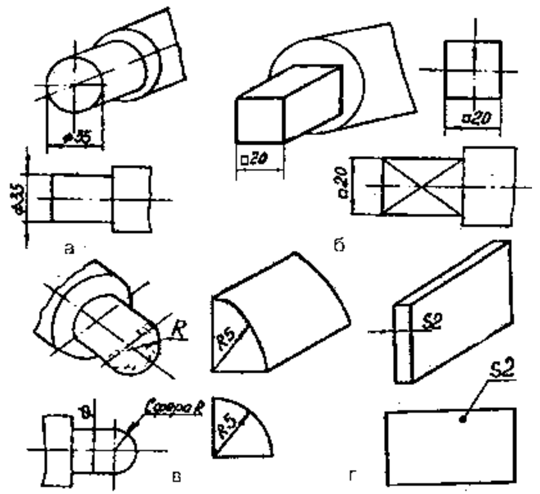
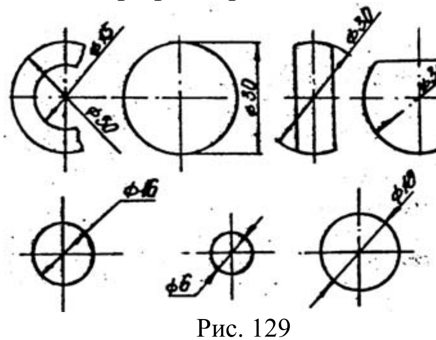


Рис. 128

На рис. 129 приведены примеры нанесения диаметров. На рис. 130 приведены примеры нанесения радиусов. Как писать знаки, смотрите раздел "Шрифта чертежные".



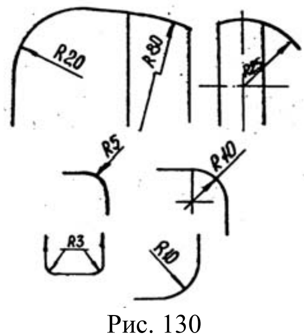


Рис. 129 Рис. 130

11. Размеры двух или более одинаковых элементов (например, отверстия) наносят один раз и пишут количество элементов (рис. 131).

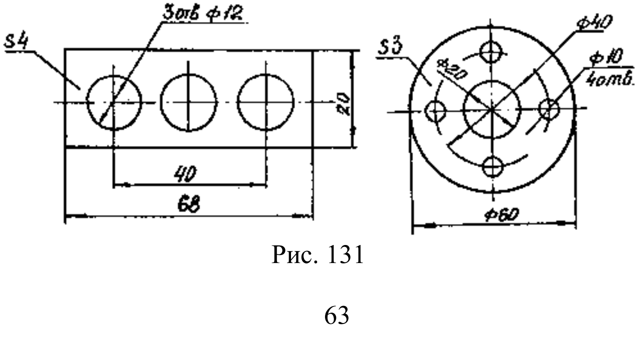


Рис. 131

12. Так наносят размеры фасок, когда угол равен 45° – высота усеченного конуса (рис. 132, а). Когда угол не равен 45°, размеры фасок наносят как на рис. 132, б.

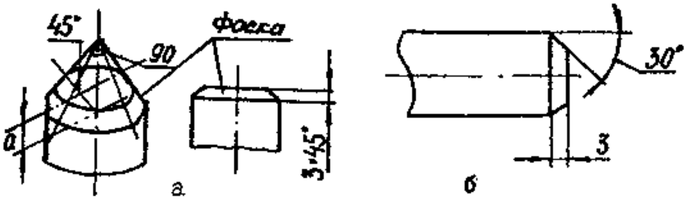


Рис. 132

Упражнение 4. Проверьте чертежи. Назовите чертежи, в которых допущены ошибки в нанесении размеров. Ответы покажите преподавателю. Объясните ошибки (рис. 133).

Образец ответа: 1-2. Размерное число 15 написано внутри размерной линии. Здесь допущена ошибка. Размерные числа пишут только над размерной линией.

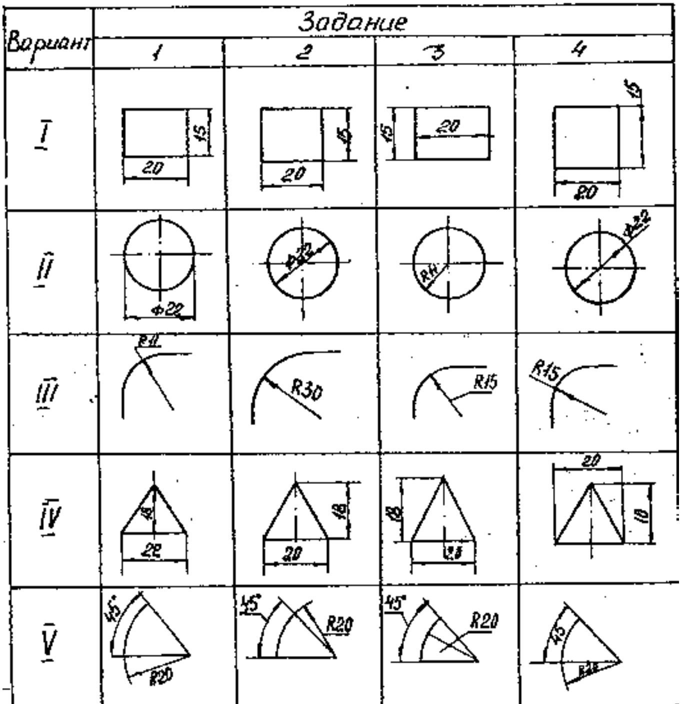


Рис. 133

§ 14. Выполнение чертежа плоской детали.

Упражнение 5. Постр*о*ить плоский контур детали (рис. 134).

Последовательность выполнения чертежа.

1) На формате А4 выполнить рамку чертежа и провести верхнюю границу основной надписи (рис. 135, а).
2) Любое изображение начинают чертить с проведения осевых линий (рис. 135, б).

   Эти линии должны выходить за контурные линии примерно на 2…3 мм.

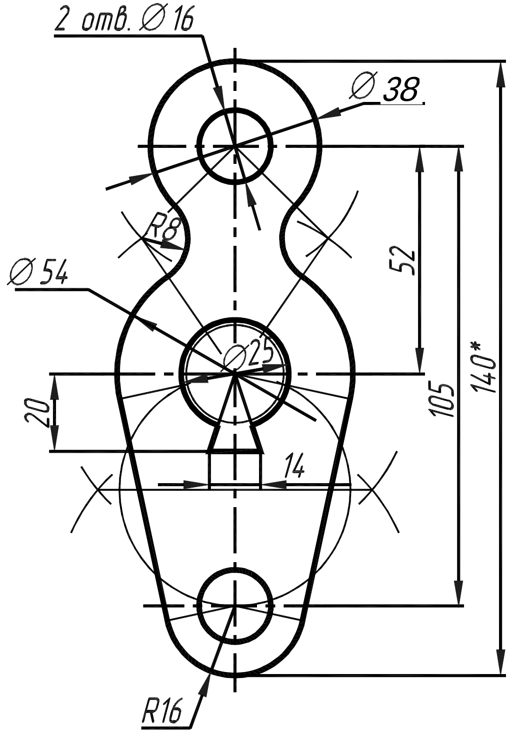
   Чтобы чертёж был расположен в центре поля, вертикальную осевую линию длиной 145 мм проводим посредине. Верхнюю горизонтальную ось проводим так, чтобы от центра окружности оставались участки осевых линий длиной по 21 мм. Затем проводим среднюю осевую линию на расстоянии 52 мм, откладывая вправо и влево от вертикальной оси по 29 мм. Нижнюю ось проводим на расстоянии 105 мм от верхней оси.
3) Выполняем вспомогательные построения в тонких линиях карандашом **Н** или **Т**. (рис. 135, в).

   Из полученных центров строим окружности радиусами R19, R27 и R16. Строим отверстие треугольной формы.
4) Строим внешнее сопряжение окружностей R19 и R27 дугой радиусом R8 (рис. 135, г).

   Для этого из центра окружности R19 проводим две дуги (по обе стороны) радиусом R27: (19+8). Из центра окружности R27 проводим две засечки (по обе стороны) радиусом R35: (27+8). Получаем центры сопряжений.

   Полученные центры сопряжений соединяем с центрами сопрягаемых окружностей. Получаем точки сопряжений. Проводим сопрягающую дугу радиусом R8 между точками сопряжений.
5) Строим внешнюю касательную к окружностям с радиусами R27 и R16 (рис. 136, а).

   Проводим первую вспомогательную окружность. Чтобы найти её центр, делим пополам расстояние между центрами этих окружностей. Из полученной точки деления проводим окружность, проходящую через центры сопрягаемых. Её радиус – R26.5: (53/2). Затем строят вторую вспомогательную окружность R11: (27-16) из центра окружности R27.



* Размер для справок

Изм.	Лист	№ докум.	Подпись	Дата	ПОИГ. 010205. 001
Разраб.		Мажали		12.04.02	Подвеска
Проверил		Черников			Лит. / Масса / Масштаб 1:1
Т.контр.					Лист / Листов 1
					ХНАДУ
Н.контр.					
Утв.					

Рис. 134

Соединяем центр окружности R11 с точками пересечения построенных окружностей и продлеваем эти отрезки до пересечения с окружностью R27. Получили точки касания на этой окружности. Из центра окружности R16 проводим отрезки, параллельные предыдущим, и получаем точки касания на этой окружности.
Затем соединяем полученные точки касания.

6) Нанесение размеров. (рис. 136, б).
Линейный размер «52» (ближайший к контуру) расположить на расстоянии не менее 10 мм от контурной линии, то есть на расстоянии 38 мм от вертикальной оси. Размеры «105» и «140*» располагают на равных расстояниях друг за другом (например, по 8 мм соответственно).
Размер шрифта для размерных чисел принять 3.5 мм или 5 мм, тип Б.
7) Обводка чертежа (рис. 136, в).
Обводку контура выполнять карандашом (B, F или M) толщиной 0.8…1 мм. Построить две окружности $\varnothing$16 мм и часть окружности $\varnothing$25 мм. Обвести контурную часть треугольного отверстия. Проставить их размеры.
8) Заполнение основной надписи и технического требования (рис. 136, г).
Техническое требование выполнить шрифтом 5 или 7 мм. Размеры шрифта для заполнения основной надписи взять по стандарту.

Примечание: все линии построений оставить на чертеже.

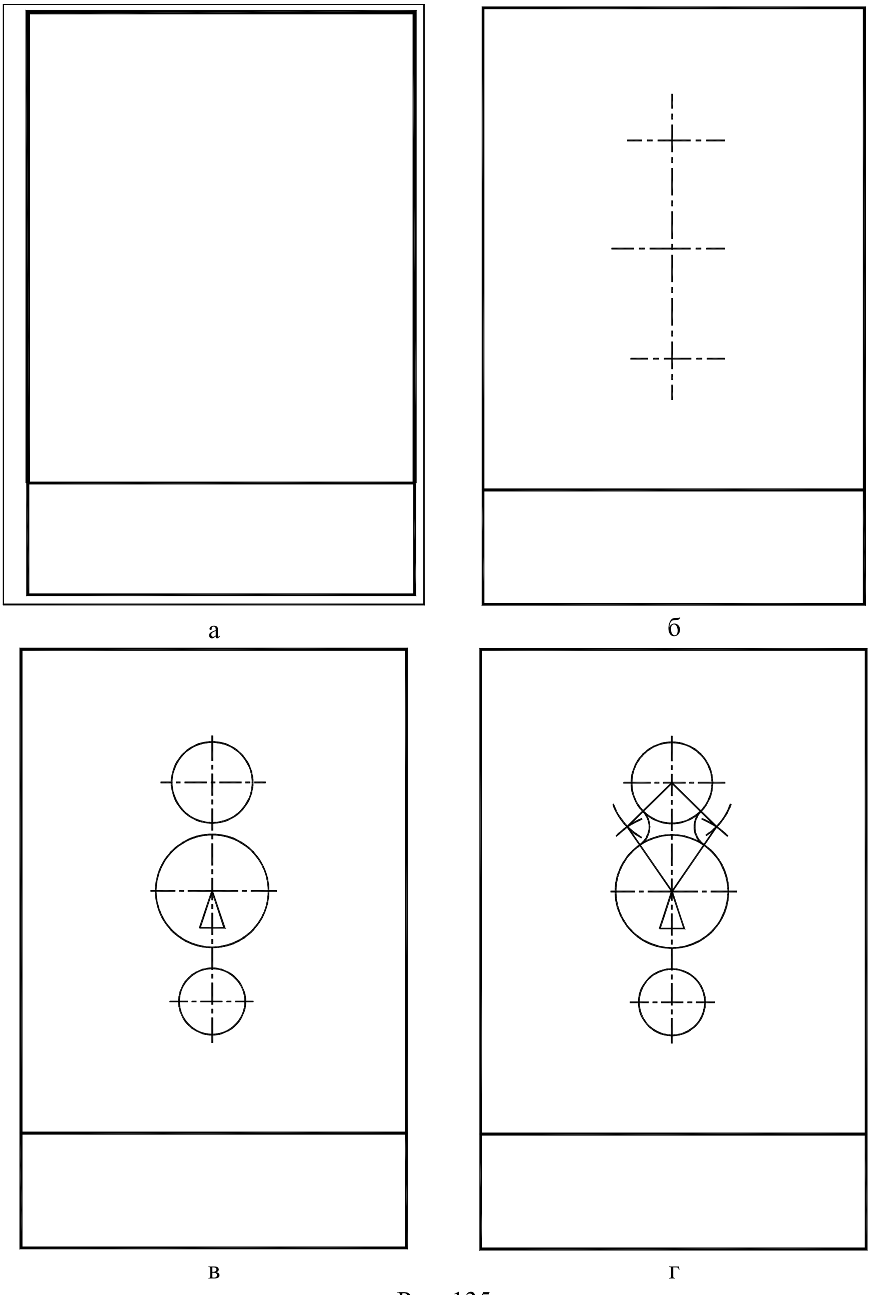
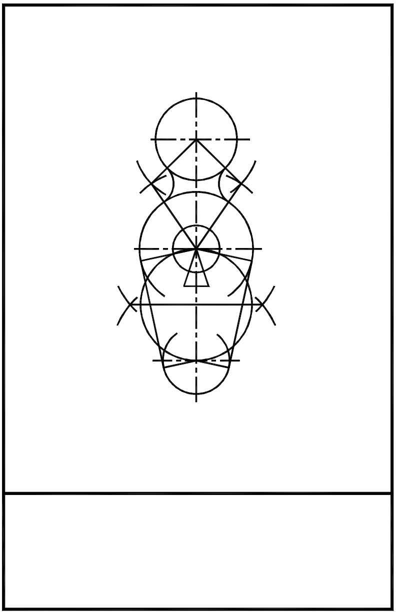
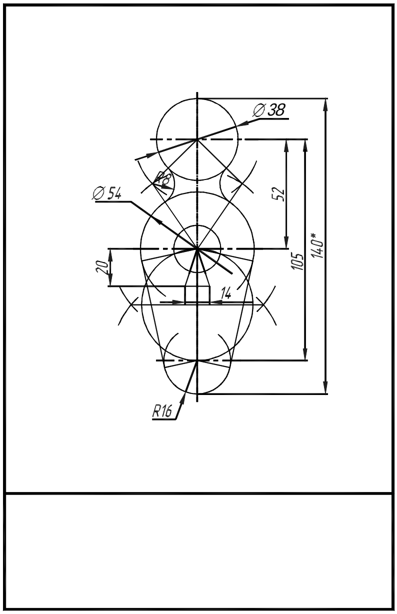


Рис. 135

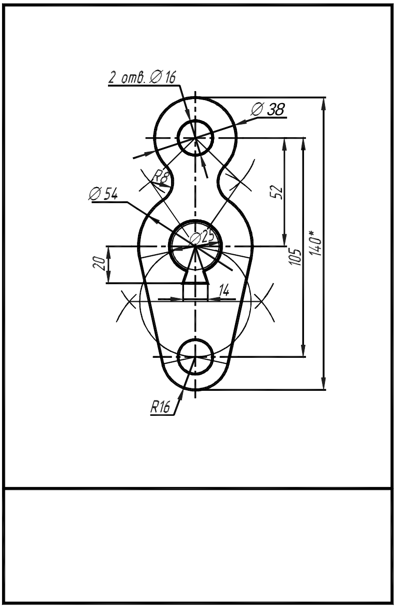


а



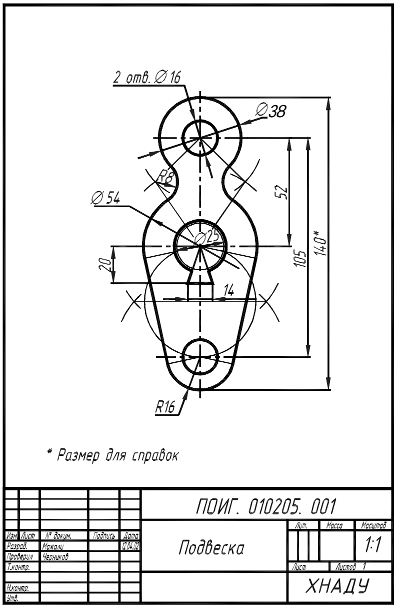
∅38
R8
∅54
52
20
14
105
140*
R16

б



2 отв. ∅16
∅38
R8
∅54
∅25
52
20
14
105
140*
R16

в



2 отв. ∅16
∅38
R8
∅54
∅25
52
20
14
105
140*
R16
* Размер для справок
ПОИГ. 010205. 001
Изм. Лист
№ докум.
Подпись
Дата
Разраб.
Проверил
Т.контр.
Н.контр.
Утв.
Подвеска
Лит.
Масса
Масштаб
1:1
Лист
Листов 1
ХНАДУ

г

Рис. 136

ОСНОВЫ НАЧЕРТАТЕЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ

ПРОЕКЦИИ ТОЧКИ, ПРЯМОЙ, ПЛОСКОСТИ, ПОВЕРХНОСТИ, ТЕЛА.

§ 15. Методы проецирования.

Многие предметы, с которыми мы встречаемся в жизни, – здания, машины, станки, детали машин и станков, сделаны руками человека.

Чтобы построить здание, сделать машину, станок или детали к нему, надо сначала начертить чертежи этих предметов.

Чертежом называется такое изображение предмета, по которому этот предмет можно изготовить. Чертёж выполняется по определенным правилам. Рисунок и фотография – тоже изображения предмета. Но по рисунку и фотографии рабочий не может определить его размеры и форму. Для этого нужно иметь чертёж. Сравните рисунок и чертёж детали на рис. 1.

Все предметы, которые окружают нас в жизни, имеют три измерения: длину, ширину и высоту. Инженер должен уметь изображать предметы на плоскости (листе бумаги), которая имеет только два измерения: длину и ширину. Проецирование – это процесс получения изображения пространственного предмета на плоскости.

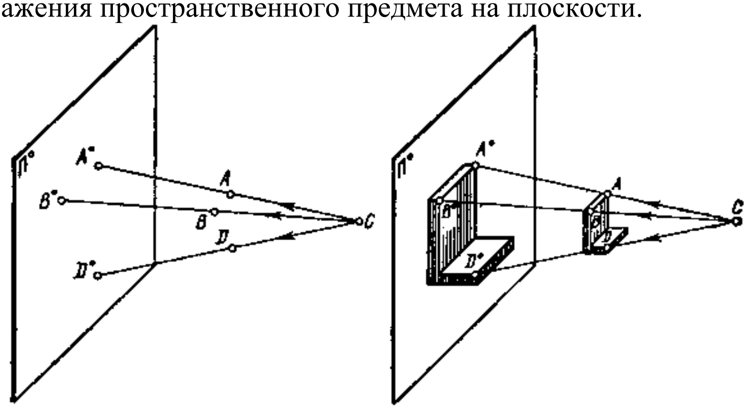


Рис. 137. **Метод центрального проецирования.**

Сначала рассмотрим изображение точки (рис. 137). В пространстве даны точки *A*, *B* и *D* и плоскость П° (пи ноль). Построим изображения точек *A*, *B* и *D* на плоскости П°. Для этого возьмём произвольную точку *C*. Из точки *C* проведём прямые *CA, CB* и *CD* до пересечения с плоскостью П°. Получим точки *A°, B°, D°* – изображения точек *A, B* и *D* на плоскости П°.

Построение изображения точки (или предмета) на плоскости называется **проецированием**; точка *C* называется **центром проецирования**; точки *A*°, *B*° и *D*° – **проекциями** точек *A, B* и *D*; прямые *CA, CB* и *CD* – **проецирующими прямыми**; плоскость П° – **плоскостью проекций**.

1. ***Проекция точки** – это точка пересечения проецирующей прямой, которая проходит через заданную точку, с плоскостью проекций.*

В технике применяют два метода проецирования: метод **центрального проецирования** и метод **параллельного проецирования**.

На рис. 137 проецирующие прямые пересекаются в точке С – центре проецирования. Такое проецирование называется **центральным**. Проецирование, при котором проецирующие прямые параллельны друг другу, называется **параллельным**.

Построение проекций методом параллельного проецирования показано на рис. 138. В пространстве даны точки *A, B* и *C* и плоскость проекций $П_1$ (пи один). Построим проекции точек *A, B* и *C* на плоскости $П_1$. Для этого вместо центра проецирования (точка *C* на рис. 137), примем направление проецирования, которое на чертеже показано стрелкой. Через точки *A, B* и *C* проведём проецирующие прямые параллельно направлению проецирования. При пересечении проецирующих прямых с плоскостью $П_1$ получим точки A_1, B_1 и C_1 – проекции точек *A, B* и *C*.

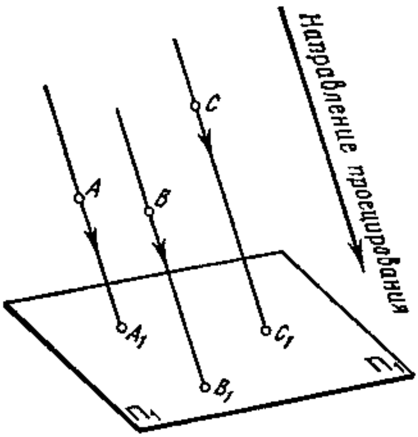


Рис. 138. **Метод параллельного проецирования.**

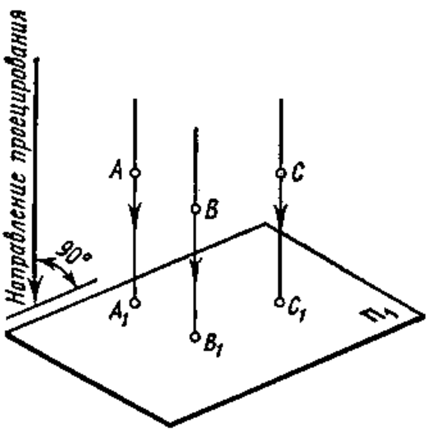


Рис. 139. **Метод ортогонального проецирования.**

Параллельное проецирование может быть косоугольным и прямоугольным. Если проецирующие прямые не перпендикулярны плоскости проекций, такое параллельное проецирование называется **косоугольным** (рис. 138).

Если проецирующие прямые перпендикулярны плоскости проекций, такое параллельное проецирование называется **прямоугольным** или **ортогональным** (рис. 139).

§ 16. Ортогональные проекции точки.

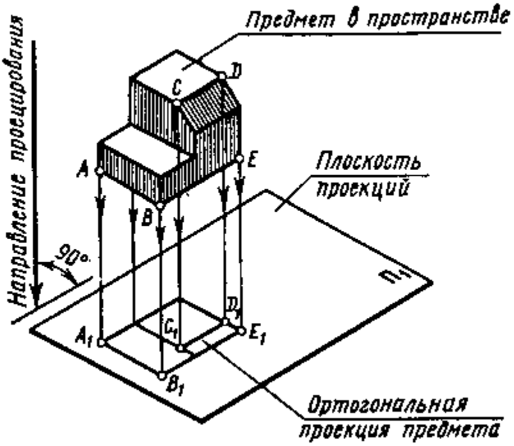
В пространстве (рис. 139) даны точки *A, B* и *C* и плоскость проекций $П_1$. Построим проекции точек *A, B* и *C* на плоскость проекций $П_1$. Примем направление проецирования перпендикулярное плоскости $П_1$. Через точки *A, B* и *C* проведём проецирующие прямые, параллельные направлению проецирования. При пересечении проецирующих прямых с плоскостью $П_1$, получим точки A_1, B_1 и C_1 – ортогональные проекции точек *A, B* и *C*. Следовательно,

2. *Чтобы* ***построить ортогональную проекцию точки****, надо из этой точки опустить перпендикуляр на плоскость проекций и найти его пересечение с плоскостью проекций.*

На рис. 140 построена ортогональная проекция предмета на плоскости проекций $П_1$. Из точки *A* на предмете проведена проецирующая прямая под углом 90° к плоскости $П_1$. A_1 – ортогональная проекция точки *A*; B_1, E_1, C_1 ... и т.д. – ортогональные проекции точек *B, E, C* ... и т.д. Соединим эти точки прямыми линиями и получим ортогональную проекцию предмета. Следовательно, если мы знаем правила построения проекций точки, мы можем построить проекции любого предмета. Метод ортогонального проецирования широко используется в технике.

3. *Одна проекция не определяет положения точки в пространстве.*

Например, известна A_1 – проекция точки *A* на плоскости $П_1$ (рис. 141). Можно ли определить положение точки *A* в пространстве (относительно плоскости $П_I$)? Из чертежа видно, что A_1 – это проекция многих точек (A', A'' и т.д.). Все эти точки лежат на проецирующей прямой, поэтому мы не можем определить, где находится точка *A*.



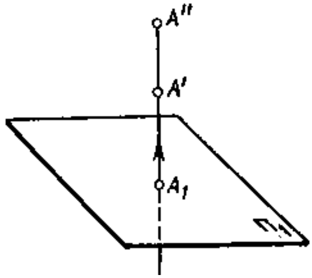
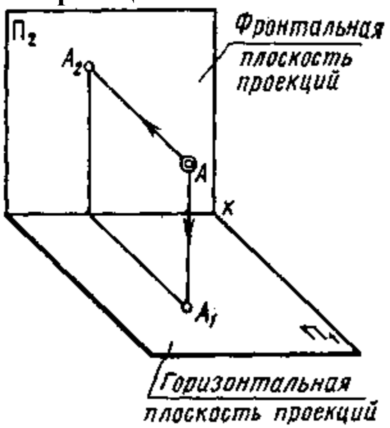


Рис. 140. **Проецирование предмета по методу ортогонального проецирования.**

Рис. 141

Проекции точки на двух плоскостях проекций.

Даны две взаимно-перпендикулярные плоскости проекций Π_1 и Π_2 (рис. 142). Плоскость Π_1 расположим горизонтально. Она называется **горизонтальной плоскостью проекций**. Плоскость Π_2 расположим вертикально. Она называется **фронтальной плоскостью проекций**. Плоскости Π_1 и Π_2 пересекаются по прямой ***x***, которая называется **осью проекций.**



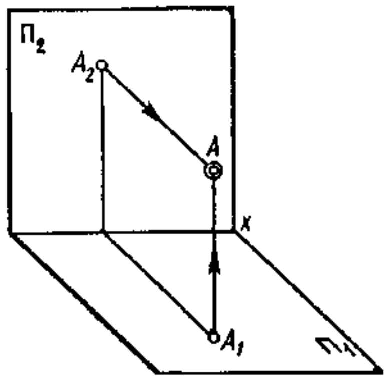


Рис. 142

Рис. 143

Найдём проекции точки A на плоскостях Π_1 и Π_2. Для этого из точки A проведём перпендикуляр к Π_1 и отметим точку A_1 – точку пересечения перпендикуляра с $П_1$. Из точки A проведём перпендикуляр к $П_2$ и отметим точку A_2 – точку пересечения перпендикуляра с $П_2$. Точка A_1 называется **горизонтальной проекцией** точки A. Точка A_2 называется **фронтальной проекцией** точки A.

4. *Две проекции точки определяют положение точки в пространстве.*

Например, известны горизонтальная A_1 и фронтальная A_2 проекции точки A (рис. 143). Можно ли определить положение точки A в пространстве относительно плоскостей $П_1$ и $П_2$? Из проекции A_1 восставим перпендикуляр к $П_1$. Из проекции A_2 восставим перпендикуляр к $П_2$. Эти перпендикуляры пересекутся в одной точке – точке A. Следовательно, по двум проекциям A_1 и A_2 мы определили положение точки A в пространстве.

Эпюр точки.

На рис. 144, *а* даны точка A и ее проекции на плоскостях $П_1$ и $П_2$. Величина отрезка AA_1 показывает расстояние от точки A до $П_1$. Величина отрезка AA_2 показывает расстояние от точки A до $П_2$. Перпендикуляры, опущенные из A_1 и A_2 на ось $\boldsymbol{x}$, пересекаются в точке A_X.

Повернём плоскость $П_1$ вокруг оси $\boldsymbol{x}$. Плоскость $П_1$ совместится с плоскостью $П_2$. Проекции A_1 и A_2 будут лежать на одном перпендикуляре к оси $\boldsymbol{x}$. В этом случае говорят, что A_1 и A_2 расположены в проекционной связи. Прямая линия A_2A_1 называется **линией связи**.

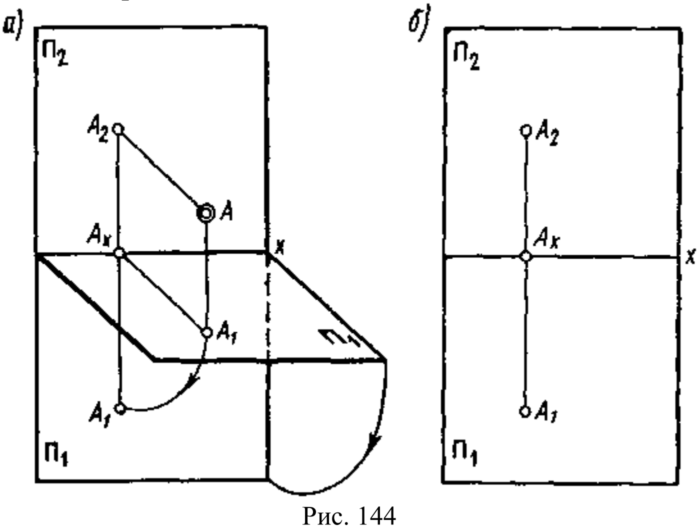


Рис. 144

5. ***Эпюром точки** называется чертеж, на котором изображены две (или три) ортогональные проекции точки, расположенные в проекционной связи.*

На рис. 144, *б* изображён эпюр точки *A*. На эпюре нет самой точки *A*. На эпюре даны только её проекции A_1 и A_2. Но по эпюру можно точно определить положение точки *A* в пространстве относительно плоскостей $П_1$ и $П_2$. Величина отрезка A_2A_X показывает расстояние от точки *A* до $П_1$. Величина отрезка A_1A_X показывает расстояние от точки *A* до $П_2$.

Следовательно, точка *A* задана в пространстве относительно плоскостей $П_1$ и $П_2$ двумя проекциями: горизонтальной проекцией A_1 и фронтальной проекцией A_2. Это положение записывают так: задана точка $A\ (A_1;\ A_2)$.

<u>Проекции точки на трёх плоскостях проекций.</u>

При выполнении технических чертежей иногда строят третью проекцию детали. Для этого вводят ещё одну вертикальную плоскость проекций $П_3$ (рис. 145, *а*). Плоскость $П_3$ называется **профильной плоскостью проекций**. Эту плоскость располагают перпендикулярно плоскостям $П_1$ и $П_2$. Линия пересечения плоскостей $П_2$ и $П_3$ называется осью проекций ***z*** (зет). Линия пересечения плоскостей $П_1$ и $П_3$ называется осью проекций ***y*** (игрек). Оси проекций ***x***, ***y*** и ***z*** пересекаются в одной точке ***O*** (буква О). Опустим перпендикуляр из точки *A* на плоскость $П_3$ и найдём точку A_3 – профильную проекцию точки *A*. Величина отрезка AA_3 – это расстояние от точки *A* до $П_3$.

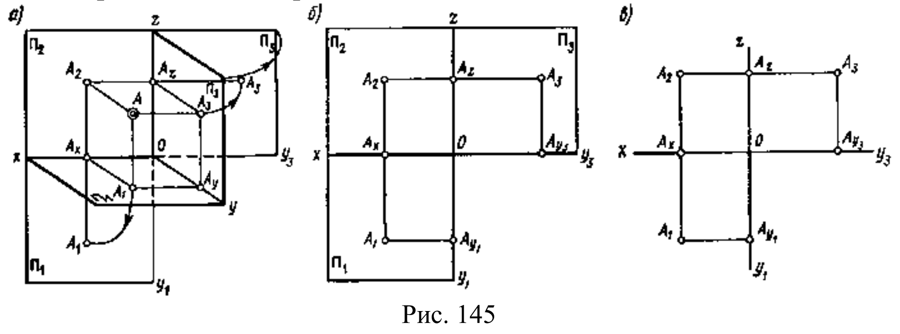


Рис. 145

Чтобы получить эпюр точки *A*, совместим плоскости $П_1$ и $П_3$ с плоскостью $П_2$ (рис. 145, *б*). Плоскость $П_2$ остаётся неподвижной. Плоскость $П_1$ повернём вокруг оси ***x***, плоскость $П_3$ повернём вокруг оси ***z***. На эпюре ось ***y*** изображена два раза: на плоскости $П_1$ и на плоскости Π_3. Обозначим изображение оси y на Π_1 – y_1; изображение оси y на Π_3 – y_3. В дальнейшем мы будем использовать одно обозначение для этой оси – y, как на плоскости Π_1, так и на плоскости Π_3.

Границы плоскостей проекций на эпюре не показывают. На рис. 145, *в* дан эпюр точки A без границ плоскостей проекций.

Рассмотрим эпюр точки A $(A_1; A_2; A_3)$ (рис. 145, *в*). Проекции A_1 и A_2 лежат на линии связи, перпендикулярной оси x. Проекции A_2 и A_3 лежат на линии связи, перпендикулярной оси z. Проекции A_1 и A_3 также расположены в проекционной связи. Линия связи A_1A_{Y1} перпендикулярна оси y. Линия связи A_3A_{Y3} также перпендикулярна оси y.

6. *По двум проекциям точки можно построить её третью проекцию.*

Рассмотрим решение задач 1-3.

Задача 1. Задана точка A $(A_1; A_2)$. Требуется построить точку A_3, профильную проекцию точки A (рис. 146, *а*).

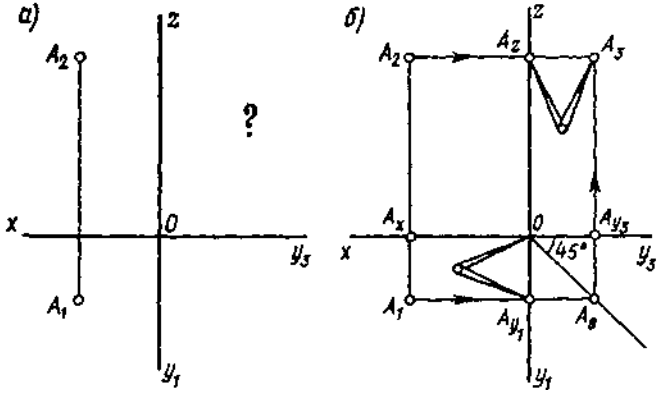


Рис. 146

Через точку A_2 проведём линию связи A_2A_Z (рис. 146, *б*); через точку A_1 проведём линию связи A_1A_{Y1}. Через точку O проведём прямую под углом 45° к осям y_1 и y_3. Продолжим линию A_1A_{Y1} до пересечения с этой прямой в точке A_0. Из точки A_0 проведём линию связи A_0A_{Y3} до пересечения с продолжением линии A_2A_Z. Отметим точку A_3 – профильную проекцию точки A.

Точку A_3 можно найти без помощи прямой OA_0. Измерим величину отрезка $OA_{Y1} = A_1A_X$ и отложим её циркулем на продолжении линии связи A_2A_Z. Отметим точку A_3.

Задача 2. Задана точка *B* (B_1; B_3). Требуется найти точку B_2 – фронтальную проекцию точки *B* (рис. 147, *а*). Построение точки B_2 показано на рис. 147, *б* стрелками.

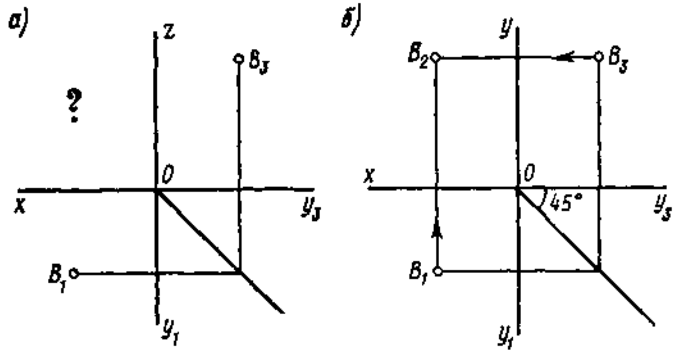


Рис. 147

Задача 3. Задана точка *C* (C_2; C_3). Требуется найти точку C_1 – горизонтальную проекцию точки *C* (рис. 148, *а*). Построение точки C_1 показано на рис. 148, *б* стрелками.

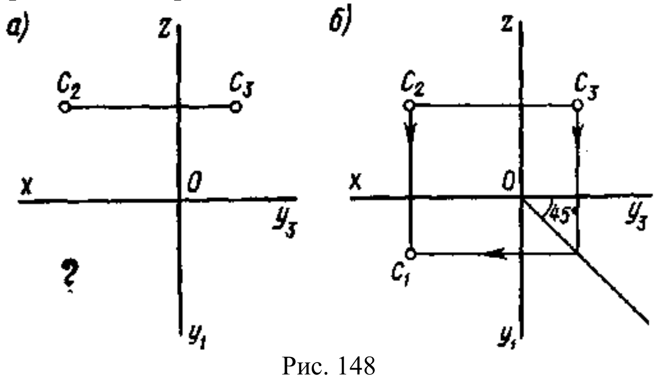


Рис. 148

§ 17. Прямоугольные координаты точки.

Чтобы определить положение точки в пространстве относительно плоскостей координат, надо знать расстояния от точки до плоскостей координат. Эти расстояния называются **координатами точки**. Имеются три координаты: координата *X* (абсцисса), координата *Y* (ордината), координата *Z* (аппликата). Будем считать, что координатные плоскости совпадают с плоскостями проекций $П_1$, $П_2$ и $П_3$; оси координат совпадают с осями проекций *x, y* и *z*. Оси проекций пересекаются в точке *O* – начале координат.

Запись: A (9; 10; 8)означает, что координата X точки A равна 9 единицам, координата Y равна 10 единицам, координата Z равна 8 единицам.

7. *Координаты измеряются по осям x, y и z или по линиям, параллельным осям.*

На рис. 145, *а* координата *X* точки *A* равна величинам отрезков A_3A; A_YA_1; A_ZA_2 и OA_X. Все эти отрезки равны расстоянию от точки *A* до плоскости Π_3. Координата *Y* точки *A* равна величинам отрезков A_2A; A_XA_1; A_ZA_3 и OA_Y. Все эти отрезки равны расстоянию от точки *A* до плоскости Π_2. Координата *Z* точки *A* равна величинам отрезков A_1A; A_YA_3; A_XA_2 и OA_Z. Все эти отрезки равны расстоянию от точки *A* до плоскости Π_1.

8. *По трём координатам точки можно построить эпюр точки и определить положение точки в пространстве.*

Пусть координата *X* точки *A* равна девяти единицам; координата *Y* точки *A* равна десяти единицам, координата *Z* точки *A* равна восьми единицам. Обозначают это так: *A* (9; 10; 8). На первом месте стоит координата *X,* на втором *Y*, на третьем *Z*.

Решите задачи 1-4.

Задача 1. Задана точка *A* (9; 10; 8). Требуется построить её эпюр.

От точки *O* по оси *x* откладываем девять единиц (рис. 149). Отмечаем точку A_X. От точки *O* по оси *y* откладываем десять единиц. Отмечаем точку A_Y. Через точку A_X проводим прямую, параллельную оси *y.* Через точку A_Y проводим прямую, параллельную оси *x.* Точка пересечения этих прямых линий A_1 – горизонтальная проекция точки *A.*

От точки *O* по оси *z* откладываем восемь единиц и отмечаем точку A_Z. Через точку A_Z проводим прямую, параллельную оси *x.* Через точку A_X проводим прямую, параллельную оси *z.* Точка пересечения этих прямых A_2 – фронтальная проекция точки *A*. Прямые, которые проходят через проекции точки параллельно осям – это линии связи.

Профильную проекцию точки *A* – точку A_3 – находим на пересечении линий связи.

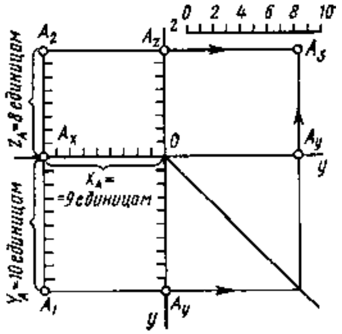


Рис. 149

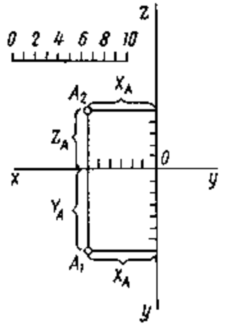


Рис. 150

9. *Если известны две проекции точки, можно узнать все три координаты этой точки.*

Задача 2. Задана точка *A* *(A_1; A_2)* (рис. 150). Требуется определить координаты *X*, *Y* и *Z* точки *A*. Координату *X* можно определить по расположению проекций A_2 или A_1. Она равна шести единицам. Координату *Y* определяем по расположению проекции A_1. Она равна семи единицам. Координату *Z* определяем по расположению проекции A_2. Она равна пяти единицам. Следовательно, по двум проекциям мы определили все три координаты точки *A (6; 7; 5)*.

Задача 3. Задана точка *B* *(B_2; B_3)* (рис. 151). Требуется определить её координаты. Координату *X* определяем по проекции B_2 (*X*=5); координату *Y* определяем по проекции B_3 (*Y*=4); координату *Z* определяем по проекциям B_2 или B_3 (*Z*=6). Следовательно, *B (5; 4; 6)*.

Задача 4. Задана точка *C* *(C_1; C_3)* (рис. 152). Требуется определить её координаты. Координату *X* определяем по проекции C_1 (*X*=4); координату *Y* определяем по проекциям C_1 или C_3 (*Y*=5); координату *Z* определяем по проекции C_3 (*Z*=7). Следовательно, *C (4; 5; 7)*.

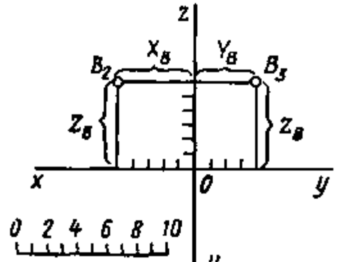


Рис. 151

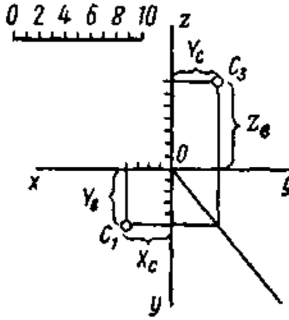


Рис. 152

§ 18. Расположение точек в пространстве.

Если точка не лежит ни на одной из плоскостей проекций, она называется ***точкой общего положения***. Ни одна координата точки общего положения не равна нулю (например, точка *A* на рис. 145 и 149). Если хотя бы одна координата точки равна нулю, точка называется ***точкой частного положения***.

Рассмотрим некоторые примеры точек частного положения.

Пример 1. На рис. 153, *а* дан эпюр точки *B (10; 8; 0)*. Координата *Z* равна нулю; это значит, что расстояние от точки *B* до плоскости Π_1 равно нулю. Поэтому точка *B* лежит на плоскости Π_1 и совпадает со своей горизонтальной проекцией (на рис. 153, *б* дано пространственное изображение точки *B*). Следовательно, **если одна координата точки равна нулю, то точка лежит на плоскости проекций.**

Из эпюра точки *B* видно, что фронтальная проекция B_2 лежит на оси ***x*** и совпадает с точкой B_X. Слово “совпадает” обозначают знаком «≡» и записывают так: $B_2 \equiv B_X$ (B_2 совпадает с B_X). Профильная проекция B_3 лежит на оси *y* и совпадает с точкой B_Y ($B_3 \equiv B_Y$). Следовательно, **если точка лежит на плоскости проекций, то две проекции точки лежат на осях проекций.**

Пример 2. На рис. 153 кроме эпюра точки *B* даны эпюры точек частного положения *C* и *D*. Точка *C (14; 0; 7)* лежит на фронтальной плоскости проекций. Точка *D (0; 5; 12)* лежит на профильной плоскости проекций.

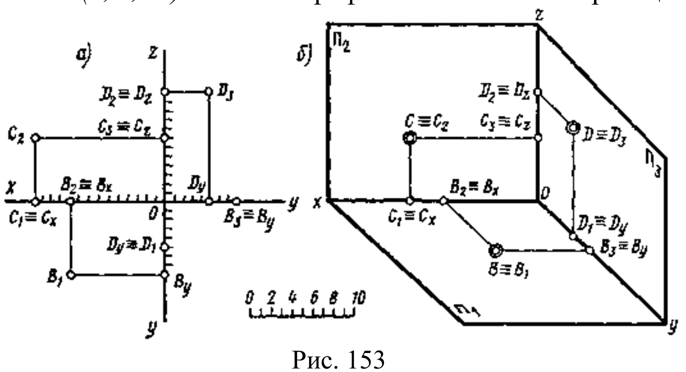


Рис. 153

Мы рассмотрели эпюры точек частного положения, когда одна координата точки равна нулю.

Если две координаты точки равны нулю, то точка лежит на оси проекций, а две проекции точки совпадают и лежат на той же оси.

Пример 3. На рис. 154, *а* дан эпюр точки *E (12; 0; 0)*. Координаты *Y* и *Z* точки *E* равны нулю. Это значит, что расстояния от точки *E* до $П_2$ и $П_1$ равны нулю, поэтому точка *E* лежит на оси *x* и совпадает со своей горизонтальной и фронтальной проекциями ($E \equiv E_1 \equiv E_2$ на рис. 154, *б*). Профильная проекция E_3 лежит в начале координат ($O \equiv E_3$).

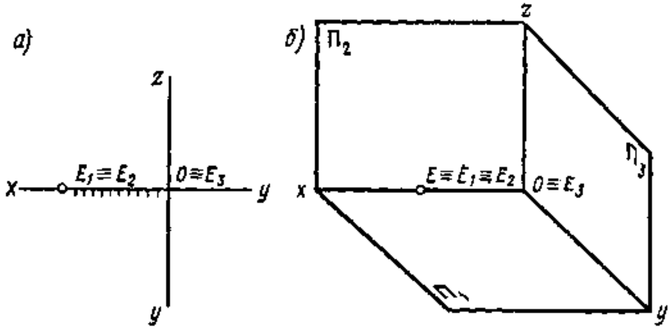


Рис. 154

Если три координаты точки равны нулю, то точка лежит в начале координат, и все три проекции точки совпадают и лежат в начале координат – точке *O*.

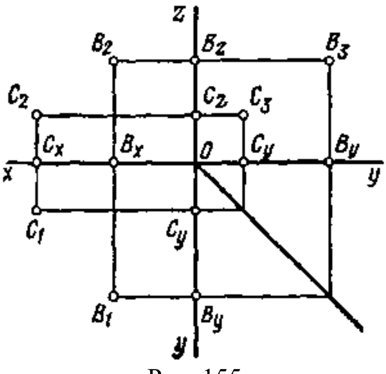


Рис. 155

Прочитать эпюр точки – это значит определить расстояния от точки до плоскостей проекций. Если на эпюре даны проекции нескольких точек, надо уметь определить по эпюру взаимное расположение точек в пространстве. Рассмотрим примеры.

Заданы точки *B* (B_1; B_2; B_3) и *C*(C_1; C_2; C_3) (рис. 155). Из эпюра видно, что координата *X* точки *C* больше координаты *X* точки *B* на величину отрезка B_XC_X. Следовательно, точка *C* расположена дальше от плоскости $П_3$, чем точка *B*. Координата *Z* точки *C* меньше координаты

Z точки B на величину отрезка C_ZB_Z. Следовательно, точка C расположена ниже точки B. Координата Y точки C меньше координаты Y точки B на величину отрезка C_YB_Y. Следовательно, точка C расположена ближе к плоскости Π_2, чем точка B.

Упражнение 6. Постр***о***ить три проекции точек и определить их положение в пространстве. ***A***(35; 20; 40); ***B***(15; 40; 0); ***C***(20; 0; 30); ***D***(0; 30; 10); ***E***(30; 0; 0); ***F***(0; 10; 0). Задание выполнить на горизонтальном формате А4 (без основной надписи).

§ 19. Проекции прямой линии.

Положение прямой линии в пространстве определяют две точки. Чтобы построить проекции прямой, достаточно построить проекции двух её точек. На чертеже прямая обычно задаётся отрезком. Из точек A и B отрезка AB (рис. 156) опустим перпендикуляры на плоскость Π_1 и построим проекции A_1 и B_1. Соединив точки A_1 и B_1 прямой линией, получим отрезок A_1B_1 – проекцию отрезка AB. Из точек C и D опустим перпендикуляры на плоскость Π_1, соединим точки C_1 и D_1 прямой линией и получим отрезок C_1D_1 – проекцию отрезка CD; из точек E и F также опустим перпендикуляры на Π_1. Они пересекутся с плоскостью Π_1 в одной точке. Точка $E_1 \equiv F_1$ – проекция отрезка EF.

Прямая может занимать различные положения относительно плоскости проекций: прямая может быть наклонена к плоскости под углом α (альфа), $0 < \alpha < 90°$ (прямая AB); прямая может быть параллельна плоскости проекций (прямая CD); прямая может быть перпендикулярна плоскости проекций (прямая EF).

10. Величина проекции отрезка прямой *зависит от положения прямой относительно плоскости проекций. Она изменяется от нуля до натуральной величины отрезка.*

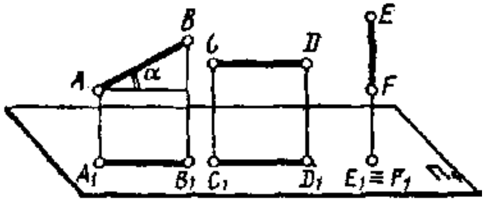


Рис. 156

Из рисунка 156 видно, что величина отрезка A_1B_1 меньше величины отрезка AB ($A_1B_1 = AB \cdot \cos\alpha$). Чем больше угол наклона прямой к плоскости проекций, тем меньше величина проекции отрезка прямой. Если прямая перпендикулярна плоскости проекций (прямая *EF),* величина проекции ($E_1 \equiv F_1$) равна нулю. В этом случае говорят, что прямая проецируется в точку. Чем меньше угол наклона прямой к плоскости проекций, тем больше величина проекции отрезка прямой. Если прямая параллельна плоскости проекций (прямая *CD),* величина проекции C_1D_1 равна величине отрезка *CD*. В этом случае говорят, что величина проекции отрезка равна **натуральной величине** отрезка.

<u>Прямая общего положения.</u>

Прямая, которая наклонена ко всем плоскостям проекций под углами, отличными от 0^o, называется **прямой общего положения** (рис. 157).

11. *Все проекции отрезка прямой общего положения меньше натуральной величины отрезка.*

Действительно, мы знаем, что $A_1B_1 = AB \bullet \cos\alpha$ (рис. 156), где α – угол наклона прямой *AB* к $П_1$. *AB* будет равно A_1B_1, если $\cos\alpha$ будет равен единице. Это возможно при $\alpha = 0$, т.е. в том случае, если $AB \parallel П_1$, что противоречит условию. Поэтому $AB > A_1B_1$.

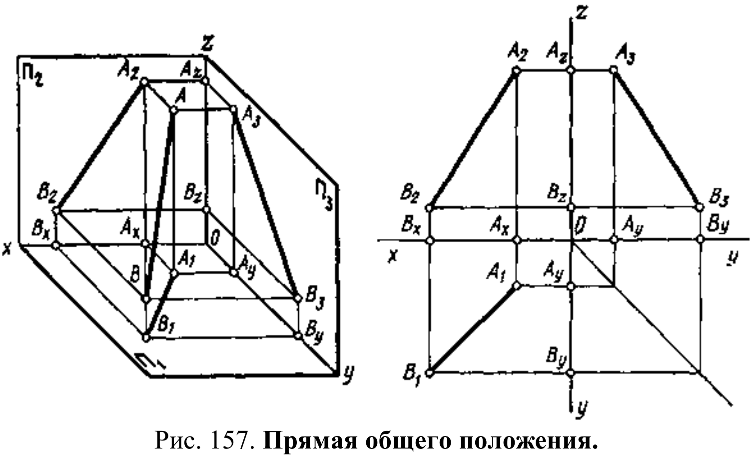


Рис. 157. **Прямая общего положения.**

На рис. 157 отрезок *AB* наклонён ко всем трём плоскостям проекций: $П_1, П_2, П_3$, поэтому $AB > A_1B_1;\ AB > A_2B_2;\ AB > A_3B_3$.

Прямые частного положения.

Прямые, параллельные одной или двум плоскостям проекций, называются **прямыми частного положения.** Прямые, параллельные одной плоскости проекций, называются **прямыми уровня.**

12. *Одна проекция отрезка прямой уровня равна* ***натуральной величине*** *отрезка.*

Прямых уровня три. Прямая *CD* на рис. 158 параллельна плоскости II_1 и наклонена к плоскостям $П_2$ и $П_3$. Такая прямая называется **горизонталью.** Проекция C_2D_2 параллельна оси *x,* а C_3D_3 параллельна оси *y,* так как координаты *Z* всех точек прямой равны между собой; $C_1D_1 = CD$.

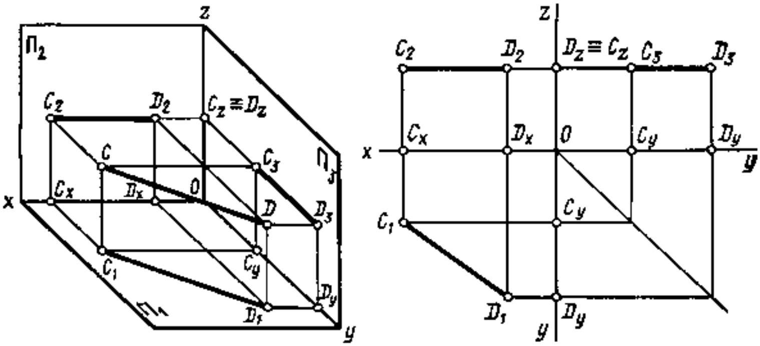


Рис. 158. **Горизонталь.**

Прямая *EF* на рис. 159 параллельна плоскости $П_2$ и наклонена к плоскостям $П_1$ и $П_3$. Такая прямая называется **фронталью.** Проекция E_1F_1 параллельна оси *x;* E_3F_3 параллельна оси *z;* $E_2F_2 = EF$.

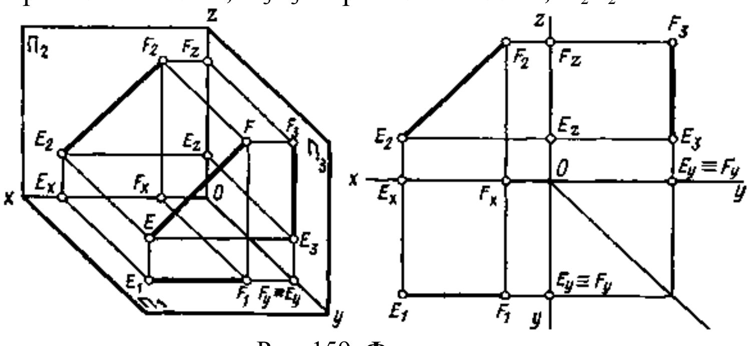


Рис. 159. **Фронталь.**

Прямая MN на рис. 160 параллельна плоскости $П_3$ и наклонена к плоскостям $П_1$ и $П_2$. Такая прямая называется **профильной прямой**. Проекция M_2N_2 параллельна оси z; M_1N_1 параллельна оси y.

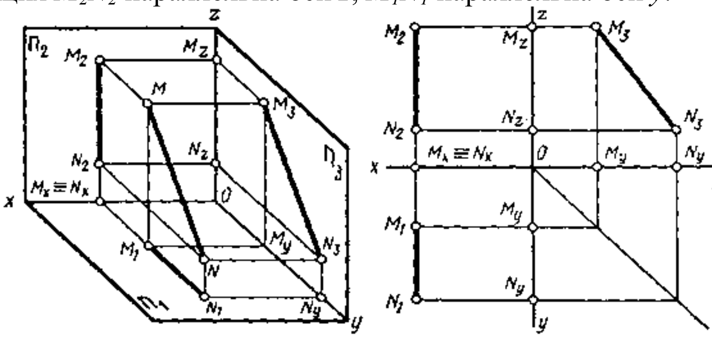


Рис. 160. **Профильная прямая.**

Прямые, параллельные двум плоскостям проекций, называются **проецирующими прямыми**. Они перпендикулярны третьей плоскости проекций.

13. *Две проекции отрезка проецирующей прямой равны натуральной величине отрезка.*

Проецирующих прямых тоже три. Прямая KL на рис. 161 параллельна плоскостям $П_2$ и $П_3$. Следовательно, она перпендикулярна плоскости $П_1$. Такая прямая называется **горизонтально-проецирующей**. Проекция KL на $П_1$ – точка ($K_1 \equiv L_1$); $K_2L_2 = K_3L_3 = KL$.

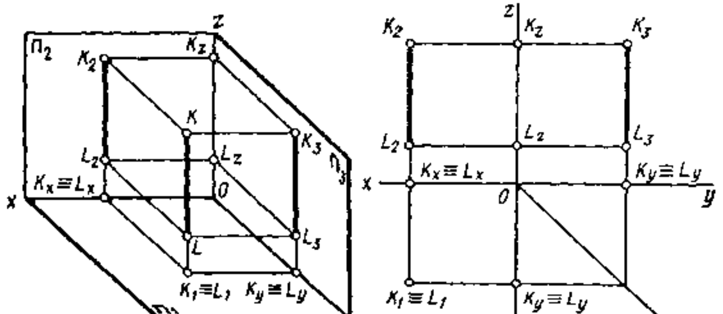


Рис. 161. **Горизонтально-проецирующая прямая.**

Прямая AR на рис. 162 параллельна плоскостям $П_1$ и $П_3$, следовательно, перпендикулярна $П_2$. Такая прямая называется **фронтально-проецирующей**.

Проекция AR на $П_2$ – точка ($A_2 \equiv R_2$); $A_1R_1 = A_3R_3 = AR$.

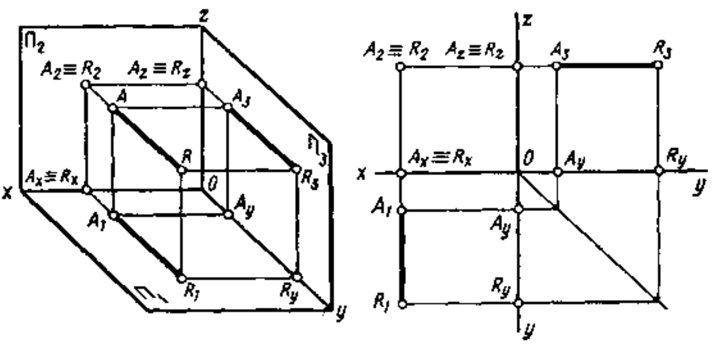


Рис. 162. **Фронтально-проецирующая прямая.**

И, наконец, прямая *KD* на рис. 163 параллельна плоскостям Π_1 и Π_2, следовательно, она перпендикулярна Π_3. Такая прямая называется **профильно-проецирующей**. Проекция *KD* на Π_3 – точка ($K_3 \equiv D_3$); $K_1D_1 = K_2D_2 = KD$.

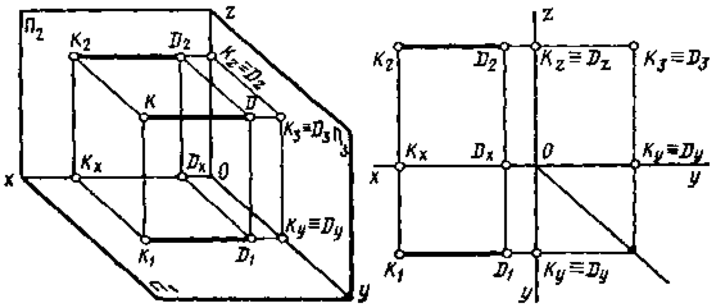


Рис. 163. **Профильно-проецирующая прямая.**

Упражнение 7. Постр*о*ить комплексный чертеж всех возможных прямых частного положения и определить координаты их конечных точек. Задание выполнить на горизонтальном формате А4 (без основной надписи).

§ 20. Точка на прямой

14. *Если точка принадлежит прямой, то* ***проекция точки лежит на проекции этой прямой.***

На рис. 164, *а* дана прямая *AB* и её проекции A_1B_1 и A_2B_2. На прямой *AB* возьмём любую точку, например, точку *C*. Горизонтальная проекция C_1 точки *C* лежит на горизонтальной проекции A_1B_1 прямой *AB*; фронтальная проекция C_2 точки *C* лежит на фронтальной проекции A_2B_2 прямой *AB*. На прямой *AB* можно взять бесконечное число точек, и проекции этих точек будут лежать на одноимённых проекциях прямой AB.

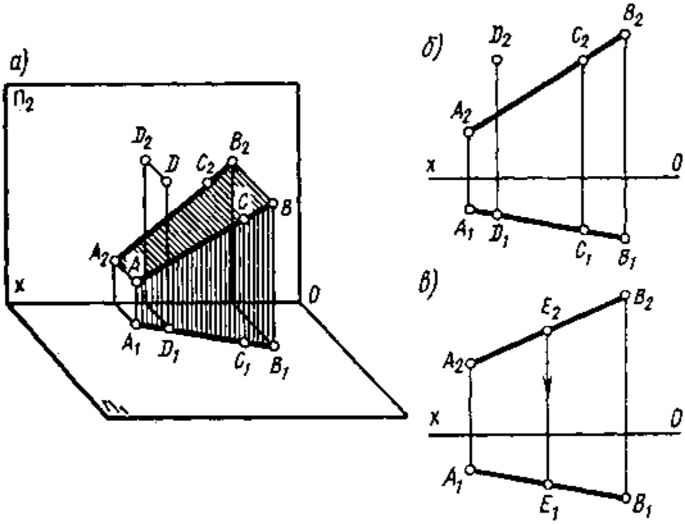


Рис. 164

Выражение «точка принадлежит прямой» записывают так: $C \in AB$.

Точка D не принадлежит прямой AB, хотя её горизонтальная проекция D_1 лежит на горизонтальной проекции прямой A_1B_1.

На эпюре (рис. 164, *б*) задан отрезок AB $(A_1B_1;\ A_2B_2)$ и точки C $(C_1;\ C_2)$ и D $(D_1;\ D_2)$. Проекции точки C лежат на одноимённых проекциях отрезка AB (C_1 на A_1B_1; C_2 на A_2B_2). Следовательно, точка C принадлежит отрезку AB $(C \in AB)$. Одна проекция точки D (D_2) не лежит на одноимённой проекции отрезка. Следовательно, точка D не принадлежит отрезку AB $(D \notin AB)$.

Решите задачи 1-2.

Задача 1. На рис. 164, *в* дана точка E_2 – фронтальная проекция точки E. Известно, что точка E принадлежит прямой AB $(E \in AB)$. Требуется построить E_1 – горизонтальную проекцию точки E.

Из точки E_2 проводим линию связи (перпендикуляр к оси x) и отмечаем точку E_1 на проекции A_1B_1. Точка E принадлежит прямой AB $(E \in AB)$, т.к. точка E_1 лежит на проекции A_1B_1, а E_2 лежит на A_2B_2.

Задача 2. На рис. 165 показано построение проекций точки A, принадлежащей профильной прямой MN ($MN \parallel \Pi_3$). Пусть дана A_1 – горизонтальная проекция точки A. Известно, что точка A принадлежит прямой MN ($A \in MN$). Требуется построить A_2 – фронтальную проекцию точки A (рис. 165, *а*).

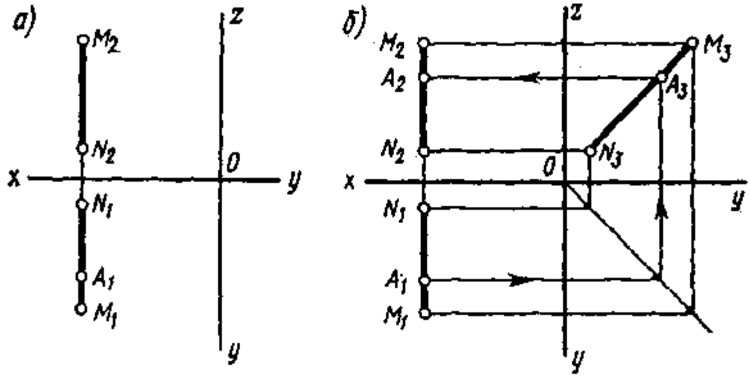


Рис. 165

Построение выполнено с помощью профильной проекции M_3N_3 прямой MN (рис. 165, *б*) и на чертеже показано стрелками. Точка A принадлежит прямой MN ($A \in MN$), так как точка A_1 лежит на проекции M_1N_1, A_2 лежит на проекции M_2N_2, A_3 – на M_3N_3.

§ 21. Взаимное расположение прямых.

Два геометрических объекта – точка и точка, точка и прямая, две прямые, точка и плоскость, прямая и плоскость, две плоскости – могут занимать в пространстве различное взаимное положение.

Две точки могут совпадать или не совпадать.

Точка может принадлежать прямой или плоскости, либо находиться вне них.

Две прямые могут совпадать, иметь одну общую точку, не иметь общих точек.

Прямая может принадлежать плоскости, иметь с ней одну общую точку или не иметь общих точек.

Две плоскости могут либо полностью совпадать, либо иметь одну общую прямую, либо не иметь общих точек.

Для того чтобы выяснить взаимное положение двух геометрических элементов по их проекциям необходимо знать позиционные свойства этих проекций.

Рассмотрим две прямые.

Пересекающиеся прямые имеют одну общую точку, пусть это будет точка А. Из чертежа видно, что:

прямые пересекаются, если точки пересечения их одноименных проекций – A_1, A_2 и A_3 – проекционно соответственны, то есть A_1 и A_2 лежат на одной вертикальной линии связи, A_2 и A_3 лежат на одной горизонтальной линии связи (рис 166, *а*).

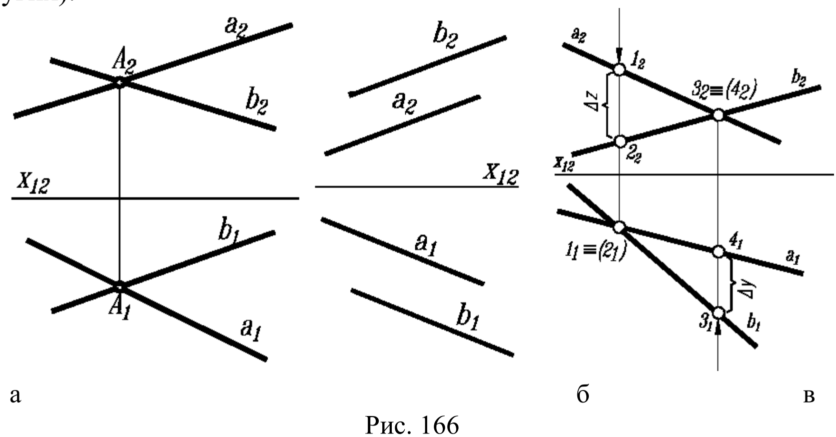
Это условие является необходимым и достаточным условием пересечения прямых.

Если точка пересечения находится в бесконечности, то прямые **параллельны**. Таким образом, ***прямые параллельны в пространстве, если одноименные их проекции параллельны между собой*** (рис. 166, *б*).

Пересекающиеся и параллельные прямые на одной из проекций могут совпадать, если плоскость, в которой они лежат, занимает проецирующее положение. Такие прямые будем называть конкурирующими прямыми.

Если прямые не параллельны и не пересекаются, то они называются скрещивающимися прямыми. Скрещивающиеся прямые не имеют общих точек. Будем говорить, что ***прямые скрещиваются, если точки пересечения их одноименных проекций не лежат на одной линии связи*** (рис. 166, *в*).

Таким образом, точки пересечения одноименных проекций скрещивающихся прямых являются двумя конкурирующими точками (их проекции совпадают на одной плоскости проекций, но различны на других).



а б в

Рис. 166

С помощью конкурирующих точек определяют, какая прямая выше, какая ниже (по горизонтально-конкурирующим точкам); какая ближе к наблюдателю, какая дальше (по фронтально-конкурирующим точкам); какая левее, какая правее (по профильно-конкурирующим точкам).

§ 22. Проекции плоскости.

15. *Плоскость в пространстве может быть задана тремя точками, не лежащими на одной прямой.*

Каждые две точки можно соединить прямой линией, поэтому плоскость может быть задана:

- прямой и точкой, не лежащей на этой прямой;
- двумя пересекающимися прямыми;
- двумя параллельными прямыми;
- треугольником или другой плоской фигурой.

Эпюр плоскости – это эпюр задающих плоскость точек или линий.

На рис. 167 (*а, б*) дано пространственное изображение и эпюр трёх точек: A (A_1; A_2);B (B_1; B_2); C (C_1; C_2). Через эти точки можно провести плоскость (плоскость Ω на рис. 167, *в*). На эпюре плоскость Ω задана проекциями точек *A, B* и *C* (рис. 167, *б*). Это записывают так: Ω (A_1A_2; B_1B_2; C_1C_2).

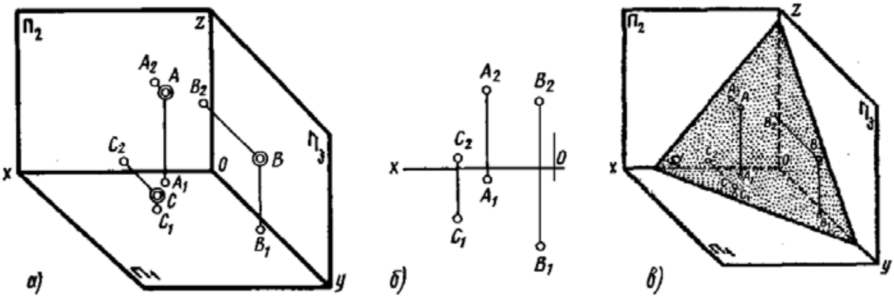


Рис. 167

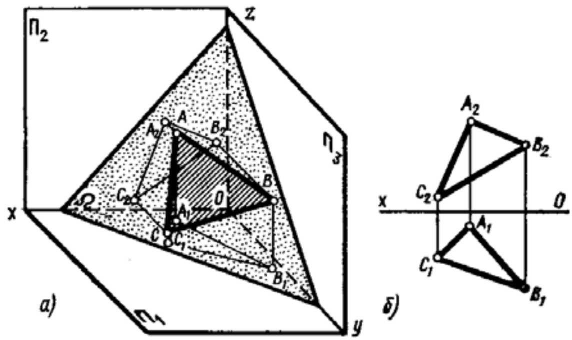


Рис. 168

Если точки *A, B* и *C* соединить прямыми линиями, получим треугольник *ABC* (рис. 168, *а*). В этом случае говорят, что плоскость задана треугольником *ABC.* Эпюр плоскости Ω (рис. 168, *б*) – это эпюр треугольника *ABC* ($A_1B_1C_1$; $A_2B_2C_2$).

Плоскость может занимать общее и частное положения относительно плоскостей проекций.

А. Плоскость общего положения.

Плоскость, которая наклонена ко всем плоскостям проекций под углами, отличными от прямого, называется **плоскостью общего положения.**

16. *Фигура, лежащая в плоскости общего положения, ни на одну из плоскостей проекций не проецируется в натуральную величину.*

На рис. 169 показана плоскость общего положения Σ, заданная треугольником *SAB*. Треугольник *SAB наклонён к плоскости проекций* $П_1$.

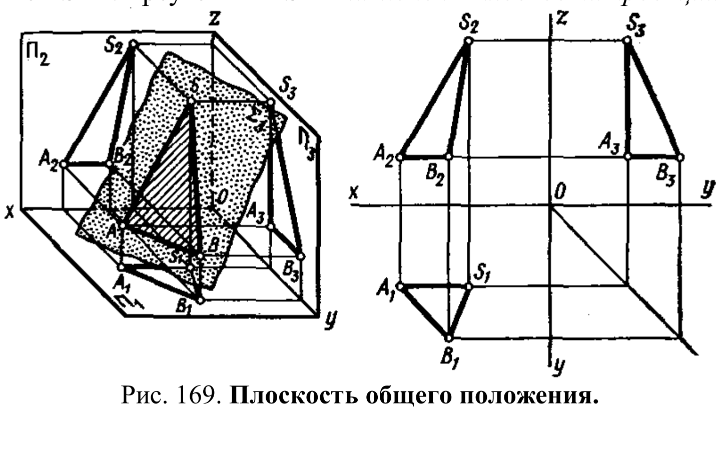


Рис. 169. **Плоскость общего положения.**

Хотя $AB = A_1B_1$ (***12***; рис. 158), $SA > S_1A_1$ и $SB > S_1B_1$, так как SA и SB – прямые общего положения (***11***; рис. 157). Поэтому $\Delta SAB \neq \Delta S_1A_1B_1$. Так как ΔSAB также наклонён к плоскостям проекций $П_2$ и $П_3$, то $\Delta SAB \neq \Delta S_2A_2B_2$ и $\Delta SAB \neq \Delta S_3A_3B_3$. Следовательно, ни на одну из плоскостей проекций треугольник SAB не проецируется в натуральную величину.

Б. Плоскости частного положения.

Плоскости, перпендикулярные одной или двум плоскостям проекций, называются **плоскостями частного положения**.

Плоскость, перпендикулярная одной плоскости проекций, называется **проецирующей**.

17. *Фигура, лежащая в проецирующей плоскости, проецируется в отрезок на ту плоскость проекций, которой перпендикулярна проецирующая плоскость.*

Прямая линия, заданная этим отрезком, является проекцией проецирующей плоскости. Она определяет положение проецирующей плоскости в пространстве относительно плоскостей проекций $П_1$, $П_2$ и $П_3$.

Проецирующих плоскостей три. На рис. 170 плоскость Ω (омега), заданная прямоугольником $AEFB$, перпендикулярна плоскости $П_1$.

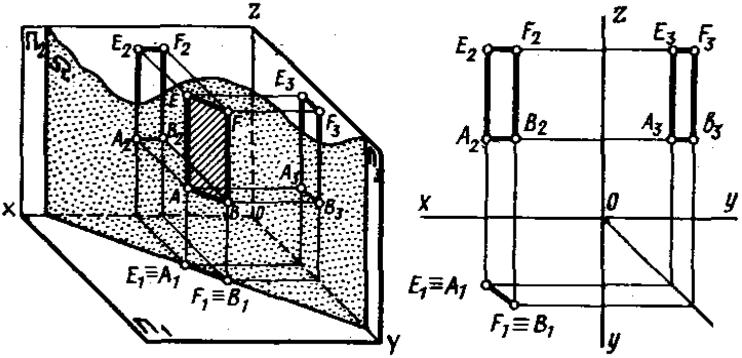


Рис. 170. **Горизонтально-проецирующая плоскость.**

Такая плоскость называется **горизонтально-проецирующей.** На плоскость $П_1$ она проецируется в прямую. Проекция прямоугольника на $П_1$ – отрезок E_1F_1; проекции прямоугольника на $П_2$ и $П_3$ – прямоугольники $A_2E_2F_2B_2$ и $A_3E_3F_3B_3$. Эти прямоугольники не равны прямоугольнику $AEFB$, т.к. стороны EF и AB на $П_2$ и $П_3$ не проецируются в натуральную величину (***12***; рис. 158).

На рис. 171 плоскость Σ (сигма), заданная треугольником *KML,* перпендикулярна плоскости $П_2$. Такая плоскость называется **фронтально-проецирующей.** На плоскость $П_2$ она проецируется в прямую линию. Проекция треугольника на $П_2$ – отрезок K_2M_2.

Проекции треугольника на $П_1$ и $П_3$ – треугольники $K_1M_1L_1$ и $K_3M_3L_3$. Эти треугольники не равны треугольнику *KML*, т.к. стороны *KM, KL* и *LM* – отрезки общего положения и ни на одну из плоскостей проекций не проецируются в натуральную величину (***11***; рис. 157).

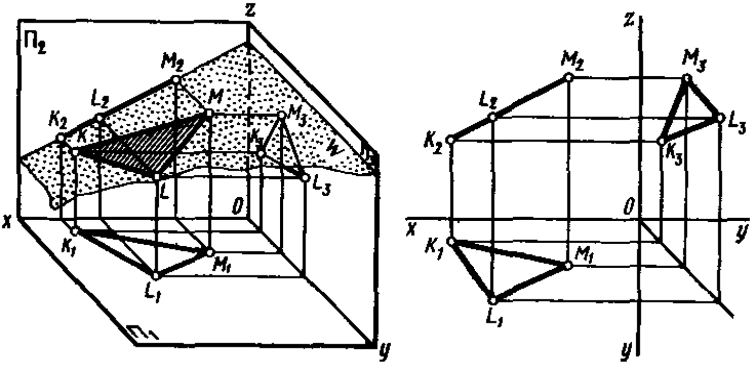


Рис. 171. **Фронтально-проецирующая плоскость.**

На рис. 172 плоскость Ψ (пси), заданная треугольником *SBC,* перпендикулярна плоскости $П_3$. Такая плоскость называется **профильно-проецирующей.** Она проецируется на $П_3$ в прямую линию. Проекция треугольника на $П_3$ – отрезок S_3B_3.

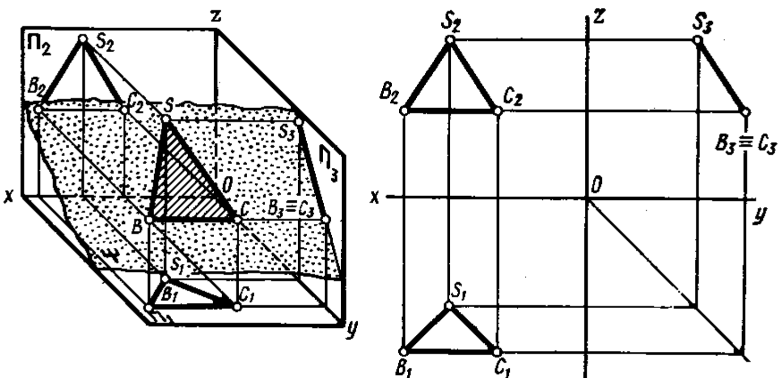


Рис. 172. **Профильно-проецирующая плоскость.**

Проекции треугольника на $П_1$ и $П_2$ – треугольники $S_1C_1B_1$ и $S_2C_2B_2$. Эти треугольники не равны треугольнику *SBC*, т.к. стороны *SB,* и *SC* – отрезки общего положения и ни на одну из плоскостей проекций не проецируются в натуральную величину (***11***; рис. 157).

Плоскости, параллельные одной плоскости проекций (и перпендикулярные двум другим плоскостям проекций), называются **плоскостями уровня.** Они являются проецирующими относительно двух плоскостей проекций.

18. *Фигура, лежащая в плоскости уровня, проецируется в натуральную величину на ту плоскость проекций, которая параллельна плоскости уровня. Две другие проекции – отрезки прямых, параллельных осям проекций.*

Прямые линии, заданные этими отрезками, являются проекциями плоскости уровня. Они определяют положение плоскости уровня в пространстве.

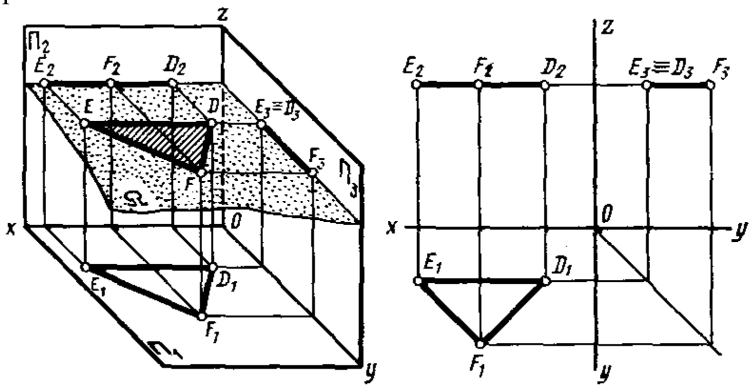


Рис. 173. **Горизонтальная плоскость.**

Плоскостей уровня три. На рис. 173 плоскость Ω задана треугольником *EDF*. Эта плоскость параллельна плоскости $П_1$ и перпендикулярна $П_2$ и $П_3$. Она называется **горизонтальной.** Проекции плоскости Ω на $П_2$ и $П_3$ – прямые линии. Проекции треугольника *EDF* на $П_2$ и $П_3$ – отрезки E_2D_2 и E_3F_3, параллельные соответственно осям *x* и *y*. Проекция треугольника *EDF* на $П_1$ – треугольник $E_1D_1F_1$, равный треугольнику *EDF*, т.к. сторона *ED* (***13***; рис. 163) и стороны *DF* и *FE* (***12***; рис. 158) проецируются на $П_1$ в натуральную величину.

На рис. 174 плоскость Σ задана прямоугольником *AEDC*. Она параллельна плоскости $П_2$ и перпендикулярна $П_1$ и $П_3$. Такая плоскость называется **фронтальной.** Проекции плоскости Σ на $П_1$ и $П_3$ – прямые линии. Проекции прямоугольника на Π_1 и Π_3 – отрезки E_1D_1 и E_3A_3, параллельные соответственно осям x и z. Проекция прямоугольника $AEDC$ на плоскость Π_2 – прямоугольник $A_2E_2D_2C_2$, равный прямоугольнику $AEDC$, т.к. стороны AE и CD (***13***; рис. 160) и стороны ED и AC (***13***; рис. 163) проецируются на Π_2 в натуральную величину.

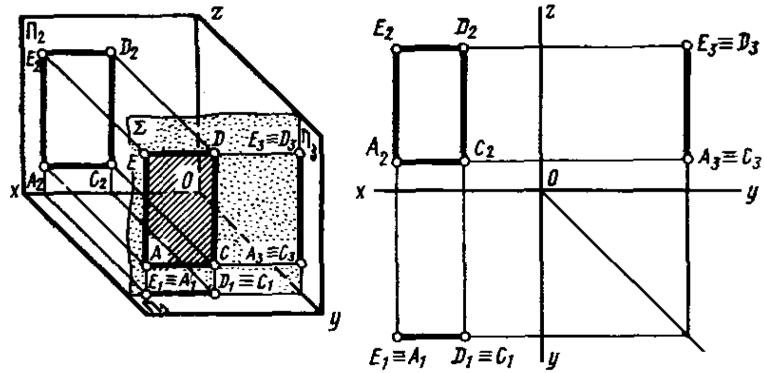


Рис. 174. **Фронтальная плоскость.**

На рис. 175 плоскость Ψ, заданная квадратом $ABCD$, параллельна плоскости Π_3 и перпендикулярна Π_1 и Π_2. Она называется **профильной.** Проекции плоскости Ψ на Π_1 и Π_2 – прямые линии. Проекции квадрата $ABCD$ на Π_1 и Π_2 – отрезки A_1D_1 и A_2B_2, параллельные соответственно осям y и z. Проекция $ABCD$ на плоскость Π_3 – квадрат $A_3B_3C_3D_3$, равный квадрату $ABCD$, т.к. стороны AB и CD (***13***; рис. 161) и стороны BC и AD (***13***; рис. 162) проецируются на Π_3 в натуральную величину.

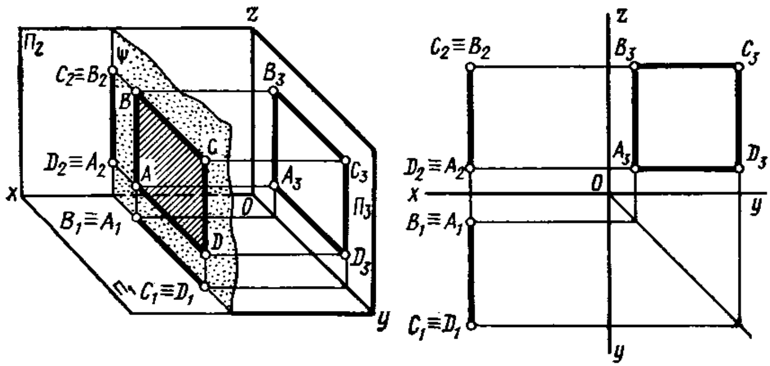


Рис. 175. **Профильная плоскость.**

§ 23. Прямая и точка в плоскости

19. *Прямая принадлежит плоскости, если имеет с плоскостью хотя бы две общие точки.*

Если известно, что прямая принадлежит заданной плоскости, то по одной проекции прямой всегда можно построить ее вторую проекцию.

20. *Точка принадлежит плоскости, если она лежит на прямой, принадлежащей этой плоскости.*

Решите задачи 1-6.

Задача 1. На рис. 176, *а* изображена плоскость ABC ($A_1B_1C_1$; $A_2B_2C_2$) и фронтальная проекция a_2 прямой a. Известно, что прямая a принадлежит плоскости ABC ($a \in ABC$). Требуется построить горизонтальную проекцию a_1 прямой a.

Прямая a_2 пересекает прямые A_2B_2 и B_2C_2. Отметим точки их пересечения M_2 и N_2 (рис. 176, *б*). Из точек M_2 и N_2 проведём линии связи до пересечения соответственно с отрезками A_1B_1 и B_1C_1. Отметим точки M_1 и N_1. Через эти точки проведём прямую a_1 – горизонтальную проекцию прямой a. Прямая a (a_1; a_2) принадлежит плоскости треугольника ABC, так как имеет с ним две общие точки: M (M_1; M_2) и N (N_1; N_2).

Рис. 176

На рис. 176, *в* дано пространственное изображение плоскости ABC и прямой MN, принадлежащей этой плоскости.

Задача 2. Проверить, принадлежат ли прямые a (a_1; a_2) и b (b_1; b_2) плоскости ABC ($A_1B_1C_1$; $A_2B_2C_2$) (рис. 177, *а*).

Предположим, что прямая a принадлежит этой плоскости. В этом случае она должна иметь хотя бы две точки, принадлежащие этой плоскости.

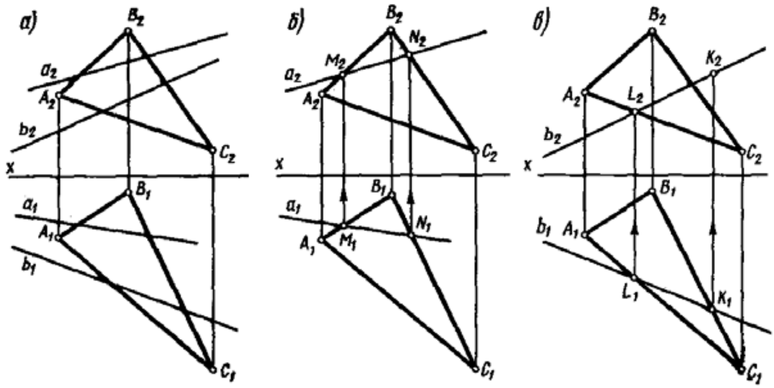


Рис. 177

На эпюре (рис. 177, *б*) отметим точки M_1 и N_1 – точки пересечения прямой a_1 с отрезками A_1B_1 и B_1C_1. Из точек M_1 и N_1 проведём линии связи до пересечения с прямой a_2 и отметим точки M_2 и N_2. Из чертежа видно, что точки M_2 и N_2 лежат на прямых A_2B_2 и B_2C_2. Следовательно, прямая *a* принадлежит плоскости *ABC*.

Прямая *b* (b_1; b_2) не принадлежит плоскости *ABC*, так как имеет только одну общую точку с плоскостью *ABC* – точку *L* (L_1; L_2). (рис. 177, *в*).

Задача 3. На рис. 178 изображена плоскость *ABC* ($A_1B_1C_1$; $A_2B_2C_2$) и горизонтальная проекция M_1 точки *M*. Известно, что точка *M* принадлежит этой плоскости. Требуется построить фронтальную проекцию M_2 точки *M*.

Через точку M_1 и горизонтальную проекцию любой точки треугольника, например точку A_1, проведём прямую. Отметим точку пересечения этой прямой с отрезком B_1C_1 – точку K_1. Через точку K_1 проведём линию связи до пересечения с отрезком B_2C_2, отметим точку K_2 и соединим её с точкой A_2. Итак, в плоскости треугольника *ABC* мы провели прямую *AK* (A_1K_1; A_2K_2).

Фронтальную проекцию M_2 точки *M* находим в пересечении линии связи, которая проходит от точки M_1 до прямой A_2K_2.

Точка *M* (M_1; M_2) принадлежит плоскости *ABC*, так как лежит на прямой *AK*, принадлежащей этой плоскости (***19***).

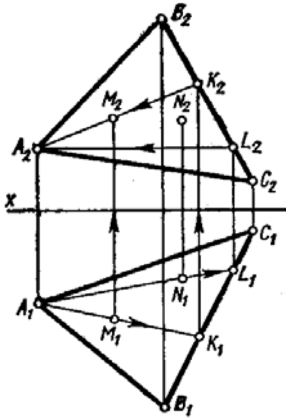


Рис. 178

Задача 4. На том же рисунке имеется точка N (N_1; N_2). Нужно проверить, принадлежит ли точка N плоскости ABC.

Через точку N_1 проведём прямую A_1L_1 и найдём A_2L_2 аналогично предыдущим построениям. Из чертежа видно, что точка N не принадлежит плоскости ABC, т.к. проекция N_2 не лежит на проекции A_2L_2 отрезка AL.

Если точка принадлежит плоскости частного положения, то при построении второй проекции точки, принадлежащей этой плоскости, нет необходимости производить дополнительные построения (проводить линию в плоскости), так как одна (***17***) или две (***18***) проекции плоскости частного положения проецируются в прямые линии.

Задача 5. На рис. 179 плоскость $ABCD$ – проецирующая. Горизонтальная и профильная проекции этой плоскости – прямые A_1B_1 и A_3D_3. Чтобы определить горизонтальную и профильную проекции L_1 и L_3 точки L, принадлежащей плоскости $ABCD$ и заданной фронтальной проекцией L_2, достаточно провести линии связи от точки L_2 до пересечения с отрезками A_1B_1 и A_3D_3 и отметить точки L_1 и L_3.

Задача 6. На рис. 180 плоскость ABC перпендикулярна Π_2. Её фронтальная проекция – прямая A_2B_2. Чтобы определить фронтальную проекцию M_2 точки M, принадлежащей плоскости ABC и заданной горизонтальной проекцией M_1, достаточно провести линии связи от точки M_1 до пересечения с отрезком A_2B_2 и отметить точку M_2. Профильную проекцию M_3 находим по двум известным проекциям.

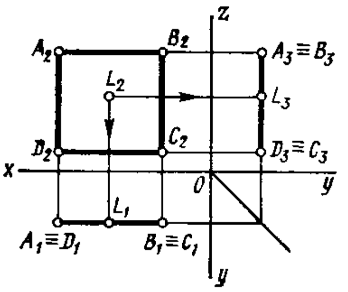


Рис. 179

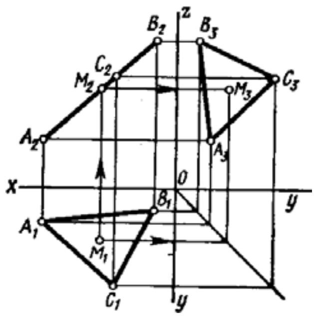


Рис. 180

§ 24. Геометрические тела. Образование простейших поверхностей

Поверхность может быть образована движением прямой или кривой линии в пространстве по определённому закону.

А. Гранные поверхности.

Призматическая поверхность.

Образование призматической поверхности рассмотрим на следующем примере. На рис. 181 дана прямая *AB* и ломаная линия *BCDE*. Прямая *AB* движется по ломаной *BCDE*. При движении прямая *AB* остаётся параллельной своему первоначальному положению. *A'B'* – одно из положений прямой *AB* при движении по ломаной *BCDE* (*AB* ∥ *A'B'*). При таком перемещении прямая *AB* образует **призматическую поверхность.** Прямая *AB* называется **образующей.** Ломаная *BCDE* называется **направляющей.**

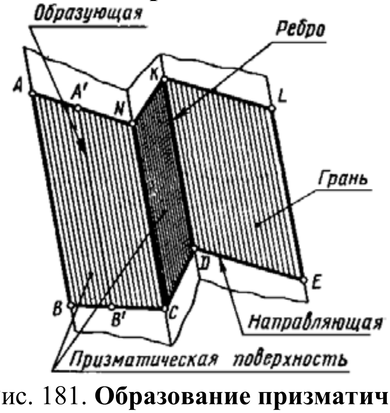


Рис. 181. **Образование призматической поверхности.**

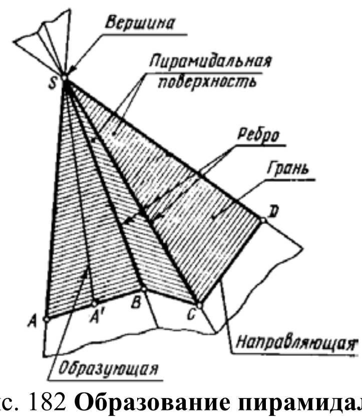


Рис. 182 **Образование пирамидальной поверхности.**

Части призматической поверхности между прямыми *AB* и *NC*; *NC* и *KD*; *KD* и *LE* называются **гранями**. Каждая грань (например, грань *ANCB*) представляет собой часть плоскости. Следовательно, **плоскость** можно рассматривать как поверхность, которая получается при перемещении образующей прямой линии по направляющей, которая является также прямой.

Грани пересекаются между собой по прямым линиям (*AB*, *NC*, *KD* и *LE*), которые называются **рёбрами**.

Прямая линия бесконечна. Поэтому поверхность, которая образована перемещением прямой линии, также бесконечна. На чертеже продолжение поверхности показано тонкими линиями.

Пирамидальная поверхность.

Образование пирамидальной поверхности рассмотрим на следующем примере. На рис. 182 дана точка *S* и ломаная линия *ABCD*. Прямая *SA* движется по ломаной *ABCD* (направляющей) и постоянно проходит через неподвижную точку *S*. При таком перемещении прямая *SA* образует **пирамидальную** поверхность. *SA'* – одно из положений прямой *SA* при перемещении по ломаной *ABCD*. Точка *S* называется **вершиной** пирамидальной поверхности. Части плоскостей *SAB*, *SBC* и *SCD* называются **гранями**, линии пересечения граней *SA*, *SB*, *SC* и *SD* называются **рёбрами.**

Поверхности, образованные частями пересекающихся плоскостей, называются **гранными поверхностями.** Призматическая и пирамидальная поверхности относятся к гранным поверхностям.

Б. Поверхности вращения.

Цилиндрическая поверхность образуется по тому же закону, что и призматическая, только направляющая линия не ломаная, а кривая. На рис. 183, *а* дана образующая прямая *AB*, которая движется по направляющей кривой *BCD*. Прямая *AB* при движении остаётся параллельной своему первоначальному положению (*AB* ‖ *A'B'*).

При таком перемещении прямой образуется **цилиндрическая поверхность.**

Прямая круговая цилиндрическая поверхность. Такую цилиндрическую поверхность можно получить, если образующую (прямую линию) вращать вокруг неподвижной оси. На рис. 183, *б* даны образующая – прямая *AB* и неподвижная ось *I – I* (и – и). В результате такого вращения образуется поверхность, которая называется **прямой круговой цилиндрической поверхностью.**

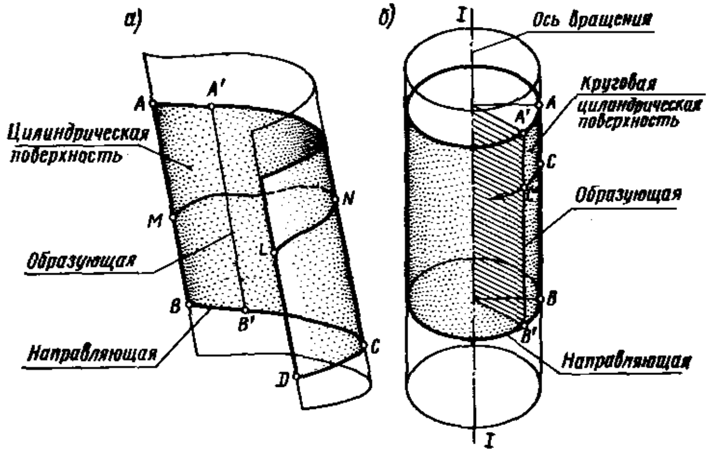


Рис. 183. **Образование цилиндрической поверхности.**

Коническая поверхность образуется по тем же законам, что и пирамидальная, только направляющая линия не ломаная, а кривая. На рис. 184, *а* дана образующая – прямая *SA*, которая движется по направляющей кривой *ABCD*. При движении она постоянно проходит через неподвижную точку *S*. При таком перемещении прямой образуется коническая поверхность. Точка *S* называется **вершиной** конической поверхности.

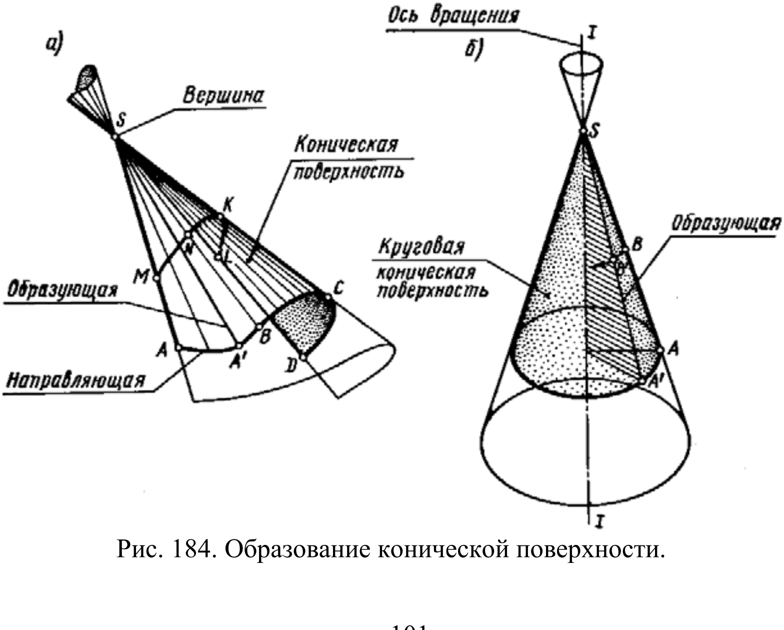


Рис. 184. Образование конической поверхности.

Прямая круговая коническая поверхность. Такую коническую поверхность можно получить, если образующую (прямую линию) вращать вокруг неподвижной оси, которая проходит через точку *S*. На рис. 184, *б* даны образующая *SA* и ось *I – I,* которые пересекаются в точке *S*.

При вращении любая точка на образующей *SA*, например, точка *B*, опишет окружность. Эти окружности будут лежать в плоскостях, перпендикулярных оси *I – I*. В результате такого вращения образуется поверхность, которая называется **прямой круговой конической поверхностью.**

Сфера образуется при вращении полуокружности вокруг диаметра. На рис. 185 дана полуокружность *ABC* и неподвижная ось *I – I*, которая проходит через диаметр полуокружности. Полуокружность будем вращать вокруг оси *I – I*, тогда все её точки, например, точка *B*, опишут окружности. Эти окружности будут лежать в плоскостях, перпендикулярных оси *I – I*. В результате такого вращения образуется поверхность, которая называется **сферой.**

Поверхности, образованные вращением линии вокруг оси, называются **поверхностями вращения.**

Рис. 185. **Образование сферы.**

21. *Геометрическим телом называется часть пространства, ограниченная со всех сторон поверхностью.*

Машины, станки, детали станков и машин и многие другие предметы, которые окружают нас в жизни, состоят из простейших геометрических тел. Это куб, параллелепипед, призма, пирамида, цилиндр, конус, шар и некоторые другие тела.

Чтобы правильно изобразить предмет на чертеже, надо научиться строить проекции геометрических тел. На рис. 186 даны простейшие геометрические тела и показаны их элементы. Призма и пирамида относятся к многогранникам. Цилиндр, конус и шар относятся к телам вращения.

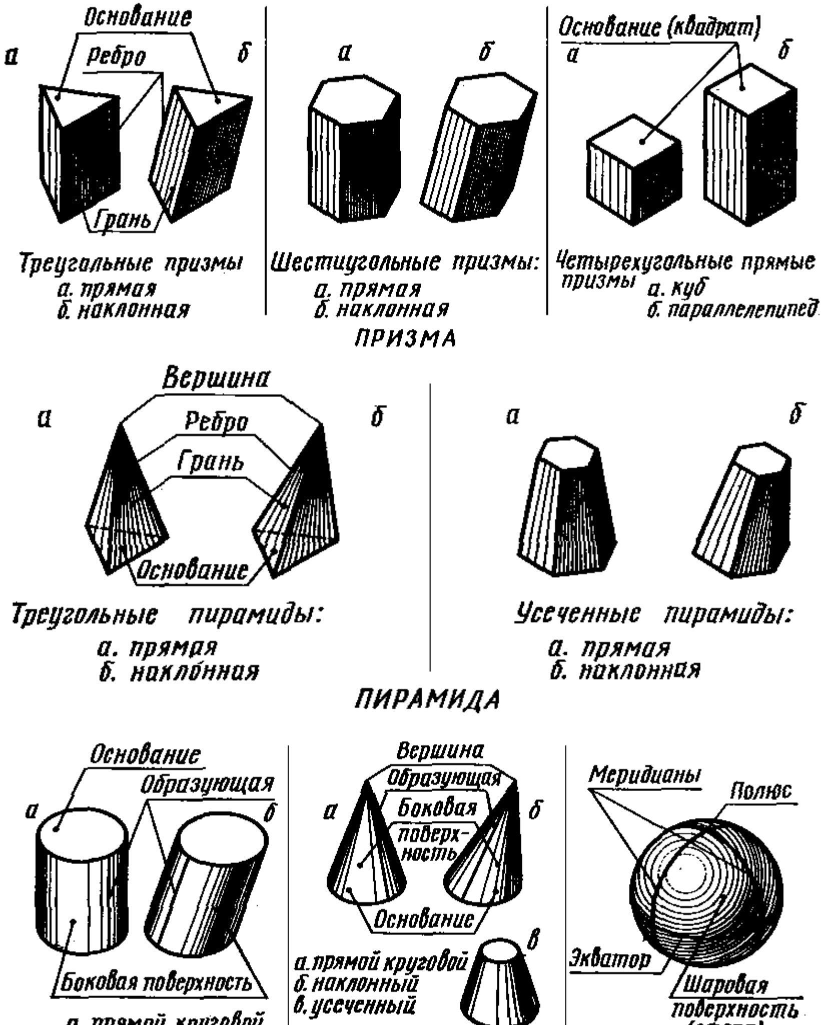


Рис. 186. **Геометрические тела.**

На рис. 187 показана техническая деталь. Она состоит из прямоугольного параллелепипеда (1), двух полуцилиндров (2) и усечённого конуса (3). В центре детали имеется отверстие в форме цилиндра (4). Следовательно, чтобы лучше понять форму детали, её надо мысленно разделить на простейшие геометрические тела. Проецирование геометрических тел сводится к проецированию их элементов: точек и линий.

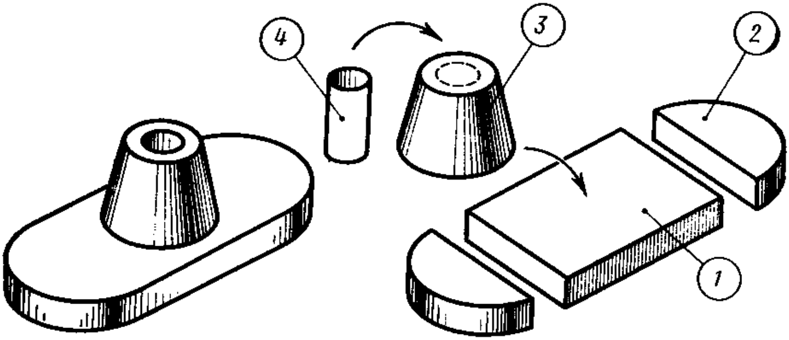


Рис. 187

§ 25. Расположение тел относительно плоскостей проекций.

Обозначение на чертеже

видимая точка $\neq$ невидимая точка.

∘ M • (N)

Тела располагают относительно плоскостей проекций по возможности так, чтобы их основные элементы (рёбра, грани, оси, основания) были параллельны или перпендикулярны плоскостям проекций. Тогда на одну из плоскостей проекций эти элементы будут проецироваться в натуральную величину. На рис. 188, *а* геометрическое тело (призма) расположено относительно плоскостей проекций так, что её основные элементы параллельны или перпендикулярны плоскостям проекций.

Горизонтальная проекция тела – это вид тела сверху в направлении стрелки I. Фронтальная проекция тела – это вид тела спереди в направлении стрелки II. Профильная проекция тела – это вид тела слева в направлении стрелки III.

На чертеже чертят только ту линию, которая является видимой границей тела или его частей. Такая линия называется **очерком** или **контуром**.

При проецировании тел необходимо определить элементы тела, которые будут видимы при взгляде на них в направлении, перпендикулярном плоскостям $П_1$, $П_2$ и $П_3$.

Все элементы тела, которые мы видим, если смотрим на тело сверху (в направлении стрелки I), изображаются видимыми на плоскости $П_1$. Поэтому на $П_1$ будет изображено видимым только верхнее основание тела (в данном случае призмы) – треугольник *DEF*. Нижнее основание призмы – треугольник *ABC* на $П_1$ изображено невидимым.

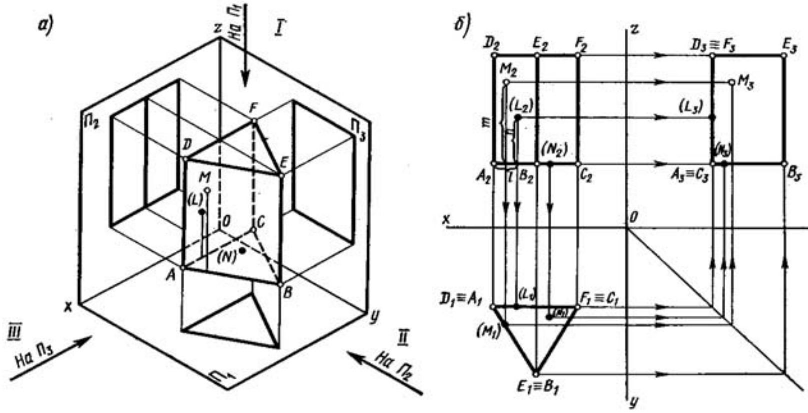


Рис. 188. **Проекции призмы.**

Все элементы тела, которые мы видим, если смотрим на тело спереди (в направлении стрелки II), изображаются видимыми на плоскости $П_2$. Поэтому на $П_2$ грани *ABED* и *BCFE* будут изображены видимыми, а грань *ADFC* – невидимой.

Все элементы тела, которые мы видим, если смотрим на тело слева (в направлении стрелки III), изображаются видимыми на плоскости $П_3$. Поэтому на $П_3$ грань *ABED* будет изображена видимой, а грань *BCFE* – невидимой.

Проекции видимого очерка тел и их частей чертят сплошными основными линиями (линиями видимого контура). Проекции невидимого очерка тел чертят штриховыми линиями (линиями невидимого контура).

Иногда нужно построить проекции точек, лежащих на поверхности тела. Видимые точки мы будем условно обозначать светлым кружком, невидимые – чёрным. Обозначения невидимых точек будем писать в скобках. Например: ∘M − видимая точка, •(N) – невидимая точка.

§ 26. Призма.

***22. Призма** – это геометрическое тело, ограниченное призматической поверхностью и двумя взаимно-параллельными плоскостями (рис. 186).*

Призматическая поверхность называется **боковой поверхностью** призмы; части двух параллельных плоскостей – **основаниями**. Вся поверхность призмы состоит из частей плоскостей, которые называются **гранями**. Линии пересечения граней призмы называются **рёбрами**. Рёбра призмы разделяются на **боковые рёбра** и **рёбра основания**. Призма называется **прямой**, если боковые рёбра перпендикулярны основанию. Если боковые рёбра наклонены к основанию, такая призма называется **наклонной**. Основанием призмы может быть правильный многоугольник. Тогда призма называется **правильной**. По форме основания призмы бывают **треугольными**, **четырёхугольными**, **пятиугольными** и т.д.

А. Проекции призмы.

Чтобы построить проекции призмы, надо знать форму и размеры её оснований, высоту и положение призмы относительно плоскостей проекций.

На рис. 188, *а* изображена прямая правильная треугольная призма *ABCDEF*. Длина ребра основания равна 25 мм, длина бокового ребра равна 35 мм.

Расположим призму относительно плоскостей проекций $П_1$, $П_2$ и $П_3$ так, чтобы основания призмы были параллельны $П_1$, а задняя грань боковой поверхности была параллельна $П_2$. Расстояние от плоскости $П_1$ до нижнего основания призмы примем равным 20 мм.

Горизонтальная проекция нижнего основания – треугольник $A_1B_1C_1$, который на $П_1$ проецируется в натуральную величину (см. рис. 173). Фронтальная и профильная проекции этого треугольника – отрезки, соответственно параллельные осям x и y.

Так как верхнее основание призмы (треугольник *DEF*) также параллельно $П_1$, то на плоскость $П_1$ оно проецируется в натуральную величину. Горизонтальная проекция треугольника *DEF* совпадает с горизонтальной проекцией треугольника *ABC*, так как призма *ABCDEF* – прямая и её боковые рёбра *DA*, *FC* и *EB* перпендикулярны основаниям и плоскости $П_1$; фронтальная и профильная проекции основания *EFD* отрезки, соответственно параллельные осям x и y.

Задняя грань призмы (прямоугольник *ADFC*) – это часть плоскости, параллельной $П_2$ (см. рис. 174). На плоскость $П_2$ грань *ADFC* проецируется в натуральную величину. Проекции этой грани на плоскостях $П_1$ и $П_3$ – отрезки, параллельные осям x и z.

Передние грани призмы (прямоугольники *ABED* и *BCFE*) – это части плоскостей, перпендикулярные $П_1$ (см. рис. 170). Проекции граней на плоскости $П_1$ – отрезки; на плоскостях $П_2$ и $П_3$ – прямоугольники. Ни на одну плоскость проекций эти грани не проецируются в натуральную величину.

Итак, проекция призмы на плоскость $П_1$ – треугольник; на $П_2$ – два прямоугольника; на $П_3$ – прямоугольник.

Чтобы построить эпюр призмы, из произвольной точки O проведём взаимно-перпендикулярные оси x, y и z (рис. 188, *б*). На плоскости $П_1$ построим равносторонний треугольник с длиной стороны 25 мм – горизонтальную проекцию призмы. Сторона A_1C_1 этого треугольника должна быть параллельна оси x (по условию задачи). Обозначим вершины треугольника буквами A_1, B_1, C_1 и D_1, E_1, F_1. Верхнее основание (треугольник *DEF*) на плоскости $П_1$ изображается видимым, а нижнее (треугольник ABC) – невидимым.

На плоскости $П_2$ строим два прямоугольника – фронтальную проекцию призмы. Из точек A_1, B_1 и C_1 проведём линии связи, перпендикулярные оси x, и отметим точки A_2, B_2 и C_2. Расстояние от оси x до этих точек равно 20 мм (по условию задачи). На линиях связи от точек A_2, B_2 и C_2 отложим 35 мм (высоту бокового ребра призмы) и отметим точки D_2, E_2, F_2. Соединив эти точки прямыми линиями, получим прямоугольники: $A_2B_2E_2D_2$ и $B_2E_2F_2C_2$ – фронтальные проекции передних граней призмы и прямоугольник $A_2D_2F_2C_2$ – фронтальную проекцию задней грани. Передние грани на плоскости $П_2$ изображаются видимыми, задняя грань – невидимой.

На плоскости $П_3$ строим прямоугольник $A_3B_3E_3D_3$ – профильную проекцию призмы. Построения на рис. 188, *б* указаны стрелками. Грань *ABED* на $П_3$ изображается видимой, грань *BCFE* – невидимой.

Б. Точка на поверхности призмы (решение задач).

Задача 1. Пусть точка M лежит на *ABED* – передней боковой грани призмы. Она задана проекцией M_2 и изображена светлым кружком, так как грань *ABED* на плоскости $П_2$ изображена видимой. Требуется построить горизонтальную (M_1) и профильную (M_3) проекции точки M.

M_1 должна лежать на горизонтальной проекции грани $ABED$ – отрезке D_1E_1. Из точки M_2 проведём линию связи, перпендикулярную оси x до пересечения с отрезком D_1E_1 и отметим точку M_1. Точку M_3 находим по двум известным проекциям M_1 и M_2 (см. рис. 146). Она лежит на профильной проекции грани $ABED$ и изображается видимой.

Задача 2. Пусть дана N_1 – горизонтальная проекция точки N. Известно, что точка N лежит на нижнем основании призмы. На плоскости Π_1 точка N изображена невидимой, поэтому на чертеже она обозначена чёрным кружком. Фронтальная проекция N_2 точки N должна лежать на фронтальной проекции нижнего основания призмы. Из точки N_1 проведём линию связи, перпендикулярную оси x, до пересечения с отрезком A_2C_2 и отметим точку N_2. Точку N_3 находим по двум известным проекциям N_1 и N_2 (см. рис. 146). Она лежит на профильной проекции основания ABC – отрезке A_3B_3.

Задача 3. Пусть дана L_2 – фронтальная проекция точки L. Известно, что точка L лежит на грани $ADFC$, поэтому на плоскости Π_2 точка L изображена невидимой. Горизонтальная проекция L_1 точки L должна лежать на горизонтальной проекции грани $ADFC$ (см. рис. 179); профильная проекция L_3 точки L – на профильной проекции грани $ADFC$. Из точки L_2 проведём линию связи, перпендикулярную оси x, до пересечения с отрезком D_1F_1 и отметим точку L_1. Точку L_3 находим по двум известным проекциям L_1 и L_2. Построение проекций точек на рис. 188, *б* указано стрелками.

§ 27. Пирамида

***24. Пирамида** – это геометрическое тело, ограниченное замкнутой пирамидальной поверхностью и плоскостью, которая не проходит через её вершину (рис. 186).*

Пирамидальная поверхность называется **боковой поверхностью пирамиды**. Часть плоскости, пересекающей пирамидальную поверхность, называется **основанием**. Линии пересечения граней называются **рёбрами**. Рёбра пирамиды разделяются на **боковые** и **рёбра основания**. Боковые рёбра сходятся в одной точке – **вершине**. Перпендикуляр, опущенный из вершины на плоскость основания, называется **высотой** пирамиды. Если основание пирамиды – правильный многоугольник и высота пирамиды проходит через его центр, пирамида называется **правильной**. Пирамиды по форме основания бывают **треугольные**, **четырёхугольные**, **пятиугольные** и т.д.

А. Проекции пирамиды.

На рис. 189, *а* изображена прямая правильная шестиугольная пирамида *SABCDEF*. Ребро основания пирамиды равно 15 мм, высота пирамиды 45 мм.

Расположим пирамиду относительно плоскостей проекций Π_1, Π_2 и Π_3 так, чтобы её основание было параллельно Π_1, а грани *BSC* и *FSE* перпендикулярны Π_3. Расстояние от плоскости Π_1 до основания примем равным 20 мм.

Горизонтальная проекция пирамиды – правильный шестиугольник, состоящий из шести треугольников (рис. 189, *б*). Шестиугольник $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ – проекция основания. Так как основание пирамиды параллельно Π_1, то $A_1B_1C_1D_1E_1F_1 = ABCDEF$ (см. рис. 173). Треугольники $A_1S_1B_1$, $B_1S_1C_1$ и т.д. – горизонтальные проекции боковых граней. Вершина *S* проецируется в центр шестиугольника, так как пирамида правильная.

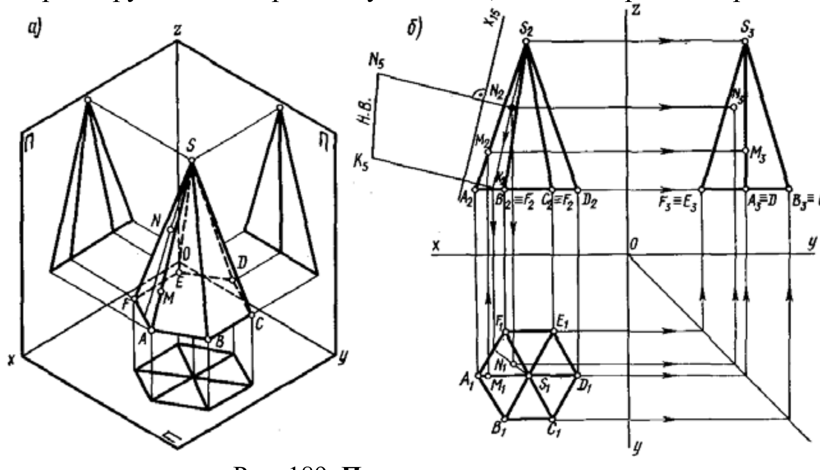


Рис. 189. **Проекции пирамиды.**

На плоскости Π_1 вершина *S* и боковая поверхность пирамиды изображаются видимыми. Основание – невидимым.

Фронтальная проекция пирамиды – треугольник $A_2S_2D_2$. Он состоит из трёх треугольников. Эти треугольники – фронтальные проекции граней пирамиды. Ни одна грань на плоскость Π_2 не проецируется в натуральную величину. Два ребра пирамиды *SA* и *SD* – отрезки, параллельные Π_2. Поэтому на плоскость Π_2 они проецируются в натуральную величину ($S_2A_2 = SA$; $S_2D_2 = SD$). Высота треугольника $A_2S_2D_2$ равна высоте пирамиды (45 мм), т.к. высота пирамиды параллельна плоскости Π_2 и проецируется на неё в натуральную величину.

На плоскости $П_2$ передняя половина боковой поверхности пирамиды (грани *ASB*, *BSC*, *CSD*) изображается видимой; задняя половина боковой поверхности (грани *FSA*, *FSE*, *ESD*) – невидимой.

Профильная проекция пирамиды – треугольник $F_3S_3B_3$. Он состоит из двух треугольников. Эти треугольники – проекции граней *FSA*, *ASB*, *ESD* и *DSC*. Грани *BSC* и *FSE* – перпендикулярны плоскости $П_3$. На $П_3$ они проецируются в отрезки прямых линий (см. рис. 172). Отрезок S_3B_3 – проекция грани *BSC*; отрезок F_3S_3 – проекция грани *FSE*. Высота треугольника $F_3S_3B_3$ равна высоте пирамиды (на плоскость $П_3$ высота пирамиды проецируется в натуральную величину).

На плоскости $П_3$ грани *ASB* и *ASF* изображаются видимыми; грани *ESD* и *DSC* – невидимыми.

Б. Точка на поверхности пирамиды.

На рис. 189, *б* дана горизонтальная проекция M_1 точки *M*, лежащей на ребре *SA*. Мы знаем, что, если точка лежит на прямой, то проекции точки лежат на одноимённых проекциях этой прямой (см. ***14***, рис 164). Поэтому из точки M_1 проведём линию связи до пересечения с фронтальной проекцией S_2A_2 ребра *SA*. Отметим точку M_2 – фронтальную проекцию точки *M*. Профильная проекция M_3 точки *M* лежит на профильной проекции S_3A_3 ребра *SA*. Порядок построения точки M_3 указан на чертеже стрелками.

На том же рисунке дана фронтальная проекция N_2 точки *N*. Известно, что точка *N* лежит на грани *SAF*. Чтобы построить горизонтальную проекцию N_1, через точку *N* проведём вспомогательную прямую *SK*. Этот способ мы использовали при построении второй проекции точки в плоскости треугольника (см. ***20***, рис. 178), поэтому через точку N_2 проведём отрезок S_2K_2. Найдём горизонтальную проекцию K_1 точки *K*. Для этого из точки K_2 проведём линию связи до пересечения с отрезком A_1F_1 и отметим точку K_1. Соединив точки S_1 и K_1 прямой линией, получим горизонтальную проекцию S_1K_1 отрезка *SK*. Точка N_1 должна лежать на отрезке S_1K_1. Из точки N_2 проведём линию связи до пересечения с отрезком S_1K_1 и отметим точку N_1 – горизонтальную проекцию точки *N*.

Профильную проекцию N_3 точки *N* находим по двум известным проекциям N_1 и N_2 Точка N_3 лежит на профильной проекции $S_3A_3F_3$ грани *SAF*. На плоскостях $П_1$ и $П_3$ точка *N* изображается видимой.

§ 28. Цилиндр

25. *Цилиндр – это геометрическое тело, ограниченное замкнутой цилиндрической поверхностью и двумя пересекающими её взаимно-параллельными плоскостями, которые не параллельны образующей (рис. 186).*

Цилиндрическая поверхность называется боковой поверхностью цилиндра. Части плоскостей, которые пересекают цилиндрическую поверхность, называются основаниями. Если образующие цилиндрической поверхности перпендикулярны плоскостям оснований, цилиндр называется прямым.

Если основания прямого цилиндра круги, цилиндр называется прямым круговым.

<u>А. Проекции цилиндра</u>. На рис. 190 изображён прямой круговой цилиндр *ABCDEFTK*. Диаметр основания цилиндра равен 20 мм, высота цилиндра равна 30 мм. Основания параллельны плоскости $П_1$ Расстояние от $П_1$ до нижнего основания равно 20 мм.

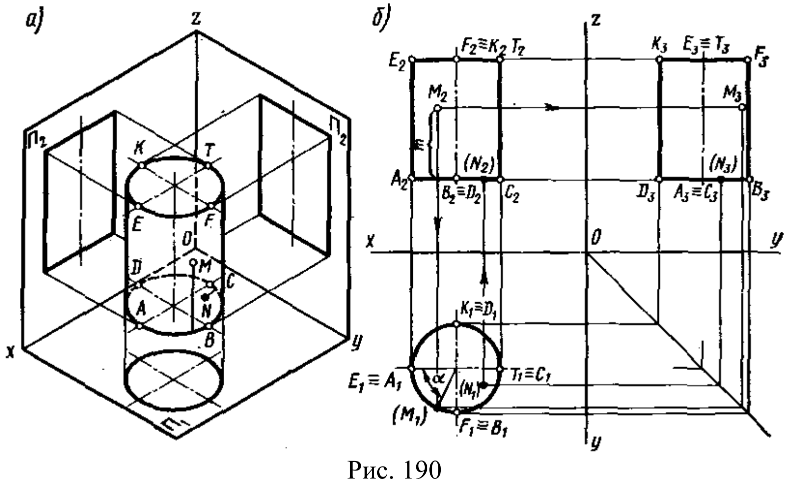


Рис. 190

На плоскость $П_1$ цилиндр проецируется в круг диаметра 20 мм. Этот круг представляет собой горизонтальную проекцию двух основании. Основания цилиндра – части плоскостей, параллельных $П_1$. На плоскость $П_1$ они проецируются в натуральную величину.

Боковая поверхность цилиндра перпендикулярна $П_1$ поэтому горизонтальная проекция – окружность.

Точки $E_1 \equiv A_1$, $F_1 \equiv B_1$, $K_1 \equiv D_1$ и $T_1 \equiv C_1$ – горизонтальные проекции образующих *EA*, *FB*, *KD* и *TC*, перпендикулярных $П_1$.

На плоскости $П_1$ основание *EFTK* изображается видимым, основание *ABCD* – невидимым.

На плоскость $П_2$ цилиндр проецируется в прямоугольник $A_2E_2T_2C_2$. Высота его равна 30 мм. Ширина равна 20 мм. Прямоугольник представляет собой фронтальную проекцию боковой поверхности цилиндра. Отрезок E_2T_2 представляет собой фронтальную проекцию основания *EFTK,* отрезок A_2C_2 – фронтальную проекцию основания *ABCD.* Образующие цилиндра – это отрезки, параллельные плоскости $П_2$, поэтому на $П_2$ они проецируются в натуральную величину ($E_2A_2=EA$; $T_2C_2=TC$ и т.д.). Фронтальные проекции образующих *KD* и *FB* совпадают с осью симметрии проекции цилиндра.

Очерковые образующие цилиндра относительно плоскости $П_2$ (отрезки *EA* и *TC*) делят боковую поверхность цилиндра на две половины: переднюю *(ABCTFE)* и заднюю *(ADCTKE).* Передняя половина поверхности цилиндра при взгляде спереди видима, задняя половина невидима.

На плоскость $П_3$ цилиндр проецируется в прямоугольник $D_3K_3F_3B_3$ таких же размеров, что и $A_2E_2T_2C_2$. Прямоугольник $D_3K_3F_3B_3$ представляет собой профильную проекцию боковой поверхности цилиндра. Отрезки K_3F_3 *и* D_3B_3 представляют собой профильные проекции оснований *EFTK* и *ABCD.* Все образующие проецируются на плоскость $П_3$ в натуральную величину, так как они параллельны этой плоскости. Профильные проекции образующих *EA* и *TC* совпадают с осью симметрии проекции цилиндра.

Очерковые образующие цилиндра относительно плоскости $П_3$ (отрезки *KD* и *FB)* делят боковую поверхность цилиндра на две половины; левую *(BADKEF)* и правую *(BCDKTF).* Левая половина поверхности цилиндра при взгляде слева видима, правая невидима.

Б. Точка на поверхности цилиндра. На рис. 190, *б* дана фронтальная проекция M_2 точки *M.* Известно, что точка *M* лежит на передней видимой части поверхности цилиндра. Боковая поверхность цилиндра на плоскость $П_1$ проецируется в окружность. Следовательно, горизонтальные проекции всех точек, лежащих на боковой поверхности цилиндра, будут лежать на этой окружности. Из точки M_2 проведём линию связи, перпендикулярную оси $\boldsymbol{x}$ до пересечения с передней полуокружностью *ABC,* и отметим точку M_1 – горизонтальную проекцию точки *M.*

Профильная проекция M_3 точки *M* найдена по двум известным проекциям. На плоскости $П_3$ точка *M* изображается видимой.

На том же рисунке дана горизонтальная проекция N_1 точки N. Известно, что точка N лежит на основании ABCD. Это основание на плоскость $П_2$ проецируется в отрезок A_2C_2, параллельный оси $\boldsymbol{x}$. Поэтому фронтальная проекция точки N лежит на этом отрезке. Из точки N_1 проведём линию связи, перпендикулярную оси x, до пересечения с отрезком A_2C_2 и отметим точку N_2, фронтальную проекцию точки N. Профильную проекцию N_3 точки N найдём по двум известным проекциям N_1 и N_2.

§ 29. Конус

26. *Конус – это геометрическое тело, ограниченное замкнутой конической поверхностью и пересекающей ее плоскостью, которая не проходит через вершину конической поверхности (рис. 186).*

Коническая поверхность называется боковой поверхностью конуса. Часть плоскости, которая пересекает коническую поверхность, называется основанием. Конус, основанием которого является круг, а высота проходит через центр основания, называется прямым круговым.

А. Проекции конуса. На рис. 191, *а* изображён прямой круговой конус *SABCD.* Диаметр основания конуса равен 20 мм; высота конуса равна 40 мм. Основание параллельно плоскости $П_1$. Расстояние от $П_1$ до основания равно 20 мм.

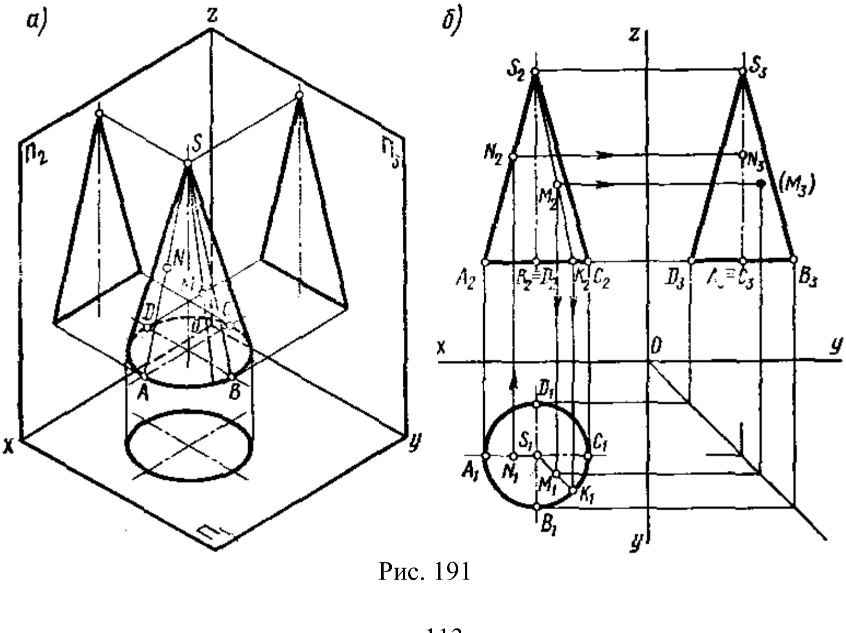


Рис. 191

На плоскость $П_1$ конус проецируется в круг диаметра 20 мм. Этот круг представляет собой горизонтальную проекцию боковой поверхности конуса и его основания. Основание конуса параллельно $П_1$. На плоскость $П_1$ оно проецируется в натуральную величину. Вершина конуса на плоскость $П_1$ проецируется в точку S_1, которая совпадает с центром круга, так как конус прямой. Проекции образующих *AS, BS, CS и DS* на плоскости $П_1$ совпадают с осями круга, параллельными осям x и y. На плоскости $П_1$ вершина и боковая поверхность конуса изображаются видимыми, основание – невидимым.

На плоскость $П_2$ конус проецируется в треугольник $A_2S_2C_2$. Его высота равна 40 мм, основание равно 20 мм. Треугольник $A_2S_2C_2$ представляет собой фронтальную проекцию боковой поверхности конуса. Очерковые образующие *SA* и *SC* – это отрезки, параллельные плоскости $П_2$. На $П_2$ эти образующие проецируются в натуральную величину $(S_2A_2=SA;\ S_2C_2=SC)$. Вершина конуса на $П_2$ проецируется в точку S_2. Отрезок A_2C_2 – фронтальная проекция основания конуса. Проекции образующих *SD* и *SB* совпадают с осью симметрии проекции конуса.

Очерковые образующие относительно плоскости $П_2$ (отрезки *SA* и *SC*) делят конус на две половины: переднюю видимую половину *(SABC) и* заднюю невидимую *(SADC)*.

На плоскость $П_3$ конус проецируется в треугольник $S_3D_3B_3$ таких же размеров, что и $A_2S_2C_2$. Треугольник $S_3D_3B_3$ представляет собой профильную проекцию боковой поверхности конуса. Очерковые образующие относительно плоскости $П_3$ (отрезки *SB* и *SD)* проецируются на $П_3$ в натуральную величину, так как они параллельны плоскости $П_3$ $(S_3B_3=SB;\ S_3D_3=SD)$. Точка S_3 – профильная проекция вершины конуса. Отрезок D_3B_3 – профильная проекция основания конуса. Профильные проекции образующих *SA* и *SC* совпадают с осью симметрии проекции конуса.

Очерковые образующие конуса относительно плоскости $П_3$ (отрезки *SD* и *SB)* делят конус на две половины: видимую *(SDAB) и* невидимую *(SDCB)*.

Б. Точка на поверхности конуса. На рис. 191, *б* дана фронтальная проекция M_2 точки *M*. Известно, что точка *M* лежит на передней видимой половине боковой поверхности конуса. Чтобы построить горизонтальную проекцию M_1 точки *M,* через точку *M* проведём образующую *SK*.

Через точку M_2 проведем отрезок S_2K_2. Найдем горизонтальную проекцию точки K. Для этого из точки K_2 проведём линию связи до пересечения с горизонтальной проекцией передней видимой части полуокружности и отметим точку K_1. Соединим точки K_1 и S_1. Из точки M_2 проведём линию связи до пересечения с отрезком S_1K_1 и отметим точку M_1 – горизонтальную проекцию точки M. Профильная проекция M_3 точки M найдена по двум известным проекциям.

На плоскости Π_1 точка M изображается видимой, на Π_3 – невидимой. На том же рисунке дана горизонтальная проекция N_1 точки N. Известно, что точка N лежит на образующей SA. Фронтальная и профильная проекции этой точки должны лежать на фронтальной и профильной проекциях образующей SA. Из точки N_1 проведём линию связи до пересечения с отрезком S_2C_2 и отметим точку N_2 – фронтальную проекцию точки N. На Π_2 точка N изображается видимой. Профильная проекция N_3 точки N лежит в пересечении линии связи и образующей S_3A_3. На плоскости Π_3 точка N изображается видимой.

§ 30. Шар

Запомните: На любую плоскость шар проецируется в круг.

***27. Шар** – это геометрическое тело, ограниченное сферой (рис. 185 и 186).*

Все точки сферы находятся на одинаковом расстоянии от одной точки – точки O. Эта точка называется **центром сферы** (или шара). **Шар** – это тело, ограниченное только поверхностью вращения. На поверхности шара выделяют линии – **параллели** и **меридианы**. **Параллель** – это окружность, параллельная плоскости Π_1. Самая большая параллель называется **экватором**. **Меридиан** – это окружность, которая лежит в плоскости, проходящей через вертикальный диаметр сферы. Из множества меридианов выделяют: **главный (фронтальный)** и **профильный меридианы**. Эти меридианы параллельны соответственно плоскостям Π_2 и Π_3. Верхняя и нижняя точки вертикального диаметра называются **полюсами**.

А. Проекции шара. Для построения проекций шара, нужно знать только один размер – диаметр шара. На рис. 192 изображён шар диаметром 30 мм. Буквами *ABCDEF* обозначены характерные точки шара.

На любую из плоскостей проекций шар проецируется в круг диаметром 30 мм. Экватор представляет собой окружность, параллельную плоскости Π_1. На плоскость Π_1 он проецируется в окружность

$D_1F_1C_1E_1$. На плоскость Π_2 экватор проецируется в отрезок C_2D_2, параллельный оси x и равный диаметру шара $(C_2D_2=D$*ш*$)$; на Π_3 экватор проецируется в отрезок E_3F_3, параллельный оси y, и равный диаметру шара ($E_3F_3=$D*ш*).

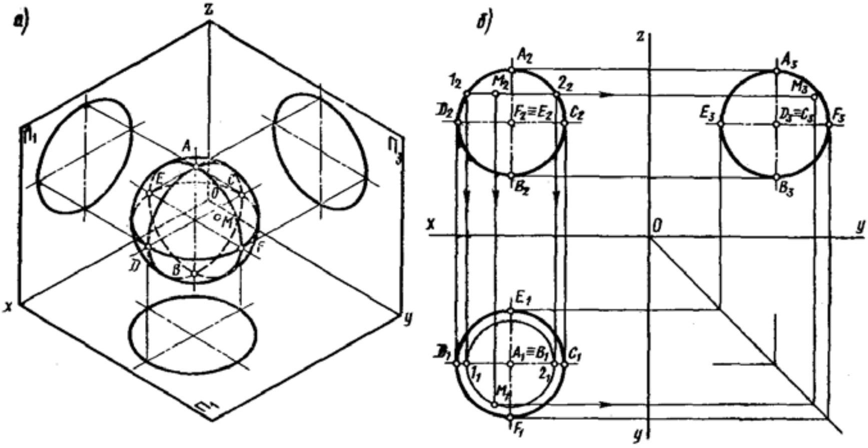


Рис. 192

Главный меридиан представляет собой окружность, параллельную плоскости Π_2. Поэтому на Π_2 главный меридиан проецируется в натуральную величину – окружность $A_2C_2B_2D_2$. На Π_1 главный меридиан проецируется в отрезок ($C_1D_1=D$*ш*) параллельный оси x; на Π_3 он проецируется в отрезок $(A_3B_3=D$*ш*$)$ параллельный *оси z*.

Профильный меридиан представляет собой окружность, параллельную плоскости Π_3. На Π_3 эта окружность проецируется в натуральную величину – окружность $A_3F_3B_3E_3$, на Π_1 – в отрезок $(E_1F_1=D$*ш*$)$, параллельный оси y; на Π_2 – в отрезок $(A_2B_2=D$*ш*$)$, параллельный оси z.

Очерком шара относительно плоскости Π_1 является экватор. Экватор делит поверхность шара на две равные части, верхнюю и нижнюю. Верхняя часть шара на плоскости Π_1 изображается видимой, нижняя – невидимой.

Очерком шара относительно плоскости Π_2 является главный меридиан. Главный меридиан делит поверхность шара на две равные части, переднюю и заднюю. Передняя часть на плоскости Π_2 изображается видимой, задняя – невидимой.

Очерком шара относительно плоскости Π_3 является профильный меридиан. Он делит поверхность шара на две равные части – левую и правую. Левая половина шара на плоскости $П_3$ изображается видимой, правая – невидимой.

Б. Точка на поверхности шара. Пересечём шар плоскостью Σ, параллельной $П_1$ (рис. 193, *а*). Плоскость Σ пересечёт шар по окружности диаметром *1 – 2*.

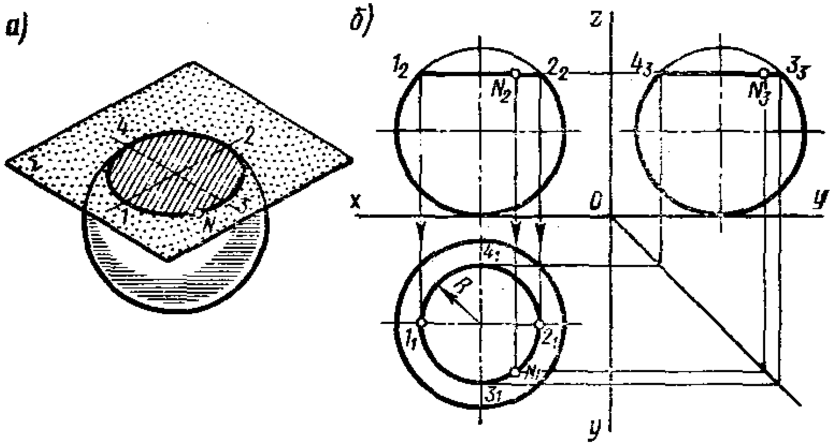


Рис. 193

На плоскость $П_1$ окружность проецируется в натуральную величину, на плоскости $П_2$ и $П_3$ – в отрезки $1_2 – 2_2$ и $4_3 – 3_3$, параллельные соответственно осям ***x*** и ***y***. Если на поверхности шара на линии пересечения с плоскостью Σ лежит точка, например, точка *N,* то проекции этой точки будут лежать на проекциях линии пересечения (на проекциях окружности диаметра *1 – 2*) – рис. 193, *б*.

Допустим, что дана фронтальная проекция M_2 точки *M,* лежащей на шаре (рис. 192, *б*). Чтобы определить горизонтальную проекцию (M_1) этой точки, пересечём шар плоскостью, параллельной $П_1$ и проходящей через точку *M.* Эта плоскость пересечёт шар по окружности диаметром *1 – 2*. Строим горизонтальную проекцию этой окружности. Для этого из точки A_1 проведём окружность радиусом, равным половине отрезка $1_2 – 2_2$. Из точки M_2 проведём перпендикуляр к оси ***x*** до пересечения с окружностью $1_1 – 2_1$ и отметим M_1 – горизонтальную проекцию точки *M.* Профильную проекцию M_3 точки *M* находим по двум известным проекциям.

§ 31. Количество проекций, определяющих форму тел.

Мы рассмотрели проекции геометрических тел: призмы, пирамиды, цилиндра, конуса и шара. Как правило, мы проецировали эти тела на три плоскости проекций $П_1$, $П_2$ и $П_3$, а на эпюре проводили оси *x, y* и z. Проведение осей на эпюре не обязательно. Действительно, как видно из рис. 194 *а*, горизонтальная и фронтальная проекции прямой пятиугольной пирамиды не изменятся, если плоскость $П_1$ перенести в положение $П_1'$. В данном случае изменится только расстояние от пирамиды до горизонтальной плоскости проекций.

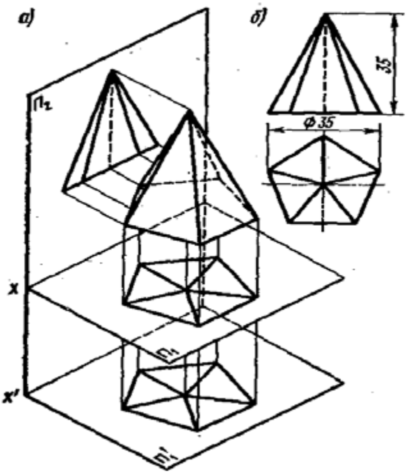


Рис. 194

Форма фронтальной проекции пирамиды также не изменится, если переместить параллельно плоскость $П_2$. Поэтому на чертежах обычно не проводят оси проекций. Если же они потребуются, например, при использовании способа замены плоскости проекций, то ось *x* можно провести в любом месте чертежа.

Чтобы определить форму и размеры тела, необязательно строить три проекции. Часто достаточно двух, а иногда и одной. Количество проекций зависит от сложности формы детали и возможности применения некоторых условностей технического чертежа. Например, чтобы определить форму и размеры геометрического тела по чертежу на рис. 194 *б*, достаточно двух проекций. По горизонтальной проекции можно заключить, что это чертёж прямой правильной пятиугольной пирамиды, а также определить размеры её основания.

По фронтальной проекции определяем высоту пирамиды. Расстояние между проекциями обычно выбирают таким, чтобы было достаточно места для нанесения размеров.

Чтобы определить форму и размеры призмы, также достаточно начертить две проекции (рис. 195). Высоту призмы определяем по фронтальной проекции, форму и размеры основания – по горизонтальной.

Тела вращения обычно изображают одной проекцией, применяя условности технического чертежа: осевая линия и знак диаметра «**Ø**» указывают, что изображено тело вращения. На рис. 196 дан чертёж прямого кругового цилиндра, на рис. 197 – прямого кругового конуса.

Сфера также может быть изображена одной проекцией с применением условностей технического чертежа: осевых линий, знака диаметра «**Ø**» и надписи «сфера» (рис. 198).

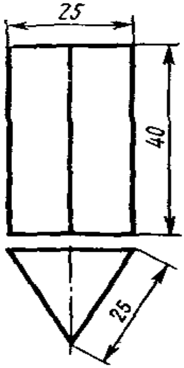


Рис. 195

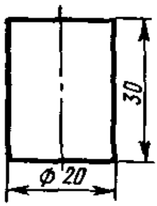


Рис. 196

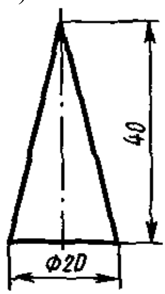


Рис. 197

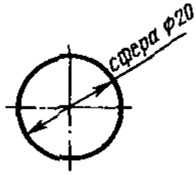


Рис. 198

Подробнее вопрос о необходимом количестве проекций будет рассмотрен на первом курсе университета.

ВОПРОСЫ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

1. Перечислить основные чертежные инструменты. Для чего они используются.
2. Перечислить названия линий в зависимости от их формы и расположения.
3. Как называются основные элементы окружности? Центр, радиус и диаметр окружности. В чем разница между окружностью и кругом?
4. Перечислить виды углов и названия их элементов.
5. Перечислить названия и свойства треугольников и четырехугольников.
6. Что такое государственный стандарт (ГОСТ). Перечислить известные стандарты ЕСКД – их обозначения и названия.

7. Что такое формат? Какие основные форматы (их обозначение и размеры) используют для выполнения чертежа? Какие необходимые элементы выполняют на формате, их размеры.
8. Что такое масштаб? Какие масштабы могут применяться при выполнении чертежей деталей: перечислить типы масштабов и их числовые значения.
9. Какие линии мы видим и чертим на чертеже? Перечислить названия основных линий на чертеже и для чего они используются.
10. Что такое чертежный шрифт? Что определяет номер шрифта? Как основные параметры букв (толщина линии, высота строчных букв, расстояния между буквами, словами и строками) зависят от выбранного номера шрифта?
11. Основные геометрические построения. Построение параллельных и перпендикулярных прямых. Построение касательных к окружности. Привести примеры.
12. Деление отрезка и окружности на заданное количество равных частей. Правильные многоугольники, вписанные и описанные около окружности. Деление отрезка в заданном отношении. Привести примеры.
13. Основы теории сопряжений: виды сопряжений и способы их построения. Привести примеры.
14. Основные методы проецирования. Ортогональные проекции точки на три плоскости проекций. Наглядные изображения – изометрия.
15. Координаты точки. Расположение точки в пространстве (в пространстве, на плоскости проекций, на координатной оси). Построение третьей проекции точки по двум известным проекциям. Привести примеры.
16. Проекции прямой линии. Положение прямой линии в пространстве (относительно плоскостей проекций) – прямые общего и частного положения. Взаимное расположение двух прямых.
17. Проекции плоскости. Способы задания плоскости в пространстве и на комплексном чертеже. Положение плоскости в пространстве (относительно плоскостей проекций) – плоскости общего и частного положения.
18. Принадлежность точки плоскости – условие. Определение недостающих проекций точек, лежащих в плоскости. Определение взаимного расположения точки и плоскости. Привести примеры.
19. Геометрические тела: многогранники. Виды многогранников, их изображение на комплексном чертеже и в изометрии. Привести примеры известных многогранников.
20. Криволинейные геометрические тела: конус, цилиндр, шар. Их изображение на комплексном чертеже и в изометрии. Расположение точки и геометрического тела.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мазурова И.И., Казакова Т.Б. Черчение - М.: Высшая школа, 1978. – 224 с.
2. Методические указания по теме «Основные правила оформления чертежей» для самостоятельной работы студентов подготовительного факультета /Сост. Куденко С.М., Лучников А.Ф., Лобода А.И. – Харьков: ХПИ, 1991. – 56 с.
3. ГОСТы. Единая система конструкторской документации. Общие правила выполнения чертежей. М.: Изд-во стандартов, 1991.
4. Михайленко В.Е., Пономарев А.М. Инженерная графика: Учебник. – К.: Выща школа, 1990. – 304 с.

Содержание

Учебное издание

ГЕОМЕТРИЯ, ЧЕРЧЕНИЕ (базовый курс)

Авторы-составители:
Александр Викторович Черников
Алина Дмитриевна Бирина

Кафедра инженерной и компьютерной графики,

Авторская редакция

Компьютерная верстка,
оформление оригинал-макета
А. В. Черников

Підписано до друку ___.___.2005 р.
Формат 60x90/16. Папір офсетний. Гарнітура Times New Roman
Друк RISO. Умовн. друк. арк. 9.4 Обл.-вид. арк. 10.7
Замовлення №____/04 Тираж 200 прим. Ціна договірна

Видавництво ХНАДУ, 61002, м. Харків-МСП, вул. Петровського, 25

Свідоцтво державного комітету інформаційної політики, телебачення і радіомовлення України про внесення суб'єкта видавничої справи до державного реєстру видавців, виготівників та розповсюджувачів видавничої продукції, серія ДК № 897 від 17.04.2002 р.