Міністерство освіти і науки України
ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ АВТОМОБІЛЬНО-ДОРОЖНІЙ УНІВЕРСИТЕТ

Т. В. Гаврилова, С. О. Шиндерук, Є. О. Чаплигін

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ДО ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ

Розділи «Механіка», «Молекулярна фізика та термодинаміка»

Під загальною редакцією д-ра техн. наук, професора Батигіна Ю.В.

Харків
ХНАДУ
2021

Укладачі: Гаврилова Т. В.,
Шиндерук С. О.
Чаплигін Є. О.

Кафедра фізики

Методичні вказівки містять основний довідковий матеріал за темами курсу фізики відповідно до робочої програми даної дисципліни; приклади розв'язання типових задач; завдання для самостійної роботи. Матеріал скомпонований за темами розділів «Механіка» та «Молекулярна фізика і термодинаміка». Даний навчально-методичний посібник може бути також рекомендований студентам молодших курсів університету при дистанційній формі навчання.

ЗМІСТ

Розділ «Механіка»

Розділ «Молекулярна фізика і термодинаміка»

Практичне заняття 1. Кінематика поступального руху

Довідковий матеріал

1**. Середня швидкість**

$$\langle \vec{v} \rangle = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t},$$

де $\Delta \vec{r}$ – переміщення матеріальної точки за інтервал часу Δt.

Середня шляхова швидкість

$$\langle v \rangle = \frac{\Delta S}{\Delta t},$$

де ΔS – шлях, що пройшла точка за інтервал часу Δt**.**

Миттєва швидкість

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{i}\,v_x + \vec{j}v_y + \vec{k}v_z,$$

де $v_x = \dfrac{dx}{dt}$, $v_y = \dfrac{dy}{dt}$, $v_z = \dfrac{dz}{dt}$ – проекції швидкості на осі координат.

Модуль швидкості $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$.

2. **Миттєве прискорення**

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{i}\,a_x + \vec{j}a_y + \vec{k}a_z,$$

де $a_x = \dfrac{dv_x}{dt}$, $a_y = \dfrac{dv_y}{dt}$, $a_z = \dfrac{dv_z}{dt}$ – проекції прискорення $\vec{a}$ на осі координат.

Модуль прискорення $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$ **.**

Для криволінійного руху прискорення: $\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_\tau$:

$$a_n = \frac{v^2}{R}; \quad a_\tau = \frac{dv}{dt}; \quad a = \sqrt{a_n{}^2 + a_\tau{}^2},$$

де R – радіус кривизни в даній точці траєкторії.

3. **Шлях** у загальному випадку (S_0 та v_0 – початкові шлях і швидкість)

$$S(t) = S_0 + \int_0^t \left(v_0 + v(t)\right) dt \ .$$

4. **Кінематичне рівняння рівномірного прямолінійного руху** (v = const і a = 0):

$x = x_0 + vt$, де x_0 – початкова координата, t – час.

Кінематичне рівняння рівноприскореного прямолінійного руху (a = const): $x = x_0 + v_0 t + \dfrac{at^2}{2}$, де v_0 – початкова швидкість, t – час.

Приклад №1. Рух матеріальної точки задано рівнянням $\vec{r}(t)=\vec{i}\left(A+Bt^2\right)+\vec{j}Ct$, де A = 10 м, B = – 5 м/с^2, C = 10 м/с. Знайти вираз для швидкості $\vec{v}(t)$ та прискорення $\vec{a}(t)$. Для моменту часу t = 1 с обчислити: 1) модуль швидкості v; 2) модуль прискорення a; 3) модуль тангенціального прискорення a_τ; 4) модуль нормального прискорення a_n.

Дано:	СІ	Розв'язання:
$\vec{r}(t)=\vec{i}\left(A+Bt^2\right)+\vec{j}Ct$ A = 10 м B = – 5 м/с^2 C = 10 м/с t = 1 с		За визначенням миттєвої швидкості $$\vec{v}=\frac{d\vec{r}}{dt}=\vec{i}\cdot 2Bt+\vec{j}\cdot C$$
$\vec{v}(t)$ – ? $\vec{a}(t)$ – ? v – ? a –? a_τ – ? a_n – ?		та миттєвого прискорення $$\vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt}=\vec{i}\cdot 2B.$$

Модуль швидкості

$$v=\sqrt{v_x^2+v_y^2}=\sqrt{4B^2t^2+C^2},$$

при t = 1 с:

$$v=\sqrt{4(-5)^2\cdot 1^2+10^2}=14{,}1 \text{ (м/с)}.$$

Модуль прискорення при t = 1 с:

$$|\vec{a}|=|2B|=|2\cdot(-5)|=10\ (\text{м/с}^2).$$

За визначенням тангенціального прискорення

$$a_\tau=\frac{dv}{dt}=\frac{d}{dt}\sqrt{4B^2t^2+C^2}=\frac{4B^2t}{\sqrt{4B^2t^2+C^2}},$$

при t = 1 с:

$$a_\tau=\frac{4(-5)^2\cdot 1}{\sqrt{4(-5)^2\cdot 1^2+10^2}}=0{,}71\,(\text{м/с}^2).$$

Нормальне прискорення при t = 1 с:

$$a_n=\sqrt{a^2-a_\tau^2}=\sqrt{10^2+0{,}71^2}=10{,}02(\text{м/с}^2).$$

Приклад №2. Точка рухається по прямій згідно рівнянню $x = At+Bt^3$, де $A = 6$ м/с, $B = -0,125$ м/с^3. Визначити середню шляхову швидкість $<v>$ точки в інтервалі часу від $t_1 = 2$ с до $t_2 = 6$ с.

Дано:	СІ	Розв’язання:
$x = At + Bt^3$ $A = 6$ м/с $B = -0,125$ м/с^3 $t_1 = 2$ с $t_2 = 6$ с $v - ?$		Середня шляхова швидкість $<v> = \frac{S}{t_2 - t_1}$, де S – шлях, який пройшла точка. З рівняння руху визначимо миттєву швидкість точки $v = \frac{dx}{dt} = A + 3Bt^2$.

Знайдемо, в який момент часу швидкість дорівнює нулю:

$$v = 6 - 0,375 t_0{}^2 = 0;$$

$$t_0 = \sqrt{6/0,375} = 4 (\text{c}).$$

До зупинки від $t_1 = 2$ с до $t_0 = 4$ с точка проходить шлях:

$$S_1 = \left| x(t_0) - x(t_1) \right| = \left| (At_0 + Bt_0{}^3) - (At_1 + Bt_1^3) \right| =$$

$$= \left| A(t_0 - t_1) + B(t_0^3 - t_1^3) \right| = \left| 6 \cdot (4-2) - 0,125 \cdot (4^3 - 2^3) \right| = 5 (\text{м}).$$

Після зупинки від $t_0 = 4$ с до $t_2 = 6$ с шлях точки:

$$S_2 = \left| x(t_2) - x(t_0) \right| = \left| (At_2 + Bt_2^3) - (At_0 + Bt_0^3) \right| =$$

$$= \left| 6 \cdot (6-4) - 0,125 \cdot (6^3 - 4^3) \right| = 7 (\text{м}).$$

Середня шляхова швидкість:

$$<v> = \frac{S_1 + S_2}{t_2 - t_1} = \frac{5+7}{6-2} = 3 (\text{м/c})$$

.

Приклад №3. Рух точки по криволінійній траєкторії задано рівняннями $x = A_1t^3$ та $y = A_2t$, де A_1 = 1 м/с^3, A_2 = 2 м/с. Знайти рівняння траєкторії точки, її швидкість v і повне прискорення a в момент часу t = 0,8 с.

Дано:	СІ	Розв'язання:
$t = 0{,}8 c$ $x = A_1t^3$ $y = A_2t$ $A_1 = 1$ м/с^3 $A_2 = 2$ м/с		Для знаходження рівняння траєкторії виключимо час: $$t = \frac{y}{A_2}.$$ Підставляючи у вираз для x, отримаємо: $$x = A_1\left(\frac{y}{A_2}\right)^3, \text{ або } A_2^3x - A_1y^3 = 0.$$
$f(x)$ – ? v – ? a –?		

З урахуванням чисельних значень A_1 та A_2 рівняння траєкторії приймає вигляд

$$8x - y^3 = 0.$$

Швидкість точки

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2},$$

де v_x та v_y – проекції швидкості на вісі x і y. Знайдемо їх:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = 3A_1t^2; \quad v_y = \frac{dy}{dt} = A_2,$$

тоді швидкість

$$v = \sqrt{\left(3A_1t^2\right)^2 + A_2^2}.$$

Проекції прискорення на вісі x і y:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = 6A_1t; \qquad a_y = \frac{dv_y}{dt} = 0.$$

Прискорення точки

$$a = a_x = 6A_1t.$$

Обчислення: $$v = \sqrt{\left(3\cdot 1\cdot 0{,}8^2\right)^2 + 2^2} = 2{,}77\,(\text{м/с}),$$

$$a = 6\cdot 1\cdot 0{,}8 = 4{,}8\ (\text{м/с}^2).$$

<u>Приклад №4.</u> Гоночний автомобіль рухається на прямолінійній ділянці траєкторії так, що його прискорення зростає лінійно і за перші 10 с досягає значення 5 м/с^2. Нехтуючи його власними розмірами і масою, визначити в кінці 10-ї секунди: 1) швидкість автомобіля; 2) пройдений ним шлях.

Дано:	СІ	Розв’язання:
$t = 0{,}8c$ $x = A_1 t^3$ $y = A_2 t$ $A_1 = 1$ м/с^3 $A_2 = 2$ м/с		Оскільки прискорення зростає лінійно, то $a(t) = k \cdot t$, і невідомий коефіцієнт пропорційності: $k = \frac{a(t)}{t} = \frac{5}{10} = 0{,}5$ (м/с).
$v - ?\ a - ?$		

За умовою задачі рух є прямолінійним, отже, швидкість

$$v(t) = \int_0^t a(t)\,dt = \int_0^t k \cdot t\,dt = \left.\frac{k \cdot t^2}{2}\right|_0^t = \left.\frac{k \cdot t^2}{2}\right|_{k=0,5} = \frac{t^2}{4}.$$

Пройдений шлях при прямолінійному русі буде дорівнювати:

$$S(t) = \int_0^t v(t)\,dt = \int_0^t \frac{t^2}{4}\,dt = \left.\frac{1}{4} \cdot \frac{t^3}{3}\right|_0^t = \frac{t^3}{12}.$$

<u>Обчислення:</u>
швидкість автомобіля:

$$v(10) = \frac{1}{4} \cdot 10^2 = 25 \text{ (м/с)};$$

пройдений шлях:

$$S(10) = \frac{1}{12} \cdot 10^3 = 83\frac{1}{3} \text{ (м)}.$$

Практичне заняття 2. Кінематика обертального руху

Довідковий матеріал

1. **Середня кутова швидкість**

$$\langle\omega\rangle = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t},$$

де $\Delta\varphi$ – зміна кута повороту за інтервал часу Δt.

Миттєва кутова швидкість

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}.$$

2. **Миттєве кутове прискорення**

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}.$$

3. **Частота обертання**

$$n = N/t \quad \text{або} \quad n = 1/T,$$

де N – число обертів, що здійснюються тілом за час t; T – період обертання (час одного повного оберту).

4. **Кінематичне рівняння рівномірного обертання** (ω = const і $\varepsilon = 0$):

$$\varphi = \varphi_0 + \omega t,$$

де φ_0 – початкове кутове переміщення; t – час.

Кінематичне рівняння рівнозмінного обертання (ε = const):

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2},$$

де ω_0 – початкова кутова швидкість; t – час.

Кутова швидкість тіла при рівнозмінному обертанні $\omega = \omega_0 + \varepsilon t$.

5. **Зв'язок між лінійними і кутовими величинами,** що характеризують обертання матеріальної точки:

шлях, що пройшла точка за дугою кола радіусом R при повороті на кут φ

$$S = \varphi R;$$

лінійна швидкість точки

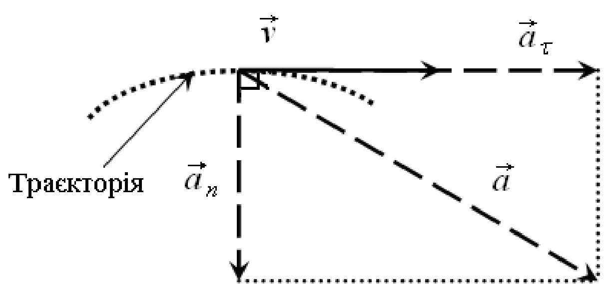
$$v = \omega R, \quad \vec{v} = [\vec{\omega}\vec{r}];$$

тангенціальне прискорення точки

$$a_\tau = \varepsilon R, \quad \vec{a}_\tau = [\vec{\varepsilon}\vec{r}]:$$

нормальне прискорення точки

$$a_n = \omega^2 R, \quad \vec{a}_n = -\lfloor\omega^2\vec{r}\rfloor.$$



<u>Приклад №1.</u> Автомобіль рухається по заокругленому шосе, що має радіус кривизни R = 25 м. Рівняння руху автомобіля $S(t) = A + Bt + Ct^2$, де A = 5 м, B = 15 м/с, C = –1 м/с^2. Знайти: швидкість v автомобіля, його тангенціальне, нормальне і повне прискорення в момент часу t = 6 с.

Дано:	Розв’язання:
R = 25 м $S(t) = A+B\cdot t+C\cdot t^2$ A = 5 м B = 15 м/с C = – 1 м/с^2 t = 6 с	Знаючи рівняння руху, знайдемо швидкість, взявши першу похідну від координати за часом: $$v = \frac{dS(t)}{dt} = B + 2C \cdot t.$$ Підставимо в цей вираз значення B, C, t і проведемо обчислення: $$v = 15 + 2\cdot(-1)\cdot 6 = 3 \text{ (м/с)}.$$
a – ? a_τ – ? a_n – ?	

Тангенціальне прискорення знайдемо, взявши першу похідну від швидкості за часом:

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = 2C.$$

Підставимо значення C, отримаємо $a_\tau = 2(-1) = -2(\text{м}/\text{с}^2)$.

Нормальне прискорення визначається за формулою:

$$a_n = \frac{v^2}{R}.$$

Підставляючи знайдене значення швидкості і задане значення радіусу кривизни траєкторії, проведемо обчислення:

$$a_n = \frac{3^2}{25} = 0{,}36(\text{м}/\text{с}^2).$$

Модуль повного прискорення

$$a = \sqrt{a_\tau{}^2 + a_n{}^2}.$$

Чисельно

$$a = \sqrt{2^2 + 0{,}36^2} = 2{,}03(\text{м/с}^2).$$

<u>Приклад №2</u>. Трекова модель автомобіля обертається на прив'язі з частотою 50 Гц. Після припинення тяги, модель, зробивши 500 обертів, зупинилася. Нехтуючи власними розмірами і масою моделі автомобіля, визначити момент зупинки і кутове прискорення, якщо вважати, що гальмування є рівнозмінним.

<u>Дано:</u>

$\nu_0 = 50$ Гц.
$N = 500$
$\varepsilon = \text{const}$
$\nu_к = 0$

ε – ?
$t_к$ – ?

<u>Розв'язання:</u>

Оскільки гальмування приймається рівнозмінним, то кут повороту

$$\varphi = \omega_0 \cdot t - \frac{\varepsilon \cdot t^2}{2}, \tag{1}$$

де $\omega_0 = 2\pi \cdot \nu_0$ – початкова кутова частота обертання.

Кінцеве значення кута – $\varphi_к = 2\pi\cdot N$ відповідає кінцевій кутовій швидкості

$$\varphi_к = 2\pi\cdot\nu_к = 0.$$

зі співвідношення – $\omega_к = \omega_0 - \varepsilon \cdot t_к$ знайдемо $t_к$ – момент зупинки:

$$t_к = \frac{\omega_0}{\varepsilon}\ . \tag{2}$$

Таким чином, із виразу (1) для кінцевого значення кута повороту

$$2\pi N = 2\pi\nu_0 \cdot t_к - \frac{\varepsilon \cdot t_к^{\,2}}{2},$$

із урахуванням (2) отримаємо

$$2\pi N = 2\pi\nu_0 \cdot \frac{2\pi\nu_0}{\varepsilon} - \frac{\varepsilon}{2}\left(\frac{2\pi\nu_0}{\varepsilon}\right)^2,$$

звідки отримаємо формулу для кутового прискорення

$$\varepsilon = \frac{\pi\nu_0^{\,2}}{N}.$$

Чисельно

$$\varepsilon = \frac{\pi \cdot 50^2}{500} = 5\pi = 15{,}7\ (\text{рад/с}^2),$$

$$t_к = \frac{2\pi\nu_0}{\varepsilon} = \frac{2\cdot\pi\cdot 50}{5\cdot\pi} = 20\ (\text{с}).$$

<u>Приклад №3.</u> Пропелер літака, який робить n_0 = 1200 об/хв, після вимкнення двигуна зупиняється через t = 8 с. Скільки обертів зробив пропелер за цей час, якщо вважати його обертання рівносповільненим?

<u>Дано:</u>	СІ	<u>Розв'язання:</u>
n_0 = 1200 об/хв t = 8 с n = 0 ε = const	20 об/с	При рівносповільненому русі кутова швидкість і кут повороту змінюються за законами відповідно
N_1 – ?		

$$\omega = \omega_0 - \varepsilon \cdot t, \qquad (1)$$

$$\varphi = \omega_0 \cdot t - \frac{\varepsilon \cdot t^2}{2}, \qquad (2)$$

де $\omega_0 = 2\pi \cdot n_0$ – початкова кутова частота обертів.

В момент зупинки при t_1 кутова швидкість тіла $\omega = 2\pi \cdot n = 0$. Підставляючи цей вираз в рівняння (1), отримаємо

$$0 = 2\pi \cdot n_0 - \varepsilon \cdot t_1,$$

звідки $\varepsilon = \dfrac{2\pi \cdot n_0}{t_1}$.

Якщо позначити число зроблених пропелером за час t_1 обертів через N_1, то кут повороту за той же час дорівнює

$$\varphi_1 = 2\pi \cdot N_1.$$

Підставляючи знайдені значення ε та φ_1 в рівняння (2), отримаємо вираз

$$2\pi \cdot N_1 = 2\pi \cdot n_0 \cdot t_1 - \frac{2\pi \cdot n_0}{t_1} \cdot \frac{t_1^2}{2} = \pi \cdot n_0 \cdot t_1,$$

з якого маємо

$$N_1 = \frac{n_0}{2} \cdot t_1.$$

Чисельно:

$$N_1 = \frac{20 \cdot 8}{2} = 80.$$

Приклад №4. Знайти закон обертання тіла навколо вісі, якщо відомі наступні дані: кутова швидкість змінюється пропорційно t_2, початковий кут повороту, для заданого моменту часу t_1 = 3 с, кутове прискорення $\varepsilon_1 = -5\pi$ с$^{-2}$.

Дано:	Розв'язання:
$\omega \sim t^2$ $\varphi_0 = 2$рад $t_1 = 3$ с $\varepsilon_1 = -5\pi \text{с}^{-2}$	За умовою завдання модуль кутової швидкості змінюється пропорційно t^2. Позначаючи невідомий коефіцієнт пропорційності буквою *к*, маємо $$\omega = \kappa t^2. \qquad (1)$$
$\varphi(t)$ – ?	

Знайдемо ε, беручи похідні за часом від обох частин рівності (1),

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = 2\kappa t. \qquad (2)$$

Визначимо коефіцієнт κ з умови, що при t_1 = 3 с кутове прискорення $\varepsilon_1 = -5\pi$ с$^{-2}$:

$$-5\pi = 2 \cdot \kappa \cdot 3,$$

тоді $\kappa = -\frac{5}{6}\pi$.

Підставляючи значення κ в рівняння (1), отримаємо:

$$\omega = -\frac{5}{6} \cdot \pi \cdot t^2.$$

Врахуємо, що $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$, і будемо мати:

$$\frac{d\varphi}{dt} = -\frac{5}{6} \cdot \pi \cdot t^2.$$

Помноживши обидві частини цього рівняння на dt і інтегруючи, знаходимо:

$$\varphi = -\frac{5}{18} \cdot \pi \cdot \mathrm{t}^3 + \mathrm{C}.$$

В початковий момент при $t = 0$, $\varphi_0 = 2$ рад – константа C = 2.

Таким чином, закон обертання тіла навколо вісі має вигляд:

$$\varphi = -\frac{5}{18} \cdot \pi \cdot \mathrm{t}^3 + 2.$$

Практичне заняття 3. Закони динаміки поступального руху

Довідковий матеріал

Рівняння руху матеріальної точки (другий закон Ньютона) у векторній формі:

$$\frac{d\vec{p}}{dt}=\sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i \qquad \text{або} \qquad m\vec{a}=\sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i,$$

де $\sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i$ – геометрична сума сил, які діють на матеріальну точку; m – маса; a – прискорення; $\vec{p}=m\vec{v}$ – імпульс; N – число сил, які діють на матеріальну точку;

в координатній формі (скалярній):

$$ma_x=\sum_{i=1}^{N}F_{xi}\,;\ m\frac{d^2x}{dt^2}=\sum_{i=1}^{N}F_{xi}\,;$$

$$ma_y=\sum_{i=1}^{N}F_{yi}\,;\ m\frac{d^2y}{dt^2}=\sum_{i=1}^{N}F_{yi}\,;$$

$$ma_z=\sum_{i=1}^{N}F_{zi}\,;\qquad m\frac{d^2z}{dt^2}=\sum_{i=1}^{N}F_{zi}\,,$$

де під знаком суми стоять проекції сил на відповідні вісі координат.

Третій закон Ньютона

$$\vec{F}_{12}=-\vec{F}_{21}.$$

Сила гравітаційного притягання тіл

$$F=G\frac{m_1m_2}{r^2},$$

де G – гравітаційна стала, m_1 і m_2 – маси взаємодіючих тіл; r – відстань між ними.

Сила пружності (закон Гука)

$$\vec{F}_{\text{пр}}=-k\Delta\vec{r}\,,$$

де k – коефіцієнт пружності (жорсткість), $\Delta\vec{r}$ – абсолютна деформація.

Сила тертя ковзання

$$F_{\text{тер}}=\mu N,$$

де μ – коефіцієнт тертя ковзання; N – сила реакції опори.

Вага тіла – сила, що діє на опору або на підвіс $\vec{P}=-\vec{N}$.

Приклад №1. Матеріальна точка масою m = 2 кг рухається під дією деякої сили F згідно рівнянню $x = A+Bt+Ct^2+Dt^3$, де C = 1 м/с^2, D = – 0,2 м/с^3. Знайти значення цієї сили в моменти часу t_1 = 2 с і t_2 = 5 с. В який момент часу сила дорівнює нулю?

Дано:

m=2 кг
$x=A+Bt+Ct^2+Dt^3$
C=1 м/с^2
t_1=2 с
t_2=5
F=0

F_1 —? F_2 —? t —?

Розв’язання:

Знайдемо миттєву швидкість в довільний момент часу, продиференціювавши координату x за часом:

$$v=\frac{dx}{dt}=B+2Ct+3Dt^2.$$

Миттєве прискорення в довільний момент часу знайдемо, взявши похідну від швидкості за часом:

$$a=\frac{dv}{dt}=2C+6Dt.$$

Величину сили знайдемо за другим законом Ньютона:

$$F = ma = m(2C+6Dt).$$

Підставимо значення C, D і зробимо обчислення сили для моментів часу t_1 = 2 с і t_2 = 5 с:

$$F_1 = 2(2\times 1 + 6(-0,2)2) = -0,8\,(\text{Н}),$$
$$F_2 = 2(2\times 1 + 6(-0,2)5) = -8\,(\text{Н}).$$

Знак мінус вказує на те, що напрямок вектора сили F_1 і F_2 збігається з негативним напрямком координатної вісі, тобто рух точки в дані моменти є вповільненим.

Визначимо, в які моменти часу сила дорівнює нулю:

$$F = 2C+6Dt = 0,$$

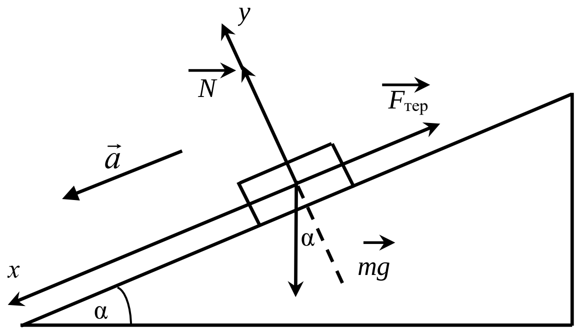
звідки $t = -\dfrac{C}{3D}$.

Підставляючи значення C і D, отримаємо:

$$t = -\frac{1}{3(-0,2)} = 0,17\,(\text{с}).$$

<u>Приклад №2.</u> Знайти прискорення і вагу тіла, яке скочується по похилій площині, що становить кут α з горизонтом. Коефіцієнт тертя ковзання дорівнює μ.

Дано:	Розв'язання
α, μ	
$A - ?\ P - ?$	



Запишемо II закон Ньютона в векторній формі:

$$m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{\text{тер}} = m\vec{a}.$$

Спроектуємо рівняння на вісі *Ox* і *Oy:*

$$\begin{cases} mg\sin\alpha - F_{\text{тер}} = ma \\ N - mg\cos\alpha = 0 \end{cases}.$$

Використовуючи вираз для сили тертя $F_{\text{тер}} = \mu \cdot N$, перетворимо систему до вигляду:

$$\begin{cases} mg\sin\alpha - \mu N = ma \\ N - mg\cos\alpha = 0 \end{cases}.$$

З другого рівняння знаходимо силу реакції опори і відповідно вагу тіла

$$N = P = mg \cdot \cos\alpha.$$

Бачимо, що вага тіла на похилій поверхні менше сили тяжіння

З першого рівняння знаходимо прискорення

$$a = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha).$$

Очевидно, якщо $\mu = \mathrm{tg}\,\alpha$, то $a = 0$, отже, тіло покоїться або рухається рівномірно і прямолінійно.

<u>Приклад №3.</u> При падінні тіла з великої висоти його встановлена швидкість $v_{вст}$ при сталому русі досягає 80 м/с. Визначити час τ, протягом якого, починаючи від моменту початку падіння, швидкість стає рівною 1/2 $v_{вст}$. Силу опору повітря прийняти пропорційною швидкості тіла.

<u>Дано:</u>

$V_{вст}$ = 80 м/с
v = 1/2 $v_{вст}$

τ – ?

<u>Розв’язання:</u>

На падаюче тіло діють дві сили: сила тяжіння $m\vec{g}$ і сила опору повітря $\vec{F}_о$.

Сила опору повітря за умовами завдання пропорційна швидкості тіла і протилежна їй за напрямком:

$$\vec{F}_о = -k\vec{v},$$

де k – коефіцієнт пропорційності, що залежить від розмірів, форми тіла і від властивостей навколишнього середовища.

Напишемо рівняння руху тіла відповідно до другого закону Ньютона у векторній формі:

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{g} + \vec{F}_с.$$

Підставивши вираз для $\vec{F}_о$, отримаємо

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{g} - k\vec{v}.$$

Спроектуємо всі векторні величини на вертикально спрямовану вісь і напишемо рівняння для проекцій:

$$m\frac{dv}{dt} = mg - kv.$$

Після розділення змінних отримаємо:

$$\frac{dv}{mg - kv} = \frac{dt}{m}.$$

Виконаємо інтегрування, враховуючи, що при зміні часу від нуля до τ (час, що шукаємо) швидкість зростає від нуля до 1/2 $v_{вст}$

$$\int_0^{\frac{1}{2}v_{вст}} \frac{dv}{mg - kv} = \int_0^{\tau} \frac{dt}{m}.$$

Після інтегрування отримаємо:

$$-\frac{1}{k}\ln\left(mg-kv\right)\Big|_{0}^{\frac{1}{2}v_{\text{вст}}}=\frac{\tau}{m}.$$

Підставами межі інтегрування в ліву частину рівності:

$$\frac{1}{k}\ln\frac{mg}{gm-\frac{1}{2}kv_{\text{вст}}}=\frac{\tau}{m}.$$

і знайдемо з отриманого виразу час:

$$\tau=\frac{m}{k}\ln\frac{mg}{mg-\frac{1}{2}kv_{\text{вст}}}.$$

Вхідний сюди коефіцієнт пропорційності k визначимо з наступних міркувань. При установленому русі (швидкість є постійною) алгебраїчна сума проекцій (на вісь y) сил, що діють на тіло, дорівнює нулю, тобто

$$mg - kv_{\text{вст}} = 0, \text{ звідки } k = mg/v_{\text{вст}}.$$

Підставимо знайдене значення k в отриману формулу для τ:

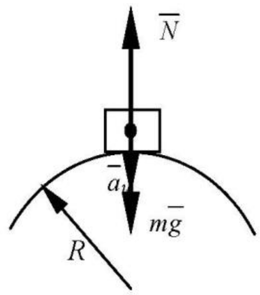
$$\tau=\frac{mv_{\text{вст}}}{mg}\ln\frac{mg}{mg-\frac{1}{2}\frac{mg}{v_{\text{вст}}}v_{\text{вст}}}.$$

Після скорочень і спрощень отримаємо

$$\tau=\frac{v_{\text{вст}}}{g}\ln 2.$$

Підставивши в цю формулу значення $v_{\text{вст}}$, g, ln2 і зробивши обчислення, отримаємо τ = 5,66 с.

<u>Приклад №4.</u> Автомобіль з вантажем масою 5 т проходить по опуклому мосту зі швидкістю 21,6 км/год. З якою силою він тисне на середину моста, якщо радіус кривизни моста 50 м?

Дано:	Розв'язання:
m = 5 т = 5 10^3 кг v = 21,6 км/год = 6 м/с R = 50 м	
P – ?	

За 3-м законом Ньютона вага тіла $\vec{P}$ дорівнює силі реакції опори $\vec{N}$

$$\vec{P} = -\vec{N}.$$

Визначимо N із 2-го закону Ньютона в проекції на вертикальну вісь

$$mg - N = ma.$$

Врахуємо, що при рівномірному русі по колу прискорення є нормальним, напрямлене до центру кола і визначається за формулою

$$a = \frac{v^2}{R},$$

тоді

$$P = N = mg - m\frac{v^2}{R} = m(g - \frac{v^2}{R}).$$

Підставляючи чисельні дані, отримуємо

$$P = 5 \cdot (10 - \frac{6^2}{50}) = 46,4\ 10^3 (\text{Н}).$$

Спостерігаємо, що вага автомобіля зменшується порівняно з випадком руху тіла по горизонтальній площині.

Практичне заняття 4. Робота, потужність, енергія.

Довідковий матеріал

Робота, що здійснюється постійною силою,

$$A = F\Delta r\cos\alpha,$$

де α – кут між напрямками векторів сили і переміщення.

Робота, що здійснюється змінною силою

$$A = \int\limits_L F(r)\cos\alpha dr,$$

де інтегрування ведеться уздовж траєкторії, що визначається *L*.

Середня потужність за інтервал часу Δt

$$\langle N\rangle = \frac{A}{\Delta t}.$$

Миттєва потужність

$$N = \frac{dA}{dt} \quad \text{або} \quad N = Fv\cos\alpha,$$

де dA – робота, що здійснюється за інтервал часу dt.

Кінетична енергія матеріальної точки (тіла), що рухається поступально

$$W_К = \frac{mv^2}{2} \quad \text{або} \quad W_К = \frac{p^2}{2m},$$

Потенційна енергія тіла $W_п$ і сила, що діє на тіло в даній точці поля, пов'язані співвідношенням $\vec{F} = -\mathrm{grad}W_П$,

або $\vec{F} = -(\vec{i}\frac{\partial W_П}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial W_П}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial W_П}{\partial z})$, $F = -\frac{\partial W_П}{\partial r}$.

Потенційна енергія пружно-деформованого тіла (стиснутої або розтягнутої пружини)

$$W_П = \frac{kx^2}{2}.$$

Потенціальна енергія гравітаційної взаємодії двох матеріальних точок (або тіл) масами m_1 і m_2, що знаходяться на відстані *r* один від одного

$$W_П = -G\frac{m_1 m_2}{r}.$$

Потенційна енергія тіла, що знаходиться в однорідному полі сили тяжіння,

$$W_П = mgh,$$

де *h* – висота тіла над рівнем, прийнятим за нульовий рівень для відліку потенціальної енергії.

Приклад №1. Яку роботу потрібно зробити, щоб підняти вантаж масою 30 кг на висоту 10 м з прискоренням 0,5 м/с^2?

Дано:	Розв'язання:
m = 30 кг h = 10 м a =0,5 м/с^2	Робота постійної сили, спрямованої уздовж переміщення, дорівнює
A – ?	$A = F\Delta S = Fh.$

За II законом Ньютона в проекції на вертикальну вісь:

$$F - mg = ma,$$

звідки

$$F = ma + mg.$$

Формула для роботи приймає вигляд:

$$A = m(a + g)h.$$

Обчислення:

$$A = 30\ (0{,}5 + 9{,}8)\cdot 10 = 3090\ (Дж).$$

Приклад №2. Матеріальна точка масою m = 2 кг рухалась під дією деякої сили, спрямованої вздовж вісі OX відповідно до рівняння $x = A+Bt+Ct^2+Dt^3$, де B = – 2 м/с, C = 1 м/с^2, D = – 0,2 м/с^3. Знайти потужність N, під дією сили в момент часу t_1 = 2 с і t_2 = 5 с.

Дано:	Розв'язання:
m = 2 кг $x = A+Bt+Ct^2+Dt^3$ B = – 2 м/с C = 1 м/с^2 D = – 0,2 м/с^3 t_1 = 2 с t_2 = 5 с	Для визначення потужності скористаємося формулою $N = \vec{F}\cdot\vec{v}$. Знайдемо миттєву швидкість в довільний момент часу, продиференціювавши координату x за часом: $v = \frac{dx}{dt} = B+2Ct+3Dt^2.$
N_1 — ? N_2 — ?	

Миттєве прискорення в довільний момент часу знайдемо, взявши похідну від швидкості v за часом:

$$a = \frac{dv}{dt} = 2C+6Dt\,.$$

Силу визначимо по другому закону Ньютона

$$F = ma = m(2C + 6Dt).$$

Таким чином, отримаємо вираз для потужності у вигляді:

$$N = m(2C+6Dt)(B+2Ct+3Dt^2).$$

Чисельно для моменту $t_1 = 2$ с:

$$N_1=2(2\cdot1-6\cdot0,2\cdot2)(-2+2\cdot1\cdot2-3\cdot0,2\cdot2^2)=0,32(\text{Вт}),$$

для моменту $t_2 = 5$ с:

$$N_2=2(2\cdot1-6\cdot0,2\cdot5)(-2+2\cdot1\cdot5-3\cdot0,2\cdot5^2)=56(\text{Вт}).$$

Приклад №3. Кінетична енергія тіла, кинутого вертикально вгору, в момент кидання дорівнює 200 Дж. Визначити, до якої висоти від поверхні Землі може піднятися тіло, якщо його маса дорівнює 800 г.

Дано:	Рішення:
$W_{К1}$= 200 Дж m = 800 г=0,8 кг $h_1 = 0$	За теоремою про кінетичну енергії $$A=\Delta W=W_{К2}-W_{К1},$$
h_2 – ?	де робота проти сили тяжіння $$A=mg(h_2-h_1).$$

В максимальній точці підйому $v_2 = 0$, $W_{К2} = 0$, звідки

$$W_{К1}=mgh_2,$$

Таким чином, максимальна висота підйому тіла

$$h_2=\frac{W_{К1}}{mg}.$$

Чисельно

$$h_2=\frac{200}{0,8\cdot9,8}\approx25\,(\text{м}).$$

Приклад №4. Куля масою 9 г вилітає з гвинтівки зі швидкістю v_0 = 650 м/с. На відстані 400 м від місця пострілу швидкість кулі стає v = 390 м/с. Яку частину від своєї початкової кінетичної енергії втратила куля? Знайдіть роботу сил опору.

Дано:	Розв’язання:
m = 9 г = $9\cdot 10^{-3}$ кг v_0 = 650 м/с S = 400 м v = 390 м/с	За теоремою про кінетичну енергію $A_о = \Delta W_К = W_К - W_{К0} = \dfrac{mv^2}{2} - \dfrac{mv_0^{\ 2}}{2}$.
$\dfrac{\Delta W_К}{W_{К0}} - ?\ A_о - ?$	Визначимо необхідне відношення $\dfrac{\lvert\Delta W_К\rvert}{W_{К0}} = \dfrac{\lvert mv_0^2 - mv^2\rvert}{mv_0^2} = 1 - \dfrac{v^2}{v_0^{\ 2}}$.

Чисельно

$$\frac{\Delta W_К}{W_{К0}} = 1 - \frac{390^2}{650^2} = 0,64$$

Робота сил опору

$$A_о = \frac{m}{2}\left(v^2 - v_0^2\right) = \frac{9\cdot 10^{-3}}{2}\left(390^2 - 650^2\right) = -1220\ (\text{Дж}).$$

Приклад №5. У циліндричній бочці знаходиться 200 л води. Висота стовпа води в бочці 1 м. Знайдіть зміну потенціальної енергії води після її витікання: а) на поверхню Землі; б) на поверхню Місяця.

Дано:	Розв’язання:
V = 200 л = 0,2 м^3 h = 1 м а) $g_З$ = 9,8 м/с^2 б) $g_Л$ = 1,6 м/с^2 ρ = 10^3 кг/м^3	Зміна потенціальної енергії $\Delta W_П = W_{П2} - W_{П1}$ дорівнює роботі сили тяжіння, що береться з протилежним знаком $A = -mgS$, де S в даному випадку – зміна положення центру мас води у бочці.
$\Delta W_П$ – ?	

Завдяки однорідності тіла S = 0,5h. Враховуючи, що m = ρV, отримаємо

$$\Delta W_П = -0,5\rho Vgh.$$

Підставляючи чисельні дані, знайдемо

а) $\Delta W_П$ = – 980 Дж, б) $\Delta W_П$ = – 160 Дж.

Практичне заняття 5. Динаміка обертального руху твердого тіла

Довідковий матеріал

Момент сили $\vec{F}$, що діє на тіло:

$$\vec{M} = \left[\vec{r}\,\vec{F}\right].$$

Момент інерції відносно вісі обертання:

а) матеріальної точки

$$I = mr^2,$$

де m – маса точки; r – її відстань від вісі обертання;

б) суцільного твердого тіла

$$I = \int r^2 dm.$$

Теорема Штейнера. Момент інерції тіла відносно довільної вісі:

$$I = I_0 + ma^2,$$

де I_0 – момент інерції тіла відносно вісі, що проходить крізь центр ваги тіла паралельно заданої вісі; a – відстань між висями; m – маса тіла.

Момент імпульсу тіла, що обертається відносно довільної вісі:

$$\vec{L} = I\vec{\omega} \quad \text{або} \quad \vec{L} = \left[\vec{r}\,\vec{p}\right].$$

Рівняння динаміки обертального руху твердого тіла відносно нерухомої вісі:

$$\vec{M}\,dt = d\left(I\vec{\omega}\right).$$

При постійному моменту інерції:

$$\vec{M} = I\vec{\varepsilon},$$

де ε – кутове прискорення.

Робота постійного моменту сили M, що діє на тіло, яке обертається:

$$A = M\varphi,$$

де φ – кут повороту тіла.

Миттєва потужність тіла при обертанні:

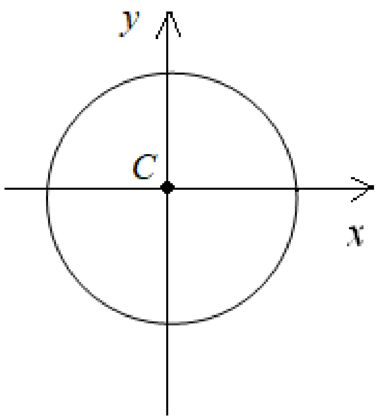
$$N = M \cdot \omega.$$

Кінетична енергія тіла, що обертається:

$$W_{\text{K}} = \frac{I\omega^2}{2}.$$

Приклад №1. Визначте момент інерції I_0 кільця масою m = 50 г і радіусом R = 10 см щодо вісі, яка лежить в площині кільця і дотичній до нього.

Дано:	CI	Розв'язання:
m = 50 г	0,05 кг	
R = 10 см	0,1 м	
$I_0 - ?$		



Моменти інерції відносно вісей x, y, z, що проходять крізь центр мас кільця пов'язані співвідношенням $I_x+I_y=I_z$ (вісь z перпендикулярна площині кільця).

Тоді в силу симетрії:

$$I_x=I_y=\frac{I_z}{2}, \text{ де } I_z=mR^2=I_c.$$

За теоремою Штейнера момент інерції відносно вісі, що проходить скрізь точку 0, дорівнює:

$$I_0=I_{yc}+mR^2, \text{тобто}$$

$$I_0=mR^2/2+mR^2=\frac{3}{2}mR^2.$$

Чисельно

$$I_0=0,05\cdot 0,1^2\cdot\frac{3}{2}=7,5\cdot 10^{-4}(\text{кг м}^2).$$

Приклад №2. Вал масою m = 100 кг і радіусом R = 5 см обертався з частотою n_0 = 8 с$^{-1}$. До циліндричної поверхні вала притиснули гальмівну колодку з силою F = 40 Н, під дією якої вал зупинився через Δt = 10 с. Визначити коефіцієнт тертя μ.

Дано:	СІ	Розв'язання:
m=100 кг R=5 см n_0 = 8 с$^{-1}$ F=40 Н Δt = 10 с $n_к$ = 0	 0,05м	Кутова швидкість обертання валу $\omega = 2\pi n$. Через час t кутова швидкість стала дорівнювати нулю, і кутове прискорення вала набуде вигляду $\varepsilon = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{2\pi n_0}{\Delta t}$. (1)
μ – ?		

Сила тертя, яка діє на вал,

$$F_{\text{тер}} = \mu F .$$

Момент цієї сили

$$M = \mu F R$$

повідомляє валу кутове прискорення. Відповідно до основного закону динаміки обертального руху маємо

$$M = I\varepsilon ,$$

де I – момент інерції вала, $I = \frac{1}{2} m R^2$.

Тоді маємо

$$\varepsilon = \frac{M}{I} = \frac{\mu F R}{\frac{1}{2} m R^2} = \frac{2\mu F R}{m R^2} . \qquad (2)$$

Прирівнявши праві частини (1) і (2), отримаємо:

$$\frac{2\pi n_0}{\Delta t} = \frac{2\mu F R}{m R^2} ,$$

звідки коефіцієнт тертя

$$\mu = \frac{\pi n_0 m R}{F \Delta t} .$$

Обчислення

$$\mu = \frac{3{,}14 \cdot 8 \cdot 100 \cdot 5 \cdot 10^{-2}}{40 \cdot 10} = 0{,}314.$$

<u>Приклад №3.</u> Маховик обертається за законом, вираженим рівнянням $\varphi = A + Bt + Ct^2$, де A = 2 рад, B = 32 рад/с, C = – 4 рад/с^2. Знайти середню потужність <N>, що розвивається силами, які діють на маховик при його обертанні до зупинки, якщо його момент інерції I = 100 кг·м^2.

<table>
<tr><td><u>Дано:</u>

$\varphi = A + Bt + Ct^2$
$A = 2$ рад
$B = 32$ рад/с
$C = -4$ рад/с^2
$\omega_к = 0$
$I = 100$ кгм^2</td><td>СІ</td><td><u>Розв'язання:</u>

Середня потужність при обертальному русі
$$\langle N \rangle = M\langle \omega \rangle, \tag{1}$$
де середня кутова швидкість
$$\langle \omega \rangle = \frac{\omega_0 + \omega_к}{2}. \tag{2}$$
Знайдемо вираз для кутової швидкості:</td></tr>
<tr><td>$\langle N \rangle - ?$</td><td></td><td></td></tr>
</table>

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = B + 2Ct, \tag{3}$$

тоді $\omega_0 = \mathrm{B}; \omega_к = 0$ (за умовою).

Момент сили визначимо з ІІ закону Ньютона для обертального руху:

$$M = I\varepsilon, \tag{4}$$

$$\text{де } \varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = 2C. \tag{5}$$

З урахуванням (2) – (5) знайдемо вираз для середньої потужності:

$$\langle N \rangle = I\varepsilon \frac{\omega_0 + \omega_k}{2} = I \cdot 2C \cdot \frac{B}{2} = ICB.$$

Чисельно

$$\langle N \rangle = 100 \cdot 4 \cdot 32 = 12800 \text{ (Дж)}$$

$$\text{або } \langle N \rangle = 12{,}8 \text{ кДж}.$$

<u>Приклад №4</u>. Обруч і суцільний циліндр, що мають однакову масу $m = 2$ кг, котяться без ковзання з однаковою швидкістю $v = 5$ м/с. Знайти кінетичні енергії $W_{К1}$ та $W_{К2}$ цих тіл.

Дано:	СІ	Розв'язання:
$m_1 = m_2 = m = 2$ кг $v = 5$ м/с ——— $W_{К1}$ – ? $W_{К2}$ – ?		Кінетична енергія тіла, що котиться по площині без ковзання, $$W_К = \frac{mv_C^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2},$$ де $v_C = v$ – швидкість центру мас тіла, $\frac{I\omega^2}{2}$ – кінетична енергія обертального руху тіла навколо вісі, що проходить через центр мас.

Для даної задачі використовуємо формули для моментів інерції обруча і суцільного циліндра у вигляді.

$$I_1 = mR_1^2,\ I_2 = \frac{1}{2}mR_2^2,$$

тоді

$$W_{К1} = \frac{mv_C^2}{2} + \frac{I_1\omega_1^2}{2},$$

$$W_{К2} = \frac{mv_C^2}{2} + \frac{I_2\omega_2^2}{2}.$$

Врахуємо також, що кутова швидкість і лінійна пов'язані співвідношенням, $\omega = v / R,$ тоді

$$W_{К1} = \frac{mv^2}{2} + \frac{mR_1^2 v^2}{2R_1^2} = mv^2,$$

$$W_{К2} = \frac{mv^2}{2} + \frac{\frac{1}{2}mR_2^2 v^2}{2R_2^2} = \frac{3}{4}mv^2.$$

Чисельно

$$W_{К1} = 2\cdot 5^2 = 50(\text{Дж}),\ W_{К2} = \frac{3}{4}2\cdot 5^2 = 37{,}5(\text{Дж}).$$

Практичне заняття 6. Закони збереження

Довідковий матеріал

1. **Закон збереження імпульсу**

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i = \text{const},$$

де N – число матеріальних точок (або тіл), що входять в систему.

2. **Закон збереження механічної енергії**

$$W_К + W_П = \text{const}.$$

Швидкості тіл після абсолютно не пружного удару

$$\vec{u} = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2},$$

швидкості тіл після абсолютно пружного удару

$$\vec{u}_1 = \frac{(m_1 - m_2)\vec{v}_1 + 2m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2},$$

$$\vec{u}_2 = \frac{(m_2 - m_1)\vec{v}_2 + 2m_1\vec{v}_1}{m_1 + m_2},$$

де m_1 і m_2 – маси тіл; v_1 і v_2 – їх швидкості до удару.

3. Закон збереження моменту імпульсу

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{L}_i = \text{const},$$

де $\vec{L}_i$ – момент імпульсу i-го тіла, що входить в систему.

Закон збереження моменту імпульсу для двох тіл, що взаємодіють

$$I_1\omega_1 + I_2\omega_2 = I_1'\omega_1' + I_2'\omega_2',$$

де $I_1, I_2, \omega_1, \omega_2$ – моменти інерції і кутові швидкості тіл до взаємодії; $I_1', I_2', \omega_1', \omega_2'$ – ті ж величини після взаємодії.

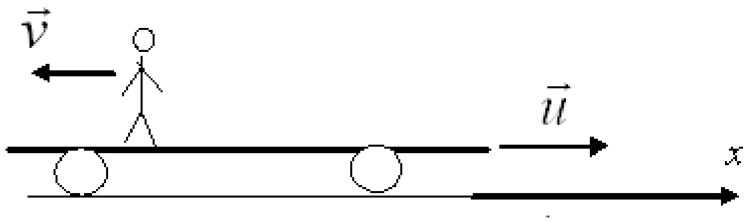
Закон збереження моменту імпульсу для одного тіла, момент інерції якого змінюється,

$$I_1\omega_1 = I_2\omega_2,$$

де I_1 і I_2 – початковий і кінцевий моменти інерції;
ω_1 і ω_2 – початкова і кінцева кутові швидкості тіла.

Приклад №1. На підлозі стоїть візок у вигляді довгої дошки, забезпеченою легкими колесами. На одному кінці дошки стоїть людина. Маса людини M = 60 кг, маса дошки m = 20 кг. З якою швидкістю і (щодо підлоги) буде рухатися візок, якщо людина піде уздовж дошки зі швидкістю v = 1 м/с (відносно дошки)? Масою коліс знехтувати. Тертя у втулках не враховувати.

Дано:	СІ	Розв'язання:
M = 60 кг m= 20 кг v = 1 м/с		До початку руху людини сумарний імпульс системи дорівнює нулю. Після початку руху людини відносно дошки зі швидкістю v візок буде рухатися зі швидкістю u щодо підлоги, спрямований в протилежну сторону.
u – ?		



Результуюча швидкість людини щодо підлоги дорівнює v – u, і закон збереження імпульсу в проекціях на вісь x набуває вигляду

$$0 = mu - M\left(v - u\right).$$

Розкриваючи дужки, отримуємо

$$mu - Mv + Mu = 0,$$

звідки

$$u = \frac{Mv}{M + m}.$$

Підставимо чисельні значення

$$u = \frac{60 \cdot 1}{60 + 20} = 0,75 \text{ (м/с)}.$$

<u>Приклад №2.</u> Дві непружних кулі масами m_1 = 2 кг і m_2 = 3 кг рухаються зі швидкостями відповідно v_1 = 8 м/с і v_2 = 4 м/с. Визначити збільшення ΔU внутрішньої енергії куль при їх зіткненні в двох випадках: 1) менша куля наздоганяє більшу; 2) кулі рухаються назустріч одна одній.

<u>Дано:</u>

m_1 = 2 кг
m_2 = 3 кг
v_1 = 8 м/с
v_2 = 4 м/с

ΔU_1 – ? ΔU_2 –?

<u>Розв'язання:</u>

Для не пружного удару використовуємо закон збереження імпульсу

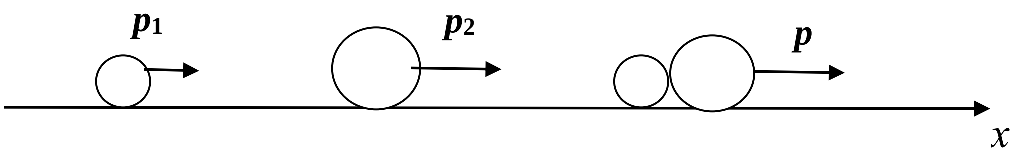
$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}$$

або
$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = (m_1 + m_2)\vec{v} \qquad (1)$$

і закон збереження енергії

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{(m_1 + m_2)v^2}{2} + \Delta U. \qquad (2)$$

1) При русі куль в одному напрямку x:



З 1-го рівняння знайдемо швидкість після взаємодії

$$v = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}.$$

і підставляємо в (2). Знайдемо зміну кінетичної енергії, яка пішла на збільшення внутрішньої енергії системи ΔU_1:

$$\Delta U_1 = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} - \frac{(m_1 + m_2)}{2}\frac{(m_1 v_1 + m_2 v_2)^2}{(m_1 + m_2)^2}.$$

Після перетворень:

$$\Delta U_1 = \frac{1}{2}\left(m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 - \frac{(m_1 v_1 + m_2 v_2)^2}{(m_1 + m_2)} \right).$$

Чисельно

$$\Delta U_1 = \frac{1}{2}\left(2\cdot 8^2 + 3\cdot 4^2 - \frac{(2\cdot 8 + 3\cdot 4)^2}{(2+3)} \right) = 9{,}6(\text{Дж})$$

2) При русі куль назустріч одна одній.

Змінюючи знак при швидкості другого тіла на протилежний, отримаємо:

$$\Delta U_2 = \frac{1}{2}\left(m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 - \frac{\left(m_1 v_1 - m_2 v_2\right)^2}{\left(m_1 + m_2\right)} \right).$$

Чисельно

$$\Delta U_2 = \frac{1}{2}\left(2\cdot 8^2 + 3\cdot 4^2 - \frac{\left(2\cdot 8 - 3\cdot 4\right)^2}{\left(2+3\right)} \right) = 86,4(\text{Дж}).$$

Бачимо, що в другому випадку втрата кінетичної енергії на внутрішню енергію значно більша, ніж у попередньому.

<u>Приклад №3.</u> На рейках стоїть платформа, на якій закріплена гармата без противідкатного пристрою так, що стовбур його розташований в горизонтальному положенні. Із гармати роблять постріл уздовж залізничної колії. Маса m_1 снаряда дорівнює 10 кг і його швидкість u_1 = 1 км/с. На яку відстань l відкотиться платформа після пострілу, якщо коефіцієнт опору f = 0,002, $M_{пл}$ = 20 т.

<u>Дано:</u>	СІ	<u>Рішення:</u>
m_1 = 10 кг u_1 = 1 км/с f = 0,002 $M_{пл}$ = 20 т	 10^3м/с 2 10^4 кг	Згідно із законом збереження енергії кінетична енергія платформи, що є отриманою при пострілі, буде дорівнювати роботі з подолання сили опору
l – ?		$W_к = A = F_{оп} \cdot l$, де $F_{оп} = f \cdot M_{пл} \cdot g$.

Кінетичну енергію платформи після пострілу визначимо, використовуючи закон збереження імпульсу:

$$0 = m_1 u_1 - M_{пл} u,$$

звідки швидкість платформи:

$$u = \frac{m_1 u_1}{M_{\text{пл}}},$$

і її кінетична енергія

$$W_{\text{к}} = \frac{M_{\text{пл}} u^2}{2} = \frac{M_{\text{пл}}}{2}\left(\frac{m_1 u_1}{M_{\text{пл}}}\right)^2 = \frac{(m_1 u_1)^2}{2M_{\text{пл}}},$$

таким чином:

$$l = \frac{W_{\text{к}}}{F_{\text{оп}}} = \frac{\frac{(m_1 u_1)^2}{2M_{\text{пл}}}}{f \cdot M_{\text{пл}} \cdot g} = \frac{(m_1 u_1)^2}{2M_{\text{пл}}^{\;2} \cdot f \cdot g}.$$

Підставимо чисельні значення:

$$l = \frac{(10 \cdot 10^3)^2}{2 \cdot (2 \cdot 10^4)^2 \cdot 0{,}002 \cdot 10} = 6{,}25\ (\text{м}).$$

Приклад №4. Платформа у вигляді диска радіусом R = 1,5 м і масою m_1 = 180 кг обертається за інерцією навколо вертикальної вісі з частотою n = 10 хв$^{-1}$. У центрі платформи стоїть людина масою m_2 = 60 кг. Яку лінійну швидкість відносно підлоги приміщення буде мати людина, якщо вона перейде на край платформи?

Дано:	СІ	Розв’язання:
R = 1,5 м m_1 = 180 кг n = 10 хв$^{-1}$ m_2 = 60 кг	 1/6 с$^{-1}$	За законом збереження моменту імпульсу для замкнутої системи $$(I_1 + I_2)\omega = (I_1 + I_2')\omega',$$
v – ?		

де I_1 – момент інерції платформи;

I_2 – момент інерції людини, що стоїть в центрі платформи;

ω – кутова швидкість платформи з людиною, що стоїть в центрі платформи;

I'_2 – момент інерції людини, що стоїть на краю платформи;

ω' – кутова швидкість платформи з людиною, що стоїть на краю платформи.

Лінійна швидкість людини, що стоїть на краю платформи, пов'язана з кутовою швидкістю співвідношенням

$$v = \omega' R.$$

Визначивши звідси ω' і підставивши отриманий вираз в формулу закону збереження моменту імпульсу, матимемо:

$$v = (I_1 + I_2)\omega R/(I_1 + I'_2).$$

Момент інерції платформи розраховуємо як для диска; отже,

$$I_1 = \frac{1}{2} m_1 R^2.$$

Момент інерції людини розраховуємо як для матеріальної точки, тому

$$I_2 = 0, \qquad I'_2 = m_2 R^2.$$

Кутова швидкість платформи до переходу людини дорівнює $\omega = 2\pi n$.

Замінивши у формулі швидкості величини I_1, I_2, I'_2. та ω їх виразами, отримаємо

$$v = \frac{\frac{1}{2} m_1 R^2}{\frac{1}{2} m_1 R^2 + m_2 R^2} 2\pi n R = \frac{m_1}{m_1 + 2m_2} 2\pi n R.$$

Зробивши підстановку значень m_1, m_2, n, R и π, знайдемо лінійну швидкість людини:

$$v = \frac{180}{180 + 2 \cdot 60} \cdot 2 \cdot 3{,}14 \frac{10}{60} 1{,}5 = 0{,}94 \text{ (м/с)}.$$

Практичне заняття 7. Механічні коливання

Довідковий матеріал

Рівняння гармонічних коливань:

$$x = A\cos\left(\omega t + \varphi\right),$$

де x – зміщення точки від положення рівноваги; t – час;
A, ω, φ – відповідно амплітуда, кутова частота, початкова фаза;
$\left(\omega t + \varphi\right)$ – фаза коливань в момент часу t.

Циклічна частота коливань:

$$\omega = 2\pi\nu \qquad \text{або} \qquad \omega = \frac{2\pi}{T},$$

де ν і T – частота і період коливань.

Швидкість і прискорення точки що коливається

$$v = \frac{dx}{dt} = -A\omega\sin\left(\omega t + \varphi\right), \qquad a = \frac{dv}{dt} = -A\omega^2\cos\left(\omega t + \varphi\right).$$

Період коливань тіла, яке підвішене на пружині (пружинний маятник)

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}},$$

де m – маса тіла; k – жорсткість пружини.

Період коливань математичного маятника

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}},$$

де l – довжина маятника; g – прискорення вільного падіння.

Період коливань фізичного маятника

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mga}},$$

де I – момент інерції тіла, що коливається щодо вісі коливань;
a – відстань центру мас маятника від вісі коливань.

Повна енергія матеріальної точки, яка здійснює гармонічні коливання,

$$W = \frac{mA^2\omega^2}{2}.$$

Приклад №1. Матеріальна точка масою m = 5 г виконує гармонійні коливання з частотою ν = 0,5 Гц. Амплітуда коливань A = 3 см. Визначити: 1) максимальну швидкість точки, 2) максимальну силу F_{max}, що діє на точку; 3) повну енергію W точки.

Дано:	СІ	Рішення:
A =3 см m=5 г ν = 0,5 Гц	0,03 м 5 10^{-3} кг	Складемо рівняння гармонічних коливань $x = A\cos(\omega t + \varphi)$, де $\omega = 2\pi\nu$, тобто для даної задачі $x = 0{,}03\cos(\pi t + \varphi)$.
v_{max} – ? F_{max} – ? W – ?		

Знайдемо вираз для швидкості:

$$v = \frac{dx}{dt} = -0.03\pi\sin(\pi t + \varphi).$$

Максимальна швидкість точки дорівнюватиме

$$v_{max} = 0{,}03\pi = 0{,}0952 \text{ м/с}.$$

Для визначення максимальної сили знайдемо спочатку вираз для прискорення точки:

$$a = \frac{dv}{dt} = -0.03\pi^2\cos(\pi t + \varphi),$$

тоді

$$F_{max} = ma_{max} = m \cdot 0{,}03\pi^2 = 5 \cdot 10^{-3} \cdot 0{,}03 \cdot 3{,}14^2 = 1{,}5 \cdot 10^{-3} (\text{Н}).$$

Повну енергію точки обчислимо за формулою:

$$W = \frac{mA^2\omega^2}{2} = \frac{mA^2(2\pi\nu)^2}{2} = 2mA^2(\pi\nu)^2.$$

Чисельно:

$$W = 2 \cdot 5 \cdot 10^{-3} \cdot 0{,}03^2 \cdot (3{,}14 \cdot 0{,}5)^2 = 22{,}1 \cdot 10^{-6} (\text{Дж}).$$

<u>Приклад №2.</u> Вантаж масою 1 кг, підвішений до пружини з жорсткістю 100 Н/м, робить коливання з амплітудою 10 см. Напишіть формулу $F_x(t)$, яка має залежність сили пружності від часу. Знайдіть найбільше значення сили пружності і значення сили пружності через 1/6 періоду.

Дано:	СІ	Розв'язання:
A = 10 см m=1 кг k = 100 Н/м $t_1 = T/6$	0,1 м	Для знаходження залежності $F_x(t)$ скористаємось законом Гука: $$F_x = -kx.$$
$F_x(t)$ – ? F_{max} – ? $F_x(t_1)$ – ?		Враховуючи, що $$x = A\sin\omega t \text{ і } \omega = \sqrt{\frac{k}{m}},$$ отримаємо

$$F_x = -kA\sin\sqrt{\frac{k}{m}}t. \qquad (1)$$

Тоді

$$F_x = -100 \cdot 0{,}1\sin\sqrt{\frac{100}{1}}t$$

або

$$F_x = -10\sin 10t.$$

Максимальне значення сили буде в тому випадку, якщо $\sin 10t$ буде максимальним, тобто таким, що дорівнює одиниці, отже,

$$F_{max} = 10 \text{ Н}.$$

Знайдемо $F_x(t_1)$ при $t_1 = T/6$. Для цього підставимо $t_1 = T/6$ в рівняння (1), ураховуючи, що $\omega = \frac{2\pi}{T}$.

В результаті отримаємо:

$$F_x = -10\sin\frac{2\pi}{T}\frac{T}{6} = -10\sin\frac{\pi}{3} = -5\sqrt{3}(\text{Н}).$$

Приклад №3. Людина масою m = 80 кг гойдається на гойдалках. Амплітуда її коливання A = 1 м. За Δt = 1 хв вона здійснює N = 15 коливань. Знайдіть кінетичну енергію при фазі $\Phi = \pi/3$ рад.

Дано:	СІ	Розв’язання:
A = 1 м		Для знаходження кінетичної енергії при фазі $\Phi = \pi/3$ рад скористаємося формулою $W_к = \dfrac{mv^2}{2}$.
m = 80 кг		
$\Phi = \pi/3$ рад		
Δt = 1 хв	60 с	
N = 15		
$W_к$ – ?		

Враховуючи, що при $x = A\sin\omega t$ швидкість визначається за формулою

$$v = \frac{dx}{dt} = A\omega\cos\omega t,$$

де $\Phi = \omega t$, отримаємо:

$$W_к = \frac{mA^2\omega^2\cos^2\Phi}{2}.$$

Для знаходження циклічної частоти скористаємося формулами:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad \text{і} \quad T = \frac{\Delta t}{N},$$

тоді $\omega = \dfrac{2\pi N}{\Delta t}$ і отже

$$W_к = \frac{2\pi^2 N^2 m A^2 \cos^2\Phi}{\Delta t^2}.$$

Підставимо чисельні дані

$$W_к = \frac{2\cdot 3{,}14^2\cdot 15^2\cdot 80\cdot 1^2\cdot\cos^2(\pi/3)}{60^2} = 25{,}6(\text{Дж}).$$

Приклад №4. Математичний маятник довжиною l_1 = 40 см і фізичний маятник у вигляді тонкого прямого стрижня довжиною l_2 = 60 см синхронно коливаються біля однієї і тієї ж горизонтальної вісі. Визначити відстань a центру мас стрижня від вісі коливань.

Дано:	СІ
l_1=40 см	0,4 м
l_2=60 см	0,6 м
a – ?	

Розв’язання:

Маятники коливаються синхронно, тобто

$$T_1 = T_2,$$

де T_1 – період коливань математичного маятника:

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{l_1}{g}}, \tag{1}$$

T_2 – період коливань фізичного маятника:

$$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mga}}, \tag{2}$$

де I – момент інерції фізичного маятника відносно вісі коливань;
m – маса.

За теоремою Штейнера $I = I_0 + ma^2$, де I_0 – момент інерції відносно вісі, що проходить крізь центр ваги, $I_0 = \frac{1}{12}ml_2^2$, тоді

$$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{1}{12}ml_2^2 + ma^2}{mga}} = 2\pi\sqrt{\frac{l_2^2 + 12a^2}{12ga}}. \tag{3}$$

Прирівнюючи праві частини (1) і (3), отримаємо:

$$2\pi\sqrt{\frac{l_1}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{l_2^2 + 12a^2}{12ga}}.$$

Після перетворень отримуємо рівняння

$$12a^2 - 12l_1a + l_2^2 = 0,$$

рішення якого після підстановки чисельних даних має вигляд:

$$a = \frac{6\cdot 0{,}4 \pm \sqrt{36\cdot 0{,}4^2 - 12\cdot 0{,}6^2}}{12} = 0{,}2 \pm 0{,}1 \text{ (м)}.$$

Отримаємо два рішення: a_1 = 0,1 м та a_2 = 0,3 м.

Практичне заняття 8. Згасаючі і змушені коливання. Механічні хвилі

Довідковий матеріал

1. Рівняння згасаючих коливань

$$x = A(t)\cos(\omega t + \varphi),$$

де $A(t)$ – амплітуда згасаючих коливань в момент часу t;

$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$, циклічна частота, де δ – коефіцієнт згасання.

Залежність амплітуди затухаючих коливань від часу

$$A(t) = A_0 e^{-\delta t},$$

де A_0 – амплітуда коливань в момент часу $t = 0$.

Логарифмічний декремент згасання

$$\theta = \ln\frac{A(t)}{A(t+T)} = \delta T.$$

2. Амплітуда змушених коливань

$$A = \frac{F_0}{m\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\delta^2\omega^2}},$$

де F_0 – амплітудне значення сили, що змушує, ω – її частота,

ω_0 – власна частота коливальної системи.

Резонансна частота і резонансна амплітуда змушених коливань

$$\omega_{рез} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2} \text{ і } A_{рез} = \frac{F_0}{2\delta m\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}.$$

3. Рівняння плоскої біжної хвилі

$$s(x,t) = A\cos(\omega t - kx).$$

Довжина хвилі і хвильове число

$$\lambda = vT,\ k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{v}.$$

<u>Приклад №1</u>. Амплітуда згасаючих коливань маятника за час $t_1 = 5$ хв зменшилася в два рази. За якийсь час t_2, рахуючи від початкового моменту, амплітуда зменшиться у вісім разів?

Дано:	СІ	Розв'язання:
$t_1 = 5$ хв	300 с	Амплітуда згасаючих коливань змінюється з часом за законом $$A(t) = A_0 e^{-\delta t},$$
$A_0/A_1 = 2$		
$A_0/A_2 = 8$		
t_2 – ?		де δ – коефіцієнт згасання,

звідки

$$A_0 / A(t) = e^{\delta t}.$$

Прологарифмуємо і підставимо моменти часу t_1 і t_2:

$$\ln(A_0 / A_1) = \delta t_1, \qquad (1)$$

$$\ln(A_0 / A_2) = \delta t_2. \qquad (2)$$

Розділивши (2) на (1), отримаємо:

$$\frac{\ln(A_0 / A_2)}{\ln(A_0 / A_1)} = \frac{t_2}{t_1},$$

звідки маємо:

$$t_2 = \frac{\ln(A_0 / A_2)}{\ln(A_0 / A_1)} t_1.$$

Чисельно

$$t_2 = \frac{\ln 8}{\ln 2} \cdot 300 = \frac{3 \cdot \ln 2}{\ln 2} \cdot 300 = 900(\text{с}) = 15\,(\text{хв}).$$

<u>Приклад №2</u>. Амплітуда коливань маятника довжиною $l = 1$ м за час $t = 10$ хв зменшилася в два рази. Визначити логарифмічний декремент коливань θ.

Дано:	СІ	Розв'язання:
$l = 1$ м		Логарифмічний декремент загасання θ
$t = 10$ хв	600 с	визначимо із співвідношення
$A_0/A = 2$		$$\theta = \ln \frac{A(t)}{A(t+T)} = \delta T,$$
θ – ?		

де δ – коефіцієнт згасання, T – період коливань математичного маятника:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Амплітуда згасаючих коливань змінюється в часі за законом

$$A(t) = A_0 e^{-\delta t},$$

звідки

$$\delta = \frac{\ln(A_0 / A)}{t}$$

І тоді отримаємо

$$\theta = \frac{2\pi}{t}\ln\frac{A_0}{A}\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Чисельний підрахунок:

$$\theta = \frac{2\cdot 3{,}14}{600}\ln 2\sqrt{\frac{1}{9{,}8}} = 2{,}3\cdot 10^{-2}.$$

<u>Приклад №3</u>. Підвіска автомобіля робить коливання при наявності амортизатора (демпфуючий пристрій) за законом: $x(t) = A_0 e^{-\delta t}\sin(\omega t)$ з амплітудою A_0 = 0,01 м, власною частотою ν_0 = 100 Гц і коефіцієнтом згасання δ = 0,5с$^{-1}$. Записати рівняння руху підвіски, яке здійснюється під дією сили, що змушує $F(t) = 10\sin(2\pi\cdot 50t)$. Знайти амплітуду змушених коливань підвіски, визначити резонансну частоту коливань, обчислити амплітуду при резонансі. Маса підвіски складає m = 5 кг.

Дано:	СІ	Розв'язання:
A_0 = 0,01 м ν_0 = 100 Гц δ = 0,5 с$^{-1}$ m = 5 кг $F(t) = 10\sin(2\pi\cdot 50t)$		Рівняння руху підвіски, що здійснюється під дією сили, що змушує, має вигляд $$x(t) = A\sin(\omega t + \varphi),$$ де $$A = \frac{F_0}{m\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\delta^2\omega^2}}.$$
A – ? $\nu_{рез}$ – ? $A_{рез}$ – ?		

Для визначення резонансних значень амплітуди і частоти скористаємося формулами:

$$\omega_{рез} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2},$$

$$A_{рез} = \frac{F_0}{2\delta m\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}},$$

де F_0 = 10 Н, $\omega_0 = 2\pi\nu_0$, $\omega = 2\pi \cdot 50\,с^{-1}$.

Знайдемо чисельні значення величин

$$A = \frac{10}{5\sqrt{\left((2\pi\cdot 100)^2 - (2\pi\cdot 50)^2\right)^2 + 4\cdot 0,5^2(2\pi\cdot 50)^2}} \approx 0,01\cdot 10^{-3}(м).$$

$$\nu_{рез} = \frac{\omega_{рез}}{2\pi} = \sqrt{(2\pi\cdot 100)^2 - 2\cdot 0,5^2}\ /\ 2\pi \approx 100(Гц).$$

$$A_{рез} = \frac{10}{2\cdot 0,5\cdot 5\sqrt{(2\pi\cdot 100)^2 - 0,5^2}} \approx 0,003(м).$$

<u>Приклад №4</u>. Визначити, на скільки резонансна частота відрізняється від частоти ν_0 = 1 кГц власних коливань системи, що характеризується коефіцієнтом загасання δ = 400 $с^{-1}$.

<u>Дано:</u>	СІ	<u>Розв'язання:</u>
ν_0= 1 кГц δ = 400 $с^{-1}$	10^3 Гц	Резонансна частота системи визначається
$\Delta\nu - ?$		$$\omega_{рез} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2},$$ де $\omega_0 = 2\pi\nu_0$ – власна циклічна частота системи.

Маємо

$$2\pi\nu_{рез} = \sqrt{4\pi^2\nu_0^2 - 2\delta^2} \text{ або } \nu_{рез} = \sqrt{\nu_0^2 - \frac{\delta^2}{2\pi^2}}.$$

Різниця частот буде мати вигляд

$$\Delta\nu = \nu_0 - \nu_{рез} = \nu_0 - \sqrt{\nu_0^2 - \frac{\delta^2}{2\pi^2}} = \nu_0\left(1 - \sqrt{1 - \frac{\delta^2}{2\pi^2\nu_0^2}}\right).$$

Чисельно

$$\Delta\nu = 10^3\left(1 - \sqrt{1 - \frac{400^2}{2\cdot 3,14^2\cdot 10^6}}\right) = 1(Гц)$$

Практичне заняття 9. Гідравліка

Довідковий матеріал

Тиск рідини

$$p = \frac{F}{S}$$

Гідростатичний тиск, який чиниться стовпом рідини висотою h і густиною ρ,

$$p = \rho g h.$$

Сила Архімеда

$$F_{А} = \rho g V,$$

де g – прискорення вільного падіння, V – об'єм зануреної частини тіла.

Рівняння нерозривності для нестисливої рідини в трубі змінного перерізу

$$S_1 v_1 = S_2 v_2 = \text{const},$$

де S_1 і S_2 – площі перерізу, v_1 і v_2 – швидкості течії рідини в відповідних точках перерізу.

Рівняння Бернуллі для ідеальної рідини

$$\frac{\rho v^2}{2} + \rho g h + p = \text{const},$$

де p – статичний тиск;

$\frac{\rho v^2}{2}$ – динамічний тиск; $\rho g h$ – гідростатичний тиск.

Для горизонтальної трубки струму ($h_1 = h_2$) рівняння Бернуллі має вигляд

$$\frac{\rho v^2}{2} + p = \text{const},$$

де $\frac{\rho v^2}{2} + p$ – повний тиск.

Число Рейнольдса

$$Re = \frac{\rho \cdot \bar{v} \cdot d}{\eta},$$

де η – кінематична в'язкість; $\bar{v}$ – середня за перерізом труби швидкість рідини; d – характерний лінійний розмір, наприклад, діаметр труби.

При Re ≤ 1000 течія ламінарна,

при Re ≥ 2300 течія турбулентна.

Приклад № 1. Визначте масу атмосфери Землі. Радіус Землі $R_з$ = 6400 км, атмосферний тиск p_0 = 760 мм.рт.ст.

Дано:	СІ	Розв'язання:
$R_З = 6400$ км	$R_З = 6,4 \cdot 10^6$ м	Тиск атмосфери на поверхні Землі дорівнює:
$p_0 = 760$ мм.рт.ст.	$p_0 = 10^5$ Па	$p_0 = \dfrac{m_{атм} \cdot g}{S}$, $S = 4\pi R_З^2$,
$m_{атм}$ –?		$p_0 = \dfrac{m_{атм} \cdot g}{4\pi R_З^2}$,
		де S – площа поверхні Землі.

Звідки маємо

$$m_{атм} = \frac{p_0 \cdot 4\pi \cdot R_З^2}{g}.$$

Обчислимо:

$$[m] = \frac{\text{Па} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{с}^2}{\text{м}} = \frac{\text{кг} \cdot \frac{\text{м}}{\text{с}^2} \text{с}^2}{\text{м}} = \text{кг}; \quad m_{атм} = \frac{10^5 \cdot 4 \cdot 3{,}14 \cdot \left(6,4 \cdot 10^6\right)^2}{9,8} = 5 \cdot 10^{18} (\text{кг}).$$

Приклад № 2. Шматок мармуру важить в повітрі 13,5 Н, а в гасі – 9,5 Н. Яким є об'єм гасу, що витіснений мармуром? (Густина гасу $\rho_к$ = 800кг/м^3, g = 10 м/с^2).

Дано:	Розв'язання:
p_1 = 13,5 Н	Вага шматка мармуру в повітрі (без урахування сили Архімеда)
p_2 = 9,5 Н	$p_1 = mg = \rho g V$.
$\rho_к$ = 800кг/м^3	Вага шматка мармуру в гасі
g = 10 м/с^2	$p_2 = mg - \rho_к g V$.
V – ?	

Спільне рішення отриманих рівнянь дає

$$p_2 = p_1 - \rho_к g V,$$

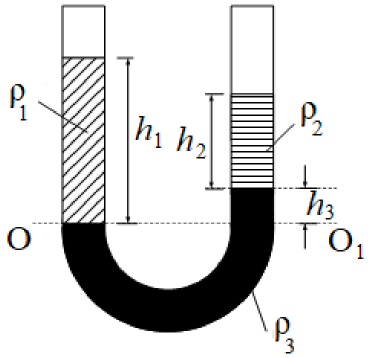
звідки

$$V = \frac{p_1 - p_2}{\rho_к g}.$$

Обчислення: $V = \dfrac{13,5 - 9.5}{800 \cdot 10} = 0,5 \cdot 10^{-3}$ (м^3)

Приклад №3. У сполучених посудинах знаходяться ртуть, вода і гас. Яка висота гасу в лівому коліні, якщо висота стовпа води в правому коліні 20 см і в лівому коліні рівень ртуті нижче, ніж у правому на 0,5 см?

Дано:	СІ	Розв'язання:
$\rho_1 = 800 \ ^{\text{кг}}/_{\text{м}^3}$		
$h_2 = 20$ см	$h_2 = 0{,}2$ м	
$\rho_2 = 1000 \ ^{\text{кг}}/_{\text{м}^3}$		
$\rho_3 = 13600 \ ^{\text{кг}}/_{\text{м}^3}$		
$h_3 = 0{,}5$ см	$h_3 = 0{,}005$ м	
$h_1 - ?$		



Оскільки рідини знаходяться в рівновазі в сполучених посудинах, то на рівні, нижче якого рідина є однорідною (лінія OO_1), тиск в лівому $p_л$ і правому $p_п$ колінах є однаковим: $p_л = p_п$.

На рівні OO_1 тиск в лівому коліні складається з зовнішнього тиску на гас (атмосферного тиску) і тиску стовпа гасу:

$$p_л = p_{атм} + \rho_1 g h_1 .$$

На цьому ж рівні тиск в правому коліні складається з зовнішнього, тиску стовпа води і тиску стовпа ртуті:

$$p_п = p_{атм} + \rho_2 g h_2 + \rho_3 g h_3 .$$

Оскільки $p_л = p_п$, то

$$p_{атм} + \rho_1 g h_1 = p_{атм} + \rho_2 g h_2 + \rho_3 g h_3 .$$

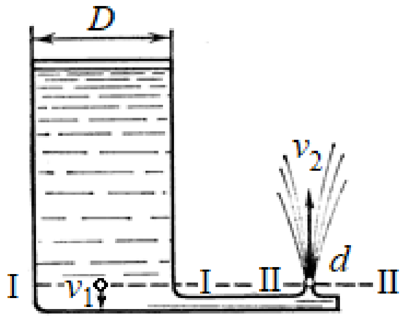
Після спрощення отримаємо:

$$h_1 = \frac{g(\rho_2 h_2 + \rho_3 h_3)}{g\rho_1} = \frac{\rho_2 h_2 + \rho_3 h_3}{\rho_1} .$$

Обчислення:

$$[h_1] = \frac{\frac{\text{кг}}{\text{м}^3}\cdot\text{м}}{\frac{\text{кг}}{\text{м}^3}} = \text{м}; \qquad h_1 = \frac{0{,}2\cdot 10^3 + 0{,}005\cdot 13600}{8\cdot 10^2} = 0{,}335\ \text{м}.$$

<u>Приклад №4</u>. Вода подається в фонтан з великого циліндричного бака і б'є з отвору II-II зі швидкістю v_2 = 12 м/с. Діаметр D бака дорівнює 2 м**,** діаметр d перерізу II-II дорівнює 2 см. Знайти: 1) швидкість v_1 зниження води в баку; 2) тиск p_1, під яким вода подається в фонтан; 3) висоту h_1 рівня води в баку і висоту h_2 струменя, що виходить з фонтану.

<u>Дано:</u>	СІ	<u>Рішення:</u>
v_2=12 м/с D = 2 м d = 2 см	 0,02 м	
v_1 – ? p_1 – ? h_1 –?		

1. Проведемо переріз II в баку на рівні перетину II-II фонтану. Так як площа S_1 перетину I-I багато більше площі S_2 перетину II-II, то висоту h_1 рівня води в баку можна вважати для малого проміжку часу постійної, а потік – сталим.

Для сталого потоку справедлива умова нерозривності струменя

$v_1S_1 = v_2S_2$, звідки $v_1 = v_2S_2/S_1$, або

$$v_1 = v_2(d/D)^2. \quad (1)$$

Підставивши в рівність (1) значення заданих величин і зробивши обчислення, знайдемо

$$v_1 = 0{,}0012 \text{ м/с}.$$

З такою ж швидкістю буде знижуватися рівень в баку.

2. Тиск p_1, під яким вода подається в фонтан, знайдемо з рівняння Бернуллі:

$$p_1 + \rho v_1^2/2 = p_2 + \rho v_2^2/2\,. \quad (2)$$

У разі горизонтальної трубки струму воно має вигляд

$$p_1 = \rho v_2^2/2 - \rho v_1^2/2 \quad (3)$$

Так як $v_1 << v_2$, то із рівності (3) маємо

$$p_1 = \rho v_2^2/2.$$

Після обчислень, зроблених за цією формулою, знайдемо

$$p_1 = 72 \text{ кПа}.$$

3. Висоту h_1 рівня води в баку знайдемо із співвідношення $p_1 = h_1\rho g$, звідки $h_1 = p_1/(\rho g)$.

Провівши обчислення за цією формулою, знайдемо

$$h_1 = 7{,}35 \text{ м}.$$

Знаючи швидкість v_2, з якою вода викидається фонтаном, знайдемо висоту h_2:

$$h_2 = v_2^2/2g = 7{,}35\text{м}.$$

Практичне заняття 10. Молекулярна будова речовини. Закони ідеальних газів

Довідковий матеріал

Кількість речовини тіла (системи)

$$\nu = \frac{N}{N_A},$$

де N – число структурних елементів (молекул, атомів, іонів і т.п.), що складають тіло (систему); N_A – стала Авогадро, $N_A=6{,}02\cdot10^{23}$ моль$^{-1}$.

Молярна маса речовини

$$M = m/\nu,$$

де m – маса однорідного тіла (системи); ν – кількість речовини.

Закон Бойля-Маріотта.

Для даної маси газу при постійній температурі добуток тиску газу на його об'єм є постійною величиною

$$pV = \text{cons} \quad (T = \text{cons};\ m = \text{const}),$$

де p – тиск, V – об’єм, T – термодинамічна температура, m – маса газу.

Закон Гей-Люссака.

Об’єм даної маси газу при постійному тиску змінюється лінійно з температурою

$$V = V_0(1+\alpha t)\ \ldots\ (p = \text{cons};\ m = \text{const}).$$

Закон Шарля.

Тиск даної маси газу при постійному обсязі змінюється лінійно з температурою

$$p = p_0(1+\alpha t) \quad (V = \text{cons};\ m = \text{const}),$$

Закон Авогадро.

Моль будь-яких газів при однакових температурах і тиску займає однаковий об'єм. При нормальних умовах (тиск $p_0=1{,}013\cdot10^5$ Па, температура $T_0=273$К) цей об'єм: $V_m = 22{,}4\cdot10^{-3}$ м^3/ моль.

Рівняння стану ідеального газу (рівняння Клапейрона-Менделєєва)

$$pV = \frac{m}{M}RT \quad \text{або} \quad pV = \nu RT,$$

де m – маса газу; M – молярна маса; R – універсальна газова стала;
T – термодинамічна температура; ν – кількість речовини.

Закон Дальтона

$$p = p_1+p_2+\ldots+p_k,$$

де p – тиск суміші газів; p_i – парціальний тиск i-ї компоненти суміші;
k – число компонентів суміші.

Приклад №1. Яка кількість речовини і скільки атомів міститься в залізній гирі масою 16 кг?

Дано:	СІ	Розв'язання:
m = 16 кг μ = 0,056 кг/моль		Для визначення кількості речовини скористаємося формулою $$M = \frac{m}{\nu},$$ звідки $\nu = \frac{m}{M}$.
N – ? ν – ?		

Чисельно

$$\nu = \frac{16}{0,056} = 285,7(\text{моль}).$$

Число атомів визначимо із співвідношення

$$\nu = N/N_A, \text{ так що } N = \nu \cdot N_A,$$

де N_A – стала Авогадро, $N_A = 6,02 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$.

Розрахунок:

N = 285,7 моль · $6,022 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$ = $1,72 \cdot 10^{26}$.

Приклад №2. Який об'єм займають 2 моль золота? Якою є маса одного атома?

Дано:	СІ	Розв'язання:
ν = 2 моль M = 0,197 кг/моль ρ = 19310 кг/м^3		Використовуючи довідкові дані, визначимо молярну масу M і густину ρ золота. Масу золота обчислимо за формулою $$m = M \cdot \nu,$$ чисельно
V – ?		

$$m = 0,197 \text{ кг/моль} \cdot 2 \text{ моль} = 0,394 \text{ кг}.$$

Знаючи густину і масу речовини, об'єм можна визначити за формулою

$$V = \frac{m}{\rho}.$$

Розрахунок

$$V = \frac{0{,}394\ \text{кг}}{19310\ \text{кг/м}^3} = 2{,}04\cdot10^{-5}\ \text{м}^3 \text{ або } V = 20{,}4\ \text{см}^3.$$

Масу одного атому обчислимо за формулою

$$m_0 = \frac{M}{N_A},$$

де $N_A = 6{,}02\cdot10^{23}$ моль$^{-1}$ – стала Авогадро.

Чисельно

$$m_0 = \frac{0{,}197\ \text{кг/моль}}{6{,}02\cdot10^{23}\ \text{моль}^{-1}} = 3{,}3\cdot10^{25}\ \text{кг}$$

<u>Приклад №3.</u> В балоні об’ємом V = 10 л знаходиться гелій під тиском p_1 = 1 МПа при температурі T_1 = 300 К. Після того як з балона було витрачено гелій масою m = 10 г, температура в балоні знизилася до T_2 = 290 К. Визначити тиск p_2 гелію, що залишився в балоні.

<u>Дано:</u>	СІ
V = 10 л	10^{-2} м^3
p_1 = 1МПа	10^6 Па
T_1 = 300 К	
m = 10 г	10^{-2} кг
T_2 = 290 К	
p_2 – ?	

<u>Розв’язання:</u>

Для вирішення завдання скористаємося рівнянням Клапейрона-Менделєєва, застосувавши його двічі до початкового і кінцевого станів газу.

$$p_1V = \frac{m_1}{M}RT_1, \qquad (1)$$

$$p_2V = \frac{m_1}{M}RT_2, \qquad (2)$$

де m_1 і m_2 – маси гелію в початковому і кінцевому стані,

R = 8,3 Дж/(моль К) – універсальна газова стала,

M = 0,002 кг/моль – молярна маса гелію.

Виразимо маси m_1 і m_2 гелію з виразу (1) і (2) відповідно:

$$m_1 = \frac{Mp_1V}{RT_1}; \quad m_2 = \frac{Mp_2V}{RT_2}$$

і віднімемо m_2 із m_1:

$$m = m_1 - m_2 = \frac{Mp_1V}{RT_1} - \frac{Mp_2V}{RT_2}.$$

Звідси знайдемо тиск:

$$p_2 = \frac{T_2}{T_1} p_1 - \frac{mRT_2}{MV}$$

Підставивши значення величин, отримаємо

$$p_2 = \frac{290}{300} 10^6 - \frac{10^{-2} \cdot 8{,}3 \cdot 290}{0{,}002 \cdot 10^{-2}} = 3{,}64 \cdot 10^5 (\text{ Па}).$$

<u>Приклад №4.</u> Знайти молярну масу $M_{сум}$ суміші кисню масою m_1 = 25 г і азоту масою m_2 = 75 г.

Дано:	СІ	Розв'язання:
m_1=25 г m_2=75 г	$25\ 10^{-3}$ кг $75\ 10^{-3}$ кг	Молярна маса суміші $M_{\text{сум}}$ є відношення маси суміші $m_{\text{сум}}$ до кількості речовини суміші $\nu_{\text{сум}}$, тобто
$M_{сум}$ – ?		$M_{\text{сум}}=m_{\text{сум}}/\nu_{\text{сум}}$. (1)

Маса суміші дорівнює сумі мас компонентів суміші $m_{\text{сум}} = m_1+m_2$. Кількість речовини суміші дорівнює сумі кількостей речовин компонентів.

Підставивши в формулу (1) вирази $m_{\text{сум}}$ і $\nu_{\text{сум}}$, отримаємо

$$M_{\text{сум}} = \frac{m_1 + m_2}{\frac{m_1}{M_1} + \frac{m_2}{M_2}},$$

де молярні маси M_1 кисню та M_2 азоту відповідно дорівнює:

$M_1 = 32 \cdot 10^{-3}$ кг/моль, $M_2=28 \cdot 10^{-3}$ кг/моль.

Підставимо значення величин і зробимо обчислення:

$$M_{\text{сум}} = \frac{25 \cdot 10^{-3} + 75 \cdot 10^{-3}}{\frac{25 \cdot 10^{-3}}{32 \cdot 10^{-3}} + \frac{75 \cdot 10^{-3}}{28 \cdot 10^{-3}}} = 28{,}9 \cdot 10^{-3} \text{ (кг/моль).}$$

Практичне заняття 11. Молекулярно-кінетична теорія газів

Довідковий матеріал

Концентрація частинок (молекул, атомів і т.п.) однорідної системи

$$n = \frac{N}{V},$$

де V – об'єм системи.

Основне рівняння кінетичної теорії газів

$$p = \frac{2}{3} n \langle \varepsilon_П \rangle,$$

де p – тиск газу; $<\varepsilon_п>$ – середня кінетична енергія поступального руху молекули.

Середня кінетична енергія, яка приходиться на одну ступінь свободи молекули

$$\langle \varepsilon_1 \rangle = \frac{1}{2} kT,$$

де k – стала Больцмана; T – термодинамічна температура.

Повна енергія молекули

$$\varepsilon = \frac{i}{2} kT,$$

де i – число ступенів свободи молекули.

Енергія поступального руху молекули

$$\varepsilon_{пост} = 3kT / 2$$

Енергія обертального руху молекули

$$\varepsilon_{об} = \frac{i-3}{2} kT$$

Залежність тиску газу від концентрації молекул і температури

$$p = nkT$$

Швидкості молекул з масою m_0:

середня квадратична

$$\langle v_{кв} \rangle = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}} \quad \text{або} \quad \langle v_{кв} \rangle = \sqrt{\frac{3RT}{M}}$$

середня арифметична

$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m_0}} \quad \text{або} \quad \langle v \rangle = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}$$

найбільш імовірна

$$v_{ім} = \sqrt{\frac{2kT}{m_0}} \quad \text{або} \quad v_{ім} = \sqrt{\frac{2RT}{M}}.$$

<u>Приклад №1</u>. Знайти середню кінетичну енергію однієї молекули аміаку NH_3 при температурі t = 27°C і середню енергію обертального руху цієї молекули при тій же температурі.

Дано:	СІ	Розв'язання:
t = 27°C	300 К	Середня повна енергія молекули визначається за формулою $\langle\varepsilon\rangle = \frac{i}{2}kT$, де i – число ступенів свободи молекули; k – стала Больцмана; T – термодинамічна температура газу: $T = t + 273$ К.
$\langle\varepsilon\rangle - ?$ $\langle\varepsilon_{об}\rangle - ?$		

Число ступенів свободи i чотириатомної молекули, якою є молекула аміаку, дорівнює 6.

Підставивши значення величин, отримуємо

$$\langle\varepsilon\rangle = \frac{6}{2}\cdot 1{,}38\cdot 10^{-23}\cdot 300 = 1{,}24\cdot 10^{-20} \text{ (Дж).}$$

Середня енергія обертального руху молекули визначається за формулою

$$\langle\varepsilon_{об}\rangle = \frac{i-3}{2}kT,$$

де число 3 означає число ступенів свободи поступального руху.
Підставимо значення величин і обчислимо:

$$\langle\varepsilon_{об}\rangle = \frac{6-3}{2}1{,}38\cdot 10^{-23}\cdot 300 = 6{,}21\cdot 10^{-21} \text{ (Дж).}$$

<u>Приклад №2</u>. Колба об'ємом V = 4 л містить деякий газ масою m = 0,6 г під тиском p = 200 кПа. Визначити середню квадратичну швидкість $\langle v_{кв} \rangle$ молекул газу.

Дано:	СІ	Розв'язання:
V=4 л	$4\ 10^{-3}$ м^3	Середня квадратична швидкість молекул газу
m=0,6 г	$6\ 10^{-4}$ кг	$$\langle v_{кв} \rangle = \sqrt{\frac{3RT}{M}}$$
p=200 кПа	$2\ 10^{5}$ Па	де R – газова стала;
$\langle v_{кв} \rangle$ –?		M – молярна маса газу;
		T – термодинамічна температура газу.

Запишимо рівняння Менделєєва-Клапейрона:

$$pV = \frac{m}{M} RT,$$

із якого отримаємо

$$\frac{RT}{M} = \frac{pV}{m},$$

таким чином

$$\langle v_{кв} \rangle = \sqrt{\frac{3pV}{m}}.$$

Обчислення

$$\langle v_{кв} \rangle = \sqrt{\frac{3 \cdot 2 \cdot 10^{5} \cdot 4 \cdot 10^{-3}}{6 \cdot 10^{-4}}} = 2000 \text{м/с}.$$

<u>Приклад №3</u>. Визначити середню кінетичну енергію і концентрацію молекул одноатомного газу, що знаходиться при нормальних умовах.

<u>Дано:</u>	СІ	<u>Розв'язання:</u>
$T_0 = 273\ K$		Середня кінетична енергія молекули ідеального газу визначається за формулою
$p_0 = 101{,}3$ кПа	101300 Па	$$\varepsilon = \frac{i}{2}kT,$$
$\langle\varepsilon\rangle$ –? n = ?		де для одноатомної молекули число ступенів свободи $i = 3$;
		$k = 1{,}38\cdot10^{-2т3}$ Дж/К – стала Больцмана;
		T – термодинамічна температура газу.

Тиск газу є пропорційним середній кінетичній енергії молекул

$$p = \frac{2}{3}n\langle\varepsilon\rangle,$$

Звідки визначимо концентрацію газу

$$n = \frac{3p}{2\langle\varepsilon\rangle}.$$

Підставляючи чисельні значення, отримаємо

$$\varepsilon = \frac{3}{2}\cdot 1{,}38\cdot 10^{-23}\cdot 273 = 5{,}65\cdot 10^{-21}\,(\text{Дж}),$$

$$n = \frac{3\cdot 101300}{2\cdot 5{,}65\cdot 10^{-21}} = 2{,}69\cdot 10^{25}\ (\text{м}^3).$$

<u>Приклад №4</u>. Визначити число молекул і масу кисню, що міститься в посудині об'ємом 2 л при нормальних умовах.

<u>Дано:</u>	СІ	<u>Розв’язання:</u>
V = 2 л M = 0,032 кг/моль T_0 = 273 K p_0 = 101,3 кПа	 101300 Па	Скористаємося залежністю тиску ідеального газу від концентрації молекул і температури у вигляді
N – ? m – ?		$$p = nkT,$$ де k = 1,38·10^{-23} Дж/К – стала Больцмана; T – термодинамічна температура газу.

Тоді концентрація газу визначиться у вигляді $n = \dfrac{p}{kT}$, а число частинок в заданому об’ємі

$$N = \frac{p}{kT}V.$$

При підстановці даних отримаємо

$$N = \frac{101300\ \text{Па} \cdot 2 \cdot 10^{-3} \text{м}^3}{1{,}38 \cdot 10^{-23}\ \text{Дж / К} \cdot 273\text{К}} = 5{,}38 \cdot 10^{22}\ \text{частинок}.$$

Масу газу визначимо за формулою

$$m = m_0 N,$$

де $m_0 = M/N_A$ – маса однієї молекули, N_A=6,02·10^{23} моль$^{-1}$ – стала Авогадро.

Остаточно

$$m = \frac{M}{N_A} N.$$

Знайдемо чисельне значення

$$m = \frac{0{,}032\text{кг/моль}}{6{,}02 \cdot 10^{23}\ \text{моль-1}} 5{,}38 \cdot 10^{22} = 2{,}9 \cdot 10^{-3}\ \text{кг}.$$

Практичне заняття 12. Елементи статистичної фізики

Довідковий матеріал

Розподіл Больцмана (розподіл частинок в силовому полі)

$$n = n_0 e^{-U/kT},$$

де n – концентрація частинок; U – їх потенціальна енергія;
n_0 – концентрація частинок в точках поля, k – стала Больцмана;
T – термодинамічна температура.

Барометрична формула (розподіл тиску в однорідному полі сили тяжіння)

$$p = p_0 e^{-mgh/kT} \quad \text{або} \quad p = p_0 e^{-Mgh/RT}$$

де p – тиск газу; m – маса частинки; M – молярна маса; h – координата (висота) точки по відношенню до рівня, який прийнятий за нульовий;
p_0 – тиск на цьому рівні; g – прискорення вільного падіння; R – молярна газова стала.

Розподіл Максвелла (розподіл молекул за швидкостями) визначає число молекул, швидкості яких знаходяться в межах від v до $v + dv$,

$$dN(v) = Nf(v)dv = 4\pi N\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-mv^2/2kT} v^2 dv,$$

де $f(v)$ – функція розподілу молекул за модулями швидкостей, що виражає відношення імовірності того, що швидкість молекули лежить в інтервалі від v до $v + dv$, до величини цього інтервалу, а також частинку числа молекул, швидкості яких лежать в зазначеному інтервалі; N – загальне число молекул; m – маса молекули.

Середнє число зіткнень, які долаються однією молекулою газу в одиницю часу,

$$\langle z \rangle = \sqrt{2}\pi d^2 n \langle v \rangle,$$

де d – ефективний діаметр молекули; n – концентрація молекул;
$\langle v \rangle$ – середня арифметична швидкість молекул.

Середня довжина вільного пробігу молекул газу

$$\langle l \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n}.$$

Явища переносу.

Імпульс (кількість руху), що переноситься молекулами з одного шару газу в інший через елемент поверхні,

$$dp = \eta \frac{dv}{dz} \Delta S dt,$$

де $\frac{dv}{dz}$ – градієнт швидкості течії його шарів; ΔS – площа елементу поверхні; dt – час переносу.

Динамічна в'язкість

$$\eta = \frac{1}{3} \rho \langle v \rangle \langle l \rangle,$$

де ρ – густина газу (рідини); $\langle v \rangle$ – середня арифметична швидкість хаотичного руху його молекул; $\langle l \rangle$ – їх середня довжина вільного пробігу.

Закон Ньютона

$$F = \frac{dp}{dt} = \eta \frac{dv}{dz} \Delta S,$$

де F – сила внутрішнього тертя між рухомими шарами газу.

Закон Фур'є

$$Q = -\lambda \frac{dT}{dx} \Delta S \Delta t,$$

де Q – теплота, що пройшла у вигляді теплопровідності через перетин площею ΔS за час Δt; $\frac{dT}{dx}$ – градієнт температури.

Теплопровідність (коефіцієнт теплопровідності) газу

$$\lambda = \frac{1}{3} c_V \rho \langle v \rangle \langle l \rangle,$$

де c_V – питома теплоємність газу при постійному об'ємі.

Закон Фіка

$$\Delta m = -D \frac{d\rho}{dx} \Delta S \Delta t,$$

де Δm – маса газу, перенесена в результаті дифузії через поверхню площею ΔS за час Δt; D – дифузія (коефіцієнт дифузії); $\frac{d\rho}{dx}$ – градієнт густини.

Дифузія (коефіцієнт дифузії): $D = \frac{1}{3} \langle v \rangle \langle l \rangle$.

<u>Приклад №1</u>. Маса m кожної з пилинок, зважених в повітрі, дорівнює 10^{-18} м Відношення концентрації n_1 пилинок на висоті h_1 = 1 м до концентрації n_0 їх на висоті h_0 = 0 дорівнює 0,787. Температура повітря T = 300 К. Знайти за цими даними значення постійної Авогадро N_A.

Дано:	СІ	Розв'язання:
m = 10^{-18} г h_1=1 м h_0=0 $\frac{n_1}{n_0}=0{,}787$ T=300 К	10^{-21} кг	Залежність концентрації частинок від висоти (розподіл Больцмана) має вигляд $n=n_0e^{-U/kT}$, (1) де $U=mgh$ – потенціальна енергія частинки; k – стала Больцмана; T – термодинамічна температура.
$N_A-?$		

З виразу (1) знайдемо

$$\frac{n_1}{n_0}= e^{-\frac{mgh_1}{kT}}.$$

Логарифмуючи, отримаємо

$$\ln\frac{n_0}{n_1}=\frac{mgh_1}{kT},$$

звідки

$$k=\frac{mgh_1}{\ln\frac{n_0}{n_1}\cdot T}.$$

Таким чином, стала Авогадро може бути обчислена за формулою:

$$N_A=\frac{R}{k}=\frac{R\ln\frac{n_0}{n_1}\cdot T}{mgh_1}.$$

Чисельно

$$N_A=\frac{8{,}3\cdot\ln\frac{1}{0{,}787}\cdot 300}{10^{-21}\cdot 9{,}8\cdot 1}=6\cdot 10^{23}(1/\text{моль}).$$

<u>Приклад №2</u>. Знаючи функцію розподілу молекул за швидкостями, вивести формулу найбільш імовірної швидкості $v_{\text{ім}}$.

<u>Розв'язання:</u>

Функція Максвелла розподілу молекул за швидкостями має вигляд

$$f(v) = \frac{dN(v)}{Ndv} = 4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-mv^2/2kT} v^2 , \qquad (1)$$

де m – маса однієї молекули, k – стала Больцмана,
T – термодинамічна температура.

Найбільш імовірна швидкість – це швидкість, при якій $f(v)$ має максимум. Для її знаходження візьмемо похідну від виразу (1) і прирівняємо її до нуля

$$\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \cdot \left(e^{-\frac{mv^2}{2kT}} \cdot 8\pi v - 4\pi v^2 e^{-\frac{mv^2}{2kT}} \cdot \frac{m}{2kT} \cdot 2v\right) = 0,$$

або

$$e^{-\frac{mv^2}{2kT}} \left(2 - \frac{mv}{kT}\right) v = 0,$$

Задовольняють цьому рівнянню значення $v = 0$ і $v = \infty$, які відповідають мінімумам $f(v)$. Таким чином, $v_{\text{ім}}$. знайдемо із співвідношення

$$2 - \frac{mv_{\text{ім}}^2}{kT} = 0 ,$$

тобто найбільш імовірна швидкість $v_{\text{ім}}$ визначиться виразом

$$v_{\text{ім}} = \sqrt{\frac{2kT}{m}} .$$

<u>Приклад №3</u>. Знайти середню довжину вільного пробігу $<l>$ молекул водню при тиску p = 0,1 Па і температурі T = 100 К.

Дано:	СІ	Розв’язання:
p=0,1 Па T=100 К		Середня довжина вільного пробігу молекул газу $\langle l \rangle = \dfrac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n}$.
$<l>$ – ?		де d – ефективний діаметр молекули газу (для водню – $d = 2{,}2\cdot 10^{-10}$ м); n – концентрація молекул газу.

Із співвідношення $p = kTn$ знаходимо

$$n = \frac{p}{kT}$$, де k – стала Больцмана

Тоді $$< l >= \frac{kT}{\sqrt{2}\pi d^2 p}.$$

Обчислення

$$< l >= \frac{1{,}38\cdot 10^{-23}\cdot 100}{\sqrt{2}\cdot 3{,}14\cdot (2{,}2\cdot 10^{-10})^2\cdot 0{,}1} = 6{,}4\cdot 10^{-2}$$ (м).

<u>Приклад №4</u>. Знайти середню довжину вільного пробігу $<l>$ молекул азоту за умови, що його динамічна в'язкість η=17 мкПа·с.

Дано:	СІ	Розв’язання:
η=17 мкПа·с	$17\cdot 10^{-6}$ Па·с	Скористаємося виразом для динамічної в'язкості $\eta = \dfrac{1}{3}\rho\langle v\rangle\langle l\rangle,$ (1)
$<l>$ – ?		.

де ρ – густина газу; $\langle v \rangle$– середня арифметична швидкість хаотичного руху його молекул; $\langle l \rangle$ – їх середня довжина вільного пробігу

Тоді

$$< l >= \frac{3\eta}{\rho\langle v\rangle}.$$

Для визначення густини газу застосуємо рівняння Менделєєва-Клапейрона

$$pV = \frac{m}{M}RT,$$

звідки

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{pM}{RT}. \tag{2}$$

Середня арифметична швидкість визначається за формулою

$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}. \tag{3}$$

Підставляючи (2) і (3) в (1), отримаємо

$$< l > = \frac{3\eta RT}{pM}\sqrt{\frac{\pi M}{8RT}} = \frac{3\eta}{p}\sqrt{\frac{\pi RT}{8M}},$$

чисельно

$$< l > = \frac{3 \cdot 17 \cdot 10^{-6}}{1{,}013 \cdot 10^{5}}\sqrt{\frac{3{,}14 \cdot 8{,}3 \cdot 273}{8 \cdot 28 \cdot 10^{-3}}} = 9 \cdot 10^{-8} (\text{м}).$$

Практичне заняття 13. Фізичні основи термодинаміки

Довідковий матеріал

Внутрішня енергія ідеального газу

$$U = N\langle\varepsilon\rangle \quad \text{або} \quad U = \nu C_V T,$$

де $\langle\varepsilon\rangle$ – середня кінетична енергія молекули; N – число молекул газу; ν – кількість речовини, C_V – молярна теплоємність при сталому об’ємі.

Зв’язок між молярною (C_m) і питомої (c) теплоємностями газу

$C_m = cM$, де M – молярна маса газу.

Молярні теплоємності при постійному обсязі і постійному тиску відповідно рівні

$$C_V = \frac{i}{2}R; \; C_p = \frac{i+2}{2}R,$$

де i – число ступенів свободи; R – універсальна газова стала.

Рівняння Майєра

$$C_p - C_V = R.$$

Робота, пов'язана зі зміною об’єму газу, в загальному випадку

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p\,dV,$$

де V_1 – початковий об’єм газу; V_2 – його кінцевий об’єм.

Робота ідеального газу:

а) при ізобарному процесі (p = const) $\quad A = p(V_2 - V_1)$;

б) при ізотермічному процесі (T = const) $\quad A = \frac{m}{M}RT\ln\frac{V_2}{V_1}$;

в) при адіабатичному процесі

$$A = \frac{m}{M}C_V\left(T_1 - T_2\right) \quad \text{або} \quad A = \frac{RT_1}{\gamma - 1}\frac{m}{M}\left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}\right],$$

де T_1 – початкова температура газу; T_2 – його кінцева температура.

Рівняння Пуассона (рівняння газового стану при адіабатному процесі)

$$pV^{\gamma} = \text{const}.$$

Показник адіабати

$$\gamma = \frac{C_p}{C_V} \quad \text{або} \quad \gamma = \frac{i+2}{2}.$$

<u>Приклад №1</u>. Знайти внутрішню енергію двоатомних газу, що знаходиться в посудині об'ємом $V = 2$ л під тиском $p = 150$ кПа.

Дано:	СІ	Розв'язання:
$V = 2$ л $p = 150$ кПа $i = 5$	$2\cdot10^{-3}$ м$^{-3}$ $1{,}5\cdot10^{5}$ Па	Внутрішня енергія ідеального газу визначається за формулою $U = \nu C_V T$, де ν – кількість речовини, C_V – молярна теплоємність при постійному об'ємі: $C_V = \frac{i}{2}R$
γ – ?		

Для визначення кількості речовини і температури скористаємося рівнянням Менделєєва-Клапейрона у вигляді

$$pV = \nu RT, \quad \text{тобто} \quad \nu T = pV/R.$$

Тоді внутрішня енергія визначається у вигляді

$$U = \nu C_V T = pVC_V / R$$

або

$$U = pVC_V / R = pVi/2.$$

Знайдемо чисельне значення:

$$U = 1{,}5\cdot10^{5}\cdot2\cdot10^{-3}\cdot5/2 = 750(\text{Дж}).$$

Приклад №2. Різниця питомих теплоємностей $c_p - c_V$ деякого двоатомного газу дорівнює 260 Дж/(кг·К). Знайти молярну масу M газу, та його питомі теплоємності c_V і c_p.

Дано:	СІ	Розв'язання:
$c_p - c_V$ = 260 Дж/(кг·К) i = 5 R = 8,3 Дж/(моль·К)		Питомі теплоємності ідеальних газів пов'язані з молярними теплоємностями виразами
M – ? c_V – ? c_p – ?		$$C_V = c_V M, \quad C_p = c_p M,$$

де

$$C_V = \frac{i}{2}R; \; C_p = \frac{i+2}{2}R.$$

Тоді

$$c_V = \frac{iR}{2M}; \; c_p = \frac{(i+2)R}{2M}. \qquad (1)$$

Зоставимо різницю:

$$c_p - c_V = \frac{(i+2)R}{2M} - \frac{iR}{2M} = \frac{R}{M},$$

звідки

$$M = R/c_p - c_V.$$

Чисельно

$$M = 8{,}3/260 = 0{,}032 \text{ (кг/моль)}.$$

Знайдемо питомі теплоємності, підставляючи знайдене значення молярної теплоємності в вирази (1):

$$c_V = \frac{5 \cdot 8.3}{2 \cdot 0{,}032} = 650\left(\frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}\right);$$

$$c_p = \frac{(5+2) \cdot 8{,}3}{2 \cdot 0{,}032} = 910\left(\frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}\right).$$

Приклад №3. Азот масою m = 2 г, що має температуру T_1 = 300 К, був адіабатно стиснутий таким чином, що його об’єм зменшився в n = 10 разів. Визначити кінцеву температуру T_2 газу і роботу A стискання.

Дано:	СІ	Розв’язання:
m=2 г T_1=300 K n= V_1/V_2 = 10	$2\cdot10^{-3}$кг	При адіабатному процесі температура і об’єм в початковому і кінцевому стані пов’язані співвідношенням: $$\frac{T_2}{T_1}=\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}, \qquad (1)$$
T_2 – ? A – ?		

де γ – показник адіабати $\gamma=\frac{i+2}{2}$, i – число ступенів свободи (для двоатомної молекули азоту i = 5), тобто $\gamma=\frac{5+2}{2}=1{,}4.$

Із (1) знаходимо

$$T_2=T_1\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1},$$

чисельно

$$T_2=300\cdot(10)^{1{,}4-1}=754(K).$$

Роботу газу при адіабатному процесі обчислимо за формулою

$$A=\frac{m}{M}C_V\left(T_1-T_2\right),$$

де $C_V=\frac{i}{2}R$ – молярна теплоємність при сталому об’ємі;

$M = 28\cdot10^{-3}$ кг/моль – молярна маса азоту;

R = 8,3 Дж/(моль·К) – універсальна газова стала.

Чисельне значення роботи газу:

$$A=\frac{2\cdot10^{-3}}{28\cdot10^{-3}}\frac{5}{2}\cdot8{,}3\cdot(300-754)=-677(\text{Дж}).$$

Зовнішні сили при стисненні газу здійснюють роботу

$$A_{зовн} = -A = 677 \text{ Дж}.$$

<u>Приклад №4</u>. Знайти показник адіабати γ для суміші газів, яка містить гелій масою m_1 = 10 г і водень масою m_2 = 4 г.

<u>Дано:</u>	СІ	<u>Розв'язання:</u>
$m_1 = 10$г m_2=4 г M_1= 4 10^{-3} кг/моль M_2= 2 10^{-3} кг/моль $i_1 = 3$ $i_2 = 5$	10^{-2}кг $4\cdot10^{-3}$кг	Показник адіабати за визначенням $\gamma = c_p/c_V$, де c_p і c_V – питомі теплоємності при постійному тиску і постійному об'ємі відповідно. Для суміші газів маємо $\gamma = c_{p\text{сум}}/c_{V\text{сум}}$.
γ – ?		

З порівняння виразів для кількості теплоти для нагрівання суміші

$$Q = c_{\text{см}}(m_1 + m_2)\Delta T \quad \text{і} \quad Q = (c_1 m_1 + c_2 m_2)\Delta T$$

знайдемо питому теплоємність суміші через теплоємності гелію (c_1) і водню (c_2) для постійного об'єму (V = const):

$$c_{V\text{см}} = \frac{c_{V1}m_1 + c_{V2}m_2}{m_1 + m_2}$$

і для постійного тиску (p = const):

$$c_{p\text{см}} = \frac{c_{p1}m_1 + c_{p2}m_2}{m_1 + m_2}$$

Визначимо питомі теплоємності для кожного газу

$$c_{V1} = \frac{i_1 R}{2M_1}; \qquad c_{V2} = \frac{i_2 R}{2M_2};$$

$$c_{p1} = \frac{(i_1+2)R}{2M_1}; \qquad c_{p2} = \frac{(i_2+2)R}{2M_2}.$$

Таким чином, показник адіабати дорівнює

$$\gamma = \frac{c_{p\text{см}}}{c_{V\text{см}}} = \frac{(i_1+2)\frac{m_1}{M_1} + (i_2+2)\frac{m_2}{M_2}}{i_1\frac{m_1}{M_1} + i_2\frac{m_2}{M_2}}.$$

$$\gamma = \frac{(3+2)\cdot\frac{10^{-3}}{4\cdot10^{-3}} + (5+2)\cdot\frac{4\cdot10^{-3}}{2\cdot10^{-3}}}{3\cdot\frac{10^{-3}}{4\cdot10^{-3}} + 5\cdot\frac{4\cdot10^{-3}}{2\cdot10^{-3}}} = 1{,}51.$$

Практичне заняття 14. Закони термодинаміки

Довідковий матеріал

Перший початок термодинаміки в загальному випадку:

$$Q = \Delta U + A,$$

де Q – кількість теплоти, передана газу; ΔU – зміна його внутрішньої енергії; A – робота, що здійснюються газом проти зовнішніх сил;

а) при ізобарному процесі

$$Q = \Delta U + A = \frac{m}{M} C_V \Delta T + \frac{m}{M} R\Delta T = \frac{m}{M} C_p \Delta T;$$

б) при ізохорному процесі ($A = 0$)

$$Q = \Delta U = \frac{m}{M} C_V \Delta T;$$

в) при ізотермічному процесі ($\Delta U = 0$)

$$Q = A = \frac{m}{M} RT \ln \frac{V_2}{V_1};$$

г) при адіабатному процесі ($Q = 0$)

$$A = -\Delta U = -\frac{m}{M} C_V \Delta T.$$

Коефіцієнт корисної дії (ККД) циклу в загальному випадку:

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1},$$

де Q_1 – кількість теплоти, отримана робочим тілом (газом) від нагрівача;
Q_2 – кількість теплоти, передана робочим тілом охолоджувачу.

ККД циклу Карно

$$\eta = \frac{A}{Q_1} \quad \text{або} \quad \eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1},$$

де A – робота, яка здійснена газом, T_1 – температура нагрівача;
T_2 – температура охолоджувача.

Зміна ентропії

$$\Delta S = \int_A^B \frac{dQ}{T},$$

де A і B – межі інтегрування, що відповідають початковому і кінцевому станам системи.

Формула Больцмана

$$S = k \cdot \ln W,$$

де S – ентропія системи; W – термодинамічна імовірність.

<u>Приклад №1</u>. Кисень нагрівається при постійному тиску p = 80 кПа. Його об’єм збільшується від V_1 = l м^3 до V_2=3 м^3. Визначити:
1) зміну ΔU внутрішньої енергії кисню; 2) роботу A, яка виконана ним при розширенні; 3) кількість теплоти Q, яка передана газу.

Дано:	СІ	Розв’язання:
P = 80 кПа V_1 = l м^3 V_2 = 3 м^3	$8\cdot10^4$ Па	Робота розширення газу при ізобарному процесі $A = p(V_2 - V_1)$. (1) Чисельно $A = 8 \cdot 10^4(3 - 1) = 1{,}6 \cdot 10^5$ (Дж).
ΔU – ? A – ? Q – ?		Зміну ΔU внутрішньої енергії газу

обчислимо за формулою:

$$\Delta U = \frac{i}{2}\frac{m}{M}R\Delta T, \qquad (2)$$

де i – число ступенів свободи газу (кисень – двоатомний газ, i = 5);

R – газова стала; m – маса газу;

M – молярна маса;

$\Delta T = T_2 - T_1$ – зміна температури газу.

Для визначення зміни температури скористаємося рівнянням Менделєєва-Клапейрона для початкового і кінцевого стану газу:

$$pV_1 = \frac{m}{M}RT_1, \qquad (3)$$

$$pV_2 = \frac{m}{M}RT_2. \qquad (4)$$

Віднімаючи (3) з (4), отримуємо

$$p(V_2 - V_1) = \frac{m}{M}R(T_2 - T_1), \text{ або } \frac{m}{M}R\Delta T = p(V_2 - V_1).$$

Підставимо отриманий вираз в (2) і маємо зміну внутрішньої енергії газу в вигляді

$$\Delta U = \frac{i}{2}p(V_2 - V_1).$$

Підставимо чисельні значення

$$\Delta U = \frac{5}{2}\cdot 8\cdot 10^4\cdot(3-1) = 4\cdot 10^5 (\text{Дж}).$$

Відповідно до першого початку термодинаміки, кількість теплоти Q, що отримана газом, дорівнює сумі роботи A і зміни внутрішньої енергії ΔU:

$$Q = A + \Delta U\ .$$

Чисельно:

$$Q = 1{,}6 \cdot 10^5 + 4 \cdot 10^5 = 5{,}6 \cdot 10^5 (\text{Дж}).$$

<u>Приклад №2</u>. Ідеальний газ, що здійснює цикл Карно, 2/3 кількості теплоти Q_1, яка одержана від нагрівача, віддає охолоджувачу. Температура T_2 охолоджувача дорівнює 280 К. Визначити температуру T_1 нагрівача.

Дано:	СІ
Q_2 = 2/3 Q_1	
T_2 = 280 К	
T_1 – ?	

Розв'язання:

Скористаємося двома формулами для визначення ККД циклу Карно:

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} \qquad (1)$$

і

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1}\ , \qquad (2)$$

де Q_1 – кількість теплоти, отримана газом від нагрівача,
Q_2 – кількість теплоти, передана охолоджувачу.

Прирівнюємо праві частини виразу (1) і (2), отримаємо

$$\frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}\ ,$$

тоді

$$\frac{Q_2}{Q_1} = \frac{T_2}{T_1},$$

звідки

$$T_1 = Q_1 \frac{T_2}{Q_2} = \frac{Q_1 \cdot 280}{\frac{2}{3} Q_1} = 420(\text{К})\ .$$

<u>Приклад №3</u>. Визначити зміну ΔS ентропії при ізотермічному розширенні кисню масою m = 10 г от об’єму V_1 = 25 л до об’єму V_2 = 100 л.

Дано:	СІ	Розв’язання:
m = 10 г	10^{-2} кг	Скористаємося загальною формулою для зміни ентропії
V_1 = 25 л	$25\cdot10^{-3}$ м^3	$$\Delta S = \int_1^2 \frac{dQ}{T}.$$
V_2 = 100 л	$100\cdot10^{-3}$ м^3	
$M = 32\cdot10^{-3}$ кг/моль		
T = const		
ΔS – ?		

Так як процес ізотермічний, то в загальному виражені ентропії температуру виносять за знак інтеграла. Виконавши це, отримаємо

$$\Delta S = \frac{1}{T}\int_{V_1}^{V_2} dQ = \frac{Q}{T}.$$

Кількість теплоти Q, отримане газом, знайдемо за першим початком термодинаміки: $Q = \Delta U + A$. Для ізотермічного процесу $\Delta U = 0$, тобто, $Q = A$, а робота A для цього процесу визначиться за формулою

$$A = \frac{m}{M} RT \ln\frac{V_2}{V_1}.$$

Таким чином

$$\Delta S = \frac{m}{M} R \ln\frac{V_2}{V_1}.$$

Підставивши чисельні значення, проведемо обчислення, отримаємо

$$\Delta S = (10\cdot10^{-3}/(32\cdot10^{-3}))\cdot 8{,}31\ \ln(100\cdot10^{-3}/(25\cdot10^{-3}))=3{,}60\ (Дж/К).$$

Приклад №4. В результаті ізохоричного нагрівання водню масою $m = 1$ г тиск p газу збільшився в два рази. Визначити зміну ΔS ентропії газу.

Дано:	СІ	Розв'язання:
$m = 1$ г	10^{-3} кг	Скористаємося загальною формулою для зміни ентропії
$p_2/p_1 = 2$		$$\Delta S = \int_1^2 \frac{dQ}{T}. \quad (1)$$
$M = 2\cdot10^{-3}$ кг/моль		
$V = \text{const}$		
ΔS – ?		

Для ізохорного процесу кількість теплоти визначається за формулою:

$$dQ = dU = \frac{m}{M} C_V dT, \quad (2)$$

де $C_V = \frac{i}{2} R$ – молярна теплоємність, $i = 5$ – число ступенів свободи для двоатомної молекули водню.

Підставимо вираз (2) під інтеграл формули (1) і проведемо інтегрування

$$\Delta S = \int_{p_1}^{p_2} \frac{i}{2} \nu R \frac{dT}{T} = \frac{i}{2} \nu R \ln \frac{p_2}{p_1}.$$

Проведемо розрахунок, враховуючи, що число молей $\nu = m/M$, а універсальна газова стала $R = 8{,}3$ Дж/(моль·К):

$$\Delta S = \frac{i}{2} \frac{m}{M} R \ln \frac{p_2}{p_1} = \frac{5}{2} \frac{10^{-3}}{2\cdot10^{-3}} \cdot 8{,}3 \cdot \ln 2 = 7{,}2 (\text{Дж/К}).$$

Практичне заняття 15. Реальні гази. Рідини

Довідковий матеріал

Рівняння Ван-дер-Ваальса для одного моля газу

$$\left(p+\frac{a}{V_m^{\,2}}\right)(V_m-b)=RT,$$

для будь-якої кількості речовини ν газу

$$\left(p+\frac{\nu^2 a}{V^2}\right)(V-\nu b)=\nu RT,$$

де a і b – сталі Ван-дер-Ваальса (розраховані на один моль газу); V – об’єм газу; V_m – молярний об’єм; p – тиск газу на стінки посудини.

Внутрішній тиск, обумовлений силами взаємодії молекул,

$$p'=\frac{a}{V_m^2}, \quad \text{або} \quad p'=\nu^2\frac{a}{V^2}.$$

Зв'язок критичних параметрів – об’єму, тиску і температури газу із сталими a та b Ван-дер-Ваальса:

$$V_{m\,кр}=3b;\quad p_{кр}=\frac{a}{27b^2};\quad T_{кр}=\frac{8a}{27Rb}.$$

Коефіцієнт поверхневого натягу

$$\sigma=F/l$$

де F – сила поверхневого натягу, яка діє на контур l, що обмежує поверхню рідини, або

$$\sigma=\Delta W/\Delta S,$$

де ΔW – зміна вільної енергії поверхневої плівки рідини, пов'язана зі зміною площі ΔS поверхні цієї плівки.

Формула Лапласа в загальному випадку

$$p=\sigma\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right),$$

де p – тиск, що створюється зігнутої поверхнею рідини; R_1 і R_2 – радіуси кривизни двох взаємно перпендикулярних перетинів поверхні рідини.

<u>Приклад №1</u>. В сосуді місткістю $V = 0{,}3$ л знаходиться вуглекислий газ, що містить кількість речовини $\nu = 1$ моль при температурі $T = 300$ К. Визначити тиск p газу: 1) за рівнянням Менделєєва-Клапейрона; 2) за рівнянням Ван-дер-Ваальса.

Дано:	СІ	Розв'язання:
$V = 0{,}3$ л	$3\cdot10^{-4}$ м^3	1) Рівняння Менделєєва-Клапейрона має вигляд $$pV = \frac{m}{M}RT$$
$\nu = 1$ моль		
$T = 300$ К		
CO_2		
p – ?		

враховуючи, що $\nu = \dfrac{m}{M}$, отримаємо

$$pV = \nu RT,$$

Звідки знайдемо тиск

$$p = \frac{\nu}{V}RT.$$

Чисельно

$$p = \frac{1}{3\cdot10^{-4}}8{,}3\cdot300 = 8{,}3\cdot10^{6}\,(\text{Па}).$$

2) Рівняння Ван-дер-Ваальса для одного моля газу має вигляд

$$\left(p + \frac{a}{V_m{}^2}\right)(V_m - b) = RT,$$

де для вуглекислого газу (із таблиць) $a = 0{,}361$ Н·м^4/моль^2, $b = 4{,}28\cdot10^{-4}$ м^3/моль.

Виразимо з даного рівняння тиск у вигляді

$$p = \frac{RT}{(V_m - b)} - \frac{a}{V_m{}^2},$$

де $V_m = V$ – об'єм одного моля газу.

Отримаємо чисельне значення тиску

$$p = \frac{8{,}3\cdot300}{(3\cdot10^{-4} - 4{,}28\cdot10^{-5})} - \frac{0{,}361}{(3\cdot10^{-4})^2} = 5{,}68\cdot10^{6}\,(\text{Па}).$$

<u>Приклад №2</u>. Обчислити постійні a та b в рівнянні Ван-дер-Ваальса для азоту, якщо відомі критичні температури $T_{кр}$=126 К і тиск $p_{кр}$=3,39 МПа.

Дано:	СІ	Розв’язання:
$T_{кр}$=126 К $p_{кр}$=3,39 МПа	 $3{,}39\cdot10^6$ Па	Сталі a та b в рівнянні Ван-дер-Ваальса для реального газу пов'язані з критичними параметрами наступними співвідношеннями:
a – ? b – ?		$p_{кр}=\dfrac{a}{27b^2}$, (1) $T_{кр}=\dfrac{8a}{27Rb}$. (2)

Із системи (1) – (2) знайдемо

$$a=\frac{27}{64}\frac{T_{кр}{}^2R^2}{p_{кр}};\quad [a]=\frac{К^2\cdot Дж^2}{моль^2\cdot К^2\cdot Па}=\frac{Н^2\cdot м^2\cdot м^2}{моль^2\cdot Н}=\frac{Н\cdot м^4}{моль^2},$$

$$b=\frac{T_{кр}R}{8p_{кр}};\quad [b]=\frac{К\cdot Дж\cdot м^2}{моль\cdot К\cdot Н}=\frac{Н\cdot м\cdot м^2}{моль\cdot Н}=\frac{м^3}{моль}.$$

Чисельно

$$a=\frac{27}{64}\frac{126^2\cdot8{,}3^2}{3{,}39\cdot10^6}=0{,}136(\frac{Н\cdot м^4}{моль^2}),$$

$$b=\frac{126\cdot8{,}3}{8\cdot3{,}39\cdot10^6}=3{,}86\cdot10^{-5}(\frac{м^3}{моль}).$$

<u>Приклад №3</u>. Яку роботу A треба зробити, щоб, мильна бульбашка, яка видувається, збільшилася в діаметрі від d_1 = 1 см до d_2 = 2 см? Вважати процес ізотермічним.

Дано:	СІ	Розв’язання:
d_1=1 см d_2=2 см T = const	10^{-2} м $2\cdot10^{-2}$ м	Робота, яку потрібно зробити, щоб розтягуючи плівку збільшити її поверхню на площу ΔS виражається формулою
A – ?		$A=\sigma\Delta S=\sigma(S_2-S_1)$

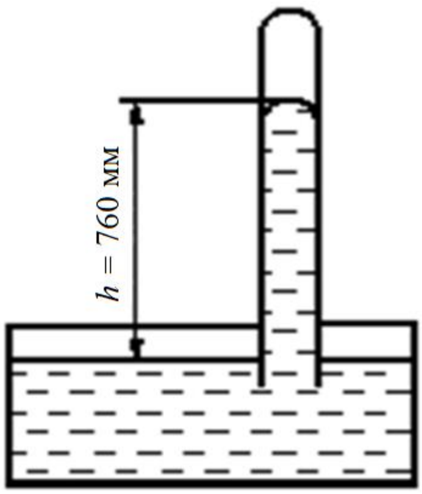
(коефіцієнт поверхневого натягу для мильної води $\sigma = 4 \cdot 10^{-2}$ Н/м). Враховуючи, що S_2 і S_1 – загальна поверхня двох сферичних поверхонь плівки мильної бульбашки відповідно в кінцевому і початковому стані, отримаємо

$$A = \sigma(2\pi d_2^2 - 2\pi d_1^2) = 2\pi\sigma(d_2^2 - d_1^2).$$

Чисельно

$$A = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 4 \cdot 10^{-2}(4 \cdot 10^{-4} - 10^{-4}) = 75 \cdot 10^{-6}(\text{Дж}).$$

<u>Приклад №4</u>. Діаметр d каналу скляної трубки чашкового ртутного барометра дорівнює 5 мм. Яку поправку Δp потрібно вводити в відліки по цьому барометру, щоб отримати правильне значення атмосферного тиску?

Дано:	СІ	Розв'язання:
d =5 мм	$5 \cdot 10^{-3}$ м	
Δp – ?		

Помилка в вимірі тиску обумовлена Лапласовим тиском в капілярі

$$\Delta p = \frac{2\sigma}{R},$$

де σ – коефіцієнт поверхневого натягу (для ртуті σ = 0,5 Н/м),
$R = d/2$ – радіус капіляру.
Тоді

$$\Delta p = \frac{4\sigma}{d}.$$

Чисельний розрахунок

$$\Delta p = \frac{4 \cdot 0{,}5}{5 \cdot 10^{-3}} = 400(\text{Па}).$$

Задачі для самостійного рішення

Практичне заняття 1.

1. Три чверті свого шляху автомобіль пройшов зі швидкістю v_1 = 60 км/год, решту шляху – зі швидкістю v_2 = 80 км/год. Яка середня шляхова швидкість <v> автомобіля?

2. Три чверті свого часу автомобіль пройшов зі швидкістю v_1 = 60 км/год, решту шляху – зі швидкістю v_2 = 80 км год. Яка середня шляхова швидкість <v> автомобіля?

3. Рух двох матеріальних точок виражається рівняннями $x_1 = A_1+B_1t+C_1t^2$, $x_2 = A_2+B_2t+C_2t^2$, де A_1 = 20 м, A_2 = 2 м, B_1=B_2=2 м/с, C_1 = – 4 м/с^2, C_2=0,5 м/с^2. В який момент часу t швидкості цих точок будуть однаковими? Визначити швидкості v_1 і v_2 та прискорення a_1 і a_2 точок в цей момент.

4. Дві матеріальні точки рухаються відповідно до рівнянь: $x_1=A_1t+B_1t^2+C_1t^3$, $x_2=A_2t+B_2t^2+C_2t^3$, де A_1 = 4 м/с, B_1 = 8 м/с^2, C_1 = – 16 м/с^3, A_2 = 2 м/с, B_2 = – 4 м/с^2, C_2 = 1м/с^3. В який момент часу t прискорення цих точок будуть однакові? Знайти швидкості v_1 і v_2 точок в цей момент.

5. Камінь кинули вертикально вгору з початковою швидкістю v_0 = 20 м/с. Через якийсь час камінь буде знаходитися на висоті h = 15 м? Знайти швидкість v каменю на цій висоті. Опором повітря знехтувати, прийняти g = 10 м/с^2.

6. Точка рухається по прямій. Цей рух заданий рівнянням $x = At+Bt^2$, де A = 2 м/с, B = – 0,5 м/с^2. Визначити середню шляхову швидкість $\langle v \rangle$ руху точки в інтервалі часу від t_1 = l с до t_2 = 3 с.

7. Рух точки в інтервалі часу від $R = 4$ м задано рівнянням $S = A+Bt+Ct^2$, де A = 10 м, B = –2 м/с, C = 1 м/с^2. Знайти тангенціальне a_τ, нормальне a_n і повне a прискорення точки в момент часу t = 2 с.

8. По дузі кола радіусом R = 10 м рухається точка. В деякий момент часу нормальне прискорення точки a_n = 4,9 м/с^2; в цей момент вектори повного і нормального прискорень утворюють кут φ = 60°. Знайти швидкість v і тангенціальне прискорення точки.

Практичне заняття 2.

1 Трекова модель автомобіля обертається на прив'язі з частотою $\nu_0 = 50$ Гц. Після припинення тяги модель, зробивши N = 500 обертів, зупинилась. Нехтуючи власними розмірами і масою моделі автомобіля, визначити її початкову частоту обертання – ω_0 і кінцевий кут повороту – φ_k, якщо вважати, що гальмування є рівносповільненим.

2. Колесо обертається з кутовим прискоренням ε = 2 рад/с^2. Через час

t = 0,5 с після початку руху повне прискорення колеса a = 14,6 см/с^2. Знайти радіус колеса.

3. Знайти кутову швидкість ω: а) добового обертання Землі; б) годинникової стрілки на годиннику; в) хвилинної стрілки на годиннику.

4. Знайти кутову ω і лінійну v швидкості штучного супутника Землі, що рухається по круговій орбіті з періодом обертання T = 88 хв. Відомо, що його орбіта розташована на відстані h = 200 км від поверхні Землі.

5. Знайти кутове прискорення ε колеса, якщо відомо, що через час t =1 с після початку руху вектор повного прискорення a точки, що лежить на ободі, становить кут φ = 60° з вектором її лінійної скорості v.

6. Колесо радіусом R = 5 см обертається так, що залежність кута повороту радіуса колеса від часу дається рівнянням $\varphi(t) = A+B\cdot t+C\cdot t^2+ D\cdot t^3$, де D = 1 рад/с^3. Для точок, що лежать на ободі колеса знайти приріст модуля тангенціального прискорення Δa_τ за одиницю часу.

7. Знайти радіус R колеса, що обертається, якщо відомо, що лінійна швидкість точки, яка лежить на ободі v_1 в 2,5 рази більше лінійної швидкості v_2 точки, яка лежить на відстані r = 5 см ближче до вісі колеса.

Практичне заняття 3.

1. Підвішене до динамометру тіло масою m = 2 кг піднімається вертикально вгору. Що покаже динамометр: при підйомі з прискоренням a = 2 м/с^2; при рівномірному підйомі?

2. Похила площина, що утворює кут α = 25 ° з площиною горизонту, має довжину l = 2 м. Тіло, рухаючись рівно прискорено, зісковзнуло з цієї площини за час t = 2 с. Визначити коефіцієнти тертя μ тіла об площину.

3. Автоцистерна з гасом рухається з прискоренням a = 0,7 м/с^2. Під яким кутом α до площини горизонту розташований рівень гасу в цистерні?

4. Автомобіль йде по заокругленню шосе, радіус R кривизни якого дорівнює 200 м. Коефіцієнт тертя μ коліс об покриття дороги дорівнює 0,1 (ожеледь). При якій швидкості v автомобіля почнеться його занос?

5. Два бруска масами m_1 = 1 кг і m_2 = 4 кг є з'єднаними шнуром і лежать на столі. З яким прискоренням a рухатимуться бруски, якщо до одного з них прикласти силу F = 10 Н, спрямовану горизонтально? Яка буде сила натягу T шнура, що з'єднує бруски, якщо сілу F = 10 Н докласти до першого бруска? до другого бруска? Тертям знехтувати.

6. Диск радіусом R = 40 см обертається навколо вертикальної вісі. На краю диска лежить кубик. Беручи коефіцієнт тертя μ = 0,4, знайти частоту n обертання, при якій кубик зісковзне з диска.

7. Катер масою m = 2 т з двигуном потужністю N = 50 кВт розвиває максимальну швидкість v_{max} = 25 м/с. Визначити час τ, протягом якого катер після вимкнення двигуна втратить половину своєї швидкості.

Прийняти, що сила опору руху катера змінюється пропорційно квадрату швидкості.

8. З гелікоптера, який нерухомо висить на деякій висоті над поверхнею Землі, скинутий вантаж масою m = 100 кг. Вважаючи, що сила опору повітря змінюється пропорційно швидкості, визначити, через який проміжок часу Δt прискорення a вантажу буде дорівнює половині прискорення вільного падіння. Коефіцієнт опору k = 10 кг/с.

Практичне заняття 4.

1. Яку роботу виконує двигун автомобіля масою 1,3 т при зрушуванні з місця на перших 75 м шляху, якщо цю відстань автомобіль проходить за 10 с, а коефіцієнт опору двигуна дорівнює 0,05?

2. Підйомний кран приводиться в дію двигуном потужністю 10 кВт. Скільки часу буде потрібно для доставки на висоту 50 м вантажу масою 2 т, якщо ККД двигуна 75%?

3. Яку роботу треба зробити, щоб розтягнути пружину жорсткістю 40 кН/м на 0,5 см?

4. Імпульс тіла дорівнює 8 кг м/с, а кінетична енергія – 16 Дж. Знайти масу і швидкість тіла.

5. Ковзаняр масою 60 кг, що стоїть на льоду, ловить м'яч масою 0,5 кг, який летить горизонтально зі швидкістю 20 м/с. На яку відстань відкотиться людина з м'ячем по горизонтальній поверхні льоду, якщо коефіцієнт тертя 0,05?

6. Знайти потенціальну і кінетичну енергію тіла масою 3 кг, що падає вільно з висоти 5 м, на відстані 2 м від поверхні Землі.

7. Камінь кинули вертикально вгору зі швидкістю 10 м/с. На якій висоті кінетична енергія каменю буде дорівнювати його потенціальній енергії?

Практичне заняття 5.

1. Визначити момент інерції I матеріальної точки масою m = 0,3 кг відносно осі, віддаленої від точки на відстань r = 20 см.

2. Дві маленьких кульки масою m = 10 г кожна є скріпленими тонким невагомим стрижнем довжиною l = 20 см. Визначити момент інерції I системи щодо осі, перпендикулярної стрижню, яка проходить через центр мас.

3. Діаметр диска d = 20 см, маса m = 800 кг. Визначити момент інерції I диску щодо осі, що проходить скрізь середину одного з радіусів перпендикулярно площині диска.

4. Через блок, який має форму диска, перекинутий шнур. До кінців шнура прив'язали важки масою m_1 = 100 г і m_2 = 110 г. З яким

прискоренням a рухатимуться важки, якщо маса m блоку дорівнює 400 г? Тертя при обертанні блоку мізерно мало.

5. Маховик у вигляді диска масою m = 80 кг і радіусом R = 30 см знаходиться в стані спокою. Яку роботу A_1 потрібно зробити, щоб повідомити маховику частоту n = 10 с$^{-1}$? Яку роботу A_2 довелося б зробити, якби при тій же масі диск мав меншу товщину, але вдвічі більший радіус?

6. Маховик обертається за законом, який виражається рівнянням $\varphi = A + Bt + Ct^2$, де A = 2 рад, В = 16 рад/с, С= – 2 рад/с^2. Момент інерції I маховика дорівнює 50 кг·м^2. Знайти закони, за якими змінюються обертальний момент M і потужність N. Чому дорівнює потужність в момент часу t = 3 с?

7. Куля масою m = 10 г летить зі швидкістю v = 800 м/с, обертаючись близько поздовжньої вісі з частотою n = 3000 с$^{-1}$. Беручи кулю за циліндр діаметром d = 8 мм, визначити повну кінетичну енергію $W_к$ кулі.

8. Визначити лінійну швидкість v центра кулі, що скотилася без ковзання з похилої площини висотою h = 1 м.

Практичне заняття 6.

1. Куля масою m_1, що рухається горизонтально з деякою швидкістю v_1, зіткнулась з нерухомим шаром масою m_2. Кулі є абсолютно пружними, удар є прямим. Яку частку своєї кінетичної енергії перша куля передала другій?

2. Снаряд масою m = 10 кг мав швидкістю v = 200 м/с у верхній точці траєкторії. У цій точці він розірвався на дві частини. Менша масою m_1 = 3 кг отримала швидкість u_1 = 400 м/с в початковому напрямі. Знайти швидкість u_2 другої частини снаряду відразу після розриву.

3. Два вантажі масами m_1 = 10 кг і m_2 = 15 кг підвішені на нитках довжиною l = 2 м так, що вантажі стикаються між собою. Менший вантаж був відхилений на кут φ = 60° і відпущений. Визначити висоту h, на яку піднімуться обидва вантажа після удару. Удар вантажів вважати не пружним.

4. Молот масою m_1 = 200 кг падає на поковку, маса m_2, яка разом з ковадлом дорівнює 2500 кг. Швидкість v_1 молота в момент удару дорівнює 2 м/с. Знайти: 1) кінетичну енергію $W_{К1}$ молота в момент удару; 2) енергію $W_{К2}$, передану фундаменту; 3) енергію $W_к$, витрачену на деформацію поковки; 4) коефіцієнт корисної дії η (ККД) удару молота. Удар молота по поковці розглядати як не пружний.

5. Визначити лінійну швидкість v центру кулі, що скотилася без ковзання з похилої площини висотою h = 1 м.

6. Олівець довжиною l = 15 см, поставлений вертикально, падає на стіл. Яку кутову ω і лінійну v швидкості буде мати в кінці падіння:

1) середина олівця? 2) верхній його кінець? Вважати, що тертя

настільки велике, що нижній кінець олівця не прослизає.

7. Платформа, що має форму диска, може обертатися навколо вертикальної вісі. На краю платформи стоїть людина масою m_1 = 60 кг. На який кут φ повернеться платформа, якщо людина піде уздовж краю платформи і, обійшовши її, повернеться у вихідну точку на платформі? Маса m_2 платформи дорівнює 240 кг. Момент інерції I людини розраховувати як для матеріальної точки.

Практичне заняття 7.

1. Підвіска автомобіля робить вільні коливання в відсутності демпфування за законом: $x(t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t)$ з амплітудою A = 0,01 м, частотою ν = 100 Гц. Знайти прискорення руху підвіски і діючу силу, якщо її маса становить m = 5 кг.

2. Точка виконує гармонічні коливання, найбільше зміщення x_{max} точки дорівнює 10 см, найбільша швидкість v_{max} = 20 см/с. Знайти циклічну частоту ω коливань і максимальне прискорення точки.

3. Грузик масою m = 250 г, підвішений до пружини, коливається по вертикалі з періодом T = 1 с. Визначити жорсткість k пружини.

4 Гиря масою m = 2,5 кг, підвішена до пружини, коливається по вертикалі з амплітудою A = 4 см. Визначити повну енергію W коливань гирі, якщо жорсткість k пружини дорівнює 1 кН/м.

5. Математичний маятник довжиною l = 1 м встановлений в ліфті. Ліфт піднімається з прискоренням a = 2,5 м/с^2. Визначити період T коливань маятника.

6. Однорідний диск радіусом R = 30 см коливається близько горизонтальної осі, що проходить через циліндричну поверхню диска. Який період T його коливань?

7. Диск радіусом r = 24 см коливається близько горизонтальної вісі, що проходить крізь середину одного з радіусів перпендикулярно площині диска. Визначити приведену довжину L і період T коливань такого маятника.

8. Фізичний маятник у вигляді тонкого прямого стрижня довжиною l = 120 см коливається близько горизонтальної вісі, що проходить перпендикулярно стрижню через точку, віддалену на деяку відстань a від центру мас стрижня. При якому значенні a період T коливань має найменше значення?

Практичне заняття 8.

1. За час t = 8 хв амплітуда згасаючих коливань маятника зменшилася

в 3 рази. Визначити коефіцієнт загасання δ.

2. При затухаючих коливаннях матеріальної точки амплітуда в початковий момент часу A_0 = 2 см, а через t_1 = 4 с – амплітуда A_1 = 0,7 см. Визначте через скільки секунд амплітуда стане A_2 = 0,4 см.

3. Тіло масою m = 1 г здійснює затухаючі коливання з частотою $\omega = 3{,}14$ с$^{-1}$. Протягом часу t = 50 с тіло втратило 80% своєї енергії. Визначте коефіцієнт загасання і коефіцієнт опору середовища.

4. Підвіска автомобіля робить коливання при наявності амортизатора (демпфуючий пристрій) за законом: з амплітудою A_0 = 0,01 м, власною частотою ν_0 = 100 Гц. Записати рівняння руху підвіски, що здійснюється під дією сили, що змушує. Знайти амплітуду змушених коливань підвіски, визначити резонансну частоту коливань, обчислити амплітуду при резонансі. Маса підвіски складає m = 5 кг.

5. Вантаж масою m = 0,1 кг підвішений на пружині з жорсткістю k = 10 Н/м. Записати рівняння руху підвіски, яке здійснюється під дією сили, що змушує $F(t) = 5\sin(\pi \cdot 50t)$. Коефіцієнт загасання δ = 0,5 с$^{-1}$. Визначте рівняння зміщення сталих змушених коливань.

6. Визначте довжину хвилі при частоті ν = 200 Гц, якщо швидкість поширення хвиль v = 340 м/с.

7. Визначте швидкість звуку у воді, якщо джерело, яке коливається з періодом T = 0,002 с, збуджує в воді хвилі довжиною λ = 2,9 м.

Практичне заняття 9.

1. Знайдіть тиск в озері на глибині 4,5 м, якщо густина води 1000 кг/м^3, а атмосферний тиск 100 кПа.

2. Надводна частина айсберга має об'єм 550 м^3. Щільність льоду 920 кг/м^3, густина морської води 1030 кг/м^3. Знайти об'єм айсберга.

3. Яку силу треба прикласти, щоб утримати в воді камінь масою 10 кг? Густина речовини каменю 2,6 10^3 кг/м^3, а густина води 10^3 кг/м^3.

4. Вода тече в горизонтально розташованій трубі змінного перерізу. Швидкість v_1 води в широкій частині труби дорівнює 20 см/с. Визначити швидкість v_2 у вузькій частині труби, діаметр d_2 якої в 1,5 рази менше діаметра d_1 широкої частини.

5. Бак висотою h = 1,5 мм наповнений по самі вінця водою. На відстані d = 1 м від верхнього краю бака утворився отвір малого діаметру. На якій відстані l від бака падає на підлогу струмінь, що витікає з отвору?

6. Вода тече по круглій гладкій трубі діаметром d = 5 см із середньою по перетину швидкістю $\langle v \rangle$ = 10 см/с. Визначити число Рейнольдса Re для потоку рідини в трубі і вказати характер течії рідини.

7. При русі кульки радіусом r_1 = 2,4 мм в касторовій олії ламінарне обтікання спостерігається при швидкості v_1 кульки, що не перевищує

10 см/с. При якій мінімальній швидкості v_2 кульки радіусом r_2 = 1 мм в гліцерині обтікання стане турбулентним?

Практичне заняття 10.

1. Підрахувати число молекул, що містяться в 1 кг вуглекислого газу; знайти масу однієї молекули.

2. У посудині місткістю V = 2 л знаходиться кисень, кількість речовини ν якого дорівнює 0,2 моль. Визначити густину ρ газу.

3. При нагріванні ідеального газу на ΔT = 1 К при постійному тиску об'єм його збільшився на 1/350 початкового об'єму. Знайти початкову температуру T газу.

4. До якого тиску необхідно стиснути в циліндрі двигуна суміш повітря з парами бензину, щоб сталося самозаймання цієї суміші, тобто була досягнута температура 560ºС? Початкова температура суміші становить 0ºС при атмосферному тиску. Суміш вважати ідеальним газом.

5. У балоні місткістю V = 25 л знаходиться водень при температурі T = 290 К. Після того як частина водню витратили, тиск у балоні знизився на Δp = 0,4 МПа. Визначити масу Δm витраченого водню.

6. В колбі місткістю V = 240 см^3 знаходиться газ при температурі T = 290 К і тиску p = 50 кПа. Визначити кількість речовини ν газу і число N його молекул.

7. Який об'єм V займає суміш азоту масою m_1 = 1 кг і гелію масою m_2 = 1 кг при нормальних умовах.

Практичне заняття 11.

1. У колбі місткістю V = 100 см^3 міститься деякий газ при температурі T = 300 К. На скільки знизиться тиск p газу в колбі, якщо внаслідок витоку з колби вийде $N = 10^{20}$ молекул?

2. Тиск p газу дорівнює 1 мПа, концентрація n його молекул дорівнює 10^{10} м$^{-3}$. Визначити: 1) температуру T газу; 2) середню кінетичну енергію $\langle\varepsilon_п\rangle$ поступального руху молекул газу.

3. Визначити середню кінетичну енергію $\langle\varepsilon_п\rangle$ поступального руху і середнє значення $\langle\varepsilon\rangle$ повної кінетичної енергії молекули водяної пари при температурі T = 600 К.

4. Колба місткістю V = 4 л містить деякий газ масою m = 0,6 г під тиском p = 200 кПа. Визначити середню квадратичну швидкість $\langle v_{кв}\rangle$ молекул газу.

5. Знайти середню квадратичну $\langle v_{кв}\rangle$ середню арифметичну $\langle v\rangle$ і найбільш імовірну $v_{ім}$ швидкості молекул водню. Обчислення виконати для трьох значень температури: 1) T = 20 К; 2) T = 300 К; 3) T = 5 кК.

6. На скільки зміниться значення найбільш вірогідної і середнє

квадратичної швидкості повітря в автомобільній шині, якщо її температура під час їзди збільшилася з 20ºС до 60ºС? Молярна маса повітря 0,029 кг/моль.

Практичне заняття 12.

1. Порошинки, що є завислими в повітрі, мають масу $m = 10^{-18}$ м У скільки разів зменшиться їх концентрація n при збільшенні висоти на Δh = 10 м? Температура повітря T = 300 К.

2. На скільки зменшиться атмосферний тиск p = 100 кПа при підйомі спостерігача над поверхнею Землі на висоту h = 100 м? Вважати, що температура T повітря дорівнює 290 К і не змінюється з висотою.

3. При якому тиску p середня довжина вільного пробігу $<l>$ молекул азоту дорівнює 1 м, якщо температура T газу дорівнює 300 К?

4. Балон об’ємом V = 10 л містить водень масою m = 1 м. Визначити середню довжину вільного пробігу $<l>$ молекул.

5. Знайти залежність середньої довжини вільного пробігу $<l>$ молекул ідеального газу від тиску p при наступних процесах: 1) ізохоричний; 2) ізотермічний. Зобразити ці залежності на графіках.

6. Середня довжина вільного пробігу $<l>$ атомів гелію при нормальних умовах дорівнює 180 нм. Визначити дифузію D гелію.

7. Обчислити динамічну в'язкість η кисню при нормальних умовах.

8. Обчислити теплопровідність λ гелію при нормальних умовах.

Практичне заняття 13.

1. Знайти внутрішню енергію маси m = 20 г кисню при температурі t = 10°С.

2. Двоатомний газ, який має масу m = 1 кг і густину ρ = 4 кг/м^3, знаходиться під тиском p = 80 кПа. Знайти енергію теплового руху U при цих умовах.

3. Знайти питому теплоємність неону і кисню для а) V = const і б) p = const.

4. Питома теплоємність деякого двоатомного газу c_p = 14,7 Дж/(кг К). Знайти молярну масу M цього газу.

5. Які питомі теплоємності c_V і c_p суміші газів, що містить кисень масою m_1 = 10 г і азот масою m_2 = 20 г?

6. Визначити питому теплоємність c_V суміші газів, що містить V_1 = 5 л водню і V_2 = 3 л гелію. Гази знаходяться при однакових умовах.

7. При адіабатному стисненні кисню масою m = 1 кг здійснена робота A = 100 кДж. Визначити кінцеву температуру T_2 газу, якщо до стиснення кисень перебував при температурі T_1 = 300 К.

Практичне заняття 14.

1. Азот масою $m = 5$ кг, нагрітий на $\Delta T = 150$ К, зберіг незмінний об'єм V. Знайти: 1) кількість теплоти Q, передану газу; 2) зміну ΔU внутрішньої енергії; 3) виконану газом роботу A.

2. Азот масою $m = 200$ г розширюється ізотермічно при температурі $T = 280$ К, причому об'єм газу збільшується в два рази. Знайти: 1) зміну ΔU внутрішньої енергії газу; 2) виконану при розширенні газу роботу A; 3) кількість теплоти Q, отриману газом.

3. Теплова машина, яка працює за циклом Карно, здійснює за один цикл роботу $A = 2{,}94$ кДж і віддає за один цикл холодильнику кількість теплоти $Q_2 = 13{,}4$ кДж. Знайти ККД циклу.

4. Ідеальний газ здійснює цикл Карно. Температура T_1 нагрівача в три рази вища за температуру T_2 охолоджувача. Нагрівач передав газу кількість теплоти $Q_1 = 42$ кДж. Яку роботу A зробив газ?

5. Температура газів, яка утворюється в циліндрах двигуна автомобіля при згорянні палива з питомою теплотою згоряння $q = 4{,}6\ 10^7$ Дж/кг, досягає $T_1 = 800$ºC. Температура вихлопних газів у 10 разів менше. Витрата палива на 100 км шляху при швидкості $v = 90$ км/год дорівнює $V = 10$ л. Густина бензину $\rho = 700$ кг/м^3. Яку потужність міг би розвинути двигун, якби він працював за ідеальним циклом з максимально можливим ККД?

6. Знайти зміну ΔS ентропії при ізобарному розширенні гелію масою $m = 4$ г від об'єму $V_1 = 5$ л до об'єму $V_2 = 9$ л.

7. Знайти приріст ентропії ΔS при ізотермічному розширенні водню масою $m = 6$ г від тиску $p_1 = 100$ кПа до тиску $p_2 = 50$ кПа.

Практичне заняття 15.

1. Визначити тиск p, який буде виробляти кисень, що містить кількість речовини $\nu = 1$ моль, якщо він займає об'єм $V = 0{,}8$ л при температурі $T = 300$ К. Порівняти отриманий результат з тиском, обчисленим за рівнянням Менделєєва-Клапейрона.

2. Обчислити критичні температуру $T_{кр}$ і тиск $p_{кр}$ 1) кисню; 2) води.

3. Знайти критичний об'єм $V_{кр}$ речовин: 1) кисню масою $m = 0{,}5$ г; 2) води масою $m = 1$ м.

4. Дві краплі ртуті радіусом $r = 1$ мм кожна злилися в одну велику краплю. Яка енергія виділиться при цьому злитті? Вважати процес ізотермічним.

5. Повітряний пухирець діаметром $d = 2$ мкм знаходиться в воді біля самої її поверхні. Визначити густину ρ повітря в бульбашці, якщо повітря над поверхнею води знаходиться при нормальних умовах.

6. На скільки тиск p повітря всередині мильної бульбашки більше атмосферного тиску p_0, якщо діаметр, бульбашки $d = 5$ см?

7. Гліцерин піднявся в капілярній трубці на висоту $h = 20$ мм. Визначити поверхневий натяг σ гліцерину, якщо діаметр d каналу трубки дорівнює 1 мм.

ЛІТЕРАТУРА

1. Кучерук І.М., Горбачук І.Т., Луцик П.П. Загальний курс фізики: У 3 т. / За ред. І.М.Кучерука. – 2-ге вид., випр. – К.: Техніка, 2006. Т.1. 452 с.

2. Гаврилова Т.В, Єрьоміна О.Ф., Степанов О.О., Шиндерук С.О., Чаплигін Є. О. Фізика. Навчальний посібник. – Харків: ХНАДУ, 2014. – 277 с.