

**Міністерство освіти і науки України**  
**Харківський національний автомобільно-дорожній**  
**університет**

**І.В. Міщенко**

**Методичні вказівки до виконання**  
**самостійної роботи з дисципліни**  
**«Теоретична механіка»,**  
**розділ «Статика»**

**Харків ХНАДУ 2024**

УДК 531  
ББК 22.21  
М 57

М 57

Міщенко, І.В. Методичні вказівки до виконання самостійної роботи з дисципліни «Теоретична механіка», розділ « Статика» [Текст] / І. В. Міщенко. – Х.: ХНАДУ, 2024. – 82 с.

Методичні вказівки до виконання самостійної роботи з дисципліни «Теоретична механіка», розділ « Статика», призначено для здобувачів вищої освіти за денною та заочною формами навчання за спеціальністю (освітньою програмою) 274 «Автомобільний транспорт».

У методичних вказівках надано загальні теоретичні відомості статички, необхідну інформацію щодо довільної та плоскої системи сил та центру ваги твердого тіла, розміщені завдання, виконання яких передбачено навчальною програмою з дисципліни «Теоретична механіка» для здобувачів вищої освіти за першим (бакалаврським) рівнем вищої освіти за спеціальністю (освітньою програмою) 274 «Автомобільний транспорт».

Викладений матеріал дозволяє опанувати курс теоретичної механіки за офлайн та (або) онлайн формами навчання.

УДК 531  
ББК 22.21

© Міщенко І.В., 2024

© Харківський національний автомобільно-дорожній університет, 2024

## ЗМІСТ

<b>ВСТУП</b> .....	4
<b>1. ЗАГАЛЬНІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ</b> .....	5
<b>1.1. Основні поняття статички</b> .....	5
<b>1.2. Аксиоми статички</b> .....	6
<b>1.3. В'язі та їх реакції</b> .....	9
<b>2. ДОВІЛЬНА СИСТЕМА СИЛ. ПЛОСКА СИСТЕМА СИЛ</b> .....	13
<b>2.1. Умови рівноваги довільної системи сил</b> .....	13
<b>2.2. Розподілені навантаження</b> .....	17
<b>3. ЦЕНТР ВАГИ ТВЕРДОГО ТІЛА</b> .....	20
<b>3.1. Центр ваги твердого тіла</b> .....	20
<b>3.2. Центр ваги плоскої фігури. Статичний момент площі плоскої фігури відносно осі</b> .....	21
<b>3.3. Визначення центру ваги плоскої фігури по центрах ваги її частин. Метод додавання та метод відняття</b> .....	22
<b>Завдання С.0. Визначення реакцій опор стержньової конструкції</b> .....	24
<b>Приклад виконання завдання (шарнірне спирання балки)</b> .....	25
<b>Приклад виконання завдання (жорстке закладення балки)</b> .....	29
<b>Варіанти завдань</b> .....	32
<b>Завдання С.1. Визначення реакцій опор твердого тіла (три варіанти закріплення конструкції)</b> .....	41
<b>Приклад виконання завдання</b> .....	41
<b>Варіанти завдань</b> .....	45
<b>Завдання С.3. Визначення реакцій опор складеної конструкції (система двох тіл)</b> .....	53
<b>Приклад виконання завдання</b> .....	53
<b>Варіанти завдань</b> .....	59
<b>Завдання С.6. Визначення головного вектору та головного моменту для системи сил, які не лежить в одній площині</b> .....	67
<b>Приклад розв'язання завдання</b> .....	68
<b>Варіанти завдань</b> .....	74
<b>Завдання С.8. Визначення положення центру ваги тіла</b> .....	75
<b>Приклад виконання завдання</b> .....	75
<b>Варіанти завдань</b> .....	78
<b>ЛІТЕРАТУРА</b> .....	82

## ВСТУП

**Теоретична механіка** є одною з навчальних дисциплін науки «Механіка».

**Наука про загальні закони руху та рівноваги матеріальних тіл та виникаючих при цьому взаємодіях між тілами називається теоретичною (або загальною) механікою.**

Курс «Теоретична механіка» входить до складу дисциплін, які пов'язані із загальнопрофесійною діяльністю. Структура професійної діяльності у галузі механіки пов'язана з експлуатацією та обслуговуванням технічно складних механічних приладів і пристроїв.

Метою вивчення теоретичної механіки є формування у студентів знань законів руху та рівноваги матеріальних тіл і виникаючих при цьому взаємодіях між тілами, формування теоретичного базису для подальшого вивчення спеціальних інженерних дисциплін.

Дисципліна «Теоретична механіка» поділяється на три розділи – Статика, Кінематика та Динаміка. У статистиці надається вчення про сили та умови рівноваги матеріальних тіл під дією сил. Статика є першим розділом і вважається найпростішою частиною цієї дисципліни. Тим не менш, розв'язання задач зі статички є основою для розуміння решти розділів курсу, а також для розв'язання задач з інших розділів.

Набуті знання та навички дозволяють вирішувати задачі розрахунку конструкцій в курсі «Опір матеріалів», «Деталі машин», «Гідравліка».

На початку «Методичних вказівок» надано загальні теоретичні відомості статички (Розділ 1), а також необхідну інформацію щодо довільної та плоскої системи сил (Розділ 2) та центру ваги твердого тіла (Розділ 3). Далі розміщені завдання, виконання яких передбачено навчальною програмою з дисципліни «Теоретична механіка» для здобувачів вищої освіти за першим (бакалаврським) рівнем вищої освіти за спеціальністю (освітньою програмою) 274 «Автомобільний транспорт».

Запропоновані «Методичні вказівки» дозволять засвоїти навчальний матеріал незалежно від онлайн або офлайн форми навчання.

# 1. ЗАГАЛЬНІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

## 1.1. Основні поняття статички

**Статика** – це розділ механіки, в якому подається загальне вчення про сили та вивчаються умови рівноваги системи сил і матеріальних тіл, які знаходяться під дією сил.

Під **рівновагою** розуміють стан спокою тіла по відношенню до інших тіл. В курсі механіки розглядають задачі про рівновагу твердих тіл.

**Матеріальна точка (МТ)** – найпростіша модель матеріального тіла, розмірами якого можна нехтувати. МТ має масу та не здійснює обертальний рух.

**Механічною системою** називається **будь-яка сукупність матеріальних точок.**

**Абсолютно твердим тілом** є така механічна система, відстань між **будь-якими точками якої не змінюється при довільних взаємодіях.**

**Сила** – кількісна міра механічної взаємодії матеріальних тіл.

**Сила** є векторною величиною, яка визначається: 1) числовою величиною або модулем сили; 2) напрямом дії; 3) точкою прикладення. Розмірність сили «ньютон», скорочено Н.

**Для знаходження твердого тіла під дією певної системи сил у рівновазі (стані спокою) необхідно, щоб ці сили задовольняли певним умовам рівноваги даної системи сил.**

Для сил існують наступні визначення:

1. Тіло, не скріплене з іншими тілами та якому можна надати довільне переміщення у просторі, називається **вільним**. Або іншими словами:

**Вільне тіло** – якщо його переміщення нічим не обмежені. **Невільне тіло** – якщо його переміщення обмежені іншими тілами.

2. **Сукупність декількох сил**, прикладених до механічної системи, називають **системою сил**. Якщо лінії дії сил системи лежать в одній площині, то її називають **плоскою**, якщо лінії дії лежать в різних площинах, то систему називають **просторовою**.

3. Якщо одну систему сил, діючих на вільне тверде тіло, можна замінити іншою системою, не змінюючи при цьому стан спокою або руху, в якому знаходиться тіло, то такі дві системи сил називаються **еквівалентними**.

4. Система сил, під дією якої тверде тіло може знаходитися в стані спокою, називається **зрівноваженою** або **еквівалентною до нуля**.

5. Якщо дана система сил еквівалентна одній силі, то ця сила називається **рівнодіючою** даної системи сил. Таким чином, **рівнодіюча – це сила, яка одна замінює дію даної системи сил на тверде тіло**.

Сила, що дорівнює рівнодіючій за модулем, прямо протилежна їй за напрямом і діє вздовж тієї ж прямої називається **зрівноважуючою** силою.

6. Сили, що діють на тверде тіло, поділяються на **зовнішні** та **внутрішні**. **Зовнішні** сили діють на точки даної механічної системи з боку МТ інших систем. **Внутрішні** – це сили взаємодії між МТ даної системи.

7. За характером дії сили поділяють на **зосереджені** та **розподілені**. **Зосереджена** – сила, прикладена до тіла в будь-якій одній його точці. **Розподілені** – сили, що діють на певну частину поверхні або об'єму тіла і характеризуються інтенсивністю.

8. За способом розташування у просторі розрізняють:

- **систему збіжних сил** (лінії дії сил сходяться в одній точці);
- **плоску систему сил** (сили даної системи розміщені в одній площині);
- **довільну систему сил** (сили даної системи розміщені довільно у просторі);
- **систему паралельних сил** (лінії дії сил даної системи паралельні між собою).

В подальшому під час вивчення статички ми будемо працювати з різними аксіомами та поняттями, тому є доцільним надати відповідний матеріал.

## 1.2. Аксіоми статички

**Аксіоми статички – це вихідні положення, які сформульовані на підставі численних дослідів та спостережень над навколишніми об'єктами реального світу, що приймаються без будь-яких доказів.**

**Аксіома (1) рівноваги системи двох сил** (рис. 1.1)

**Якщо на вільне абсолютно тверде тіло діють дві сили, то тіло може знаходитися у рівновазі тоді і тільки тоді, коли ці сили рівні за модулем ( $F_1 = F_2$ ) і спрямовані вздовж однієї прямої в протилежному напрямі.**

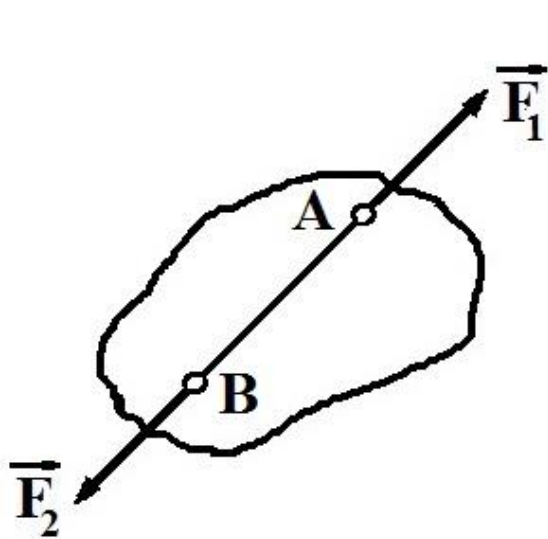


Рисунок 1.1.

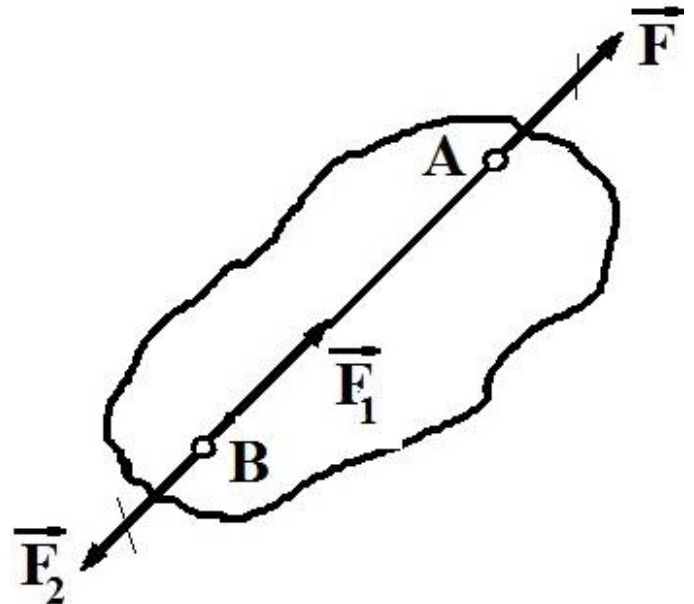


Рисунок 1.2.

**Аксиома (2) про додавання (відкидання) системи сил, яка еквівалентна нулю** (рис. 1.2)

Дія даної системи сил на абсолютно тверде тіло не зміниться, якщо до неї додати або від неї відкинути систему сил, еквівалентну нулю.

**Наслідок з 1-ї та 2-ї аксіом.** Дія сили на абсолютно тверде тіло не зміниться, якщо перенести точку прикладення сили вздовж її лінії дії в іншу точку тіла.

Нехай на тверде тіло діє сила  $\vec{F}$ , яку прикладено в точці  $A$ . На лінії дії цієї сили в точці  $B$  прикладемо еквівалентну нулю систему сил  $\vec{F}_1, \vec{F}_2$  (сили однакові за модулем  $|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2| = |\vec{F}|$ , спрямовані в протилежні сторони). Система сил  $\vec{F}$  і  $\vec{F}_2$  на підставі Аксиоми (1) еквівалентна нулю і на підставі Аксиоми (2) її можна відкинути. Таким чином, на тіло діє тільки сила  $\vec{F}_1$ . Вектор  $\vec{F}$  можна вважати прикладеним в довільній точці на лінії дії цієї сили. Такий вектор називається **КОВЗНИМ**.

**Аксиома (3) паралелограма сил** (рис. 1.3)

Дві сили, що діють в одній точці твердого тіла, можна замінити однією рівнодіючою силою, що дорівнює за величиною і напрямом дії діагоналі паралелограма, побудованого на цих силах.

$$|\vec{R}| = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2 \cos(\vec{F}_1, \vec{F}_2)},$$

де  $(\vec{F}_1, \vec{F}_2)$  – кут між векторами  $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ .

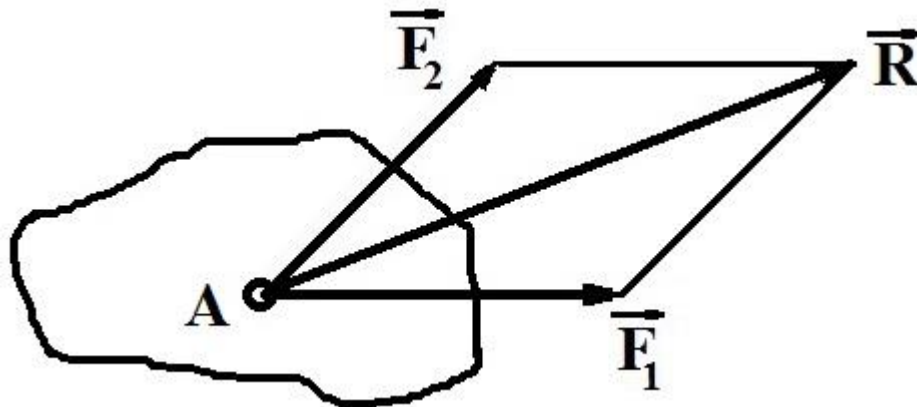


Рисунок 1.3.

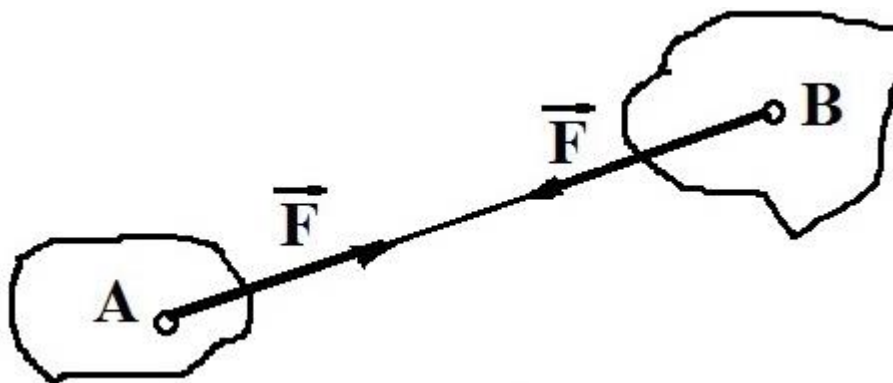


Рисунок 1.4.

**Аксиома (4) дії та протидії** (рис. 1.4)

**Сили взаємодії двох матеріальних точок однакові за модулем, протилежні за напрямом і діють вздовж однієї прямої, що проходить через ці точки.**

**Аксиома (5) – принцип тверднення**

**Рівновага змінного (деформівного) тіла, що знаходиться під дією даної системи сил, не зміниться, якщо тіло вважати затверділим (абсолютно твердим).**

Для формулювання останньої аксіоми статки необхідно ввести поняття в'язей і реакцій в'язей.



### 1.3. В'язі та їх реакції

Все, що обмежує переміщення даного тіла в просторі, називається в'яззю. Сила, з якою дана в'язь діє на тіло, перешкоджаючи тим чи іншим його переміщенням: називається силою реакції (протидії) в'язі або просто реакцією в'язі. Реакція в'язі спрямована в бік, протилежний тому, куди в'язь не дає переміщуватися тілу. В механіці приймають наступне положення (**Аксиома (6) – принцип звільнення**)

**будь-яке невільне тіло можна розглядати як вільне, якщо дію в'язей замінити їх реакціями, прикладеними до даного тіла.**

Конструктивно в'язі можуть бути виконані у вигляді різних опор, шарнірних з'єднань, гнучких елементів тощо. Вважатиме, що в'язі виконані з абсолютно твердих тіл, тертям у місці з'єднання в'язі з основним тілом можна нехтувати. Такі в'язі будемо називати ідеальними. Розглянемо деякі типові види в'язів.

#### 1. Гладка поверхня або опора. (рис. 1.5)

Реакція  $\vec{N}$  спрямована за загальною нормаллю до поверхонь стику, має назву нормальної реакції.

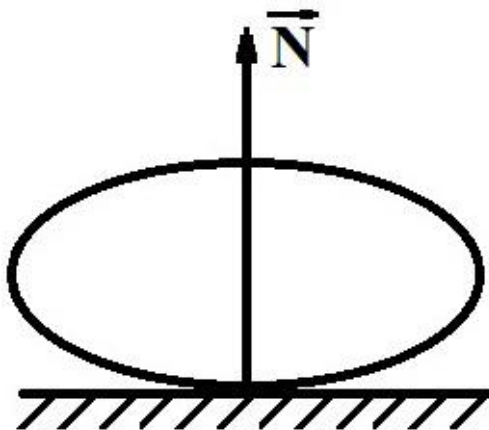


Рисунок 1.5.

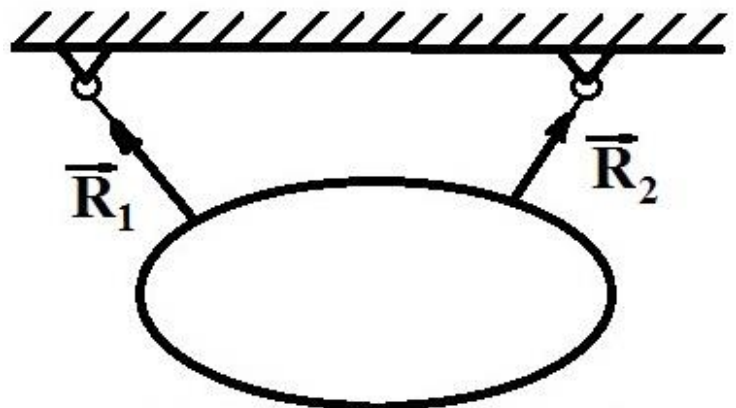


Рисунок 1.6.

#### 2. Гнучка в'язь (трос, нитка, канат). (рис. 1.6)

Гнучкі в'язі реалізують за допомогою ниток, шнурків, ланцюгів, канатів, які вважаємо нерозтяжними та невагомими. Реакція  $\vec{R}_1$  (або інші за необхідності, наприклад,  $\vec{R}_2$ ) спрямована вздовж нитки до точки підвісу.

3. **Циліндрична шарнірно-нерухома опора.** (рис. 1.7)

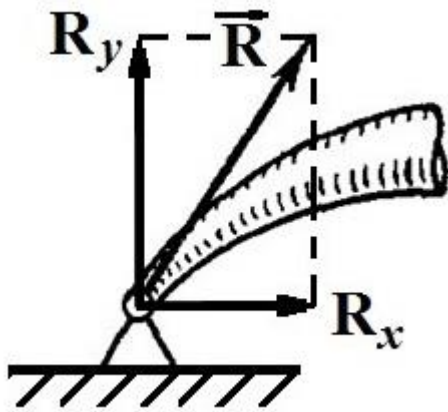


Рисунок 1.7.

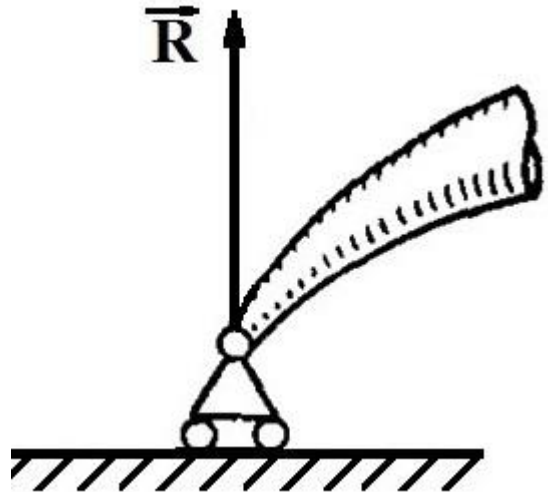


Рисунок 1.8.

Ця опора реалізується за допомогою двох циліндрів, які мають спільну геометричну вісь, спрямовану перпендикулярно до площини рисунку. Реакція такої опори проходить через її вісь, напрям дії може бути довільним в площині, перпендикулярній до осі опори. Реакція  $\vec{R}$  має складові  $R_x, R_y$  – проєкції на відповідні осі. Шарнірно-рухома опора (нерухомий шарнір) дозволяє тілу вільно повертатися навколо осі шарніра, але перешкоджає його лінійним переміщенням у всіх напрямках.

4. **Циліндрична шарнірно-рухома опора.** (рис. 1.8)

Перешкоджає переміщенню закріпленої точки тіла за перпендикуляром до площини контакту, відповідно, реакція опори має напрям цього перпендикуляра. Відповідні котки дозволяють переміщувати тіло паралельно до нерухомої опорної поверхні.

5. **Жорстке закладення.** (рис. 1.9)

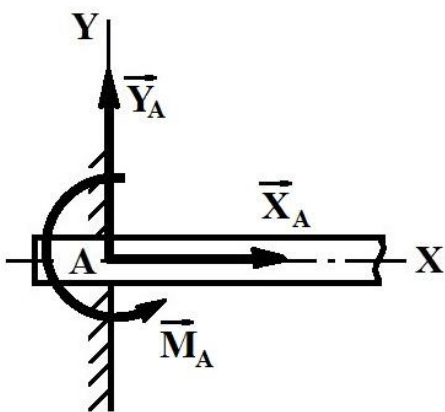


Рисунок 1.9.

Такий тип в'язі існує за умови нерухомого з'єднання тіла з опорою. Обмежуються лінійні переміщення та повертання тіла в місці закріплення (прямий кут між опорою та тілом залишається незмінним). Реакцію складають реактивна сила  $\vec{R}_A$  (розкладається по осях на складові  $\vec{X}_A$  і  $\vec{Y}_A$ ) та момент  $\vec{M}_A$ , який зветься **реактивним моментом**.

**Моментом сили відносно будь-якої точки (центру) називається вектор, який чисельно дорівнює добутку модуля сили на плече, тобто на найкоротшу відстань від вказаної точки до лінії дії сили. Ця відстань називається плече. Вектор спрямований перпендикулярно до площини, що проходить через обрану точку та лінію дії сили, в той бік, звідки «обертання» сили навколо точки відбувається проти ходи годинникової стрілки.** Момент сили характеризує її обертальну дію.

Якщо точка прикладення сили  $\vec{F}$  визначається радіус-вектором  $\vec{r}$  відносно  $O$ , то справедливе співвідношення

$$\vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F}. \quad (1.1)$$

Момент сили дорівнює векторному добутку вектора  $\vec{r}$  на вектор  $\vec{F}$ . Модуль векторного добутку дорівнює:

$$M_O(\vec{F}) = \pm rF \sin \alpha = \pm Fh, \quad (1.2)$$

де  $h$  – плече сили. Для моменту правило знаків:

якщо сила намагається обертати тіло навколо центра проти ходи годинникової стрілки, обираємо знак «плюс», за ходою годинникової стрілки, обираємо знак «мінус» (рис. 1.10).

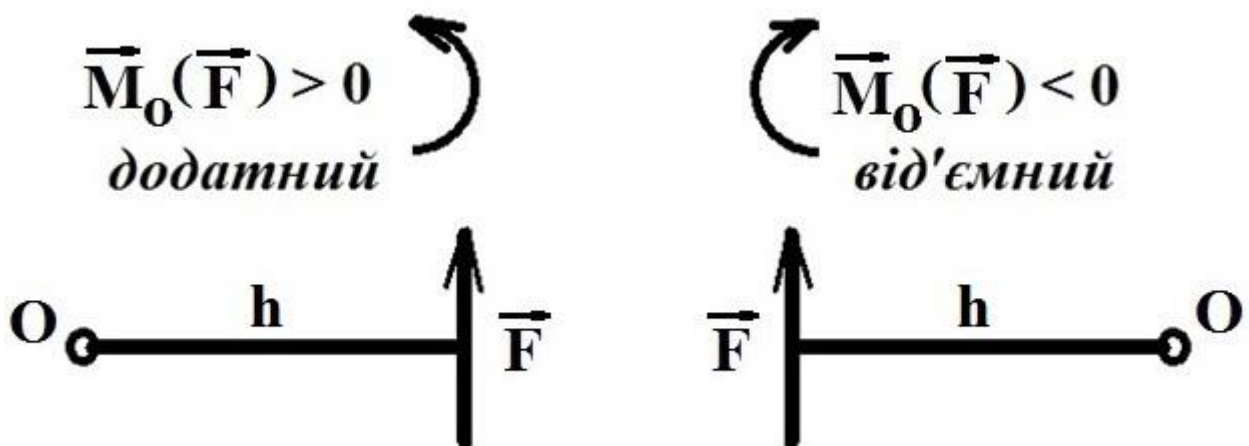


Рисунок 1.10.

Якщо лінія дії сили проходить через центр, то момент сили відносно цього центру буде дорівнювати нулю.

Момент сили відносно точки не змінюється при перенесенні сили вздовж її лінії дії, оскільки незмінним залишається плече сили відносно центру.

За формулою (1.2) визначимо розмірність моменту сили. Найменування цієї одиниці «ньютон-метр», скорочене позначення Н•м.

Момент сили відносно осі:

$$M_{OZ}(\vec{F}) = \pm |\vec{F}_{xy}| h_{xy}. \quad (1.3)$$

Проекція моменту сили відносно точки на вісь, що проходить через цю точку, не залежить від вибору точки на осі. Тому в подальшому будемо опускати позначення точки, залишаючи тільки позначення осі, а саме  $M_Z(\vec{F})$ .

**Моментом сили відносно осі називається алгебраїчний момент проекції цієї сили на площину, перпендикулярну осі, відносно точки перетину осі з цією площиною.**

Якщо з боку позитивного напрямку осі ми бачимо, що сила намагається повернути тіло проти ходу годинникової стрілки, момент є додатним. Якщо за ходом годинниковою стрілки – від'ємним.

З формули (1.6) слідує, що **момент сили відносно осі дорівнює нулю** у двох випадках:

1. Коли проекція сили на площину, перпендикулярну осі, дорівнює нулю, тобто коли **сила та вісь паралельні**.
2. Коли плече проекції  $h = h_{xy} = 0$ , тобто коли **лінія дії сили перетинає вісь**.

Фактично, зазначені умови еквівалентні одній умові: **момент сили відносно осі дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли лінія дії сили та вісь знаходяться в одній площині**.

## 2. ДОВІЛЬНА СИСТЕМА СИЛ. ПЛОСКА СИСТЕМА СИЛ

### 2.1. Умови рівноваги довільної системи сил

**Головна теорема статки:**

Довільна система сил, що діють на тверде тіло, може бути приведена до даного центру, тобто замінена іншою, їй еквівалентною, але значно простішою, яка складається тільки з однієї сили та пари.

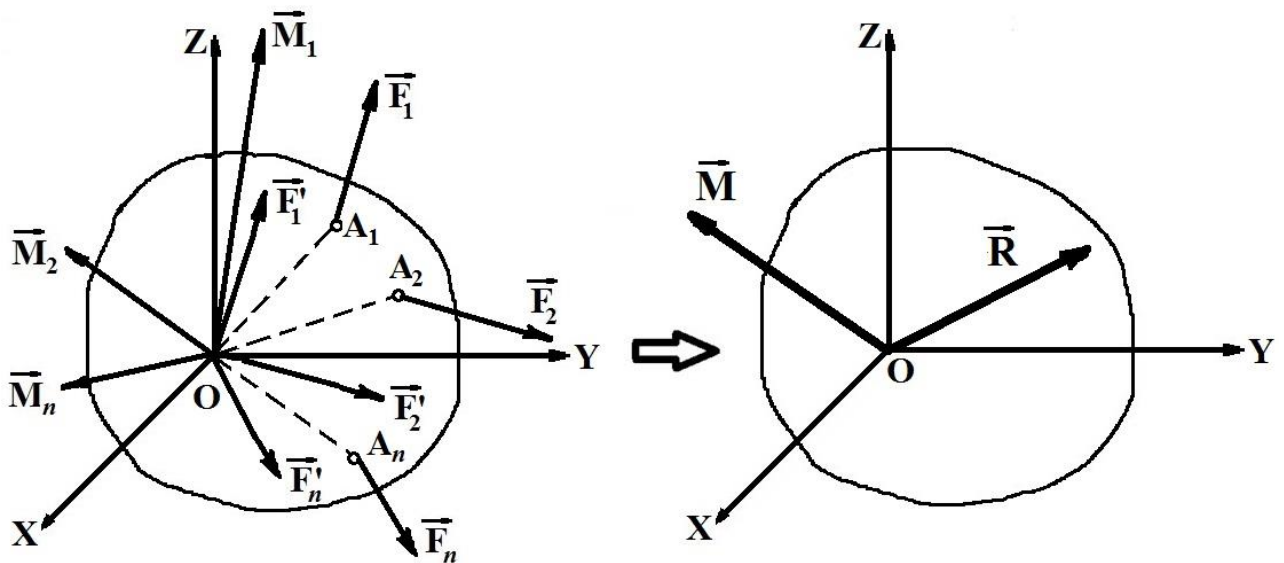


Рисунок 2.1.

Нехай на тіло діє довільна система сил  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \dots, \vec{F}_n$ . Обираємо довільну точку  $O$  за центр приведення та перенесемо всі сили до неї, приєднуючи при цьому відповідні пари. Тоді на тіло буде діяти система сил:

$$\vec{F}_1 = \vec{F}'_1, \vec{F}_2 = \vec{F}'_2, \dots, \vec{F}_n = \vec{F}'_n, \quad (2.1)$$

прикладених в центрі  $O$ , і система пар, моменти яких:

$$\vec{M}_1 = \vec{M}_O(\vec{F}_1), \vec{M}_2 = \vec{M}_O(\vec{F}_2), \dots, \vec{M}_n = \vec{M}_O(\vec{F}_n). \quad (2.2)$$

Систему збіжних сил, прикладених в точці  $O$ , замінюють однією силою:

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i. \quad (2.3)$$

Систему приєднаних пар замінимо однією еквівалентною парою, додаючи вектори моментів кожної пари:

$$\vec{M}_O = \sum_{i=1}^n \vec{M}_O(\vec{F}_i). \quad (2.4)$$

Одержану збіжну систему сил і систему пар сил можна замінити однією силою  $\vec{R}$  і однією парою сил з моментом  $\vec{M}_O$  (рис. 2.1). Як відомо, величина  $\vec{R}$ , яка дорівнює геометричній сумі всіх сил, називається **головним вектором системи сил**; величина  $\vec{M}_O$ , яка дорівнює геометричній сумі моментів всіх сил відносно центра  $O$ , називається **головним моментом системи сил** відносно цього центра.

В даному випадку сила  $\vec{R}$  не є рівнодійною даної системи сил через те, що вона замінює систему сил тільки разом з парою. Головний вектор не залежить, а головний момент залежить від вибору центру зведення.

Основна теорема статички розв'язує першу основну задачу статички – спрощення довільної системи сил, її зведення до найпростішого вигляду.

З основної теореми статички випливають умови рівноваги системи сил, діючих на тверде тіло. Згідно з аксіомами статички, система перебуває у рівновазі, коли вона еквівалентна нулю, тобто для рівноваги довільної системи сил, діючих на тверде тіло, необхідно та достатньо, щоб головний вектор і головний момент відносно довільної точки дорівнювали нулю:

$$\vec{R} = 0, \quad \vec{M}_O = 0. \quad (2.5)$$

Умови (2.5) називають **умовами рівноваги довільної просторової системи сил у векторній формі**. Якщо при рівновазі системи сил головний вектор дорівнює нулю, то його проекції на координатні осі також дорівнюють нулю. Це стосується також і головного моменту. Це відповідає шести алгебраїчним рівнянням, які виражають **умови рівноваги системи сил в аналітичній формі**. Отже, маємо шість умов:

$$\begin{aligned} R_X = 0, & \quad R_Y = 0, & \quad R_Z = 0; \\ M_{OX} = 0, & \quad M_{OY} = 0, & \quad M_{OZ} = 0. \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n F_{iX} = 0, \quad \sum_{i=1}^n F_{iY} = 0, \quad \sum_{i=1}^n F_{iZ} = 0; \\ \sum_{i=1}^n M_{OX}(\vec{F}_i) = 0, \quad \sum_{i=1}^n M_{OY}(\vec{F}_i) = 0, \quad \sum_{i=1}^n M_{OZ}(\vec{F}_i) = 0. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Таким чином, для рівноваги довільної просторової системи сил необхідно та достатньо, щоб алгебраїчна сума проєкцій усіх сил на три координатні осі та алгебраїчна сума їх моментів відносно цих осей дорівнювали нулю. Якщо ці умови містять невідомі (наприклад, реакції в'язей), то вони називаються рівняннями рівноваги твердого тіла.

**Систему сил, лінії дії яких довільно розташовані в одній площині, називають довільною плоскою системою сил.** Така система є окремим випадком довільної просторової системи сил. Оскільки достатньо багато практичних задач зводиться до цього випадку, зупинимось далі на аналізі довільної плоскої системи сил.

Розглянемо в площині  $XOY$  довільне тіло, яке навантажено системою сил (рис. 2.2). Обираємо центром зведення точку  $O$  цієї площини. Згідно з головною теоремою статки задана система сил зведеться до однієї сили  $\vec{R}$ , яка є головним вектором і її визначають за формулою (2.3), і до пари сил, момент якої  $\vec{M}_O$  дорівнює головному моменту і його визначають за формулою (2.4).

Оскільки всі сили заданої системи розташовані в одній площині, то сила  $\vec{R}$  теж лежить у цій площині. Крім того, зводячи сили до центру  $O$ , дістанемо пари, які теж розташовані у той самій площині. Тоді і результуюча пара лежить у цій площині, а вектор-момент  $\vec{M}_O$  спрямований перпендикулярно до неї. Для довільної плоскої системи сил головний вектор і головний момент взаємно перпендикулярні.

Головний вектор  $\vec{R}$  довільної плоскої системи сил дорівнює геометричній сумі всіх сил системи та лежить у площині дії сил, а головний момент її відносно деякого центру дорівнює алгебраїчній сумі моментів усіх сил системи відносно того ж центру.

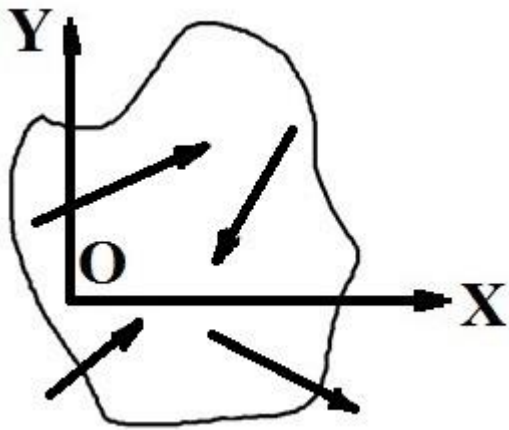


Рисунок 2.2.

Введемо в площині дії системи сил систему координат  $XOY$ . Умова

$$\sum_{i=1}^n F_{iZ} = 0$$

є тотожністю. Оскільки кожна з сил розміщена в площині з осями  $OX$  і  $OY$ , моменти сил відносно цих осей дорівнюють нулю, тобто умови

$$\sum_{i=1}^n M_{OX}(\vec{F}_i) = 0, \quad \sum_{i=1}^n M_{OY}(\vec{F}_i) = 0$$

також тотожності. Залишаються тільки 3 умови:

$$\sum_{i=1}^n F_{iX} = 0, \quad \sum_{i=1}^n F_{iY} = 0, \quad \sum_{i=1}^n M_{OZ}(\vec{F}_i) = 0. \quad (2.8)$$

Моменти сил відносно осі  $OZ$ , перпендикулярної площині дії сил, дорівнюють алгебраїчним моментам цих сил відносно точки  $O$ :

$$\sum_{i=1}^n M_{OZ}(\vec{F}_i) = \sum_{i=1}^n M_O(\vec{F}_i) = 0.$$

Рівняння (2.8) є основною формою умов рівноваги для плоскої системи сил.

**Для рівноваги довільної плоскої системи сил необхідно і та достатньо, щоб алгебраїчна сума проекцій усіх сил на дві координатні осі, що лежать у площині дії сил, і алгебраїчна сума моментів усіх сил відносно довільної точки цієї площини дорівнювали нулю.**

Існують ще еквівалентні форми умов рівноваги.

**Друга форма умов рівноваги: для рівноваги довільної плоскої системи сил необхідно та достатньо, щоб алгебраїчні суми моментів усіх сил відносно довільних трьох точок, які не лежать на одній прямій в площині дії сил, дорівнювали нулю.** Цю умову ще називають теоремою про три моменти.

**Третя форма умов рівноваги: для рівноваги довільної плоскої системи сил необхідно та достатньо, щоб алгебраїчні суми моментів усіх сил відносно довільних двох точок та алгебраїчна сума проекцій усіх сил на вісь, яка не перпендикулярна до прямої, що проходить через обрані точки, дорівнювали нулю.**



## 2.2. Розподілені навантаження

В інженерних розрахунках часто є навантаження, розподілені за об'ємом тіла, поверхнею або вздовж деякої лінії. Такі навантаження називають розподіленими. Систему розподілених навантажень характеризують своєю інтенсивністю  $q$ , тобто величиною сили, що приходить на одиницю об'єму, площі чи довжини навантаженого тіла. Інтенсивність розподілених об'ємних сил вимірюють у  $[Н/м^3]$ , поверхневих сил у  $[Н/м^2]$ , розподілених вздовж лінії – у  $[Н/м]$ .

Розглянемо деякі прості приклади розподілених сил, які лежать в одній площині.

1. Сили, рівномірно розподілені вздовж відрізка прямої (рис. 2.3, а). Для такої системи сил інтенсивність  $q$  є величиною постійною. Для статичних розрахунків цю систему можна замінити рівнодіючою силою  $\vec{Q}$ , модуль якої дорівнює  $Q = qa$ . Сила  $\vec{Q}$  прикладена посередині відрізка, на якому діє розподілене навантаження.

2. Сили, розподілені вздовж відрізка прямої за лінійним законом. Прикладом такого розподілу є тиск рідини на вертикальну або нахилену прямолінійну поверхню (рис. 2.3, б). За модулем рівнодійна  $Q = qa/2$ , а точкою прикладання є координата центру ваги трикутника, тобто рівнодіюча сила  $\vec{Q}$  розташована на відстані  $a/3$  від бокової сторони трикутника.

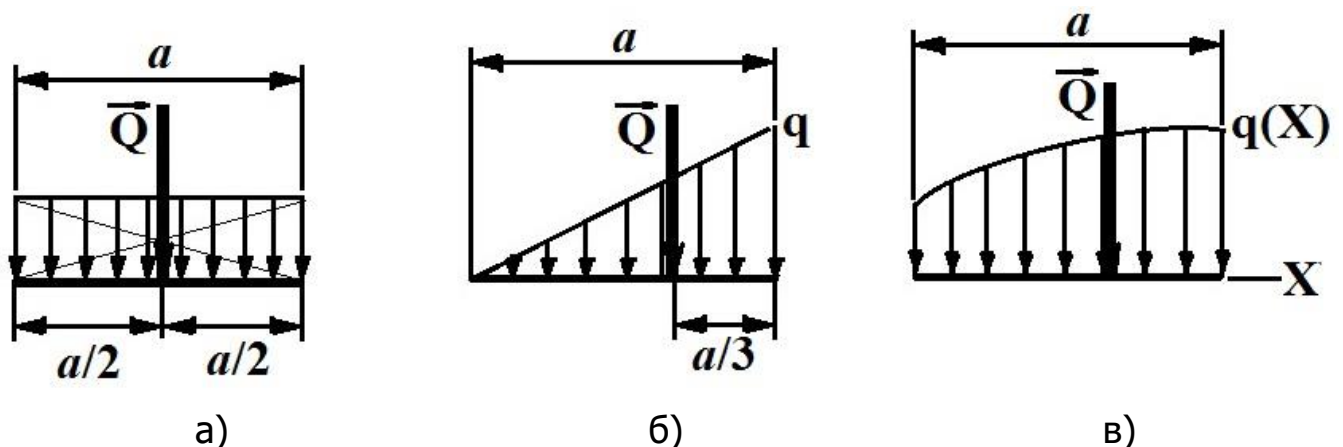


Рисунок 2.3.

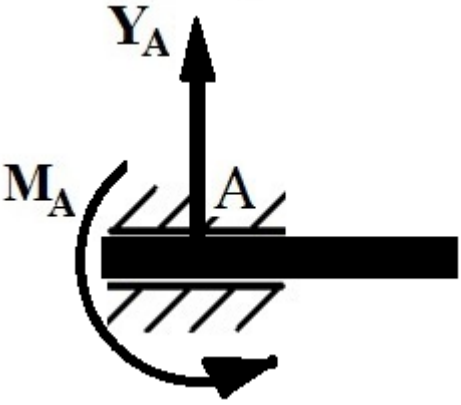
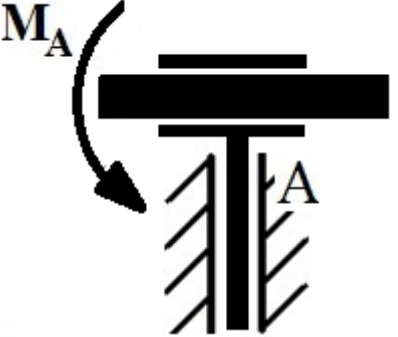
3. Сили, розподілені вздовж відрізка прямої за довільним законом (рис. 2.3, в). За модулем рівнодійна  $Q$  дорівнює площі фігури, яка відображає

закон зміни інтенсивності  $q$ , а лінія дій рівнодіючої проходить через центр ваги вказаної фігури.

Під час вирішення задач статички необхідно чітко розуміння, які активні силові чинники діють на конструкцію та які в'язі обмежують її переміщення. У Розділі 1.3 було надано основні види в'язей, у Таблиці 2.1 покажемо найбільш розповсюджені їх види та відповідні заміни реакціями.

Таблиця 2.1 – види в'язей та їх заміна реакціями

	<p><b>Нерухомий шарнір</b></p> <p>Заборона переміщення, реактивний момент відсутній. Заміна двома взаємно перпендикулярними реакціями, позитивний напрям вздовж позитивних напрямів введених осей</p>
	<p><b>Рухомий шарнір</b> (можливі два варіанти використання виду опори)</p> <p>Заборона переміщення у напрямі спирання, реактивний момент відсутній. Заміна нормальною до площини спирання реакцією, позитивний напрям за нормаллю до поверхні спирання опори</p>
	<p><b>Жорстке закладення</b></p> <p>Заборона переміщення, прямий кут, який утворюється стержнем та поверхнею опори, залишається незмінним, що є причиною виникнення реактивного моменту. Заміна двома взаємно перпендикулярними реакціями, позитивний напрям вздовж позитивних напрямів введених осей, та реактивним моментом у напрямі проти годинниковою стрілки</p>

	<p><b>Ковзаюче закладення</b></p> <p>Заборона переміщення в одному напрямі, в іншому ніяких обмежень на переміщення, напрямні опори не дозволяють повертатися стержню, що є причиною виникнення реактивного моменту. Заміна однією реакцією, позитивний напрям вздовж позитивного напрямку введеної осі, та реактивним моментом у напрямі проти годинниковою стрілки</p>
	<p><b>Біковзаюче (подвійне ковзаюче) закладення</b></p> <p>Жодних обмежень на переміщення у двох напрямках, напрямні опори не дозволяють повертатися стержню, що є причиною виникнення реактивного моменту. Заміна реактивним моментом у напрямі проти годинниковою стрілки</p>

Заборона переміщення приводить до появи реакції – реактивної сили, а заборона повороту – до появи реактивного моменту. Зазвичай, попередньо обирають напрямі реакцій згідно з позитивними напрямками введених осей системи координат та позитивного напрямку моменту – проти годинникової стрілки. За підсумками вирішення задачі отримані числові значення реакцій можуть бути від’ємними, що свідчить про насправді протилежний напрям дії реакцій до попередньо обраного.

### 3. ЦЕНТР ВАГИ ТВЕРДОГО ТІЛА

#### 3.1. Центр ваги твердого тіла

Сили тяжіння окремих частинок тіла до Землі спрямовані приблизно до центру Землі. Ці сили можна вважати паралельними. Рівнодіюча цих сил, яка дорівнює їхній сумі, є вага тіла, а центр цієї системи називається **центром ваги тіла**.

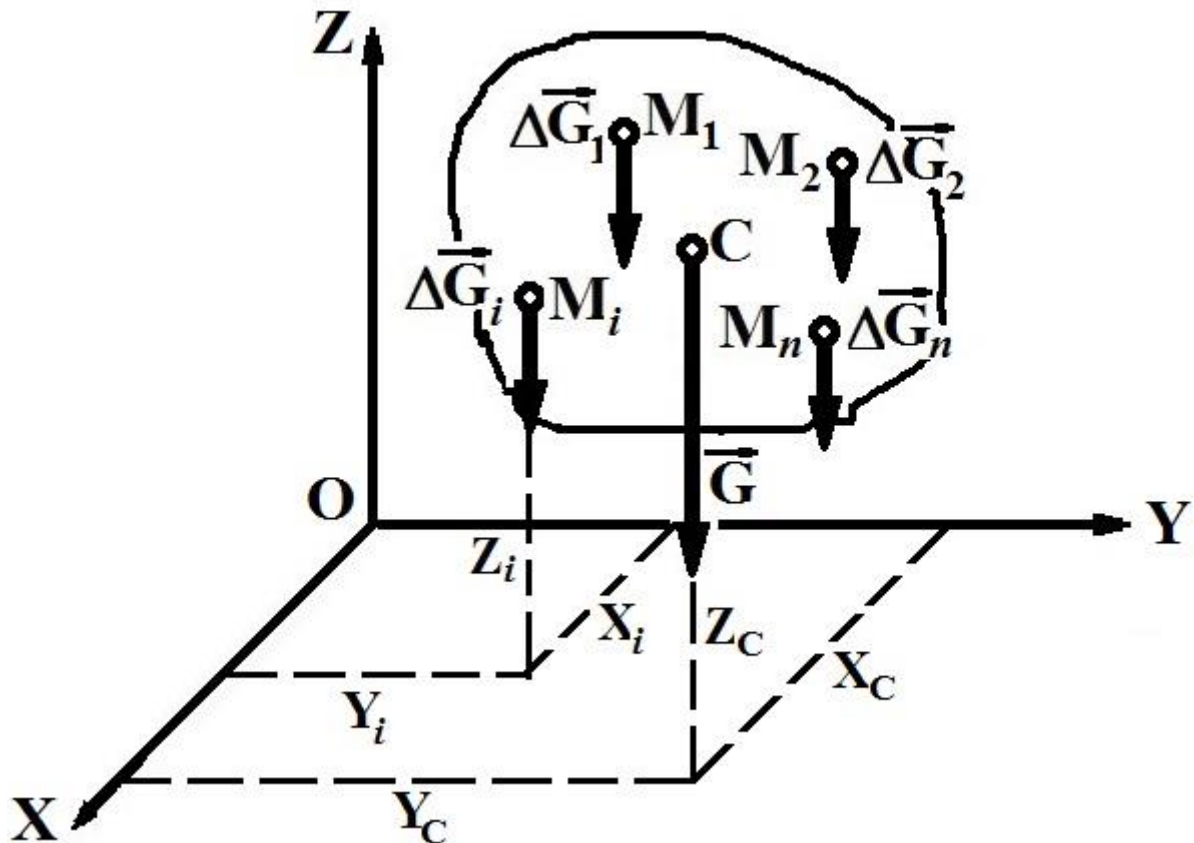


Рисунок 3.1.

Позначимо сили тяжіння окремих частинок тіла  $\Delta\vec{G}_1, \Delta\vec{G}_2, \dots, \Delta\vec{G}_n$ , вагу тіла  $\vec{G}$ , координати його центру ваги  $x_c, y_c, z_c$ , а координати довільної частини тіла  $x_i, y_i, z_i$  (рис. 3.1). Тоді для центру ваги:

$$\begin{cases} x_c = \sum x_i \Delta G_i / G \\ y_c = \sum y_i \Delta G_i / G \\ z_c = \sum z_i \Delta G_i / G \end{cases} \quad (3.1)$$

### 3.2. Центр ваги плоскої фігури. Статичний момент площі плоскої фігури відносно осі

Існують різні експериментальні методи знаходження центру ваги, до яких можна віднести метод підвісу та метод зважування.

Положення центру ваги за методом підвісу визначають так: підвішують тіло на нитці у довільній точці тіла та продовжують напрям нитки в тілі (прорисовують лінію на поверхні тіла); підвішують тіло на нитці в іншій точці і знову визначають на тілі продовження нитки. Точка перетину продовжених напрямків нитки й буде центром ваги тіла. Цей метод дозволяє визначити центр ваги неоднорідного тіла складної конфігурації.

Метод зважування використовують для знаходження центру ваги складних тіл значної ваги.

Розглянемо аналітичний спосіб визначення центру ваги, який базується на обчисленні статичних моментів плоскої фігури.

**Сума добутків елементарних площин, які входять до складу фігури, на алгебраїчні значення їхніх відстаней до деякої осі називається статичним моментом площі плоскої фігури відносно цієї осі.**

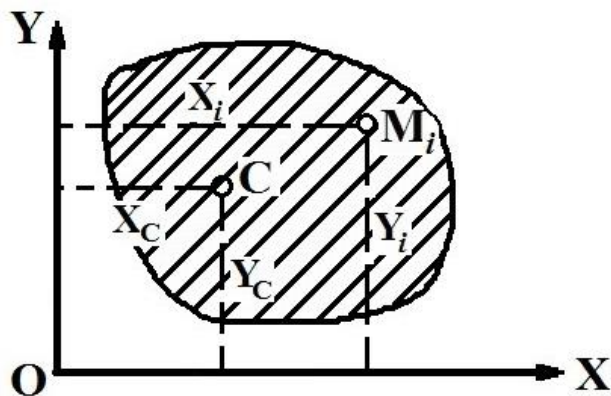


Рисунок 3.2.

Центром ваги площі вважають центр ваги однорідної тонкої пластини однакової товщини, основа якої займає дану площу. Положення центру ваги плоскої фігури визначається двома координатами  $x_C$  і  $y_C$  (рис. 3.2). Позначаючи  $S_X$  та  $S_Y$  статичні моменти площі плоскої фігури відносно осей  $X$  і  $Y$ , маємо:

$$S_X = \sum y_i F_i = F y_C, \quad S_Y = \sum x_i F_i = F x_C. \quad (3.2)$$

де  $F$  – площа плоскої фігури. Тоді:

$$x_C = \frac{S_Y}{F}, \quad y_C = \frac{S_X}{F}. \quad (3.3)$$

Очевидно, що статичний момент площі плоскої фігури відносно осі, що проходить через центр ваги фігури, дорівнює нулю.

Якщо однорідне тіло має площину, вісь або центр геометричної симетрії, то центр ваги цього тіла лежить у площині, на осі або у центрі симетрії.

### 3.3. Визначення центру ваги плоскої фігури по центрах ваги її частин. Метод додавання та метод відняття

Нехай потрібно визначити положення центру ваги деякої плоскої фігури, що складається з трьох частин, положення центрів ваги якої відомо (рис. 3.3).

Площі частин відповідно дорівнюють  $F_1, F_2, F_3$ , а координати центрів ваги  $C_1, C_2, C_3$  будуть  $x_1$  і  $y_1, x_2$  і  $y_2, x_3$  і  $y_3$ .

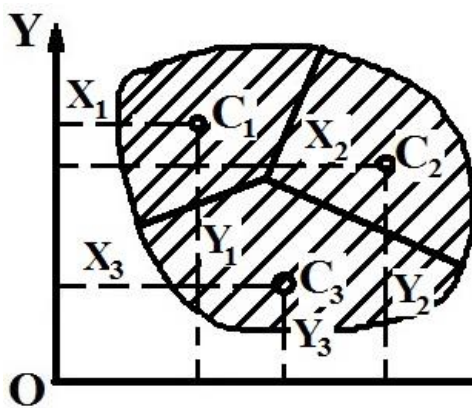


Рисунок 3.3.

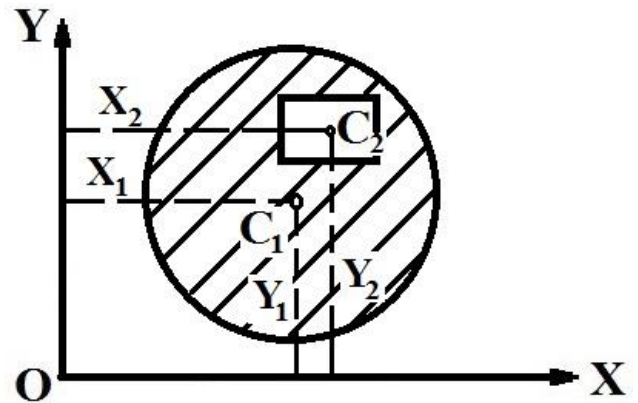


Рисунок 3.4.

Статичні моменти площі плоскої фігури відносно осей координат дорівнюють сумам статичних моментів площин окремих її частин, які можна визначити:

$$S_Y = F_1 x_1 + F_2 x_2 + F_3 x_3, \quad S_X = F_1 y_1 + F_2 y_2 + F_3 y_3.$$

Тоді для координат  $x_C$  і  $y_C$  маємо з урахуванням (3.3):

$$x_C = \frac{F_1 x_1 + F_2 x_2 + F_3 x_3}{F} = \frac{1}{F} \sum x_i F_i, \quad y_C = \frac{F_1 y_1 + F_2 y_2 + F_3 y_3}{F} = \frac{1}{F} \sum y_i F_i. \quad (3.4)$$

Цей спосіб можна використовувати і для плоскої фігури площею  $F_1$ , з якої вирізана деяка частина площею (рис. 3.4), приймаючи площу вирізаної фігури від'ємною. Площа частини, що залишилась, дорівнює  $F_1 - F_2$ , а статичний момент – різниці статичних моментів фігур. Тоді:

$$x_C = \frac{F_1 x_1 - F_2 x_2}{F_1 - F_2}, \quad y_C = \frac{F_1 y_1 - F_2 y_2}{F_1 - F_2}. \quad (3.5)$$

Цей спосіб має назву способу від'ємних площин.

Зазначений підхід з певними перетвореннями можна використовувати і для визначення положення центру ваги твердих тіл, які складаються з одновимірних фігур (коли розмір в одному з напрямів значно, на порядок і більше, перевищує розмір у двох інших напрямках) – стержнів, а також для об'ємних, тривимірних фігур (коли розміри в усіх трьох напрямках одного порядку) – блоків.

У робочих формулах типу (3.4), (3.5) потрібно для стержньових тіл замінити площу на довжину, а для об'ємних тіл – на об'єм, з урахуванням кількості елементів конструкцій. Очевидно, для стержньових конструкцій поняття «від'ємності довжин» не має сенсу, тому формули типу (3.5) не використовують. Це приводить до перетворення виразів (3.2) і (3.3) до вигляду:

- для однорідного тіла

$$x_C = \frac{1}{V} \sum x_i V_i, \quad y_C = \frac{1}{V} \sum y_i V_i, \quad z_C = \frac{1}{V} \sum z_i V_i, \quad (3.6)$$

де  $x_C, y_C, z_C$  – координати центру ваги,  $x_i, y_i, z_i$  – координати центрів ваги  $i$ -ої окремої частини тіла,  $V_i$  – об'єм  $i$ -ої окремої частини тіла,  $V$  – загальний об'єм тіла;

- для стержньової конструкції

$$x_C = \frac{1}{L} \sum x_i l_i, \quad y_C = \frac{1}{L} \sum y_i l_i, \quad z_C = \frac{1}{L} \sum z_i l_i, \quad (3.7)$$

де  $x_C, y_C, z_C$  – координати центру ваги,  $x_i, y_i, z_i$  – координати центрів ваги  $i$ -ої окремого стержня,  $l_i$  – довжина  $i$ -ого окремого стержня,  $L$  – загальна довжина стержньової конструкції  $L = \sum l_i$ . Очевидно, для плоскої конструкції в площині  $xu$  координата  $z$  зникає, залишаються вирази для  $x_C$  і  $y_C$ .

У загальному випадку від сум потрібно переходити до інтегрування.

## **Завдання С.0. Визначення реакцій опор стержньової конструкції**

Для заданої стержньової конструкції, яка знаходиться під зовнішнім навантаженням, визначити реакції опор.

### **Мета:**

- 1) ознайомлення з принциповими схемами стержньових конструкцій;
- 2) ознайомлення з різними найпоширенішими типами закріплення конструкції (в'язями) та їх замінами певними реакціями;
- 3) навчитися аналізувати активні силові чинники, їх розмірності, за потреби робити розкладання сил по осях, приводити розподілене навантаження до еквівалентної за дією зосередженої сили;
- 4) під час складання рівнянь рівноваги навчитися використовувати правило знаків для проєкцій сил та визначення моментів сил відносно точки;
- 5) набуття вміння застосування рівнянь рівноваги для плоскої системи.

Запропоноване завдання є фактично вступним у розділі «Статика», під час вирішення якого здобувачі вищої освіти мають ознайомитися з плоскою стержньовою конструкцією під дією плоскої системи сил. Стержньова конструкція часто представлена у вигляді зламаної лінії, навантаження у вигляді зосередженої сили, зосередженого моменту (пари сил) та розподіленого на певній ділянці навантаження. Закріплення конструкції дано у вигляді типових в'язей – нерухомого шарніру, рухомого шарніру та жорсткого закладення. Потрібно вміти замінювати ці в'язі відповідними реакціями, складати систему активних і реактивних сил, і в подальшому використовувати рівняння рівноваги для визначення опорних реакцій. Зокрема, все це можна звести до наступного плану розв'язання задач на рівновагу сил:

- 1) виділення об'єкту рівноваги, до якого прикладена система сил, які взаємно урівноважуються;
- 2) показ всіх діючих на тіло активних (тих, які задаються) сил;
- 3) згідно з принципом звільнення від в'язей їх дію замінюють реакціями в'язей;
- 4) для отриманої системи сил складають рівняння рівноваги;



5) з отриманої системи лінійних рівнянь визначають шукані величини.

За потреби, коли сила діє під певним кутом, тобто не спрямована ані за горизонталлю, ані за вертикаллю, необхідно визначати її проекції на відповідні осі, для чого використовують тригонометричні функції кута.

Для плоскої системи вводиться прямокутна (декартова) система координат з осями  $X$  і  $Y$ , вісь  $Z$  перпендикулярна до площини рисунку і проходить через відповідну точку. При знаходженні моменту сили відносно визначеної точки потрібно:

- 1) визначити найкоротшу відстань (плече) від лінії дії сили до точки, відносно якої складається рівняння моментів;
- 2) скласти алгебраїчний добуток сили на плече;
- 3) визначити знак за правилом – прагнення сили повернути конструкцію відносно точки проти годинникової стрілки означатиме знак «+», за годинниковою знак «-»;
- 4) коли лінія дії сили перетинає точку момент сили відносно точки дорівнює нулю.

Для зосередженого моменту плеча не існує, потрібно визначати знак за правилом знаків для моментів.

Більш докладно про це сказано у розділі 2.1.

### Приклад виконання завдання (шарнірне спирання балки)

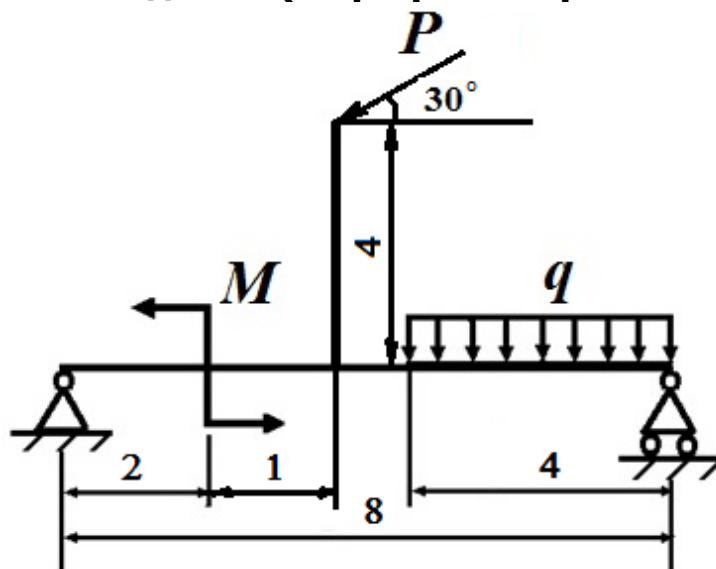


Рисунок 1

**Дано:** схема закріплення бруса (рис. 1); сили чинники  $P = 12$  кН,  $M = 5$  кН·м,  $q = 3$  кН/м.

**Визначити:** реакції опор.

**Розв'язання.** Розглянемо систему сил, які урівноважуються, та які прикладені до конструкції.

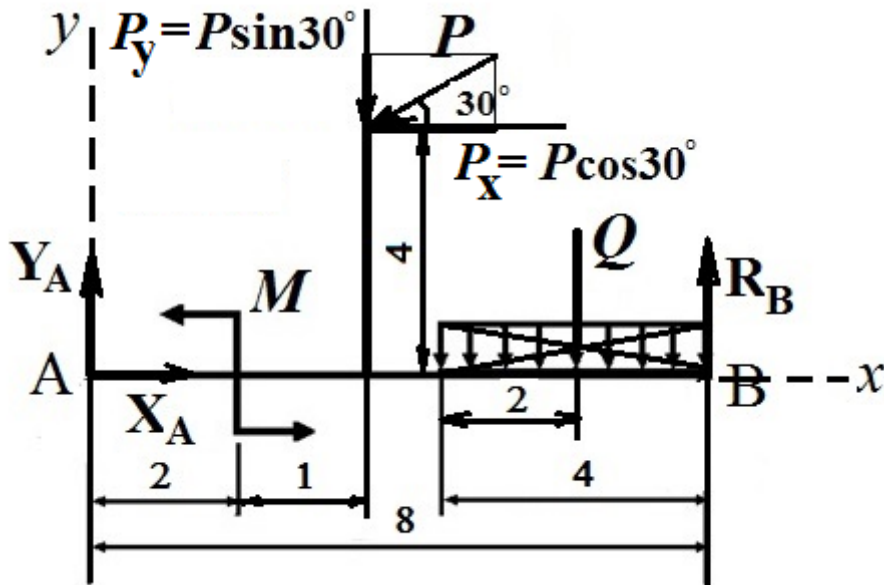


Рисунок 2

Рівномірно розподілене навантаження інтенсивністю  $q$  замінюємо рівнодіючою:

$$Q = q \cdot 4 = 12 \text{ кН.}$$

Ця рівнодіюча за умови постійності  $q$  прикладена посередині ділянки стержня довжиною 4 м, на якому діє (рис. 2), у напрямі дії інтенсивності  $q$ .

Сила  $P$  діє під кутом, тому доцільно розкласти силу по осях, проектуючи на відповідні осі та округлюючи за потреби відповідні числові значення до сотих:

$$P_x = P \cos 30^\circ = 12 \cdot 0,866 = 10,39 \text{ кН;}$$

$$P_y = P \sin 30^\circ = 12 \cdot 0,5 = 6 \text{ кН.}$$

Перед початком вирішення задачі слід визначити кількість невідомих реакцій. Дію в'язей на конструкцію замінимо їх реакціями (рис. 2) відповідно до схеми:

- 1) нерухомий шарнір А замінюємо двома реакціями  $X_A$  та  $Y_A$ , спрямованими відповідно у позитивних напрямках вздовж осей  $X$  та  $Y$ ;
- 2) рухомий шарнір В замінюємо реакцією  $R_B$ , спрямованою за нормаллю до площини, на якій знаходиться шарнір.

Для схеми закріплення кількість невідомих 3 ( $X_A$ ,  $Y_A$ ,  $R_B$ ) дорівнює кількості рівнянь рівноваги для плоскої системи 3:

$$\sum_{i=1}^n F_{iX} = 0, \quad \sum_{i=1}^n F_{iY} = 0, \quad \sum_{i=1}^n M_{OZ}(\vec{F}_i) = 0, \quad (1)$$

що означатиме статично визначену задачу. Вісь  $Z$  вважається перпендикулярною до площини рисунку, вибір напрямів осей  $X$  та  $Y$  є довільним, в задачі напрям показано на рисунках.

Складаємо відповідні рівняння рівноваги відповідно до виразів (1). Якщо напрям відповідної сили збігається з позитивним напрямом осі, проекція цієї сили є додатною, в іншому випадку – від'ємною.

$$\text{На вісь } X: \sum_i F_{iX} = 0;$$

$$X_A - P_X = 0, \quad (2)$$

звідки  $X_A = P_X = 10,39$  кН.

$$\text{На вісь } Y: \sum_i F_{iY} = 0;$$

$$Y_A - P_Y - Q + R_B = 0, \quad (3)$$

звідки  $Y_A + R_B = P_Y - Q = 6 + 12 = 18$  кН.

В отриманому виразі дві невідомих, для визначення будь-якої з них потрібно задіяти останнє рівняння рівноваги – рівняння моментів відносно довільної точки, наприклад, точки А. На рис. 3 схематично показано сили, їх лінії дії та плечі відповідно точки А. З урахуванням правила знаків для моментів складемо відповідне рівняння:

$$\sum_i M_{iA} = 0,$$

$$R_B \cdot 8 - Q \cdot 6 + P_X \cdot 4 - P_Y \cdot 3 + M = 0, \quad (4)$$

звідки

$$R_B = \frac{Q \cdot 6 - P_X \cdot 4 + P_Y \cdot 3 - M}{8} = \frac{12 \cdot 6 - 10,39 \cdot 4 + 6 \cdot 3 - 5}{8} = 5,43 \text{ кН.}$$

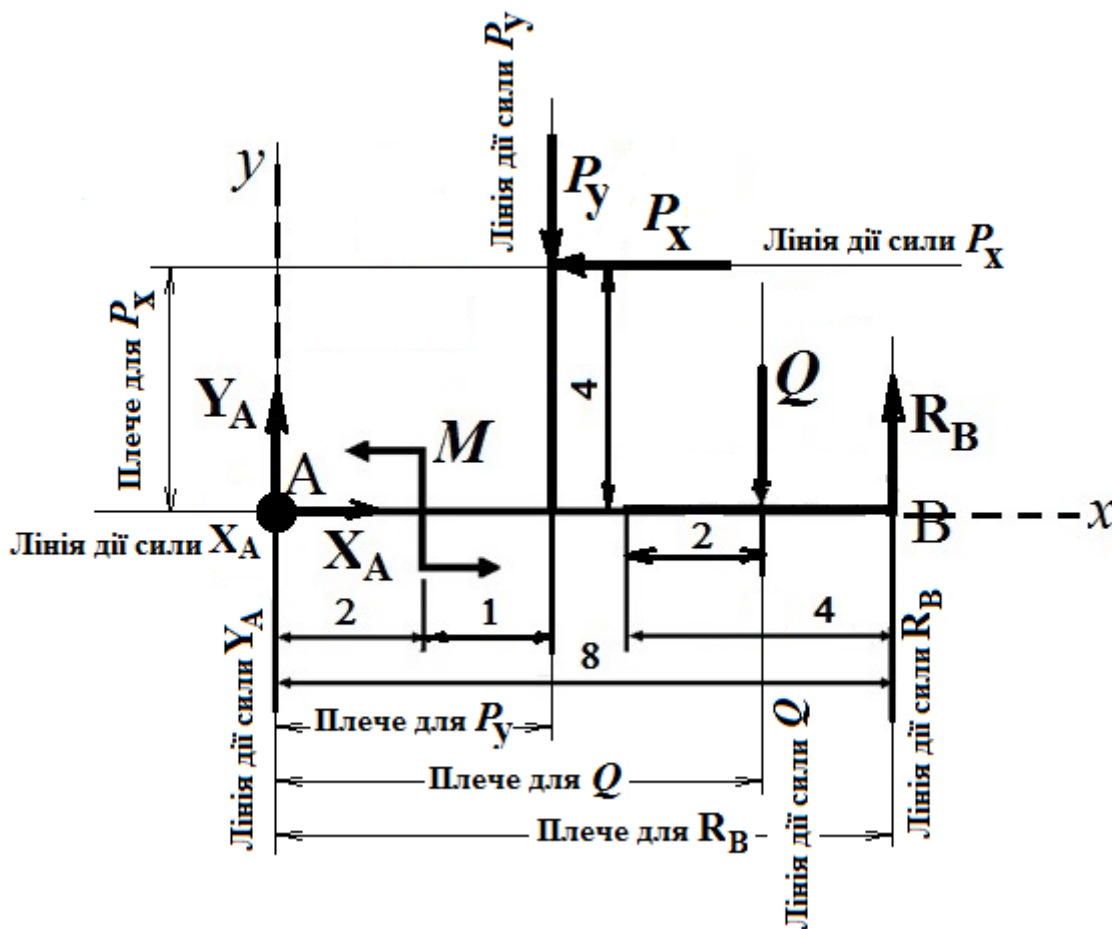


Рисунок 3

З виразу (3)  $Y_A = 18 - R_B = 18 - 5,43 = 12,57$  кН. Безумовно, рівняння моментів можна скласти відповідно будь-якої точки, але доцільно обирати таку, що дозволяє позбутися в цьому рівнянні другої невідомої. Вибір точки А виключає з рівняння реакцію  $Y_A$  як таку, що знаходиться саме в цій точці. Звичайно, реакція  $X_A$  за тієї ж причини не дає моменту відносно точки А.

Як перевірку правильності отриманих числових значень доречно скласти рівняння моментів відносно іншої точки, наприклад, точки В. Тоді маємо:

$$\sum_i M_{iB} = 0,$$

$$\begin{aligned} & -Y_A \cdot 8 + M + P_Y \cdot 5 + P_X \cdot 4 + Q \cdot 2 = \\ & = -12,57 \cdot 8 + 5 + 6 \cdot 5 + 10,39 \cdot 4 + 12 \cdot 2 = 0. \end{aligned}$$

Таким чином, опорні реакції визначено вірно, Додатні значення отриманих реакцій показують, що попередньо обрані напрями реакцій обрано вірно. За умов від'ємності реакції у реальності спрямовані у протилежний бік.

### Приклад виконання завдання (жорстке закладення балки)

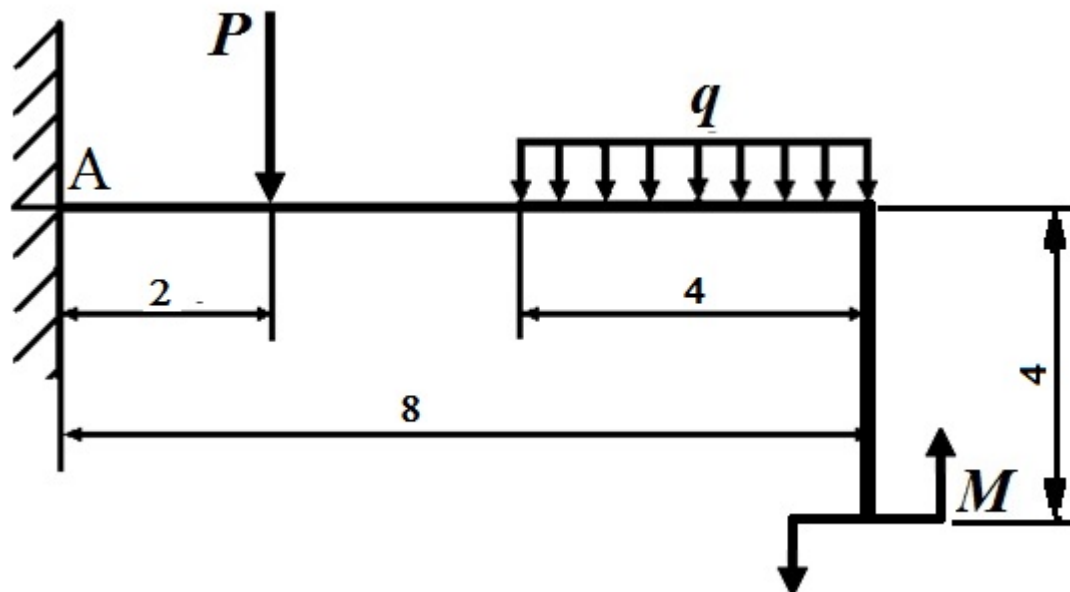


Рисунок 4

**Дано:** схема закріплення бруса (рис. 1); силові чинники  $P = 12$  кН,  $M = 5$  кН·м,  $q = 3$  кН/м.

**Визначити:** реакції в жорсткому закладенні.

**Розв'язання.** Розглянемо систему сил, які урівноважуються, та які прикладені до конструкції.

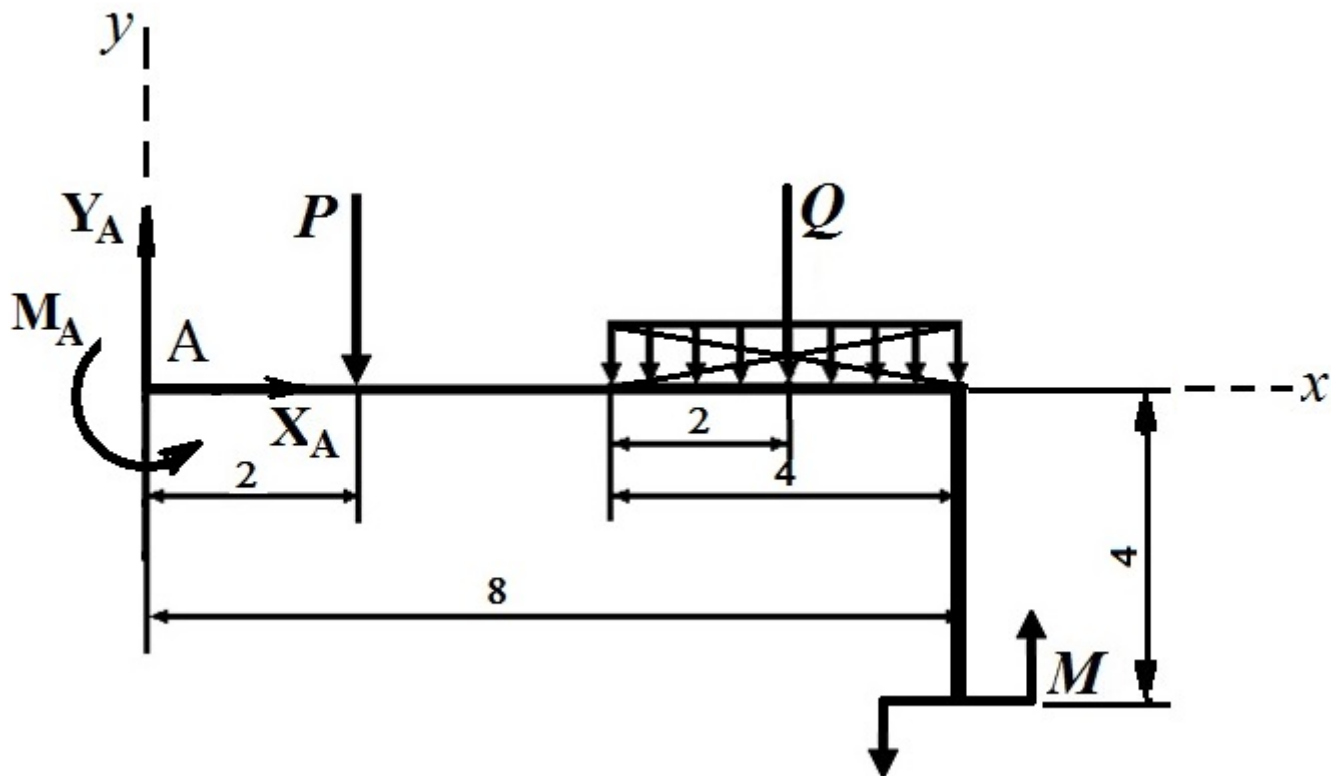


Рисунок 5.

Рівномірно розподілене навантаження інтенсивністю  $q$  замінюємо рівнодіючою:

$$Q = q \cdot 4 = 12 \text{ кН.}$$

Ця рівнодіюча за умови постійності  $q$  прикладена посередині ділянки стержня довжиною 4 м, на якому діє (рис. 5), у напрямі дії інтенсивності  $q$ .

Перед початком вирішення задачі слід визначити кількість невідомих реакцій. Дію в'язей на конструкцію замінимо їх реакціями (рис. 5) відповідно до схеми:

жорстке закладення в точці А замінюємо двома реакціями  $X_A$  та  $Y_A$ , спрямованими відповідно у позитивних напрямках вздовж осей  $X$  та  $Y$ , та реактивним моментом  $M_A$ , спрямованим проти дії годинникової стрілки.

Для схеми закріплення кількість невідомих 3 ( $X_A$ ,  $Y_A$ ,  $M_A$ ) дорівнює кількості рівнянь рівноваги для плоскої системи 3:

$$\sum_{i=1}^n F_{iX} = 0, \quad \sum_{i=1}^n F_{iY} = 0, \quad \sum_{i=1}^n M_{OZ}(\vec{F}_i) = 0,$$

що означатиме статично визначену задачу. Вісь  $Z$  вважається перпендикулярною до площини рисунку, вибір напрямів осей  $X$  та  $Y$  є довільним, в задачі напрям показано на рисунках.

Складаємо відповідні рівняння рівноваги. Якщо напрям відповідної сили збігається з позитивним напрямом осі, проекція цієї сили є додатною, в іншому випадку – від’ємною.

На вісь  $X$ :  $\sum_i F_{iX} = 0$ ; звідки

$$X_A = 0.$$

На вісь  $Y$ :  $\sum_i F_{iY} = 0$ ;

$$Y_A - P - Q = 0,$$

звідки  $Y_A = P + Q = 12 + 12 = 24$  кН.

Рівняння моментів складаємо відносно точки  $A$ . Визначаючи лінії дії сил, плечі для них (на рисунку це не показано, але принцип побудови показано у попередньому прикладі) та з урахуванням правила знаків для моментів складемо відповідне рівняння:

$$\sum_i M_{iA} = 0,$$

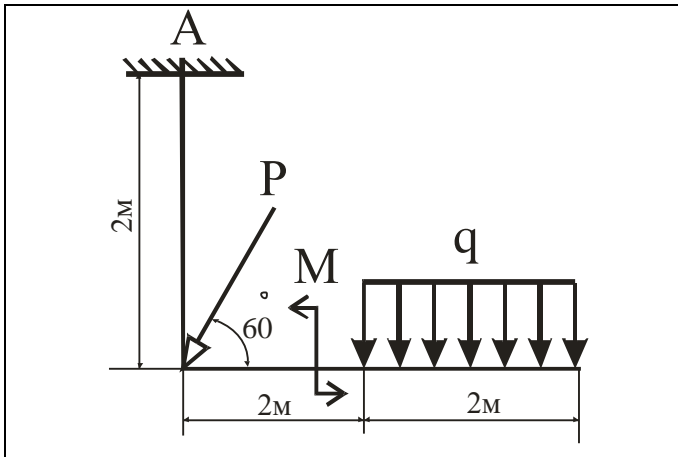
$$M_A - P \cdot 2 - Q \cdot 6 + M = 0,$$

$$M_A = P \cdot 2 + Q \cdot 6 - M = 12 \cdot 2 + 12 \cdot 6 - 5 = 91 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Додатні значення отриманих реакцій показують, що попередньо обрані напрями реакцій обрано вірно. За умов від’ємності реакції у реальності спрямовані у протилежний бік.

Для конструкцій з жорстким закладенням приємним є той факт, що в’язь замінюється трьома незалежними реакціями, кожна з яких визначається з окремого рівняння рівноваги.

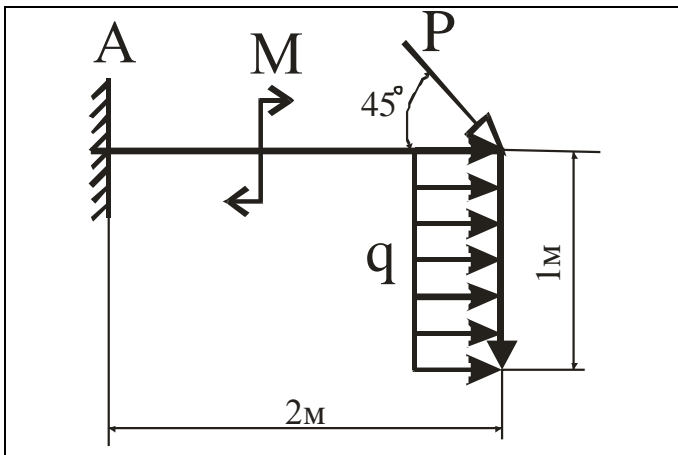
## Варіанти завдань



Варіант № 1

Для заданої конструкції визначити реакції опор.

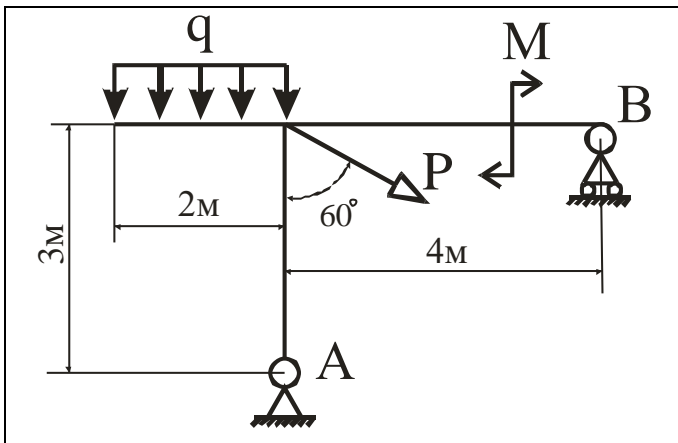
Зовнішні навантаження:  
 $P = 10 \text{ кН}$   
 $M = 6 \text{ кН}\cdot\text{м}$   
 $q = 2 \text{ кН/м}$



Варіант № 2

Для заданої конструкції визначити реакції опор.

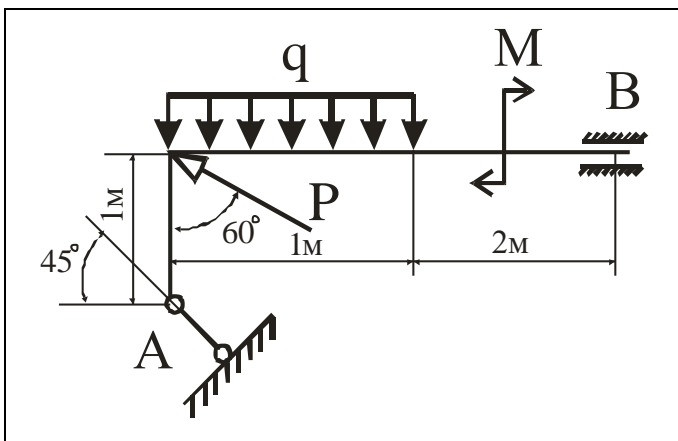
Зовнішні навантаження:  
 $P = 20 \text{ кН}$   
 $M = 5 \text{ кН}\cdot\text{м}$   
 $q = 4 \text{ кН/м}$



Варіант № 3

Для заданої конструкції визначити реакції опор.

Зовнішні навантаження:  
 $P = 15 \text{ кН}$   
 $M = 8 \text{ кН}\cdot\text{м}$   
 $q = 1 \text{ кН/м}$

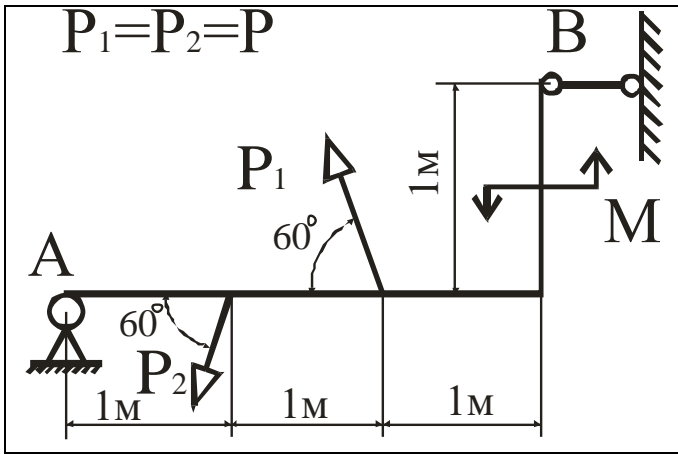


Варіант № 4

Для заданої конструкції визначити реакції опор.

Зовнішні навантаження:  
 $P = 5 \text{ кН}$   
 $M = 2 \text{ кН}\cdot\text{м}$   
 $q = 1 \text{ кН/м}$

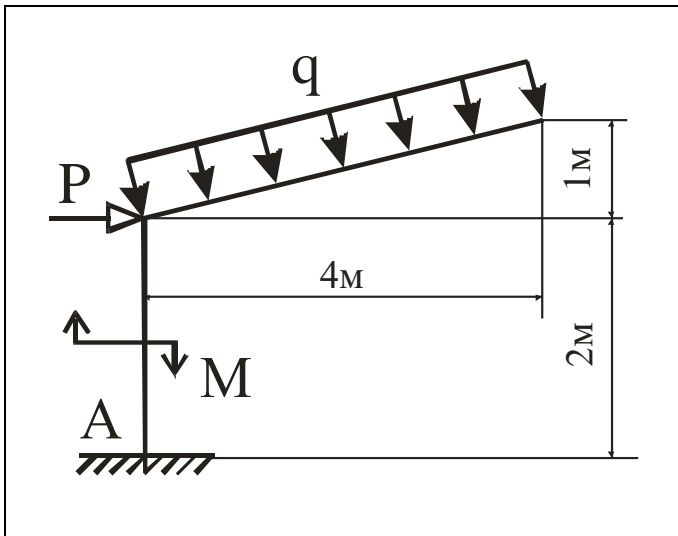




Варіант № 5

Для заданої конструкції визначити реакції опор.

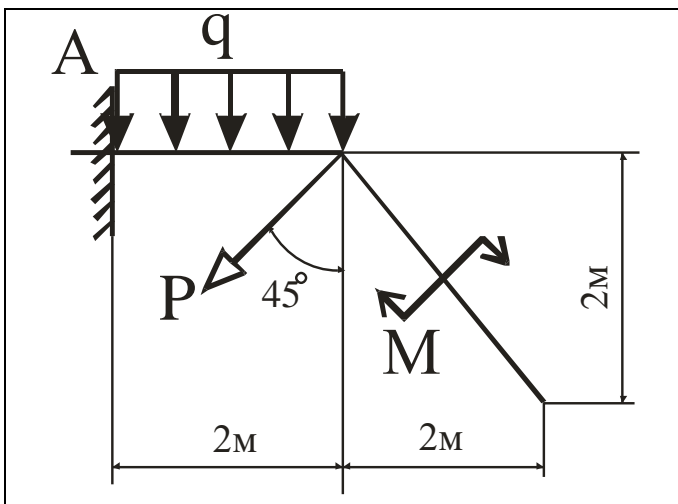
Зовнішні навантаження:  
 $P = 10 \text{ кН}$   
 $M = 4 \text{ кН}\cdot\text{м}$



Варіант № 6

Для заданої конструкції визначити реакції опор.

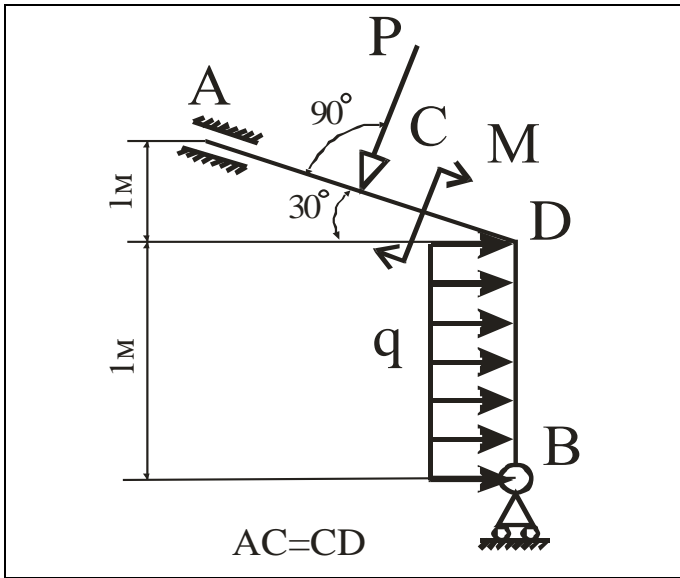
Зовнішні навантаження:  
 $P = 6 \text{ кН}$   
 $M = 2 \text{ кН}\cdot\text{м}$   
 $q = 1 \text{ кН/м}$



Варіант № 7

Для заданої конструкції визначити реакції опор.

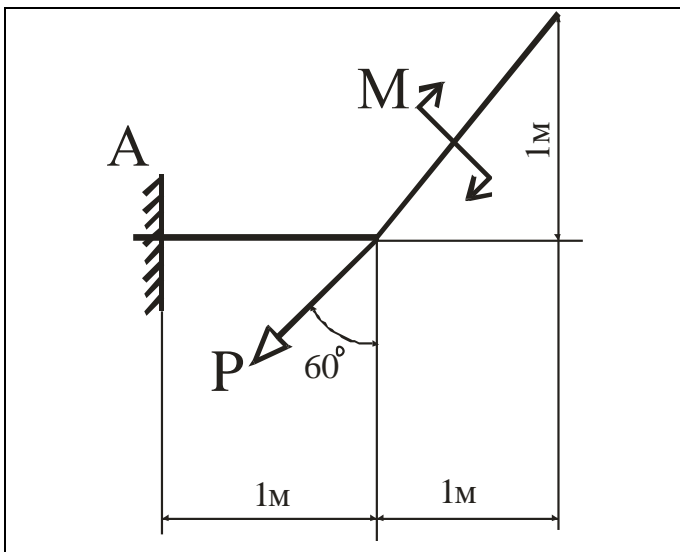
Зовнішні навантаження:  
 $P = 2 \text{ кН}$   
 $M = 4 \text{ кН}\cdot\text{м}$   
 $q = 2 \text{ кН/м}$



Варіант № 8

Для заданої конструкції визначити реакції опор.

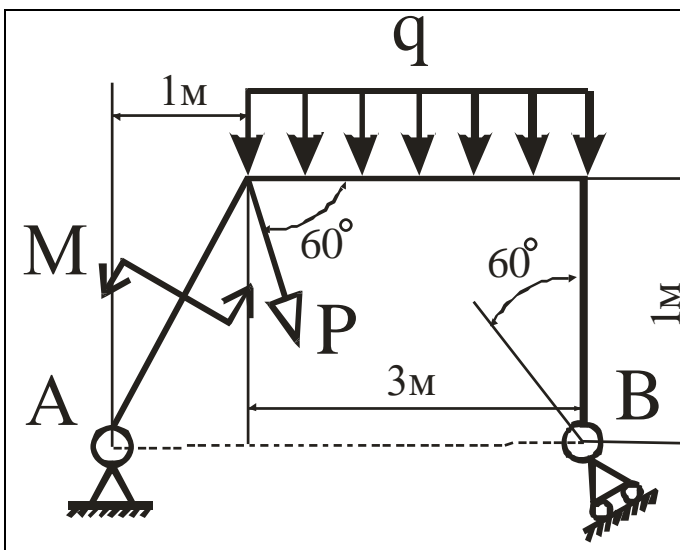
Зовнішні навантаження:  
 $P = 20 \text{ кН}$   
 $M = 10 \text{ кН}\cdot\text{м}$   
 $q = 4 \text{ кН/м}$



Варіант № 9

Для заданої конструкції визначити реакції опор.

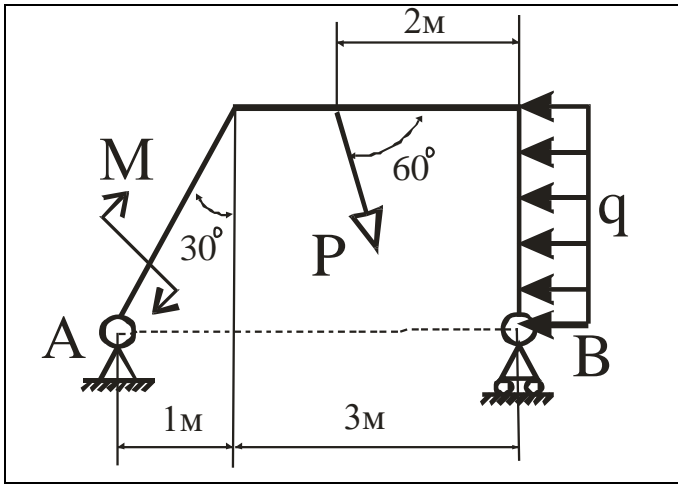
Зовнішні навантаження:  
 $P = 10 \text{ кН}$   
 $M = 6 \text{ кН}\cdot\text{м}$



Варіант № 10

Для заданої конструкції визначити реакції опор.

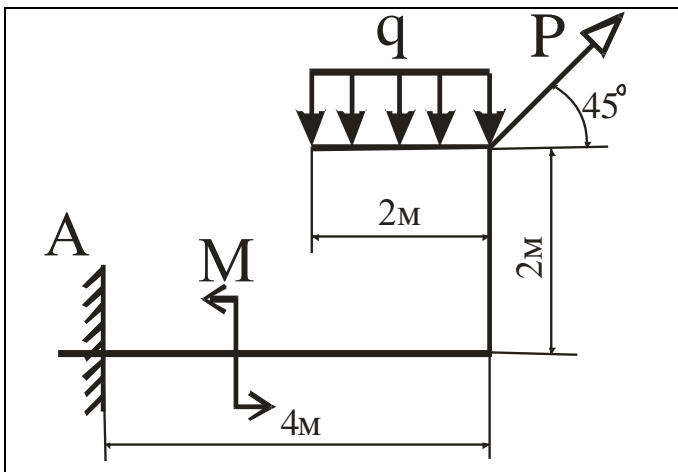
Зовнішні навантаження:  
 $P = 2 \text{ кН}$   
 $M = 4 \text{ кН}\cdot\text{м}$   
 $q = 2 \text{ кН/м}$



Варіант № 11

Для заданої конструкції визначити реакції опор.

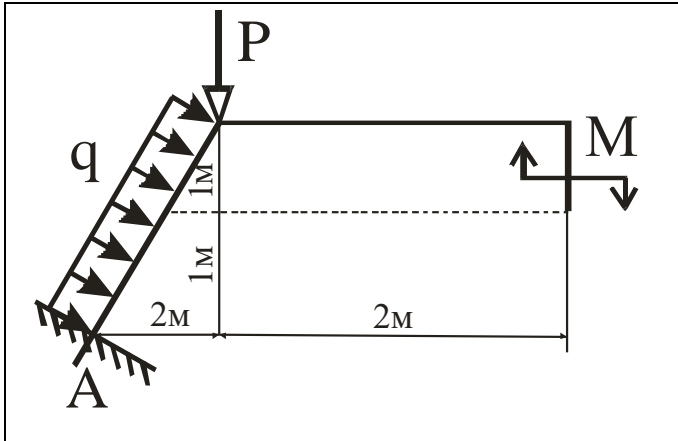
Зовнішні навантаження:  
 $P = 4 \text{ кН}$   
 $M = 10 \text{ кН}\cdot\text{м}$   
 $q = 1 \text{ кН/м}$



Варіант № 12

Для заданої конструкції визначити реакції опор.

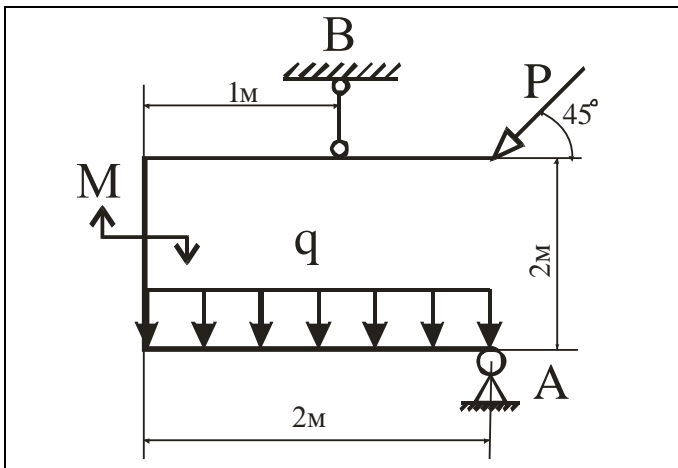
Зовнішні навантаження:  
 $P = 10 \text{ кН}$   
 $M = 5 \text{ кН}\cdot\text{м}$   
 $q = 2 \text{ кН/м}$



Варіант № 13

Для заданої конструкції визначити реакції опор.

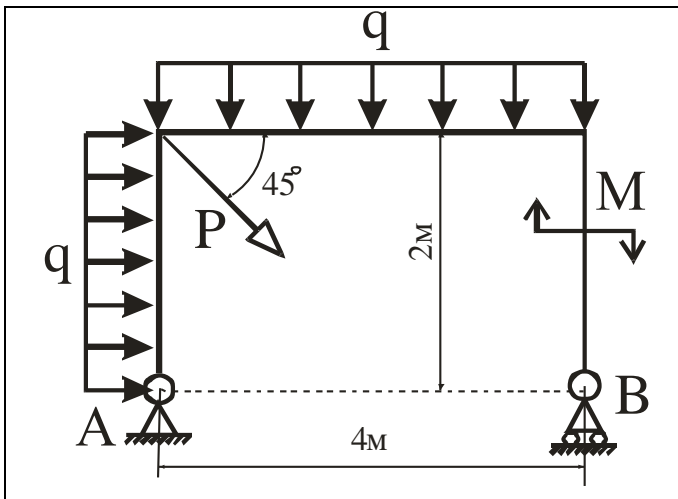
Зовнішні навантаження:  
 $P = 20 \text{ кН}$   
 $M = 12 \text{ кН}\cdot\text{м}$   
 $q = 2 \text{ кН/м}$



Варіант № 14

Для заданої конструкції визначити реакції опор.

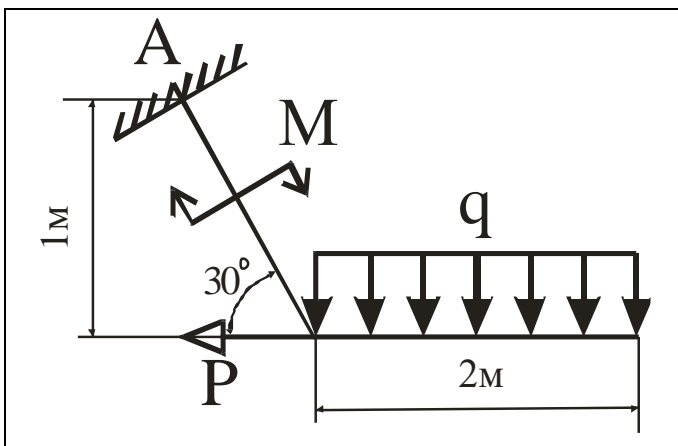
Зовнішні навантаження:  
 $P = 15 \text{ кН}$   
 $M = 4 \text{ кН}\cdot\text{м}$   
 $q = 3 \text{ кН/м}$



Варіант № 15

Для заданої конструкції визначити реакції опор.

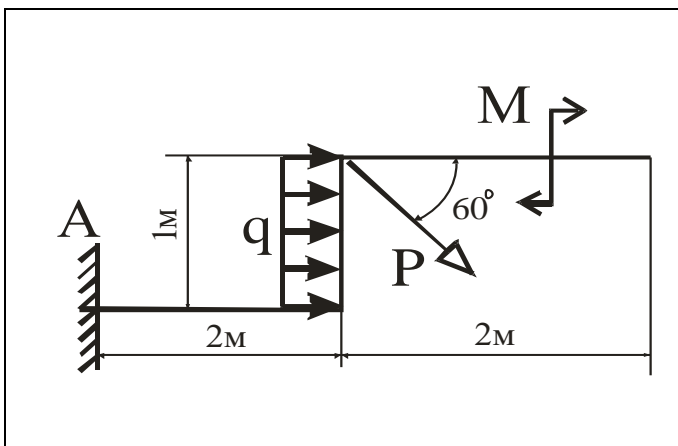
Зовнішні навантаження:  
 $P = 10 \text{ кН}$   
 $M = 5 \text{ кН}\cdot\text{м}$   
 $q = 2 \text{ кН/м}$



Варіант № 16

Для заданої конструкції визначити реакції опор.

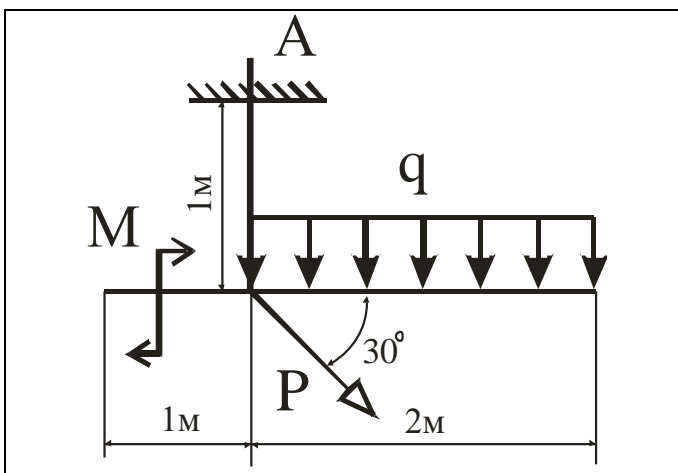
Зовнішні навантаження:  
 $P = 12 \text{ кН}$   
 $M = 6 \text{ кН}\cdot\text{м}$   
 $q = 2 \text{ кН/м}$



Варіант № 17

Для заданої конструкції визначити реакції опор.

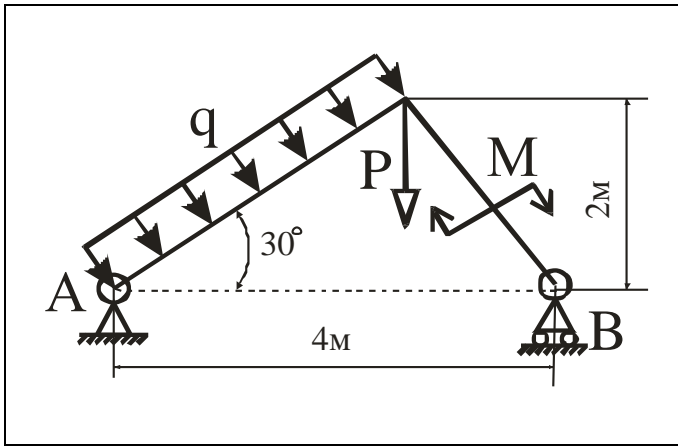
Зовнішні навантаження:  
 $P = 20 \text{ кН}$   
 $M = 4 \text{ кН}\cdot\text{м}$   
 $q = 3 \text{ кН/м}$



Варіант № 18

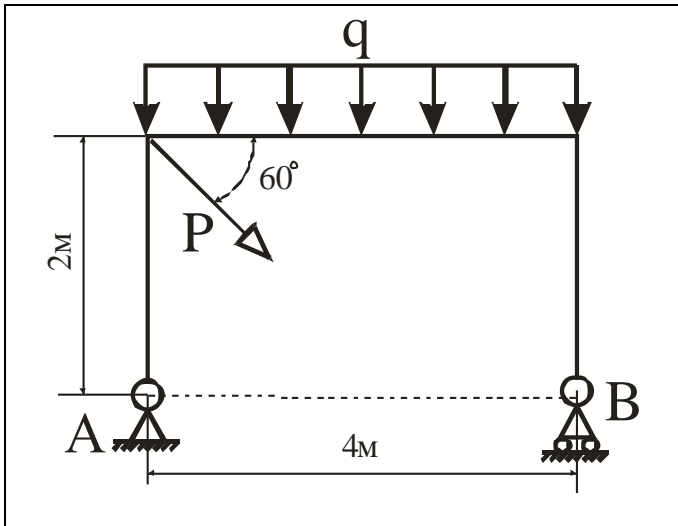
Для заданої конструкції визначити реакції опор.

Зовнішні навантаження:  
 $P = 14 \text{ кН}$   
 $M = 4 \text{ кН}\cdot\text{м}$   
 $q = 2 \text{ кН/м}$



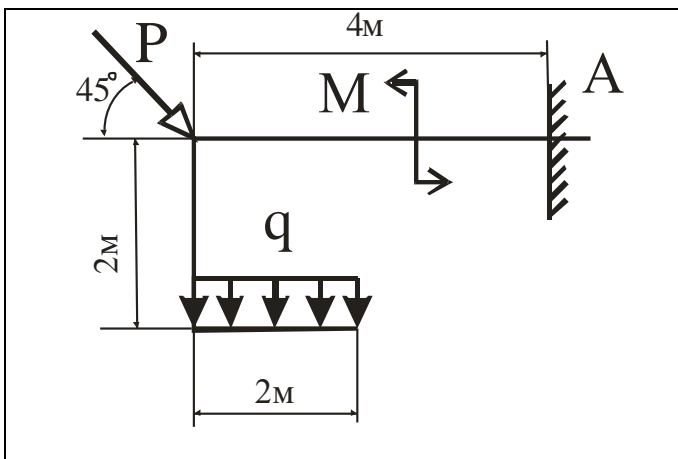
Варіант № 19  
 Для заданої конструкції визначити реакції опор.

Зовнішні навантаження:  
 $P = 16 \text{ кН}$   
 $M = 6 \text{ кН}\cdot\text{м}$   
 $q = 1 \text{ кН/м}$



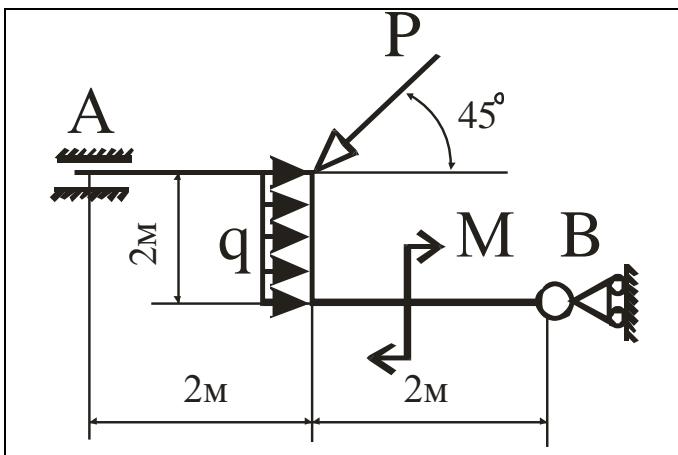
Варіант № 20  
 Для заданої конструкції визначити реакції опор.

Зовнішні навантаження:  
 $P = 10 \text{ кН}$   
 $M = 0 \text{ кН}\cdot\text{м}$   
 $q = 4 \text{ кН/м}$



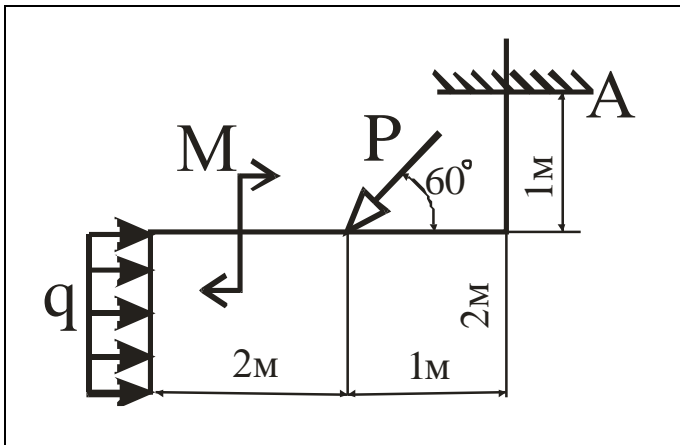
Варіант № 21  
 Для заданої конструкції визначити реакції опор.

Зовнішні навантаження:  
 $P = 20 \text{ кН}$   
 $M = 10 \text{ кН}\cdot\text{м}$   
 $q = 2 \text{ кН/м}$



Варіант № 22  
 Для заданої конструкції визначити реакції опор.

Зовнішні навантаження:  
 $P = 6 \text{ кН}$   
 $M = 6 \text{ кН}\cdot\text{м}$   
 $q = 1 \text{ кН/м}$



Варіант № 23

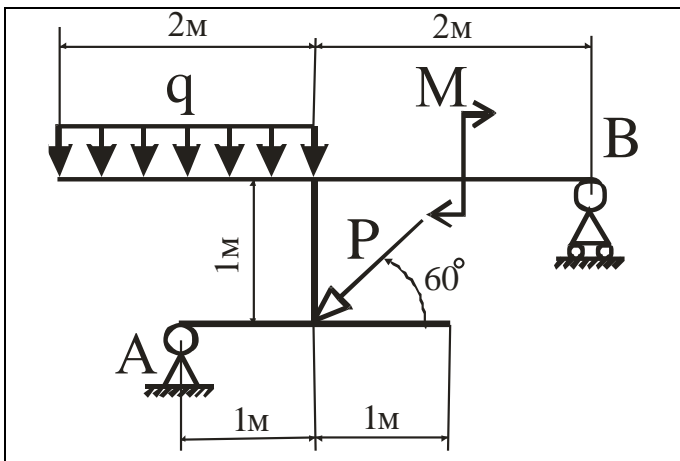
Для заданої конструкції визначити реакції опор.

Зовнішні навантаження:

$P = 10 \text{ кН}$

$M = 4 \text{ кН}\cdot\text{м}$

$q = 2 \text{ кН/м}$



Варіант № 24

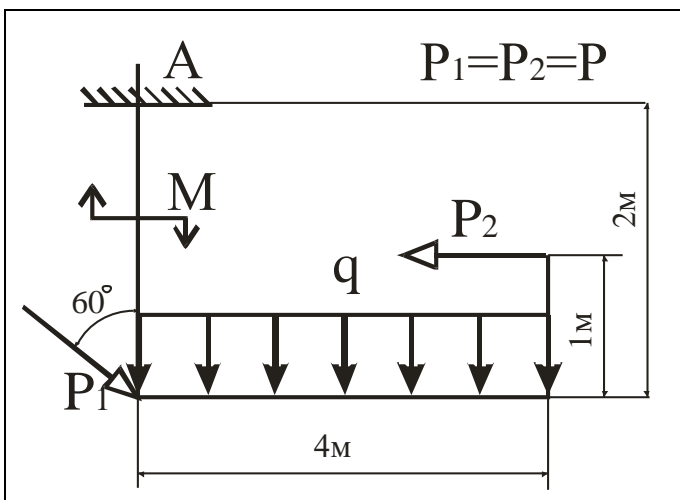
Для заданої конструкції визначити реакції опор.

Зовнішні навантаження:

$P = 4 \text{ кН}$

$M = 3 \text{ кН}\cdot\text{м}$

$q = 1 \text{ кН/м}$



Варіант № 25

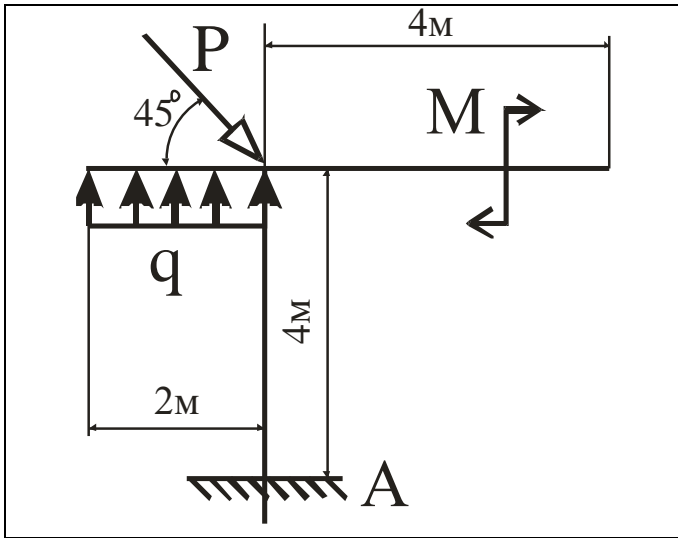
Для заданої конструкції визначити реакції опор.

Зовнішні навантаження:

$P = 10 \text{ кН}$

$M = 10 \text{ кН}\cdot\text{м}$

$q = 2 \text{ кН/м}$



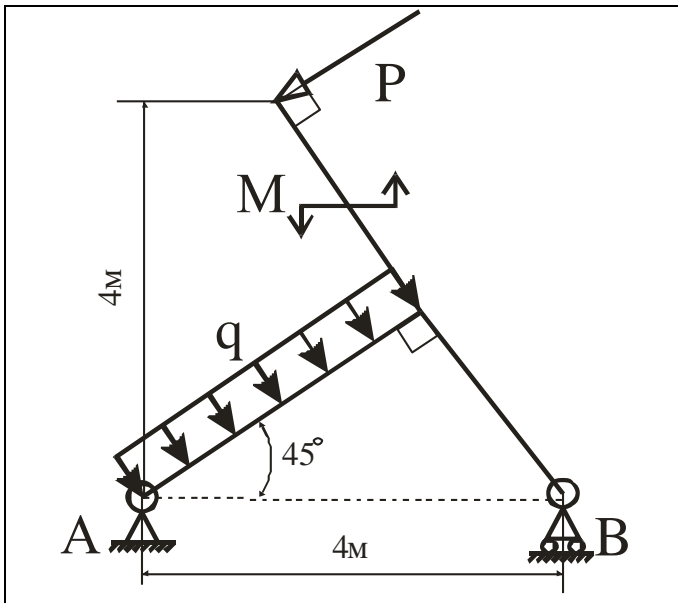
Варіант № 26  
 Для заданої конструкції  
 визначити реакції опор.

Зовнішні навантаження:

$$P = 20 \text{ кН}$$

$$M = 5 \text{ кН}\cdot\text{м}$$

$$q = 2 \text{ кН/м}$$



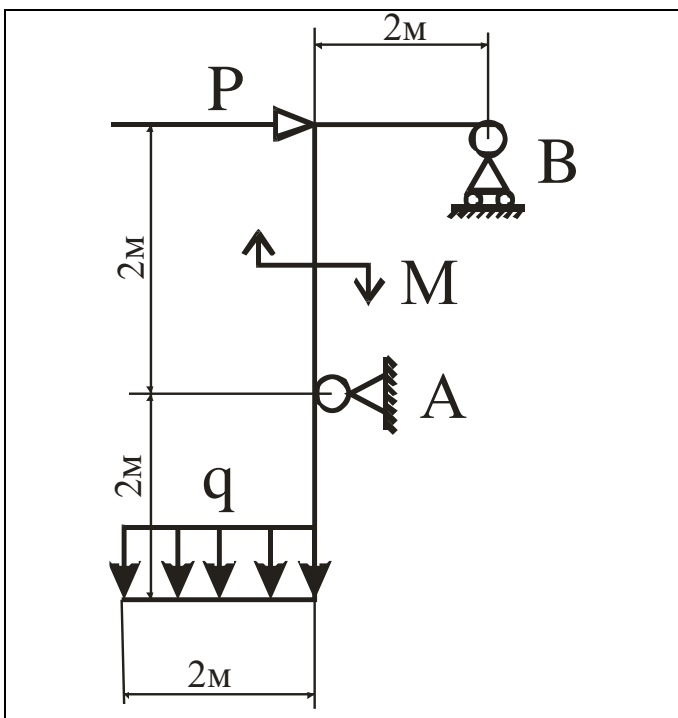
Варіант № 27  
 Для заданої конструкції  
 визначити реакції опор.

Зовнішні навантаження:

$$P = 10 \text{ кН}$$

$$M = 6 \text{ кН}\cdot\text{м}$$

$$q = 1 \text{ кН/м}$$



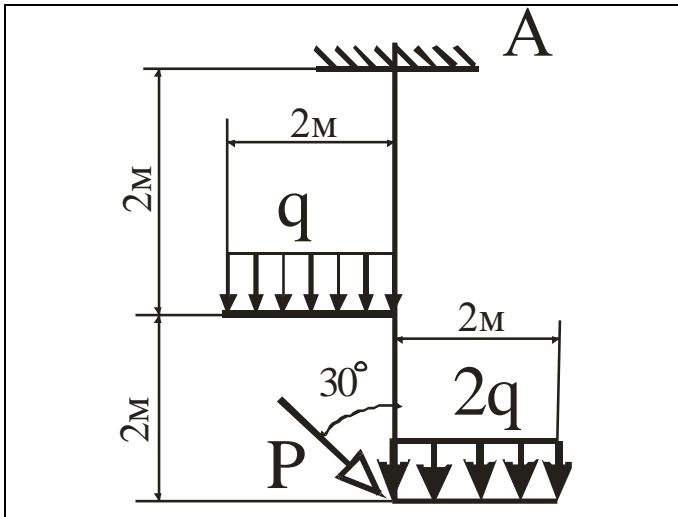
Варіант № 28  
 Для заданої конструкції  
 визначити реакції опор.

Зовнішні навантаження:

$$P = 20 \text{ кН}$$

$$M = 10 \text{ кН}\cdot\text{м}$$

$$q = 2 \text{ кН/м}$$

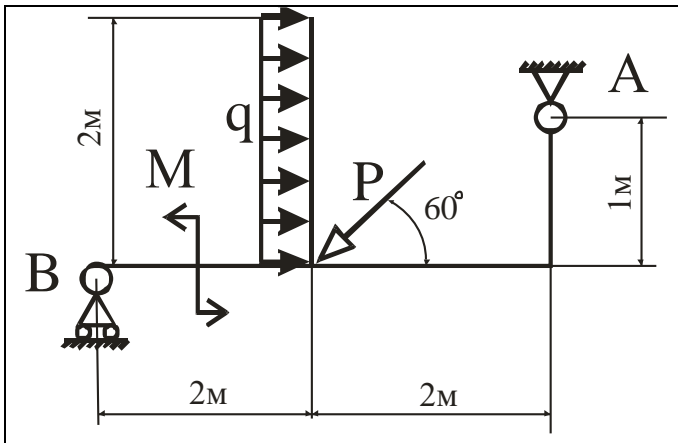


Варіант № 29  
 Для заданої конструкції  
 визначити реакції опор.

Зовнішні навантаження:

$$P = 25 \text{ кН}$$

$$q = 1 \text{ кН/м}$$



Варіант № 30  
 Для заданої конструкції  
 визначити реакції опор.

Зовнішні навантаження:

$$P = 30 \text{ кН}$$

$$M = 20 \text{ кН}\cdot\text{м}$$

$$q = 10 \text{ кН/м}$$



## Завдання С.1. Визначення реакцій опор твердого тіла (три варіанти закріплення конструкції)

Визначити для стержньової конструкції, яка має три варіанти закріплення, той, для якого запропонована реакція опори є найменшою за модулем. Для визначеного варіанта обчислити решту реакцій опор.

### Мета:

- 1) ознайомлення з принциповими схемами стержньових конструкцій, для яких надано декілька варіантів закріплення;
- 2) подальше опанування набутих під час виконання Завдання С.0 вмінь щодо розв'язання задач на рівновагу для плоских стержньових конструкцій;
- 3) набуття вміння визначення схеми закріплення, для якої запропонована реакція буде найменшою за модулем;
- 4) для означеної схеми закріплення визначення решти реакцій.

Перед початком вирішення завдання доцільно повторно опрацювати вступну частину до виконання завдання С.0.

### Приклад виконання завдання.

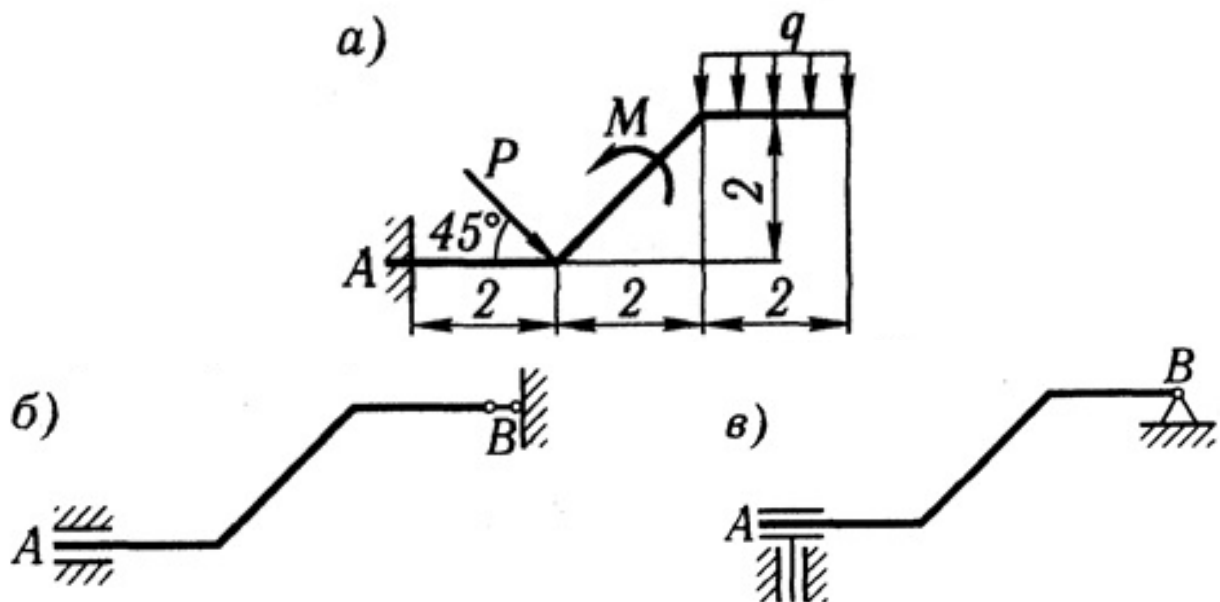


Рисунок 1.

**Дано:** схеми закріплення бруса (рис. 1, а, б, в); сили чинники  $P = 5$  кН,  $M = 8$  кН·м,  $q = 1,2$  кН/м. Для схем б) і в) зовнішнє навантаження аналогічно до схеми а).

**Визначити:** реакції опор для того способу закріплення, за якого момент  $M_A$  в закладенні має найменше числове значення.

**Розв'язання.** Розглянемо систему сил, які урівноважуються, та які прикладені до конструкції.

Рівномірно розподілене навантаження інтенсивністю  $q$  замінюємо рівнодіючою:

$$Q = q \cdot 2 = 2,4 \text{ кН.}$$

Ця рівнодіюча за умови постійності  $q$  прикладена посередині стержня, на якому діє (рис 2, а), у напрямі дії інтенсивності  $q$ .

Перед початком вирішення задачі слід визначити кількість невідомих реакцій. Дію в'язей на конструкцію замінимо їх реакціями (рис. 2) відповідно до схем:

в схемі а)  $X_A, Y_A, M_A$ ;

в схемі б)  $Y'_A, M'_A, R_B$ ;

в схемі в)  $M''_A, X_B, Y_B$ .

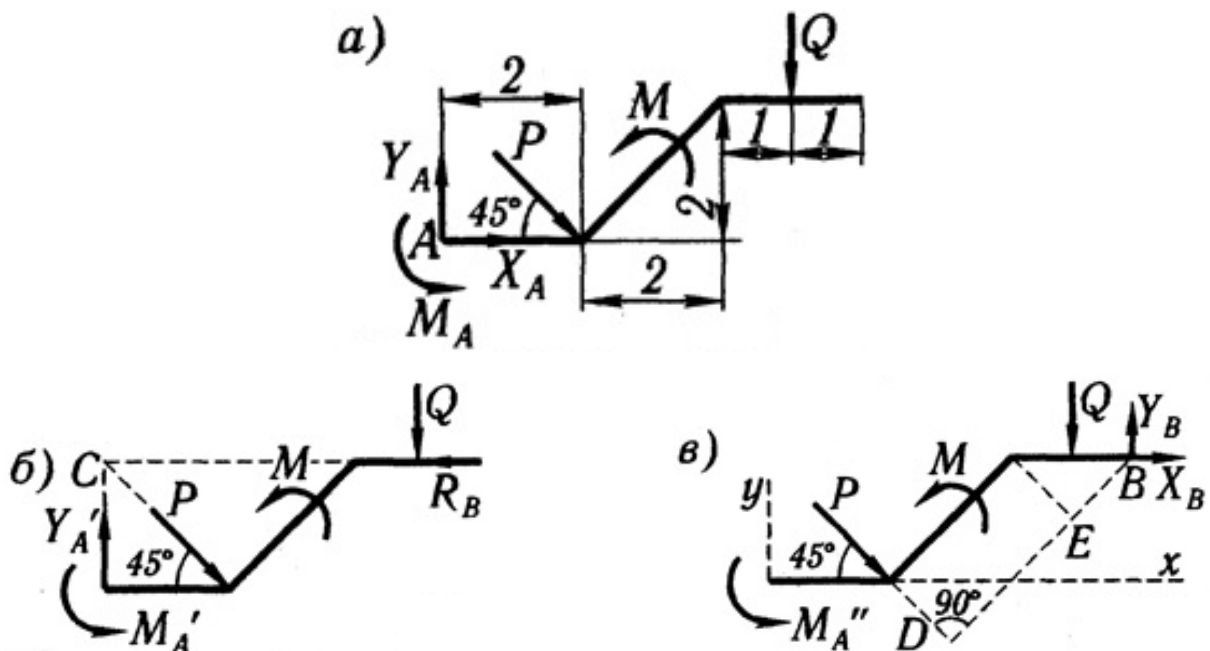


Рисунок 2.

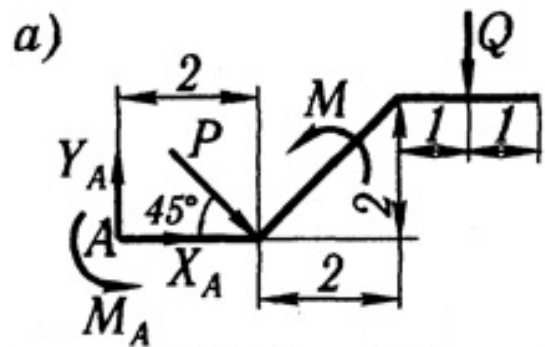
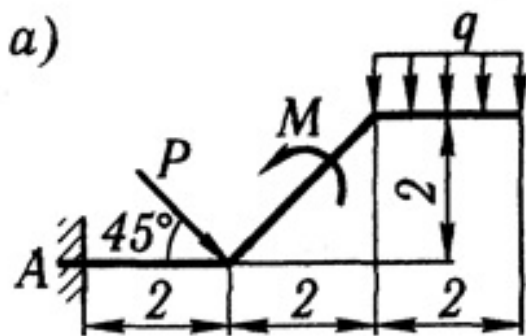
Для кожної схеми закріплення кількість невідомих 3 дорівнює кількості рівнянь рівноваги для плоскої системи 3:

$$\sum_{i=1}^n F_{iX} = 0, \quad \sum_{i=1}^n F_{iY} = 0, \quad \sum_{i=1}^n M_{OZ}(\vec{F}_i) = 0, \quad (1)$$

що означатиме статично визначену задачу. Вісь  $Z$  вважається перпендикулярною до площини рисунку, вибір напрямів осей  $X$  та  $Y$  є довільним.

Для з'ясування, в якому випадку момент в закладенні є найменшим (за модулем), знайдемо його для усіх трьох схем, не визначаючи спочатку решти реакцій. Звичайно, доцільно використовувати таке рівняння рівноваги, за якого невідомою буде тільки та реакція, яка досліджується в задачі.

Для схеми а) рівняння моментів складаємо відносно точки  $A$ , що дозволяє в цьому рівнянні позбутися «зайвих» невідомих реакцій  $X_A, Y_A$ .

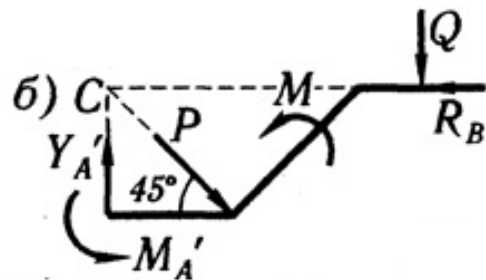
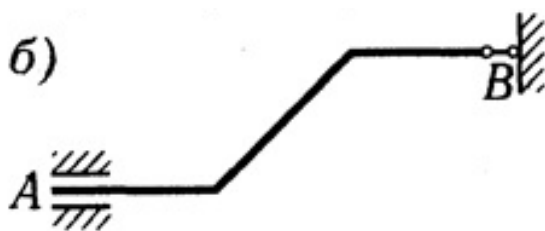


Тому:

$$\sum_i M_{iA} = 0, \quad M_A - P \cdot 2 \sin 45^\circ + M - Q \cdot 5 = 0. \quad (2)$$

Обчислення дають  $M_A = 11,07$  кН·м.

Для схеми б) «зайвими» є реакції  $Y'_A, R_B$ . Шукана точка  $C$ , визначається з наступних міркувань. Реакція  $R_B$  не дає моменту відносно будь-якої точки, що розташована на її лінії дії, яка позначена пунктирною горизонтальною лінією. Реакція  $Y'_A$  не дає моменту відносно будь-якої точки, що розташована на її лінії дії, яка позначена пунктирною вертикальною лінією.

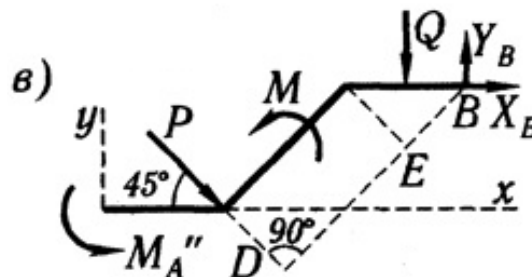
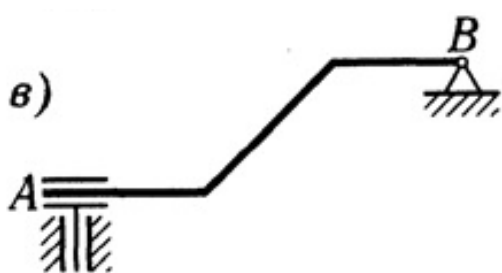


Таким чином, точка перетину проведених пунктирних ліній і буде саме тією шуканою точкою  $C$ . Тому:

$$\sum_i M_{iC} = 0, \quad M'_A + M - Q \cdot 5 = 0. \quad (3)$$

Обчислення дають  $M'_A = 4,0$  кН·м.

Для схеми в) «зайвими» є реакції  $X_B, Y_B$ . Шукана точка  $B$  визначається з наступних міркувань. Реакції  $X_B, Y_B$  не дають моменту відносно точки, до якої вони прикладені.



Тому:

$$\sum_i M_{iB} = 0, \quad M''_A + P \cdot BD + M + Q \cdot 1 = 0. \quad (4)$$

Обчислення дають  $M''_A = -31,61$  кН·м.

Тут плече для сили  $P$  відносно точки  $B$  визначається:

$$BD = BE + ED = \sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 4,24 \text{ м.}$$

Таким чином, найменший момент в закладенні отримано для закріплення бруса за схемою б). Визначимо решту опорних реакцій для цієї схеми:

$$\sum_i X_i = 0; \quad P \cos 45^\circ - R_B = 0, \quad \text{звідки } R_B = 3,54 \text{ кН.}$$

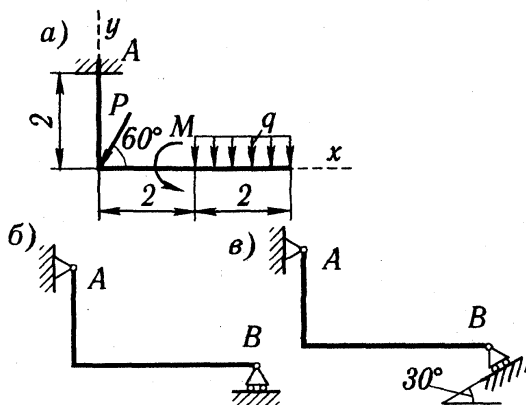
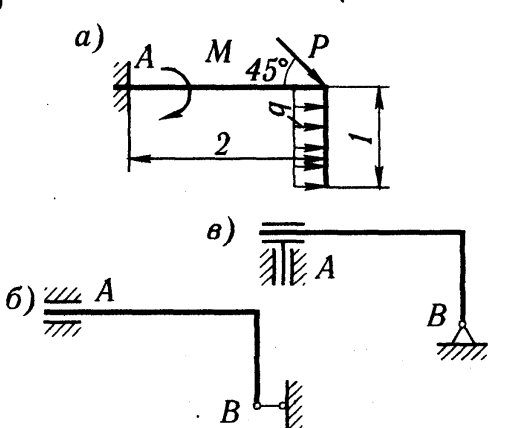
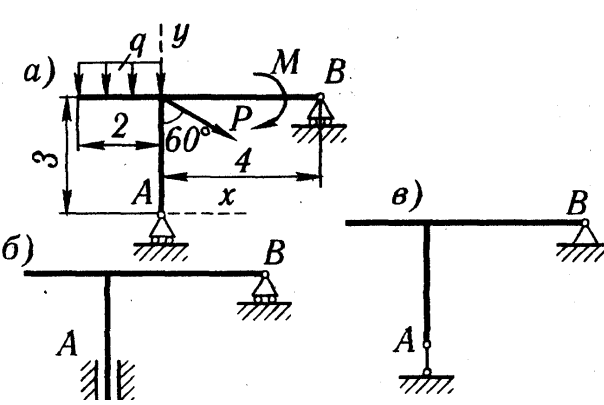
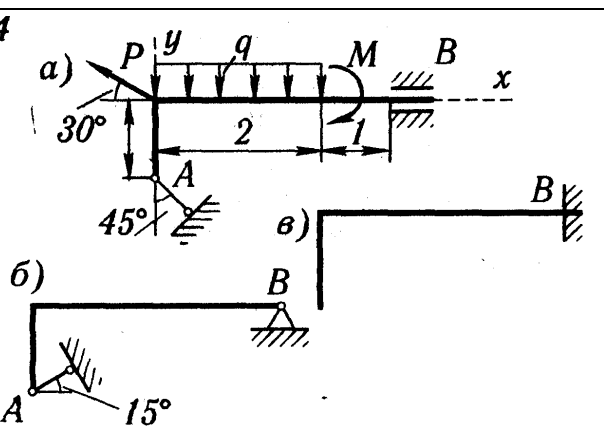
$$\sum_i Y_i = 0; \quad Y'_A - P \sin 45^\circ - Q = 0, \quad \text{звідки } Y'_A = 5,94 \text{ кН.}$$

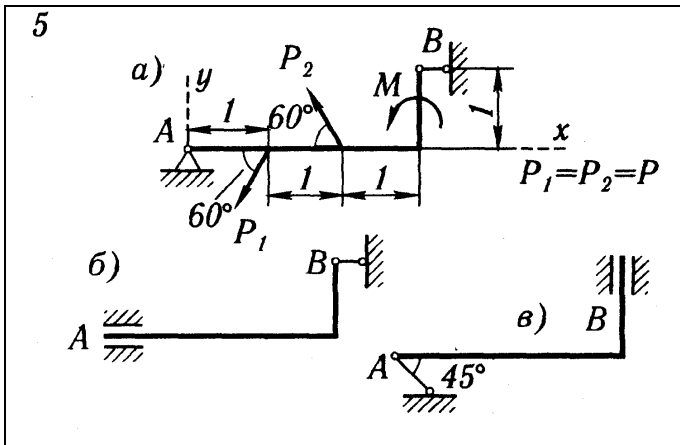
Результати наведено в таблиці 1.

Таблица 1

Схема	Моменти, кН	Сили,	
	$M_A, M'_A, M''_A$	$R_B$	$Y'_A$
а	11,07	–	–
б	4,0	3,54	5,94
в	-31,61	–	–

## Варіанти завдань

<p><b>1</b></p> 	<p style="text-align: center;">Варіант № 1</p> <p>Дано: схема закріплення бруса, силкові чинники <math>P = 10 \text{ кН}; M = 6 \text{ кН}\cdot\text{м}; q = 2 \text{ кН/м}</math></p> <p>Досліджувана реакція: <math>Y_A</math></p>
<p><b>2</b></p> 	<p style="text-align: center;">Варіант № 2</p> <p>Дано: схема закріплення бруса, силкові чинники <math>P = 20 \text{ кН}; M = 5 \text{ кН}\cdot\text{м}; q = 4 \text{ кН/м}</math></p> <p>Досліджувана реакція: <math>M_A</math></p>
<p><b>3</b></p> 	<p style="text-align: center;">Варіант № 3</p> <p>Дано: схема закріплення бруса, силкові чинники <math>P = 15 \text{ кН}; M = 8 \text{ кН}\cdot\text{м}; q = 1 \text{ кН/м}</math></p> <p>Досліджувана реакція: <math>Y_B</math></p>
<p><b>4</b></p> 	<p style="text-align: center;">Варіант № 4</p> <p>Дано: схема закріплення бруса, силкові чинники <math>P = 5 \text{ кН}; M = 2 \text{ кН}\cdot\text{м}; q = 1 \text{ кН/м}</math></p> <p>Досліджувана реакція: <math>Y_B</math></p>

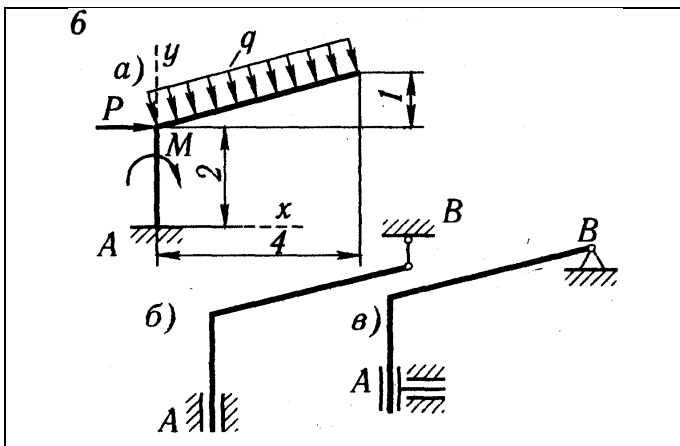


Варіант № 5

Дано: схема закріплення бруса, силові чинники

$$P = 10 \text{ кН}; M = 4 \text{ кН}\cdot\text{м}$$

Досліджувана реакція:  $X_B$

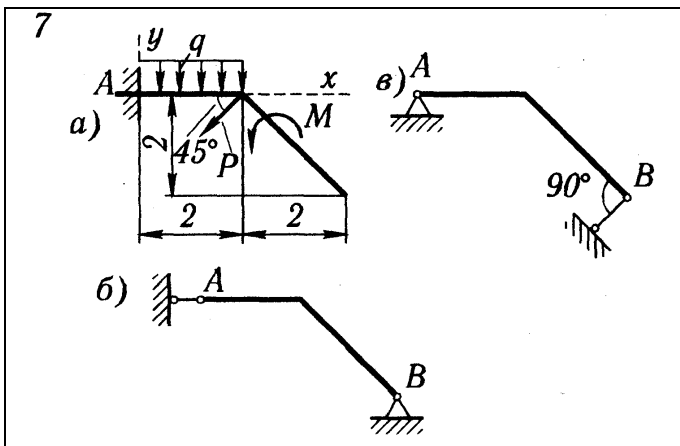


Варіант № 6

Дано: схема закріплення бруса, силові чинники

$$P = 6 \text{ кН}; M = 2 \text{ кН}\cdot\text{м}; q = 1 \text{ кН/м}$$

Досліджувана реакція:  $M_A$

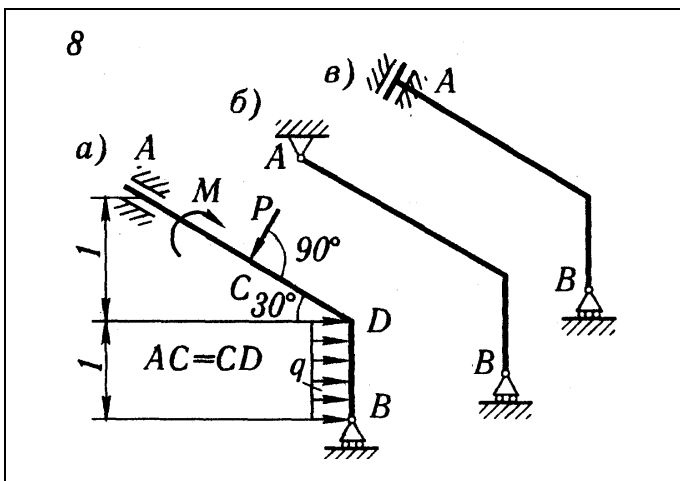


Варіант № 7

Дано: схема закріплення бруса, силові чинники

$$P = 2 \text{ кН}; M = 4 \text{ кН}\cdot\text{м}; q = 2 \text{ кН/м}$$

Досліджувана реакція:  $X_A$

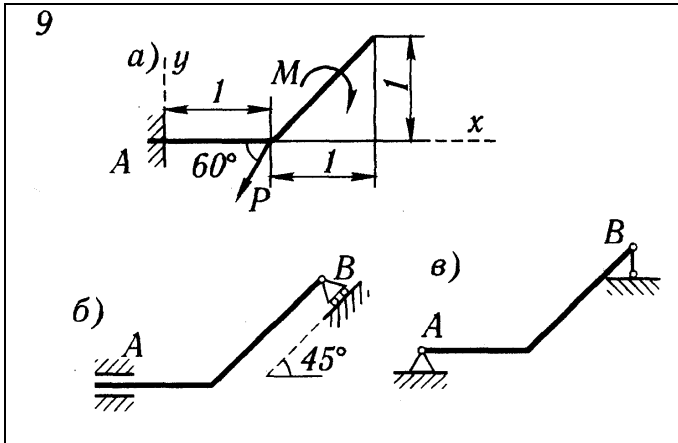


Варіант № 8

Дано: схема закріплення бруса, силові чинники

$$P = 20 \text{ кН}; M = 10 \text{ кН}\cdot\text{м}; q = 4 \text{ кН/м}$$

Досліджувана реакція:  $R_B$

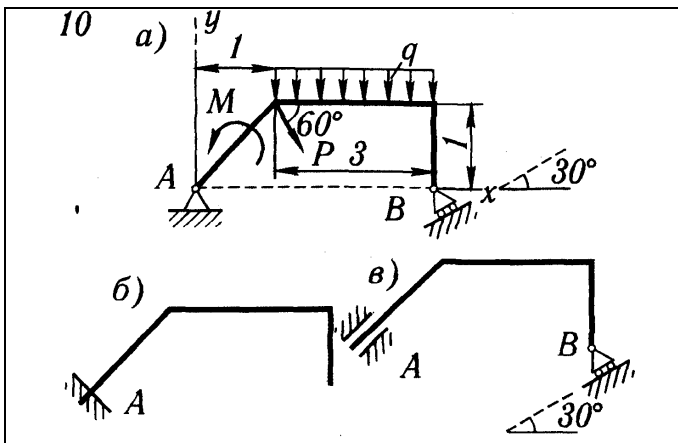


Варіант № 9

Дано: схема закріплення бруса, сили чинники

$$P = 10 \text{ кН}; M = 6 \text{ кН}\cdot\text{м}$$

Досліджувана реакція:  $Y_A$

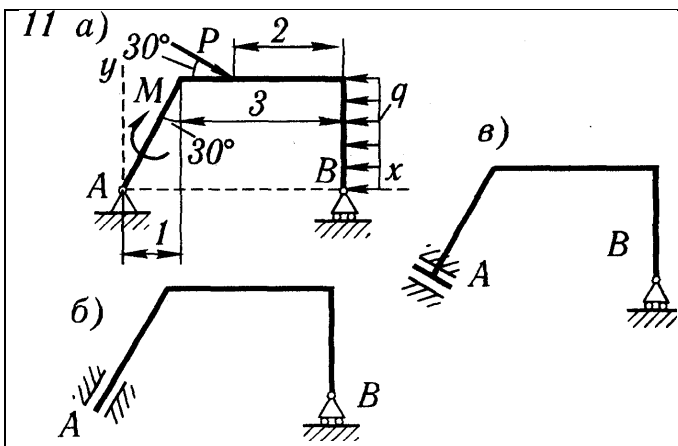


Варіант № 10

Дано: схема закріплення бруса, сили чинники

$$P = 2 \text{ кН}; M = 4 \text{ кН}\cdot\text{м}; q = 2 \text{ кН/м}$$

Досліджувана реакція:  $X_A$

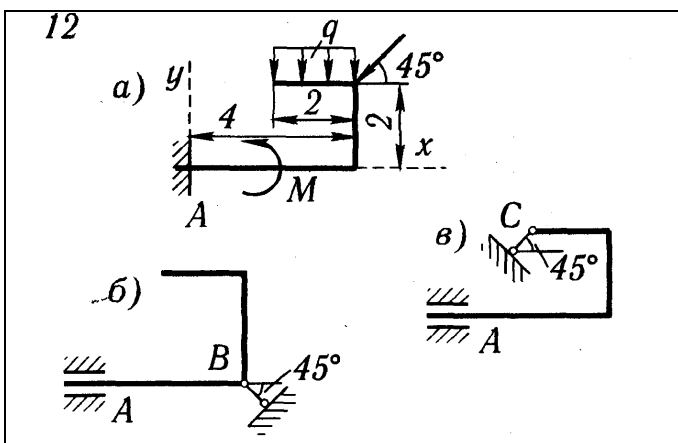


Варіант № 11

Дано: схема закріплення бруса, сили чинники

$$P = 4 \text{ кН}; M = 10 \text{ кН}\cdot\text{м}; q = 1 \text{ кН/м}$$

Досліджувана реакція:  $R_B$

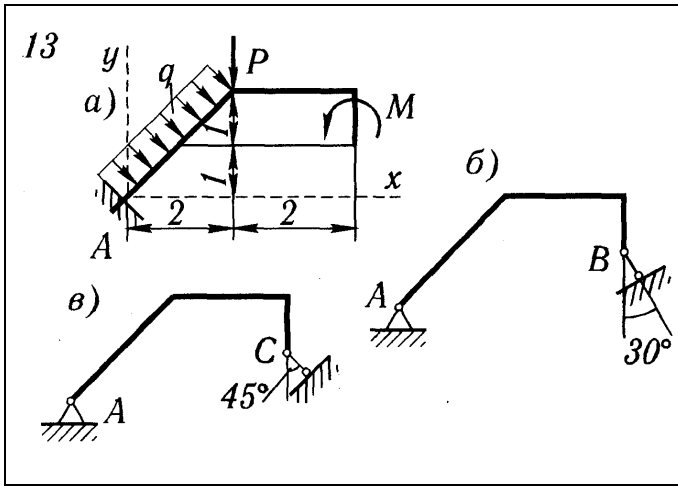


Варіант № 12

Дано: схема закріплення бруса, сили чинники

$$P = 10 \text{ кН}; M = 5 \text{ кН}\cdot\text{м}; q = 2 \text{ кН/м}$$

Досліджувана реакція:  $Y_A$

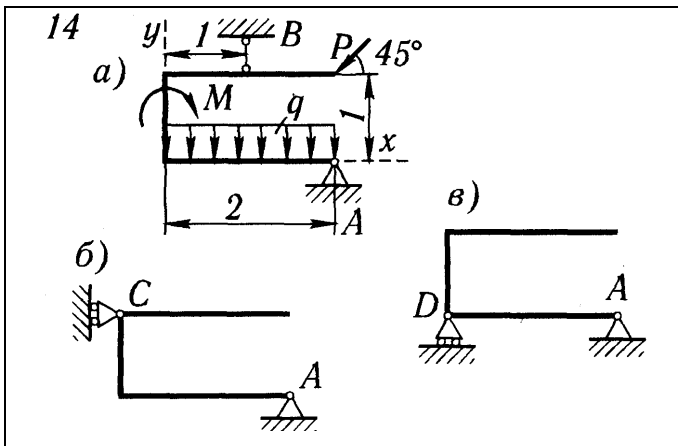


Варіант № 13

Дано: схема закріплення бруса, сили чинники

$$P = 20 \text{ кН}; M = 12 \text{ кН}\cdot\text{м}; q = 2 \text{ кН/м}$$

Досліджувана реакція:  $Y_A$

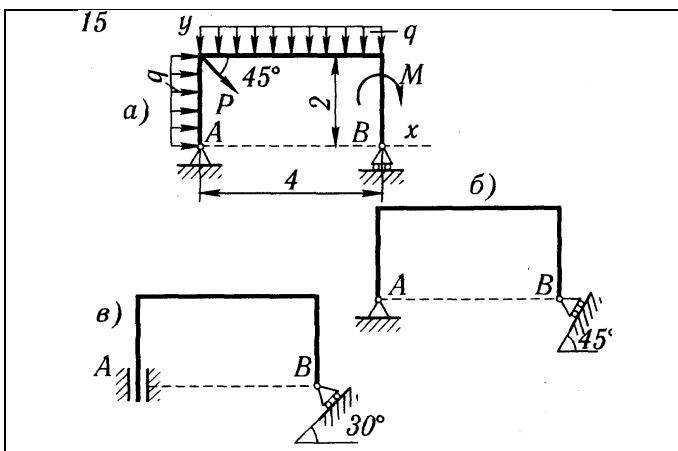


Варіант № 14

Дано: схема закріплення бруса, сили чинники

$$P = 15 \text{ кН}; M = 4 \text{ кН}\cdot\text{м}; q = 3 \text{ кН/м}$$

Досліджувана реакція:  $Y_A$

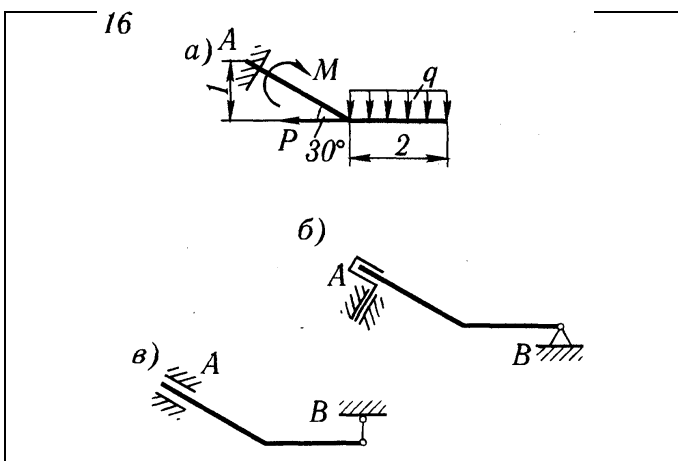


Варіант № 15

Дано: схема закріплення бруса, сили чинники

$$P = 10 \text{ кН}; M = 5 \text{ кН}\cdot\text{м}; q = 2 \text{ кН/м}$$

Досліджувана реакція:  $X_A$



Варіант № 16

Дано: схема закріплення бруса, сили чинники

$$P = 12 \text{ кН}; M = 6 \text{ кН}\cdot\text{м}; q = 2 \text{ кН/м}$$

Досліджувана реакція:  $M_A$



17

Варіант № 17

Дано: схема закріплення бруса, силові чинники  
 $P = 20 \text{ кН}; M = 4 \text{ кН}\cdot\text{м}; q = 3 \text{ кН/м}$

Досліджувана реакція:  $Y_A$

18

Варіант № 18

Дано: схема закріплення бруса, силові чинники  
 $P = 14 \text{ кН}; M = 4 \text{ кН}\cdot\text{м}; q = 4 \text{ кН/м}$

Досліджувана реакція:  $X_A$

19

Варіант № 19

Дано: схема закріплення бруса, силові чинники  
 $P = 16 \text{ кН}; M = 6 \text{ кН}\cdot\text{м}; q = 1 \text{ кН/м}$

Досліджувана реакція:  $R_B$

20

Варіант № 20

Дано: схема закріплення бруса, силові чинники  
 $P = 20 \text{ кН}; q = 4 \text{ кН/м}$

Досліджувана реакція:  $Y_A$

21

а)  $P$ ,  $M$ ,  $q$ ,  $4$ ,  $2$ ,  $45^\circ$

б)  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $45^\circ$

в)  $A$ ,  $C$ ,  $45^\circ$

Варіант № 21

Дано: схема закріплення бруса, силові чинники  
 $P = 20$  кН;  $M = 10$  кН·м;  $q = 2$  кН/м

Досліджувана реакція:  $M_A$

22

а)  $M$ ,  $P$ ,  $q$ ,  $2$ ,  $2$ ,  $4$ ,  $45^\circ$ ,  $y$ ,  $x$

б)  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $45^\circ$

в)  $A$ ,  $C$ ,  $45^\circ$

Варіант № 22

Дано: схема закріплення бруса, силові чинники  
 $P = 6$  кН;  $M = 6$  кН·м;  $q = 1$  кН/м

Досліджувана реакція:  $Y_A$

23

а)  $M$ ,  $P$ ,  $q$ ,  $2$ ,  $2$ ,  $4$ ,  $60^\circ$

б)  $A$ ,  $B$

в)  $A$ ,  $C$ ,  $2$

Варіант № 23

Дано: схема закріплення бруса, силові чинники  
 $P = 10$  кН;  $M = 4$  кН·м;  $q = 2$  кН/м

Досліджувана реакція:  $M_A$

24

а)  $q$ ,  $M$ ,  $P$ ,  $2$ ,  $2$ ,  $4$ ,  $60^\circ$ ,  $y$ ,  $x$

б)  $A$ ,  $C$

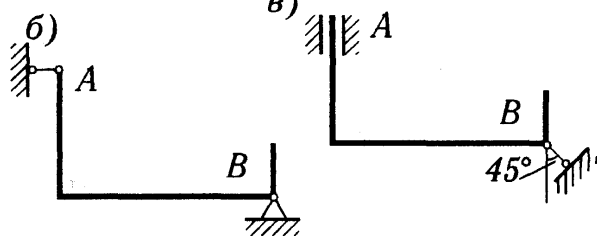
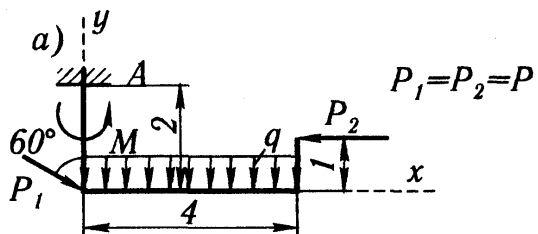
в)  $A$ ,  $B$ ,  $x$ ,  $y$

Варіант № 24

Дано: схема закріплення бруса, силові чинники  
 $P = 4$  кН;  $M = 3$  кН·м;  $q = 1$  кН/м

Досліджувана реакція:  $Y_A$

25



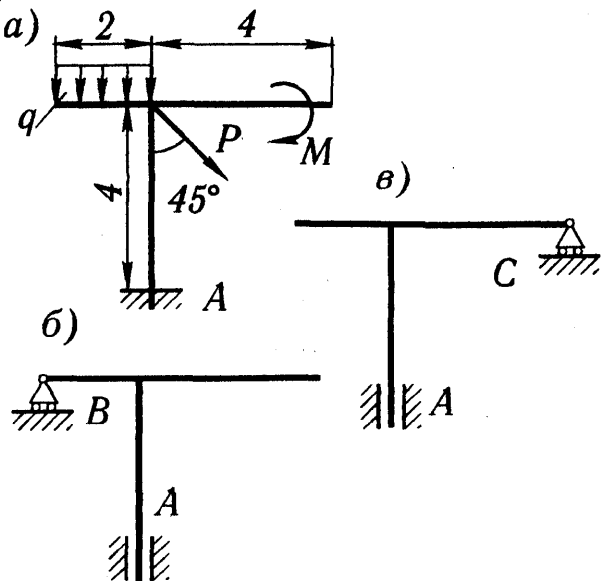
Варіант № 25

Дано: схема закріплення бруса,  
силіві чинники

$P = 10$  кН;  $M = 10$  кН·м;  $q = 2$   
кН/м

Досліджувана реакція:  $X_A$

26



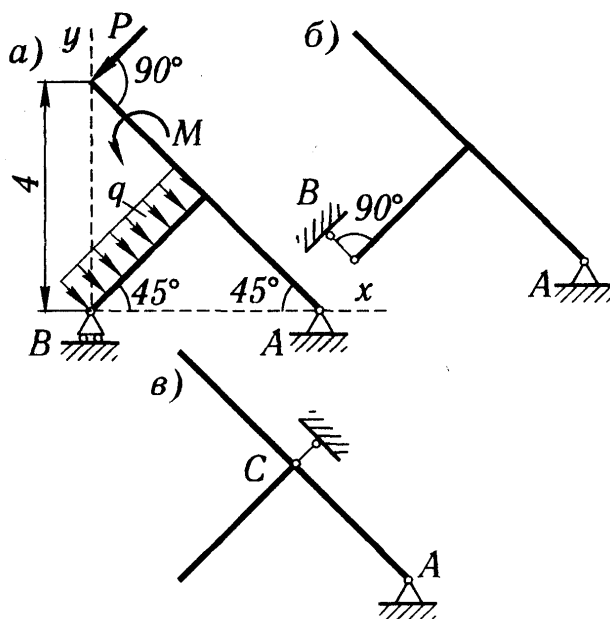
Варіант № 26

Дано: схема закріплення бруса,  
силіві чинники

$P = 20$  кН;  $M = 5$  кН·м;  $q = 2$  кН/м

Досліджувана реакція:  $M_A$

27



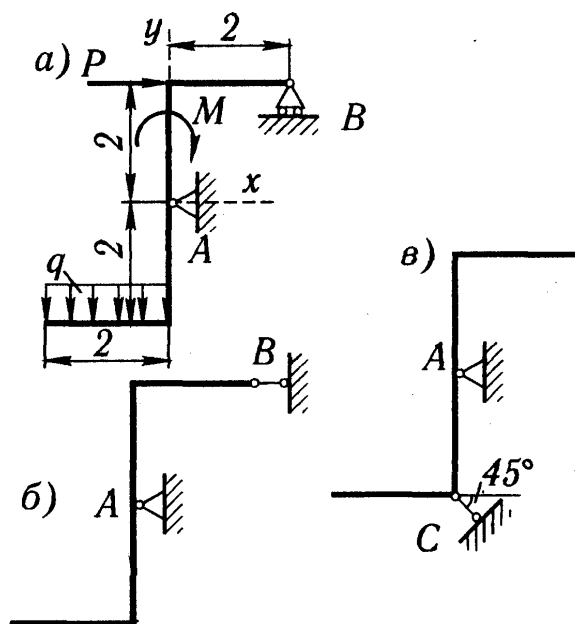
Варіант № 27

Дано: схема закріплення бруса,  
силіві чинники

$P = 10$  кН;  $M = 6$  кН·м;  $q = 1$  кН/м

Досліджувана реакція:  $X_A$

28



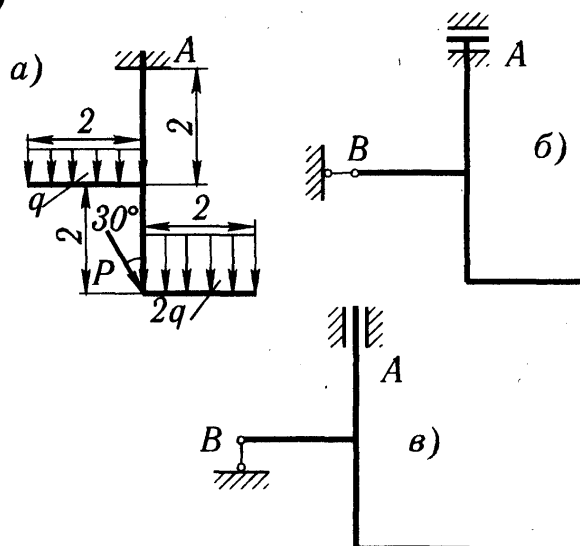
Варіант № 28

Дано: схема закріплення бруса,  
силові чинники

$P = 20$  кН;  $M = 10$  кН·м;  $q = 2$   
кН/м

Досліджувана реакція:  $Y_A$

29



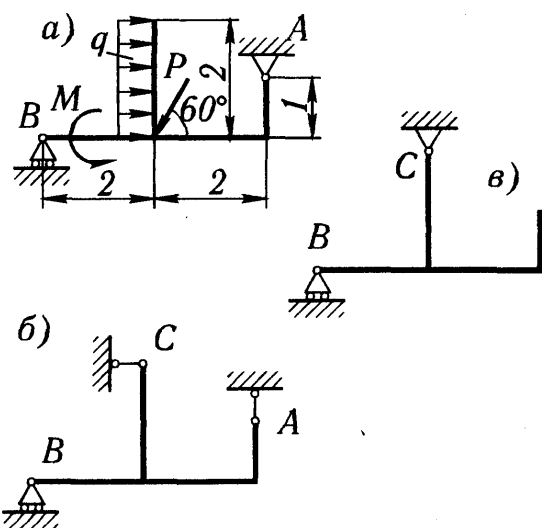
Варіант № 29

Дано: схема закріплення бруса,  
силові чинники

$P = 25$  кН;  $q = 1$  кН/м

Досліджувана реакція:  $M_A$

30



Варіант № 30

Дано: схема закріплення бруса,  
силові чинники

$P = 20$  кН;  $M = 10$  кН·м;  $q = 2$   
кН/м

Досліджувана реакція:  $R_B$

## Завдання С.3. Визначення реакцій опор складеної конструкції (система двох тіл)

Для складеної з двох частин конструкції встановити, за якого способу закріплення (шарнір та ковзаюче закладення) частин конструкції модуль вказаної за умов задачі реакції буде найменшим. Для цього варіанту закріплення визначити решту реакцій опор, а також з'єднання в точці С.

### Мета:

- 1) закріплення знань та умінь аналізу конструкцій щодо заміни типу опор відповідними реактивними силовими чинниками;
- 2) опанування підходом щодо визначення реакцій опор статично невизначених конструкцій;
- 3) набуття вміння складати відповідні рівняння рівноваги конструкцій в цілому та її частин окремо.

У завданні показано перший спосіб з'єднання – за допомогою шарніра С. Другий спосіб з'єднання – за допомогою ковзаючого закладення, схема якого безпосередньо показано у варіантах завдань.

### Приклад виконання завдання.

**Дано:** схема конструкції (рис. 1),  $P_1 = 5$  кН,  $P_2 = 7$  кН,  $M = 22$  кН·м,  $q = 2$  кН/м,  $\alpha = 60^\circ$ .

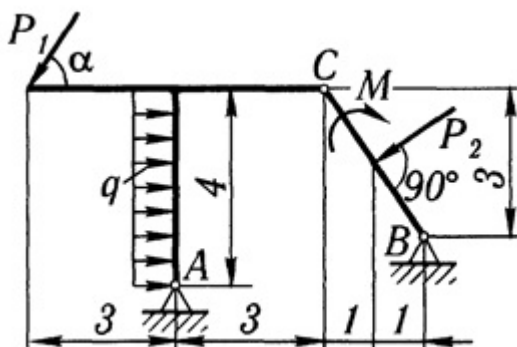


Рисунок 1

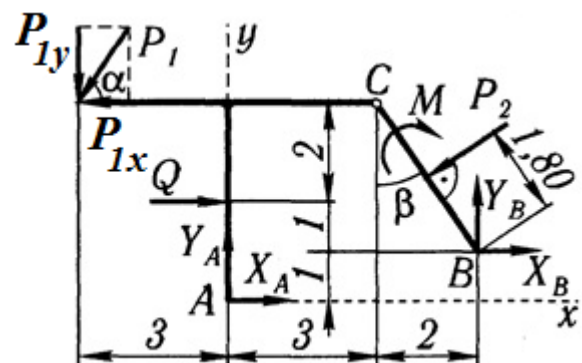


Рисунок 2

**Визначити:** реакції опор, а також з'єднання С для того способу з'єднання (шарнір або ковзаюче закладення), за якого модуль опори А найменший.

**Розв'язання.** Проведемо аналіз закріплення конструкції. У точках А і В нерухомі шарніри, які замінюються двома реакціями. Загалом кількість невідомих 4, що перевищує кількість рівнянь рівноваги – 3 і робить задачу статично невизначеною.

### 1. Визначення реакцій опори А при шарнірному з'єднанні в точці С.

Розглянемо систему сил, які урівноважуються, та які прикладені до всієї конструкції. Уводимо систему координат, в якій вісь  $x$  спрямована праворуч, а вісь  $y$  вгору. Сила  $\vec{P}_1$  спрямована під кутом  $\alpha$  до осі  $x$ , розкладається на складові по проекціях  $P_{1x} = P_1 \cos 60^\circ = 2,5$  кН,  $P_{1y} = P_1 \sin 60^\circ = 4,33$  кН.

Розподілене навантаження інтенсивністю  $q$  замінюємо рівнодіючою:

$$Q = q \cdot 4 = 2 \cdot 4 = 8 \text{ кН,}$$

яка прикладена посередині ділянки – вертикального стержня.

Складемо рівняння моментів сил відносно точки В, що дозволяє позбутися невідомих  $X_B$  і  $Y_B$  в рівнянні:

$$\sum_i M_{iB} = 0;$$

$$P_{1x} \cdot 3 + P_{1y} \cdot 8 - Q \cdot 1 - Y_A \cdot 5 + X_A \cdot 1 - M + P_2 \sqrt{1,0^2 + 1,5^2} = 0. \quad (1)$$

Після підстановки даних і результатів обчислення рівняння (1) набуває вигляду:

$$X_A - 5Y_A = -24,74 \text{ кН.} \quad (1')$$

Друге рівняння з невідомими  $X_A$  і  $Y_A$  отримуємо, розглянувши систему сил, які урівноважуються, та які прикладені до частини конструкції, розташованої лівіше шарніра С (рис. 3), в ньому вводимо реакції  $X_C$ ,  $Y_C$ .

Шарнір в точці С означатиме відсутність моменту та наявність силових реакцій. Подумки відокремлюємо ліву та праву частини конструкції, уводячи реакції  $X_C$ ,  $Y_C$  для правої частини (для визначеності спрямовуємо їх у позитивному напрямі відповідних осей) і для лівої частини (спрямовуємо у протилежні боки) (рис. 3). Якщо відокремлені частини знову поєднати, зазначені реакції взаємно знешкоджуються, що означатиме відсутність переміщення у шарнірі С.

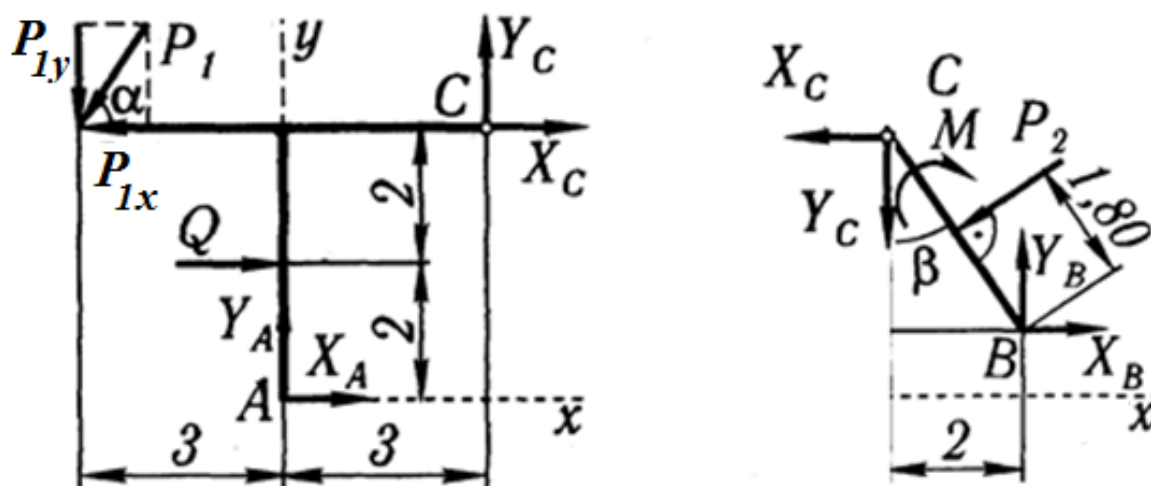


Рисунок 3.

Очевидно, доцільно скласти рівняння моментів відносно точки С, в якому реактивні сили  $X_C$ ,  $Y_C$  моментів не дають:

$$\sum_i M_{iC} = 0;$$

$$P_{1y} \cdot 6 + Q \cdot 2 - Y_A \cdot 3 + X_A \cdot 4 = 0, \quad (2)$$

або після обчислень:

$$4X_A - 3Y_A = -41,98 \text{ кН}. \quad (2')$$

Вирішуючи систему рівнянь (1') і (2') для двох невідомих  $X_A$  і  $Y_A$ , знаходимо:

$$X_A = -7,97 \text{ кН}, \quad Y_A = 3,36 \text{ кН}.$$

Модуль реакції опори А при шарнірному закріпленні в точці С дорівнює:

$$R'_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2} = \sqrt{7,97^2 + 3,36^2} = 8,65 \text{ кН}.$$

**2. Розрахункова схема при з'єднанні частин конструкції в точці С ковзаючим закладенням показана на рис. 4.**

Системи сил, які показані на рис. 2 і 4, нічим не відрізняються, тому що зміна варіанту закріплення у точці С ніяк не впливає на закріплення конструкції в цілому у точках А і В. Тому рівняння (1') залишається у силі. Для отримання другого рівняння розглянемо систему сил, які урівноважуються, та які прикладені до частини конструкції, яка розташована лівіше ковзаючого закладення С (рис. 5,а).

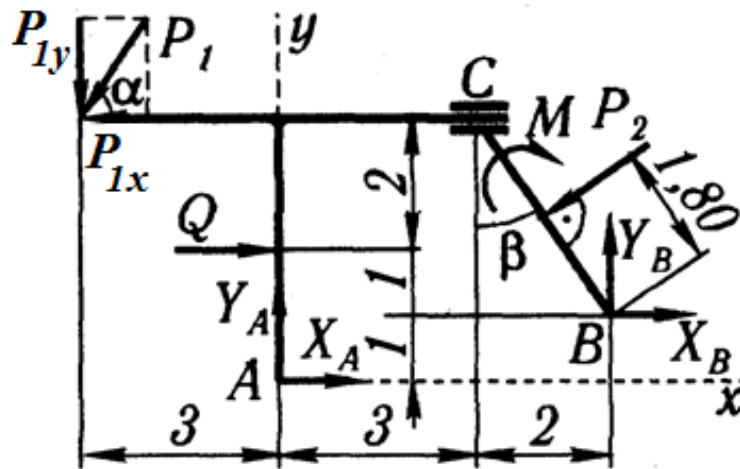


Рисунок 4.

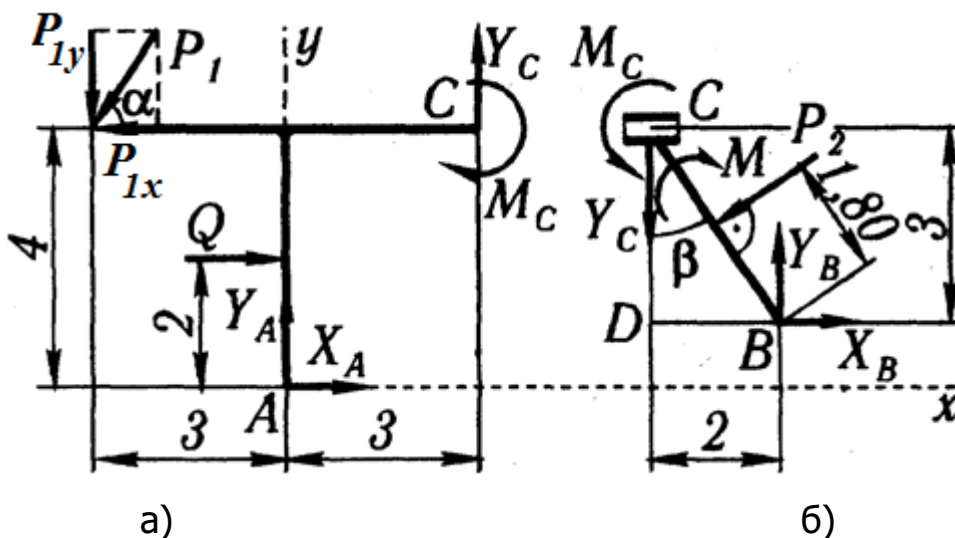


Рисунок 5

Знову подумки відокремлюємо ліву та праву частини, замінюючи задане ковзаюче закріплення вертикальною реакцією  $Y_C$  та реактивним моментом  $M_C$ . Пересуванню у горизонтальному напрямі нічого не заважатиме, тому в



цьому напрямі реакція відсутня. Для урівноваженості для правої частини конструкції в точці С вводяться аналогічні реакції, які спрямовані у протилежні боки. Якщо відокремлені частини знову поєднати, зазначені реакції взаємно знешкоджуються, що означатиме відсутність переміщення у точці С.

Для правої частини доцільно скласти рівняння проєкцій сил на вісь  $X$ , що дозволяє позбутися у цьому рівнянні уведених реакцій для точки С. До речі, завжди доцільно складати таке рівняння, в якому реакції будуть відсутні. Складемо рівняння рівноваги:

$$\sum_i X_i = 0;$$

$$X_A + Q - P_{1x} = 0, \quad (3)$$

звідки:

$$X_A = -5,50 \text{ кН},$$

та з рівняння (1') знаходимо:

$$Y_A = 3,85 \text{ кН}.$$

Тому модуль реакції опори  $A$  при ковзаючому закладенні в точці С дорівнює:

$$R_A'' = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2} = \sqrt{5,50^2 + 3,85^2} = 6,71 \text{ кН}.$$

Отже, при з'єднанні в точці С ковзаючим закладенням модуль реакції опори  $A$  менше, ніж при шарнірному з'єднанні. Знайдемо складові реакції опори  $B$  і ковзаючого закладення.

Для лівої від С частини (рис. 5, а):

$$\sum_i Y_i = 0;$$

$$-P_{1y} + Y_A + Y_C = 0, \quad (4)$$

звідки:

$$Y_C = P_{1y} - Y_A = 0,48 \text{ кН}.$$

Складові реакції опори  $B$  і момент в ковзаючому закладенні знайдемо з рівнянь рівноваги, складених для правої від С частини (рис. 5, б):

$$\sum_i M_{iB} = 0; \quad M_C + Y_C \cdot 2 - M + P_2 \cdot 1,80 = 0, \quad (5)$$

$$\sum_i X_i = 0; \quad -P_2 \cos \beta + X_B = 0, \quad (6)$$

$$\sum_i Y_i = 0, \quad -Y_C + Y_B - P_2 \sin \beta = 0. \quad (7)$$

З прямокутного трикутника  $BCD$ :

$$\sin \beta = BD/BC = 2/\sqrt{2^2 + 3^2} = 2/3,61 = 0,555;$$

$$\cos \beta = CD/BC = 3/3,61 = 0,832.$$

Вирішуючи рівняння (5)-(7) відносно  $M_C, X_B, Y_B$ , отримуємо:

$$M_C = 8,44 \text{ кН}\cdot\text{м}; \quad X_B = 5,82 \text{ кН}; \quad Y_B = 4,37 \text{ кН}.$$

Для перевірки правильності визначення реакцій переконаємось, що виконується рівняння (раніше не використовувалося) рівноваги для сил, які прикладені для всієї конструкції (рис. 2), наприклад:

$$\begin{aligned} \sum_i M_{iA} &= P_{1x} \cdot 4 + P_{1y} \cdot 3 - Q \cdot 2 - M - P_2 \sin \beta \cdot 4 + P_2 \cos \beta \cdot \\ &2,5 - X_B \cdot 1 + Y_B \cdot 5 = \\ &= 2,5 \cdot 4 + 4,33 \cdot 3 - 8 \cdot 2 - 22 - 7 \cdot 0,555 \cdot 4 + 7 \cdot 0,832 \cdot 2,5 - \\ &5,82 \cdot 1 + 4,37 \cdot 5 = 59,40 - 59,36 \approx 0. \end{aligned}$$

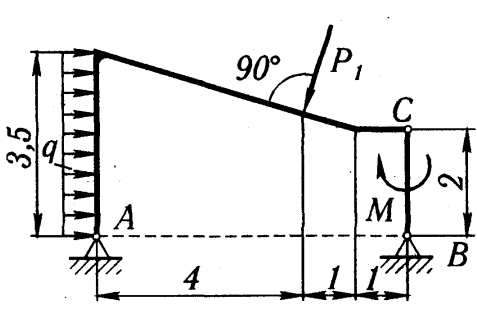

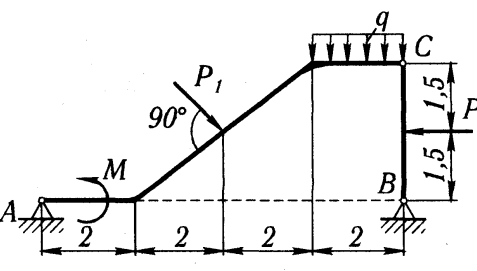

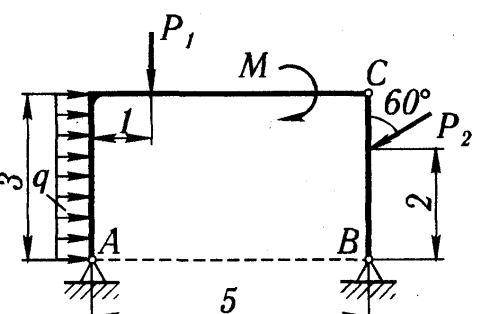

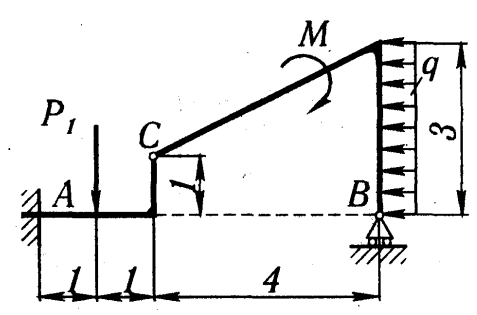

Через деякі похибки через округлення чисел до сотих можливо отримання не нульового значення, але наближеного до нього на рівні декількох сотих. Це можна вважати виконанням умови рівноваги.

Результати розрахунків наведено у Табл. 1.

Таблиця 1

	Сили, кН						Момент, кН·м
	$X_A$	$Y_A$	$R_A$	$Y_C$	$X_B$	$Y_B$	$M_C$
Для схеми рис. 1	-7,97	3,36	8,65	-	-	-	-
Для схеми рис. 4	-5,50	3,85	6,71	±0,48	5,82	4,37	±8,44

## Варіанти завдань

	Вид ковзаючого закладення  	<p style="text-align: center;"><b>Варіант № 1</b></p> <p>Дано: схема закріплення, силові чинники</p> <p><math>P_1 = 5 \text{ кН}; M = 24 \text{ кН}\cdot\text{м}; q = 0,8 \text{ кН/м}</math></p> <p>Досліджувана реакція: <math>X_A</math></p>
	Вид ковзаючого закладення  	<p style="text-align: center;"><b>Варіант № 2</b></p> <p>Дано: схема закріплення, силові чинники</p> <p><math>P_1 = 6 \text{ кН}; P_2 = 10 \text{ кН}; M = 22 \text{ кН}\cdot\text{м}; q = 1 \text{ кН/м}</math></p> <p>Досліджувана реакція: <math>R_A</math></p>
	Вид ковзаючого закладення  	<p style="text-align: center;"><b>Варіант № 3</b></p> <p>Дано: схема закріплення, силові чинники</p> <p><math>P_1 = 7 \text{ кН}; P_2 = 9 \text{ кН}; M = 20 \text{ кН}\cdot\text{м}; q = 1,2 \text{ кН/м}</math></p> <p>Досліджувана реакція: <math>R_B</math></p>
	Вид ковзаючого закладення  	<p style="text-align: center;"><b>Варіант № 4</b></p> <p>Дано: схема закріплення, силові чинники</p> <p><math>P_1 = 8 \text{ кН}; M = 18 \text{ кН}\cdot\text{м}; q = 1,4 \text{ кН/м}</math></p> <p>Досліджувана реакція: <math>M_A</math></p>

	Вид ковзаючого закладення	<b>Варіант № 5</b>  Дано: схема закріплення, сили чинники $P_1 = 9 \text{ кН}; M = 16 \text{ кН}\cdot\text{м}; q = 1,6 \text{ кН/м}$  Досліджувана реакція: $R_A$

	Вид ковзаючого закладення	<b>Варіант № 6</b>  Дано: схема закріплення, сили чинники $P_1 = 10 \text{ кН}; P_2 = 8 \text{ кН}; M = 25 \text{ кН}\cdot\text{м}; q = 1,8 \text{ кН/м}$  Досліджувана реакція: $M_A$

	Вид ковзаючого закладення	<b>Варіант № 7</b>  Дано: схема закріплення, сили чинники $P_1 = 11 \text{ кН}; P_2 = 7 \text{ кН}; M = 20 \text{ кН}\cdot\text{м}; q = 2 \text{ кН/м}$  Досліджувана реакція: $R_B$

	Вид ковзаючого закладення	<b>Варіант № 8</b>  Дано: схема закріплення, сили чинники $P_1 = 12 \text{ кН}; P_2 = 6 \text{ кН}; M = 15 \text{ кН}\cdot\text{м}; q = 2,2 \text{ кН/м}$  Досліджувана реакція: $M_A$

	Вид ковзаючого закладення	<b>Варіант № 9</b> Дано: схема закріплення, силові чинники $P_1 = 13 \text{ кН}; M = 10 \text{ кН}\cdot\text{м}; q = 2,4 \text{ кН/м}$ Досліджувана реакція: $X_A$

	Вид ковзаючого закладення	<b>Варіант № 10</b> Дано: схема закріплення, силові чинники $P_1 = 14 \text{ кН}; M = 12 \text{ кН}\cdot\text{м}; q = 2,6 \text{ кН/м}$ Досліджувана реакція: $R_A$

	Вид ковзаючого закладення	<b>Варіант № 11</b> Дано: схема закріплення, силові чинники $P_1 = 15 \text{ кН}; P_2 = 5 \text{ кН}; M = 14 \text{ кН}\cdot\text{м}; q = 2,8 \text{ кН/м}$ Досліджувана реакція: $R_D$

	Вид ковзаючого закладення	<b>Варіант № 12</b> Дано: схема закріплення, силові чинники $P_1 = 12 \text{ кН}; P_2 = 4 \text{ кН}; M = 16 \text{ кН}\cdot\text{м}; q = 3 \text{ кН/м}$ Досліджувана реакція: $R_B$

	Вид ковзаючого закладення	<b>Варіант № 13</b> Дано: схема закріплення, сили чинники $P_1 = 9 \text{ кН}; P_2 = 6 \text{ кН}; M = 18 \text{ кН}\cdot\text{м}; q = 3,2 \text{ кН/м}$ Досліджувана реакція: $R_A$

	Вид ковзаючого закладення	<b>Варіант № 14</b> Дано: схема закріплення, сили чинники $P_1 = 6 \text{ кН}; M = 20 \text{ кН}\cdot\text{м}; q = 3,4 \text{ кН/м}$ Досліджувана реакція: $M_A$

	Вид ковзаючого закладення	<b>Варіант № 15</b> Дано: схема закріплення, сили чинники $P_1 = 5 \text{ кН}; P_2 = 8 \text{ кН}; M = 22 \text{ кН}\cdot\text{м}; q = 3,6 \text{ кН/м}$ Досліджувана реакція: $M_B$

	Вид ковзаючого закладення	<b>Варіант № 16</b> Дано: схема закріплення, сили чинники $P_1 = 7 \text{ кН}; P_2 = 10 \text{ кН}; M = 14 \text{ кН}\cdot\text{м}; q = 3,8 \text{ кН/м}$ Досліджувана реакція: $R_B$

	Вид ковзаючого закладення	<b>Варіант № 17</b> Дано: схема закріплення, силові чинники $P_1 = 9 \text{ кН}; P_2 = 12 \text{ кН}; M = 26 \text{ кН}\cdot\text{м}; q = 4 \text{ кН/м}$ Досліджувана реакція: $R_A$

	Вид ковзаючого закладення	<b>Варіант № 18</b> Дано: схема закріплення, силові чинники $P_1 = 11 \text{ кН}; P_2 = 10 \text{ кН}; M = 18 \text{ кН}\cdot\text{м}; q = 3,5 \text{ кН/м}$ Досліджувана реакція: $M_B$

	Вид ковзаючого закладення	<b>Варіант № 19</b> Дано: схема закріплення, силові чинники $P_1 = 13 \text{ кН}; P_2 = 9 \text{ кН}; M = 30 \text{ кН}\cdot\text{м}; q = 3,6 \text{ кН/м}$ Досліджувана реакція: $M_B$

	Вид ковзаючого закладення	<b>Варіант № 20</b> Дано: схема закріплення, силові чинники $P_1 = 15 \text{ кН}; P_2 = 8 \text{ кН}; M = 25 \text{ кН}\cdot\text{м}; q = 2,5 \text{ кН/м}$ Досліджувана реакція: $R_B$

	Вид ковзаючого закладення	<b>Варіант № 21</b> Дано: схема закріплення, силові чинники $P_1 = 10 \text{ кН}; P_2 = 7 \text{ кН}; M = 20 \text{ кН}\cdot\text{м}; q = 2 \text{ кН/м}$ Досліджувана реакція: $R_A$

	Вид ковзаючого закладення	<b>Варіант № 22</b> Дано: схема закріплення, силові чинники $P_1 = 5 \text{ кН}; P_2 = 6 \text{ кН}; M = 15 \text{ кН}\cdot\text{м}; q = 1,5 \text{ кН/м}$ Досліджувана реакція: $R_A$

	Вид ковзаючого закладення	<b>Варіант № 23</b> Дано: схема закріплення, силові чинники $P_1 = 8 \text{ кН}; P_2 = 5 \text{ кН}; M = 10 \text{ кН}\cdot\text{м}; q = 1,4 \text{ кН/м}$ Досліджувана реакція: $R_A$

	Вид ковзаючого закладення	<b>Варіант № 24</b> Дано: схема закріплення, силові чинники $P_1 = 11 \text{ кН}; P_2 = 4 \text{ кН}; M = 5 \text{ кН}\cdot\text{м}; q = 1,3 \text{ кН/м}$ Досліджувана реакція: $M_A$



	Вид ковзаючого закладення	<b>Варіант № 25</b> Дано: схема закріплення, силові чинники $P_1 = 14 \text{ кН}; P_2 = 4 \text{ кН}; M = 5 \text{ кН}\cdot\text{м}; q = 1,3 \text{ кН/м}$ Досліджувана реакція: $R_B$

	Вид ковзаючого закладення	<b>Варіант № 26</b> Дано: схема закріплення, силові чинники $P_1 = 12 \text{ кН}; P_2 = 8 \text{ кН}; M = 9 \text{ кН}\cdot\text{м}; q = 1,1 \text{ кН/м}$ Досліджувана реакція: $R_B$

	Вид ковзаючого закладення	<b>Варіант № 27</b> Дано: схема закріплення, силові чинники $P_1 = 10 \text{ кН}; P_2 = 7 \text{ кН}; M = 11 \text{ кН}\cdot\text{м}; q = 1 \text{ кН/м}$ Досліджувана реакція: $X_A$

	Вид ковзаючого закладення	<b>Варіант № 28</b> Дано: схема закріплення, силові чинники $P_1 = 8 \text{ кН}; P_2 = 9 \text{ кН}; M = 13 \text{ кН}\cdot\text{м}; q = 1,2 \text{ кН/м}$ Досліджувана реакція: $R_A$

	Вид ковзаючого закладення	<b>Варіант № 29</b> Дано: схема закріплення, силові чинники $P_1 = 6 \text{ кН}; P_2 = 10 \text{ кН}; M = 15 \text{ кН}\cdot\text{м}; q = 1,4 \text{ кН/м}$ Досліджувана реакція: $M_A$

	Вид ковзаючого закладення	<b>Варіант № 30</b> Дано: схема закріплення, силові чинники $P_1 = 10 \text{ кН}; P_2 = 12 \text{ кН}; M = 17 \text{ кН}\cdot\text{м}; q = 1,6 \text{ кН/м}$ Досліджувана реакція: $M_B$

### Завдання С.6. Визначення головного вектору та головного моменту для системи сил, які не лежить в одній площині

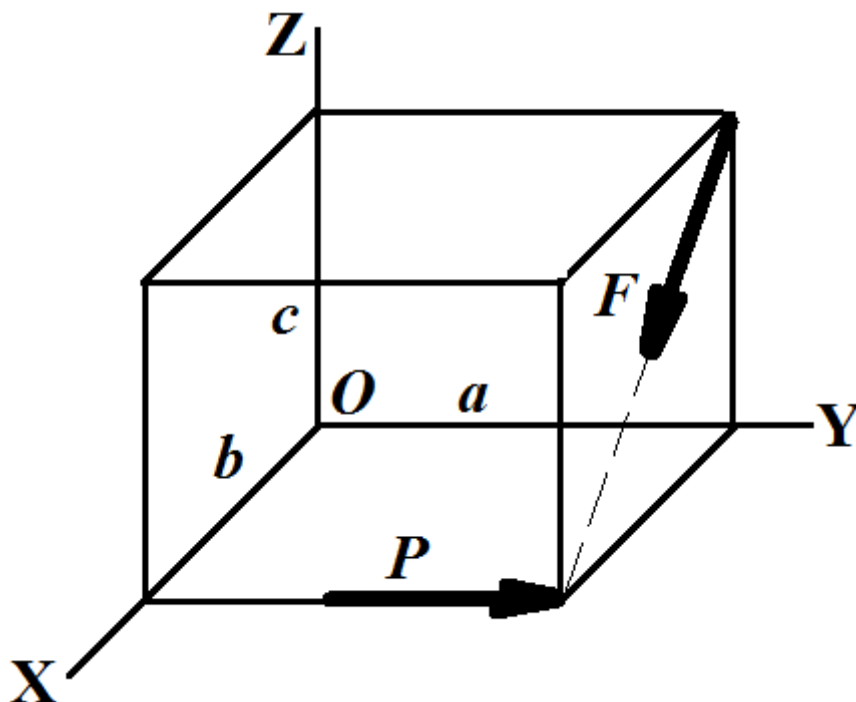
Для наведеної системи сил  $\vec{P}$  та  $\vec{F}$  визначити головний вектор  $\vec{R}$  та головний момент  $\vec{M}_O$  відносно центру  $O$ .

#### Мета:

- 1) опанування методом вирішення задачі статки для системи сил, які не лежать в одній площині;
- 2) навчитися визначати головний вектор та головний момент у графо-аналітичний та аналітичний способи;
- 3) навчитися показу головного вектору та головного моменту на кресленні.

Під час виконання завдання необхідно зробити наступне:

- 1) показати задану систему сил, виконавши побудову паралелепіпеду в масштабі, показавши кут  $\widehat{XOY} = 135^\circ$ ; скорочення розмірів за віссю  $OX$  прийняти рівним 1:2;



- 2) обравши систему координатних осей, визначити модуль і напрям головного вектора заданої системи сил за його проекціями на координатні осі, показати вектор  $\vec{R}$  на кресленні;
- 3) визначити модуль і напрям головного моменту заданої системи сил за його проекціями на координатні осі, показати вектор  $\vec{M}_O$  на кресленні.

### Приклад розв'язання завдання.

**Дано:**  $a = 9$  м,  $b = 4$  м,  $c = 5$  м,  $F = 2$  кН,  $P = 7$  кН.

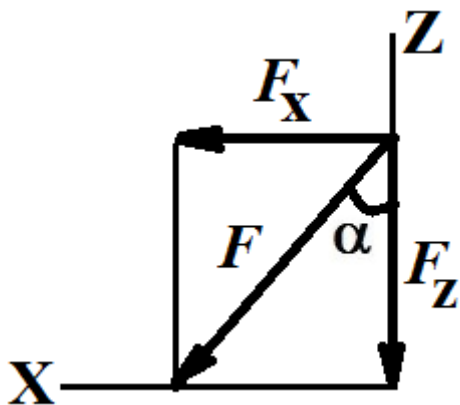
**Визначити:** головний вектор  $\vec{R}$  та головний момент  $\vec{M}_O$  відносно центру  $O$ .

**Розв'язання.**

#### Спосіб №1

#### Графо-аналітичний метод проєкцій

1. Аналіз. Маємо просторову довільну систему сил, згідно з аксіомою про паралелограм розкладаємо силу  $\vec{F}$  на складові паралельні осі декартової системи координат  $F_X = F \sin \alpha$ ,  $F_Z = F \cos \alpha$ .



$$\sin \alpha = \frac{b}{\sqrt{b^2 + c^2}} = \frac{4}{\sqrt{4^2 + 5^2}} = 0,625$$
$$\cos \alpha = \frac{c}{\sqrt{b^2 + c^2}} = \frac{5}{\sqrt{4^2 + 5^2}} = 0,781$$
$$\alpha = 38,66^\circ$$

Таким чином, отримуємо:

$$F_X = 2 \cdot 0,625 = 1,250 \text{ кН}; \quad F_Z = 2 \cdot 0,781 = 1,562 \text{ кН}.$$

Остаточна розрахункова схема має вигляд, показаний на рис.1.

**Визначення головного вектора.** Головний вектор системи – геометрична сума всіх сил, що діють на тіло.

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = R_X \vec{i} + R_Y \vec{j} + R_Z \vec{k},$$

де проєкції головного вектора на осі координат:

$$R_X = \sum_{i=1}^n F_{iX}, \quad R_Y = \sum_{i=1}^n F_{iY}, \quad R_Z = \sum_{i=1}^n F_{iZ}.$$

Маємо для головного вектора:

$$\vec{R} = \vec{F}_X + \vec{F}_Z + \vec{P}.$$

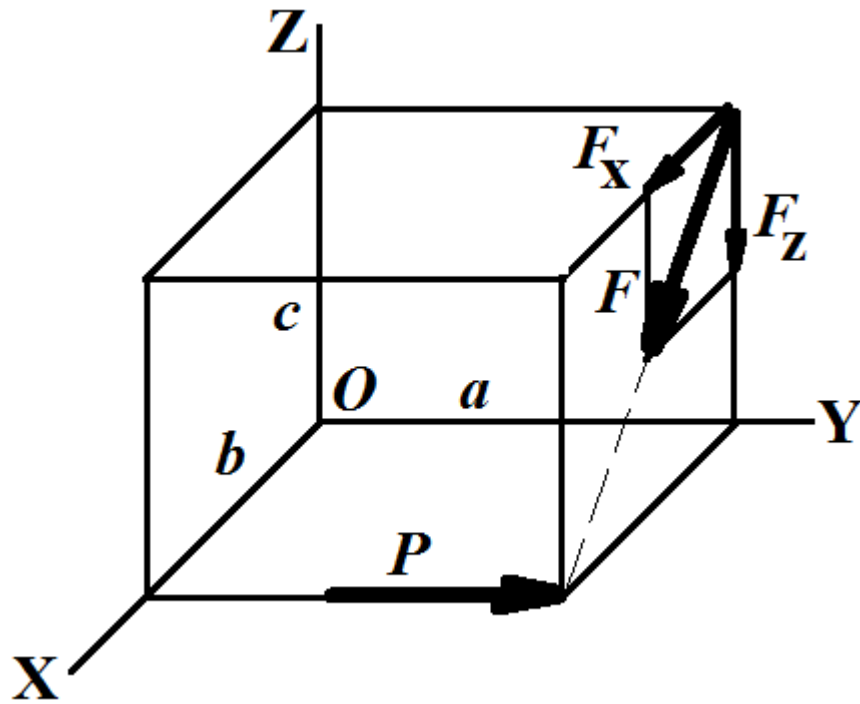


Рисунок 1.

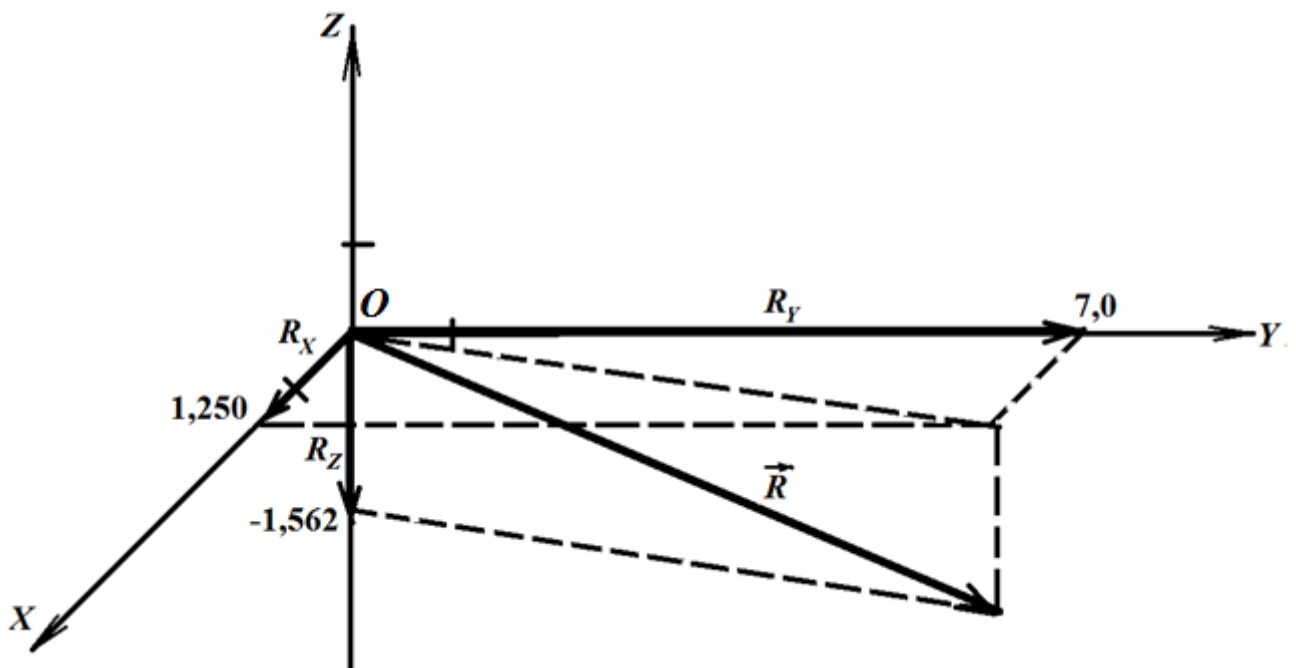


Рисунок 2.

Визначимо та побудуємо головний вектор  $\vec{R}$  (рис. 2):

$$R_X = F_X = 1,250 \text{ кН};$$

$$R_Y = P = 7 \text{ кН};$$

$$R_Z = -F_Z = -1,562 \text{ кН}.$$

Визначимо модуль  $R$ :

$$R = \sqrt{R_X^2 + R_Y^2 + R_Z^2} = \sqrt{1,250^2 + 7^2 + (-1,562)^2} = 7,280 \text{ кН.}$$

Визначимо напрямні косинуси:

$$\cos(R_X, \vec{R}) = \frac{R_X}{R} = \frac{1,250}{7,280} = 0,172, \quad \widehat{R_X, \vec{R}} = 80,118^\circ$$

$$\cos(R_Y, \vec{R}) = \frac{R_Y}{R} = \frac{7,0}{7,280} = 0,962, \quad \widehat{R_Y, \vec{R}} = 15,945^\circ$$

$$\cos(R_Z, \vec{R}) = \frac{R_Z}{R} = \frac{-1,562}{7,280} = -0,215, \quad \widehat{R_Z, \vec{R}} = 102,387^\circ$$

### Визначення головного моменту.

Головний момент –геометрична сума моментів сил, прикладених до системи.

$$\vec{M}_O = \sum_{i=1}^n \vec{M}_i = M_X \vec{i} + M_Y \vec{j} + M_Z \vec{k},$$

де проекції головного моменту на осі координат:

$$M_X = \sum_{i=1}^n M_{iX}, \quad M_Y = \sum_{i=1}^n M_{iY}, \quad M_Z = \sum_{i=1}^n M_{iZ}.$$

$$M_X = -F_Z \cdot a = -1,562 \cdot 9 = -14,056 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_Y = F_X \cdot c = 1,250 \cdot 5 = 6,250 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_Z = P \cdot b - F_X \cdot a = 7 \cdot 4 - 1,250 \cdot 9 = 16,755 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Модуль головного моменту:

$$M_O = \sqrt{M_X^2 + M_Y^2 + M_Z^2} = \sqrt{(-14,056)^2 + 6,250^2 + 16,755^2} = 22,745 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Визначимо напрямні косинуси:

$$\cos(M_X, \vec{M}_O) = \frac{M_X}{M} = \frac{-14,056}{22,745} = -0,618, \quad \widehat{M_X, \vec{M}_O} = 128,168^\circ$$

$$\cos(M_Y, \vec{M}_O) = \frac{M_Y}{M_O} = \frac{6,250}{22,745} = 0,275, \quad \widehat{M_Y, \vec{M}_O} = 74,059^\circ$$

$$\cos(M_Z, \vec{M}_O) = \frac{M_Z}{M_O} = \frac{16,755}{22,745} = 0,737, \quad \widehat{M_Z, \vec{M}_O} = 42,552^\circ$$

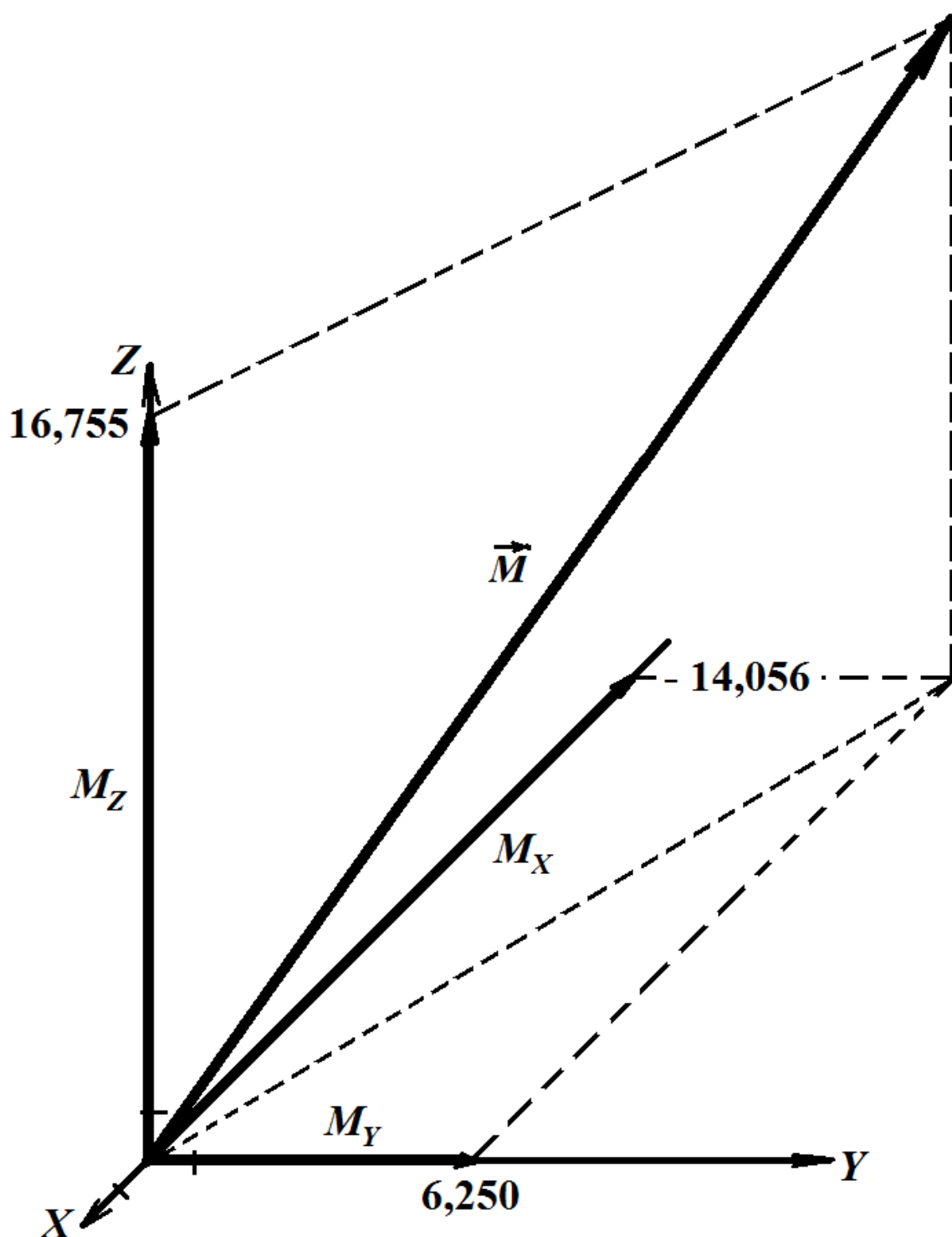


Рисунок 3.

Проекції головного моменту на осі та головний момент  $\vec{M}_O$  показано на рис. 3.

**Спосіб №2**  
**Аналітичний метод**

Запишемо сили у координатній формі (рис. 4):

$$\vec{P} = \{0, P, 0\} = \{0, 7, 0\}$$

$$\vec{F} = \{F_X, 0, -F_Z\} = \{1,250, 0, -1,562\}$$

Головний вектор:

$$\vec{R} = \vec{P} + \vec{F} = \{1,250, 7, -1,562\}$$

Складові головного вектора:

$$R_X = F_X = 1,250 \text{ кН};$$

$$R_Y = P = 7 \text{ кН};$$

$$R_Z = -F_Z = -1,562 \text{ кН}.$$

Визначимо модуль  $R$ :

$$R = \sqrt{R_X^2 + R_Y^2 + R_Z^2} = \sqrt{1,250^2 + 7^2 + (-1,562)^2} = 7,280 \text{ кН}.$$

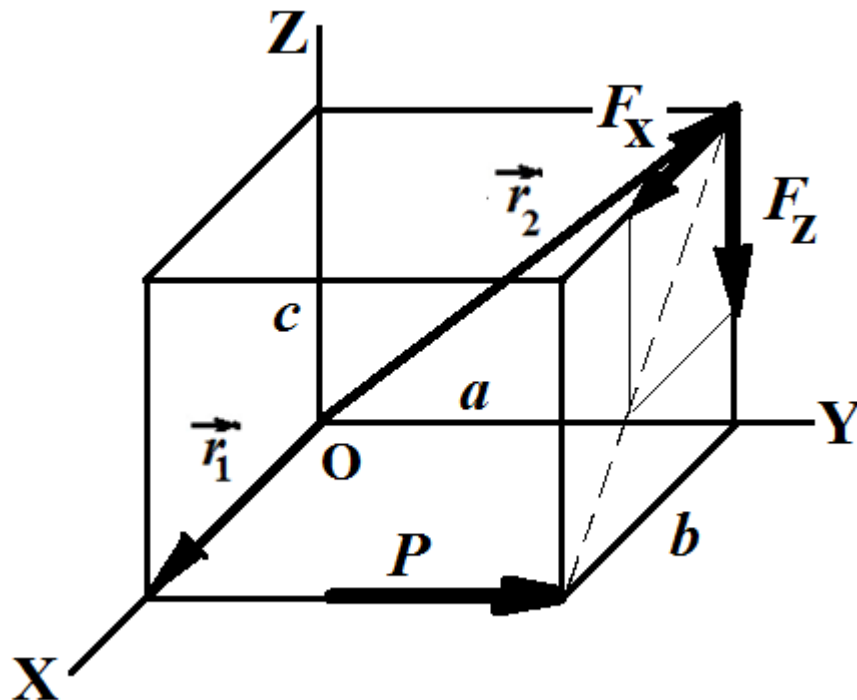


Рисунок 4.



Координати радіус-вектора точки прикладених сил (рис. 4):

для сили  $\vec{P}$  вектор  $\vec{r}_1 = \{b, 0, 0\} = \{4, 0, 0\}$

для сили  $\vec{F}$  вектор  $\vec{r}_2 = \{0, a, c\} = \{0, 9, 5\}$

Момент сили  $\vec{P}$  відносно точки  $O$  (початку координат) – векторний добуток векторів:

$$\vec{M}_O(\vec{P}) = \vec{r}_1 \times \vec{P} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \end{vmatrix} = 0 \cdot \vec{i} - 0 \cdot \vec{j} + 28 \cdot \vec{k}$$

Момент сили  $\vec{F}$  відносно точки  $O$  (початку координат) – векторний добуток векторів:

$$\begin{aligned} \vec{M}_O(\vec{F}) &= \vec{r}_2 \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 9 & 5 \\ 1,250 & 0 & -1,562 \end{vmatrix} = \\ &= \vec{i}(-1,562 \cdot 9 - 5 \cdot 0) - \vec{j}(-1,562 \cdot 0 - 5 \cdot 1,250) \\ &+ \vec{k}(0 - 9 \cdot 1,250) = -14,056\vec{i} + 6,250\vec{j} - 11,245\vec{k} \end{aligned}$$

Головний момент:

$$\begin{aligned} \vec{M}_O &= \vec{M}_O(\vec{P}) + \vec{M}_O(\vec{F}) = -14,056\vec{i} + 6,250\vec{j} + (28 - 11,245)\vec{k} \\ &= -14,056\vec{i} + 6,250\vec{j} + 16,755\vec{k} \end{aligned}$$

Модуль головного моменту:

$$M_O = \sqrt{M_X^2 + M_Y^2 + M_Z^2} = \sqrt{(-14,056)^2 + 6,250^2 + 16,755^2} = 22,745 \text{ кН}\cdot\text{м.}$$

Отже, рішення, що отримані у два способи, збігаються.

### Варіанти завдань

№	$F$ , кН	$P$ , кН	$M$ , кН·м	$a$ , м	$b$ , м	$c$ , м
1	4	5	8	5	2	3
2	3	6	10	7	3	4
3	2	7	12	9	4	5
4	5	8	14	12	2	3
5	6	9	16	5	3	4
6	8	10	18	7	4	5
7	4	11	20	9	2	3
8	3	12	22	12	3	4
9	2	5	24	5	4	5
10	5	6	8	7	2	3
11	6	7	10	9	3	4
12	8	8	12	12	4	5
13	4	9	14	5	2	3
14	3	10	16	7	3	4
15	2	11	18	9	4	5
16	5	12	20	12	2	3
17	6	5	22	5	3	4
18	8	6	24	7	4	5
19	4	7	8	9	2	3
20	3	8	10	12	3	4
21	2	9	12	5	4	5
22	5	10	14	7	2	3
23	6	11	16	9	3	4
24	8	12	18	12	4	5
25	4	5	20	5	2	3
26	3	6	22	7	3	4
27	2	7	24	9	4	5
28	5	8	8	12	2	3
29	6	9	10	5	3	4
30	8	10	12	7	4	5

## Завдання С.8. Визначення положення центру ваги тіла

Визначити координати центру ваги плоскої ферми, складеної з тонких однорідних стержнів однакової погонної ваги, плоскої фігури або об'ємного (просторового) тіла. Для складеної конструкції 1) з тонких однорідних стержнів однакової погонної ваги, варіанти 1-6, розміри у метрах; 2) плоскої, варіанти 7-18 та 24-30, розміри у сантиметрах; 3) об'ємної, варіанти 19-23, розміри у сантиметрах.

### Мета:

набуття вміння визначення координат центру ваги для складеного стержньового, плоского та просторового тіла.

Перед виконанням завдання доцільно ознайомитися з теоретичним матеріалом, який надано у Розділі 3 цього видання.

Під час вирішення задач на визначення положення центру ваги істотну роль відіграє вибір осей координат. Завжди необхідно проаналізувати конструкцію (тверде тіло) на предмет виявлення площини симетрії або осі симетрії. В цьому випадку центр ваги знаходиться на ній.

**Приклад виконання завдання.** Визначити координати центра ваги плоскої фігури, показаної на рис. 1.

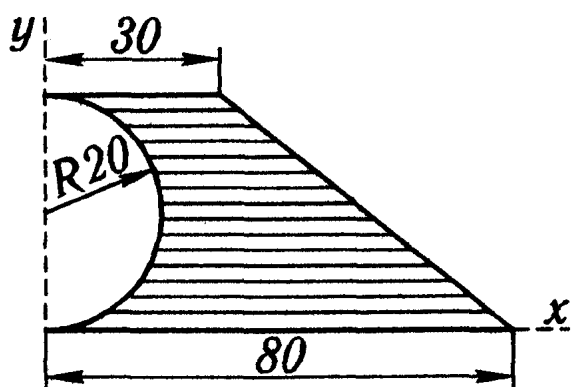


Рисунок 1.

### Розв'язання.

Координати центра ваги плоскої фігури визначають за формулами:

$$x_C = \frac{S_Y}{F}, \quad y_C = \frac{S_X}{F}. \quad (1)$$

Тут

$$S_X = F y_C; \quad S_Y = F x_C \quad (2)$$

статичні моменти фігури відносно осей  $x$ ,  $y$ , а  $F$  – площа фігури.

Для того, щоб скористатися формулами (1), необхідно поділити фігуру на частини, для яких відомі або легко визначаються площі  $F_i$  і координати центру ваги  $x_i$  та  $y_i$  окремих фігур. В нашому випадку такими частинами є

прямокутник, трикутник і половина кола, відповідно, площа кожного з них  $F_1$ ,  $F_2$ ,  $F_3$ , а координати центрів ваги  $(x_1, y_1)$ ,  $(x_2, y_2)$ ,  $(x_3, y_3)$ .

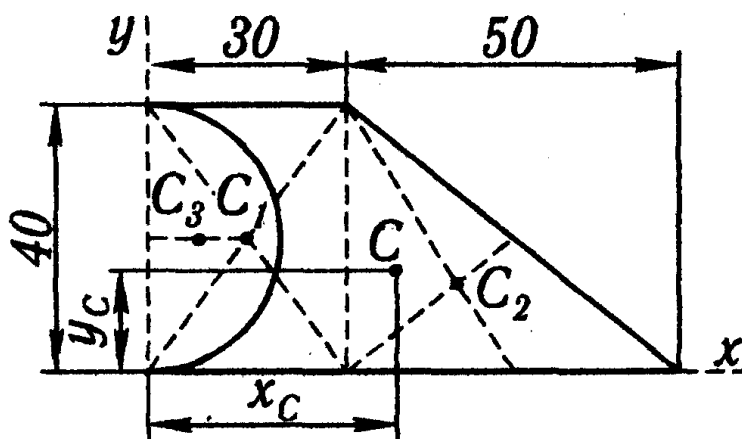


Рисунок 2.

Статичні моменти площі плоскої фігури відносно осей координат дорівнюють сумам статичних моментів площин окремих її частин, які можна визначити за відомих формул для простих фігур. Площа вирізів вважається від'ємною, що остаточно дає:

$$S_Y = F_1 x_1 + F_2 x_2 - F_3 x_3, \quad S_X = F_1 y_1 + F_2 y_2 - F_3 y_3.$$

Тоді для координат  $x_C$  і  $y_C$  маємо з урахуванням (1):

$$x_C = \frac{F_1 x_1 + F_2 x_2 - F_3 x_3}{F}, \quad y_C = \frac{F_1 y_1 + F_2 y_2 - F_3 y_3}{F}. \quad (3)$$

Цей спосіб має назву способу від'ємних площин.

Таблиця 1.

Номер елемента	$F_i, \text{см}^2$	$x_i, \text{см}$	$y_i, \text{см}$	$S_{iY} = F_i x_i, \text{см}^3$	$S_{iX} = F_i y_i, \text{см}^3$
1	1200	15,0	20,0	18000	24000
2	1000	46,7	13,3	46700	13300
3	-628	8,5	20,0	-5338	-12560
$\Sigma$	1572	-	-	59362	24700

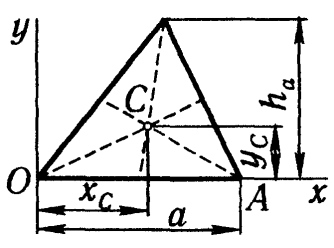
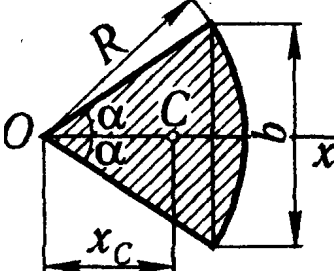
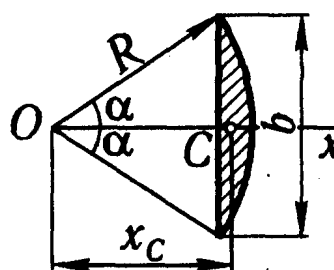
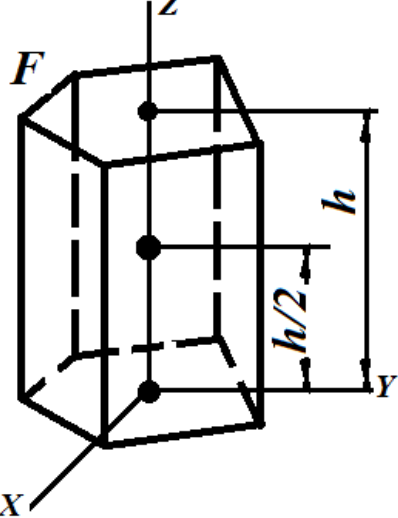
За формулами (1) обчислюємо координати центру ваги плоскої фігури:

$$x_C = \frac{59362}{1572} = 37,8 \text{ см}; \quad y_C = \frac{24700}{1572} = 15,7 \text{ см}.$$

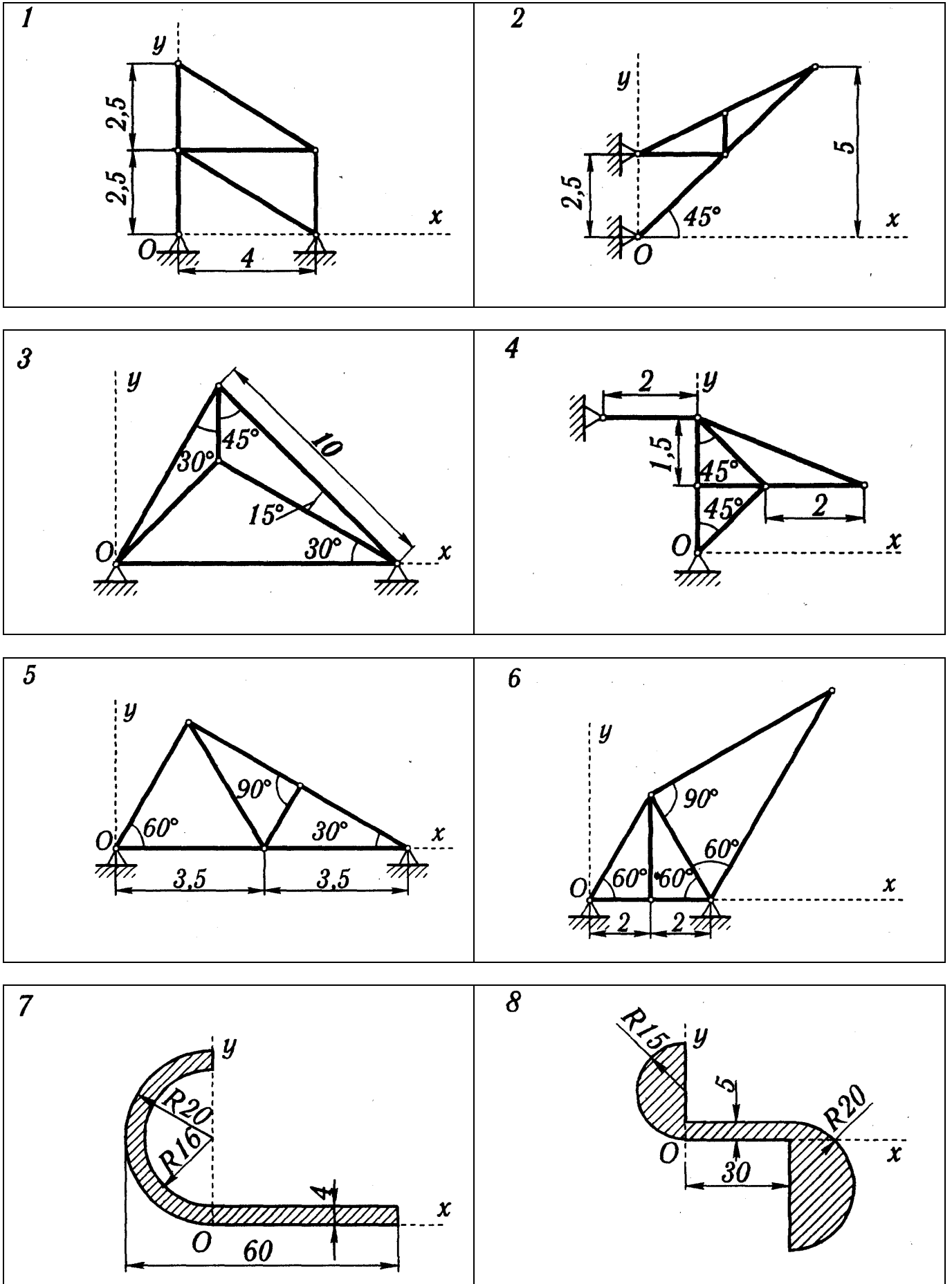
Центр ваги вказано на рис. 2.

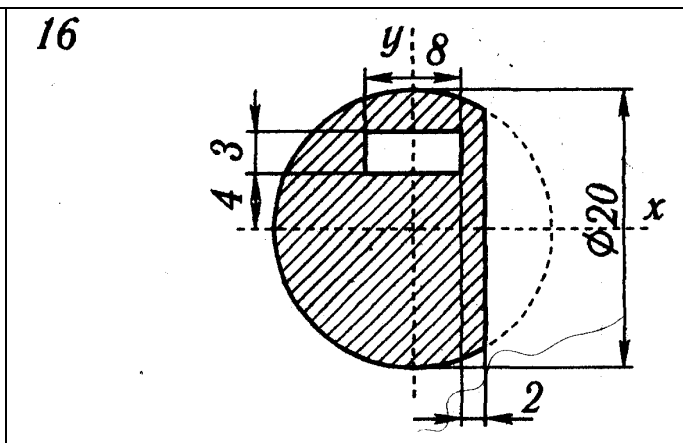
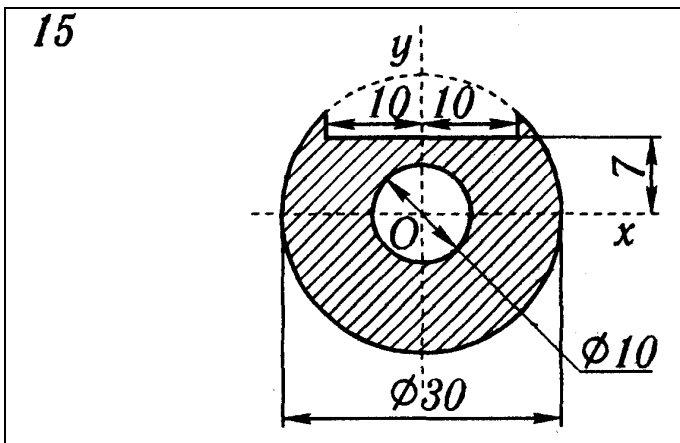
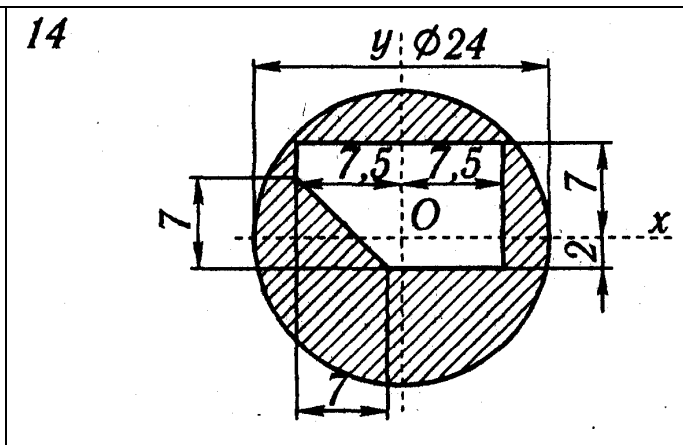
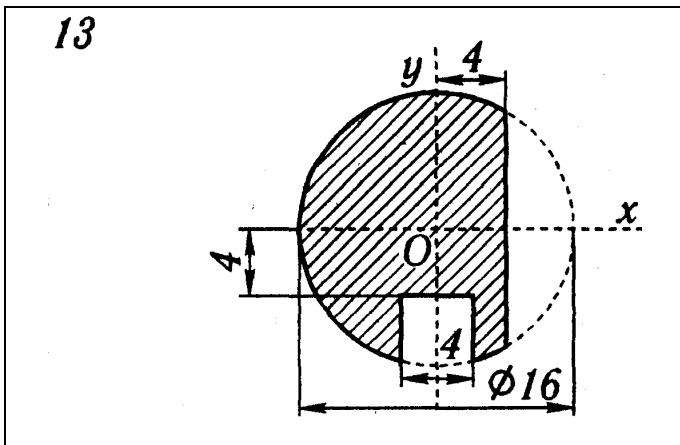
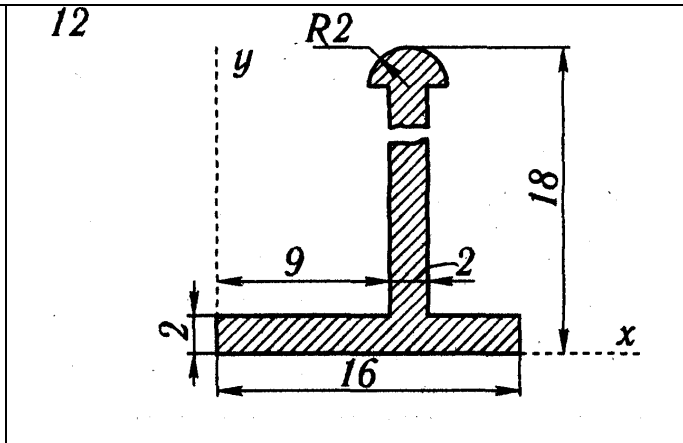
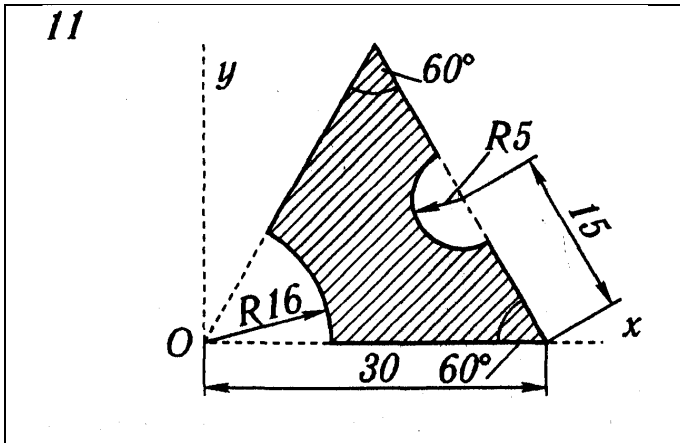
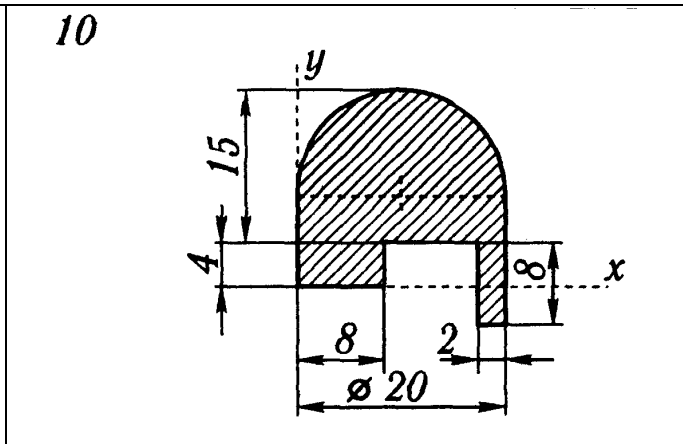
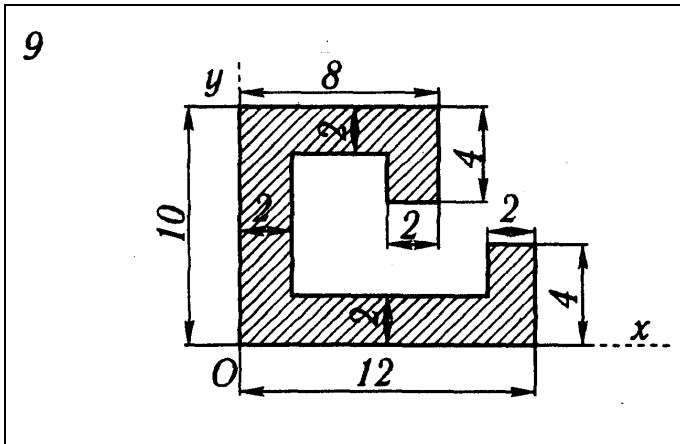
Площі та координати центрів ваги деяких типових плоских фігур наведено у Табл. 2.

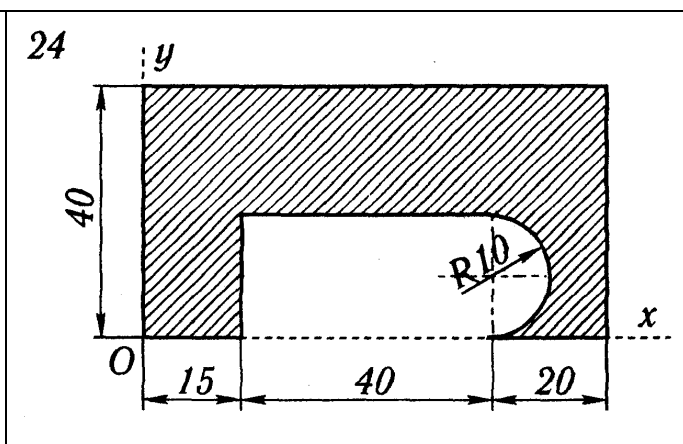
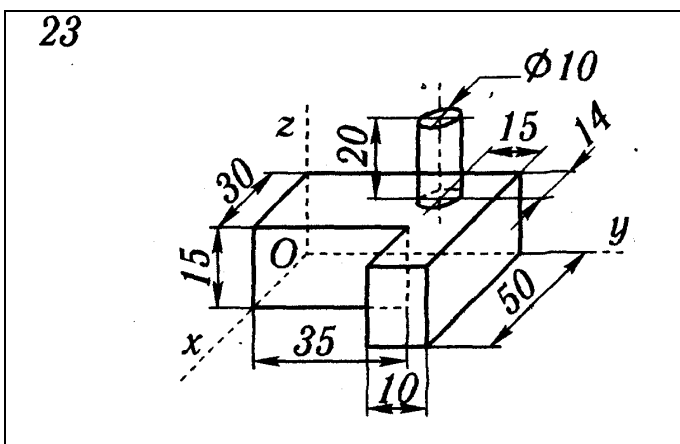
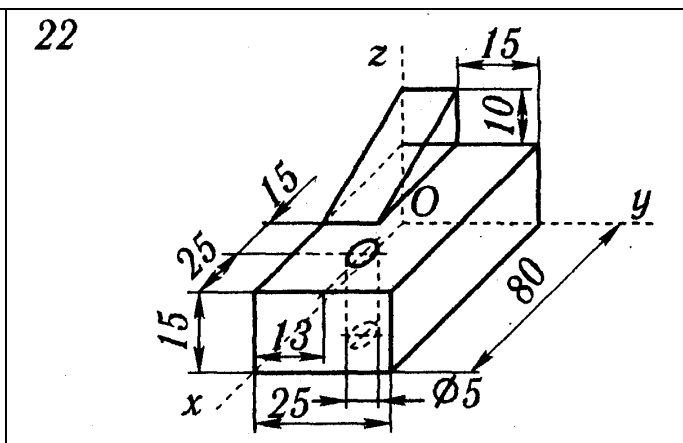
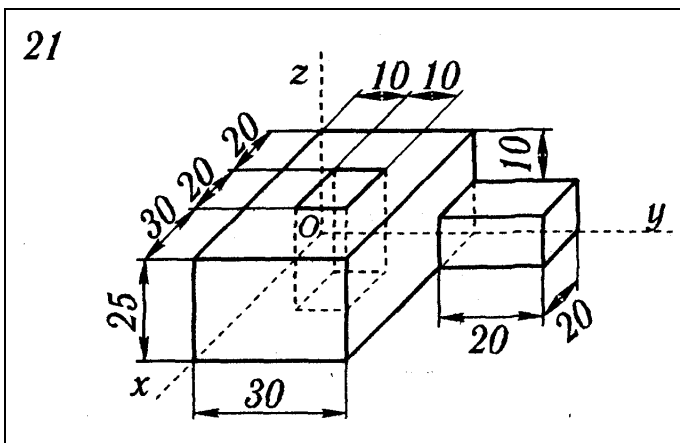
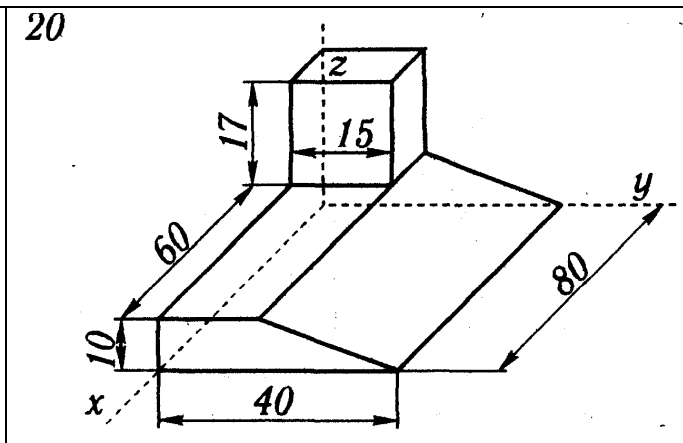
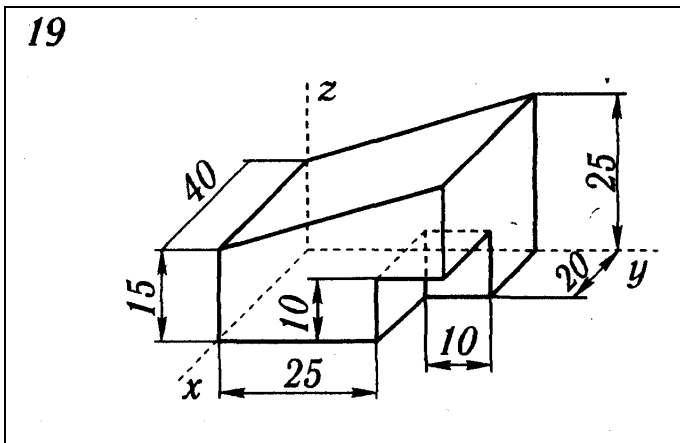
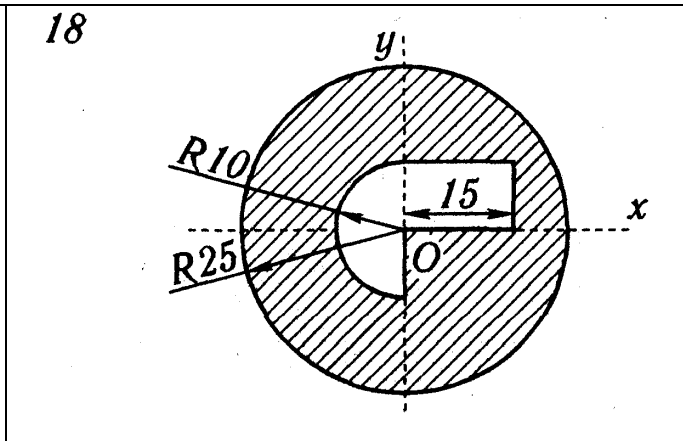
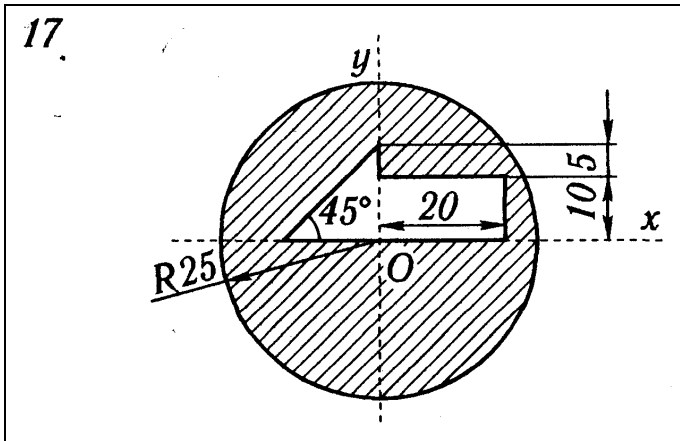
Таблиця 2.

	Фігура	Площа	Координати центру ваги
Трикутник		$F = \frac{1}{2} a h_a$	$x_c = \frac{1}{3} (x_1 + x_2 + x_3)$ $y_c = \frac{1}{3} h_a$ <p><math>x_1, x_2, x_3</math> – координати вершин <math>O, A, B</math></p>
Коловий сектор		$F = \alpha R^2$	$x_c = \frac{2R \sin \alpha}{3\alpha} = \frac{R^2}{3F}$ $y_c = 0$
	$\alpha = \pi/2$ (напівколо)	$F = \pi R^2 / 2$	$x_c = \frac{4R}{3\pi}$
	$\alpha = \pi/6$	$F = \pi R^2 / 6$	$x_c = \frac{2R}{\pi}$
Коловий сегмент		$F = R^2 / 2 \times (2\alpha - \sin 2\alpha)$	$x_c = \frac{4R \sin^3 \alpha}{3(2\alpha - \sin 2\alpha)} = \frac{b^3}{12F}$
Однорідна призма			$z_c = \frac{h}{2}$ <p><math>h</math> – висота призми, координати <math>x_c</math> і <math>y_c</math> визначають як для плоскої фігури</p>

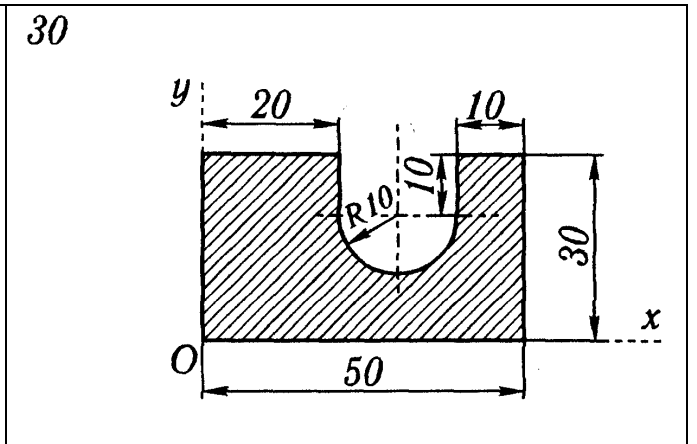
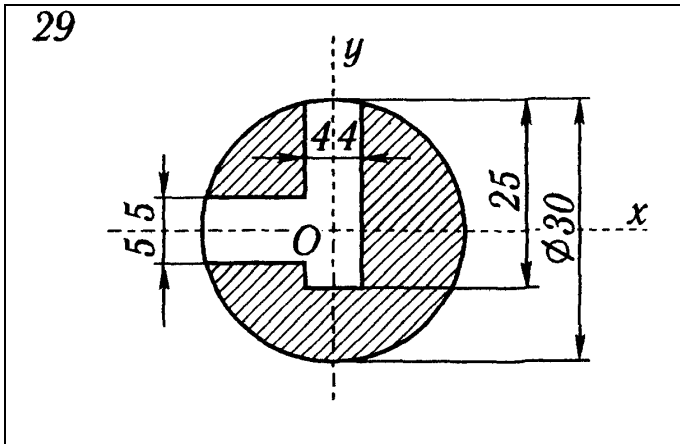
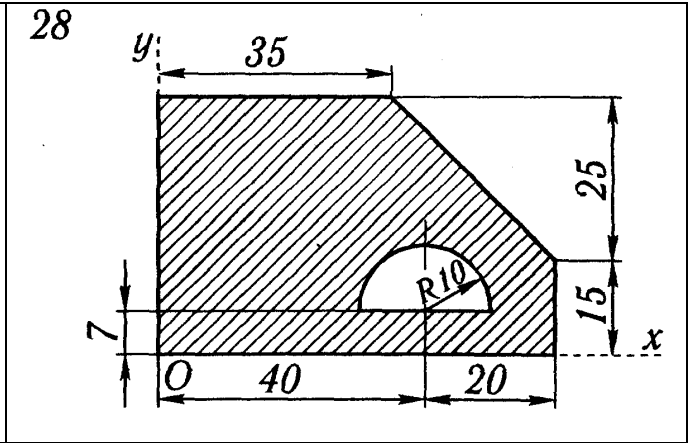
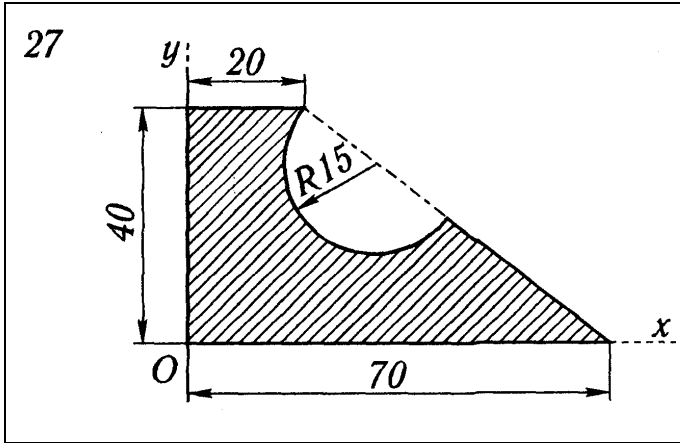
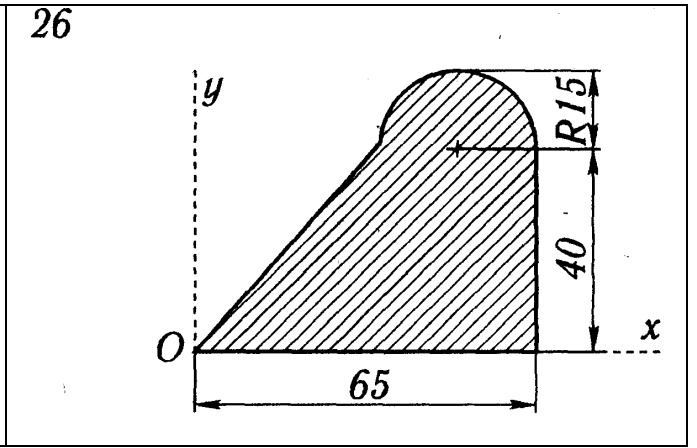
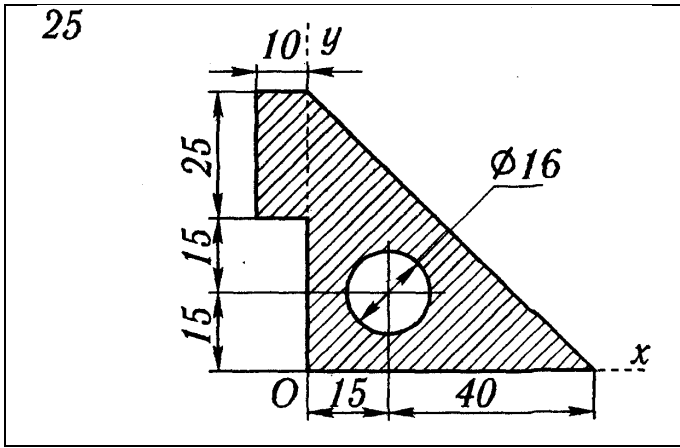
## Варіанти завдань











## ЛІТЕРАТУРА

1. Міщенко, І. В. Теоретична механіка : конспект лекцій / І. В. Міщенко ; Харків. нац. автомоб.-дор. ун-т. – Харків : ХНАДУ, 2023. – 207 с.

посилання

[https://dspace.khadi.kharkov.ua/dspace/bitstream/123456789/13410/1/KL\\_Mishchenko\\_TeoretMekhanika23.pdf](https://dspace.khadi.kharkov.ua/dspace/bitstream/123456789/13410/1/KL_Mishchenko_TeoretMekhanika23.pdf)

2. Апостолюк, О. С. Теоретична механіка: Збірник задач. За ред Павловського М. А. [Текст] / О. С. Апостолюк , О. М. Воробйов. – К.: Техніка, 2007. – 400 с.

3. Теоретична механіка та опір матеріалів: курс лекцій [Текст] / Укладачі: Ю. Ф. Деркач, В. Ю. Колосков, О. М. Кондратенко, І. В. Міщенко, Г. О. Чернобай. – Х.: НУЦЗУ, 2020. – 510 с.

4. Технічна механіка. Розділи «Статика», «Опір матеріалів». Методичні вказівки до виконання контрольних (модульних) робіт №1, №2 [Текст] / Укладачі: С. О. Вамболь, І. В. Міщенко. – Х.: НУЦЗУ, 2017. – 92 с.

5. Технічна механіка: методичні вказівки з організації самостійної роботи здобувачів вищої освіти під час вивчення дисципліни [Текст] / Укладачі: Ю. Ф. Деркач, В. Ю. Колосков, О. М. Кондратенко, І. В. Міщенко, Г. О. Чернобай. – Х.: НУЦЗУ, 2020. – 71 с.