Міністерство освіти і науки, молоді та спорту України

ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ АВТОМОБІЛЬНО-ДОРОЖНІЙ УНІВЕРСИТЕТ

До друку і в світ дозволяю
Проректор Гладкій І.П.

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

з теоретичної механіки
до розв'язання задач динаміки
автомобіля та його механізмів
для студентів спеціальності 7.07010601

Усі цитати, цифровий, фактичний матеріал, бібліографічні відомості перевірені, надпис одиниць відповідає стандартам

Затверджено методичною радою університету, протокол № від

Укладачі: Онищенко В.М., Хандримайлов А.О.

Відповідальний за випуск Солодов В.Г.

Харків
ХНАДУ
2011

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ,
МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ

Харківський національний автомобільно-дорожній університет

Кафедра теоретичної механіки і гідравліки

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

з теоретичної механіки
до розв'язання задач динаміки
автомобіля та його механізмів
для студентів спеціальності 7.07010601

2011

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ,
МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ

Харківський національний автомобільно-дорожній університет

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

з теоретичної механіки
до розв'язання задач динаміки
автомобіля та його механізмів
для студентів спеціальності 7.07010601

Затверджено
методичною радою
університету,
протокол №
від

2011

Укладачі: В.М. Онищенко, А.О. Хандримайлов

Кафедра теоретичної механіки і гідравліки

Методичні вказівки складені для студентів спеціальності «Автомобілі та автомобільне господарство» 7.07010601 з метою допомогти засвоєнню основних методів розв’язання задач теоретичної механіки з розділу «Динаміка» та покращити навички практичного використання цих методів. Робота включає приклади розв’язання задач динаміки автомобіля та його механізмів. При цьому основна увага приділяється рішенню задач із застосуванням рівнянь руху центра мас механічної системи та принципу Даламбера.

ЗАДАЧА 1.
Визначення прискорення автомобіля і нормальних реакцій опор при рівноприскореному русі

Умова

Повноприводний автомобіль масою $m = 1100$ (кг) рухається рівноприскорено. Визначити прискорення автомобіля й нормальні реакції опори, що діють на його колеса, якщо відомо, що сили зчеплення коліс із дорогою досягають максимальних значень. Показане на рисунку 1 положення центра мас автомобіля (точка C) визначається розмірами: $l_1 = 1{,}6$ (м), $l_2 = 0{,}8$ (м), $h = 0{,}56$ (м). Масою коліс автомобіля й опором повітря знехтувати.

Рішення з використанням рівняння руху центра мас механічної системи

Покажемо на схемі (рис. 1) всі зовнішні сили, що діють на автомобіль. Рівнодіюча сил ваги ($\vec{G}$) прикладена в центрі мас автомобіля й спрямована вертикально вниз.

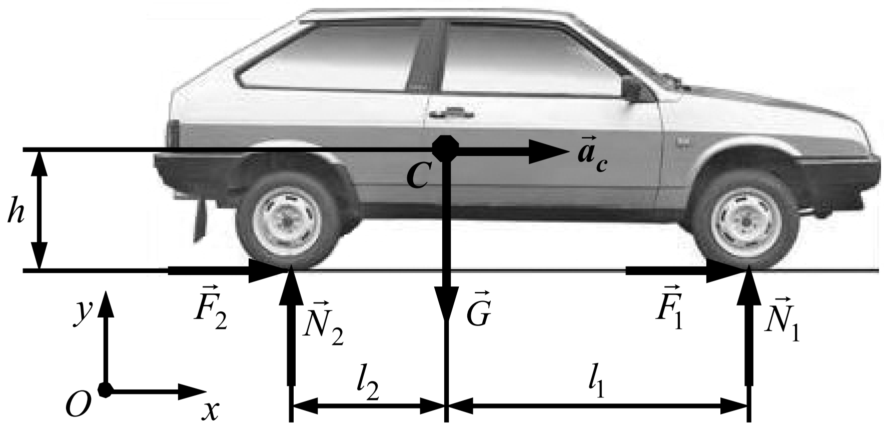

Рисунок 1 – Сили, що діють на автомобіль при розгоні

Нормальні реакції опор ($\vec{N}_1$ і $\vec{N}_2$), що діють із боку дороги на колеса автомобіля, прикладені в точках контакту коліс із дорогою й спрямовані перпендикулярно опорі вгору. У дійсності, колесо з дорогою утворюють поверхню контакту, по якій розподіляється реакція опори. При коченні колеса рівнодіюча нормальної реакції опори зміщується вбік руху автомобіля, створюючи при цьому додатковий момент опору коченню колеса. Але в даній задачі ми знехтуємо цим ефектом.

При розгоні повнопривідного автомобіля в місцях контакту його коліс із дорогою виникають сили зчеплення ($\vec{F}_1$ і $\vec{F}_2$), які спрямовані вбік руху автомобіля. Ці сили перешкоджають проковзуванню (пробуксовці) коліс відносно дороги. Умова, при якій сили зчеплення досягають максимальних значень, записується у вигляді

$$F_1 = N_1 \cdot f\,;$$

$$F_2 = N_2 \cdot f\,,$$

де f – коефіцієнт тертя ковзання, який залежить від властивостей контактуючих поверхонь (у даній задачі - від властивостей дорожнього покриття й шин автомобіля). Згідно з експериментальними даними його можна прийняти рівним $f = 0,25 \div 0,5$, де мінімальне значення відповідає руху автомобіля по мокрому асфальту, а максимальне – по сухому.

Показавши на схемі всі зовнішні сили, що діють на автомобіль, складемо рівняння руху його центра мас. У загальному випадку воно записується у вигляді

$$\sum \vec{F}_i^E = m \cdot \vec{a}_c\,,$$

де $\sum \vec{F}_i^E$ – сума зовнішніх сил, що діють на систему (тіло), $\vec{a}_c$ – прискорення центра мас системи (тіла). Для даної задачі рівняння прийме вид

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{N}_1 + \vec{N}_2 + \vec{G} = m \cdot \vec{a}_c\,.$$

Введемо систему координат Oxy і запишемо отриману векторну рівність у проекціях на осі Ox й Oy

$$Ox:\ F_1 + F_2 = m \cdot a_c\,;$$

$$Oy:\ N_1 + N_2 - G = 0\,.$$

Додатково складемо рівняння рівноваги моментів відносно центра мас автомобіля. Так як автомобіль рухається поступально, то сума моментів усіх діючих на нього зовнішніх сил відносно будь-якої точки повинна дорівнюватися нулю. Тоді

$$\sum M_C\left(\vec{F}_i\right)=0 \quad \Rightarrow \quad N_1\cdot l_1-N_2\cdot l_2+F_1\cdot h+F_2\cdot h=0.$$

Запишемо всі складені рівняння у вигляді системи

$$\begin{cases}(1)\ F_1=N_1\cdot f\\(2)\ F_2=N_2\cdot f\\(3)\ F_1+F_2=m\cdot a_c\\(4)\ N_1+N_2-G=0\\(5)\ N_1\cdot l_1-N_2\cdot l_2+F_1\cdot h+F_2\cdot h=0\end{cases}$$

Нагадаємо, що перші два рівняння є умовами, при яких сили зчеплення досягають максимальних значень. Третє рівняння є рівнянням руху центра мас автомобіля, а останні два - умовами рівноваги. Отримана система рівнянь дозволяє визначити прискорення автомобіля, а також невідомі реакції опор.

З початку, виразимо прискорення автомобіля. Підставляючи у формулу (3) вираження для сил зчеплення з формул (1) і (2), одержимо

$$N_1\cdot f+N_2\cdot f=m\cdot a_c,$$

$$f\left(N_1+N_2\right)=m\cdot a_c.$$

Але, з рівняння (4) відомо, що

$$N_1+N_2=G.$$

Тоді

$$G\cdot f=m\cdot a_c,$$

звідки

$$a_c=\frac{G\cdot f}{m}=\frac{\cancel{m}\cdot g\cdot f}{\cancel{m}}=g\cdot f.$$

Отримане рівняння показує, що прискорення автомобіля залежить тільки від коефіцієнта тертя ковзання між колесами автомобіля й дорогою.

Підрахуємо прискорення автомобіля для граничних значень коефіцієнта тертя ковзання

$a_{c\min} = 9,81 \cdot 0,25 \approx 2,45$ (м/с^2) – при русі по мокрому асфальту;

$a_{c\max} = 9,81 \cdot 0,5 \approx 4,9$ (м/с^2) – при русі по сухому асфальту.

Визначимо нормальні реакції опор. Підставляючи у формулу (5) вираження для сил зчеплення з формул (1) і (2), одержимо

$$N_1 \cdot l_1 - N_2 \cdot l_2 + N_1 \cdot f \cdot h + N_2 \cdot f \cdot h = 0.$$

З рівняння (4) можна виразити

$$N_2 = G - N_1,$$

тоді

$$N_1 \cdot l_1 - G \cdot l_2 + N_1 \cdot l_2 + \cancel{N_1 \cdot f \cdot h} + G \cdot f \cdot h - \cancel{N_1 \cdot f \cdot h} = 0.$$

З отриманого рівняння виразимо нормальну реакцію опори для передніх коліс

$$N_1 \left(l_1 + l_2 \right) = G \cdot l_2 - G \cdot f \cdot h,$$

звідки

$$N_1 = \underbrace{\frac{G \cdot l_2}{l_1 + l_2}}_{\text{стат.}} - \underbrace{\frac{G \cdot f \cdot h}{l_1 + l_2}}_{\text{дин.}}.$$

Як видно з формули, нормальна реакція опори складається із двох частин, перша з яких є статичною складовою (це сила, що діє на колеса автомобіля, коли він перебуває в стані спокою), а друга – динамічною складовою (з'являється при русі автомобіля із прискоренням). Треба відмітити, що динамічна складова в цьому випадку є від'ємною, отже, при розгоні автомобіля навантаження на його передні колеса буде зменшуватися (колеса прагнуть відірватися від землі). Відрив відбудеться, якщо статична й динамічна складові будуть рівні за модулем.

Виконавши аналогічні дії, одержимо формулу для визначення нормальної реакції опори задніх коліс

$$N_2 = \underbrace{\frac{G \cdot l_1}{l_1 + l_2}}_{\text{стат.}} + \underbrace{\frac{G \cdot f \cdot h}{l_1 + l_2}}_{\text{дин.}}.$$

У цьому випадку динамічна складова виходить позитивною. Таким чином, при розгоні автомобіля його задні колеса будуть сильніше притискатися до землі.

Визначимо числові значення нормальних реакцій опор для граничних значень коефіцієнта тертя ковзання.

При русі по мокрому асфальту

$$N_1 = 2968 \text{ (Н)}, \; N_2 = 7823 \text{ (Н)}.$$

При русі по сухому асфальту

$$N_1 = 2338 \text{ (Н)}, \; N_2 = 8453 \text{ (Н)}.$$

Перевірку підрахунків можна виконати, підставивши отримані значення в рівняння (4), наприклад

$$N_1 + N_2 - m \cdot g = 0;$$

$$2968 + 7823 - 1100 \cdot 9{,}81 = 0; \quad \Rightarrow \quad 0 \equiv 0,$$

звідки можна зробити висновок, що підрахунки здійснено вірно.

Рішення з використанням принципу Даламбера

Дане завдання можна розв'язати з використанням принципу Даламбера для механічної системи, який записується у вигляді

$$\sum \vec{F}_i^E + \sum \vec{\Phi}_j = 0;$$

$$\sum M_O\left(\vec{F}_i^E\right) + \sum M_O\left(\vec{\Phi}_j\right) = 0,$$

де $\sum \vec{F}_i^E$ – сума зовнішніх сил, що діють на систему (тіло); $\sum \vec{\Phi}_j$ – сума сил інерції, $\sum M_O\left(\vec{F}_i^E\right)$ – сума моментів зовнішніх сил відносно довільно обраного центра O; $\sum M_O\left(\vec{\Phi}_j\right)$ – сума моментів сил інерції.

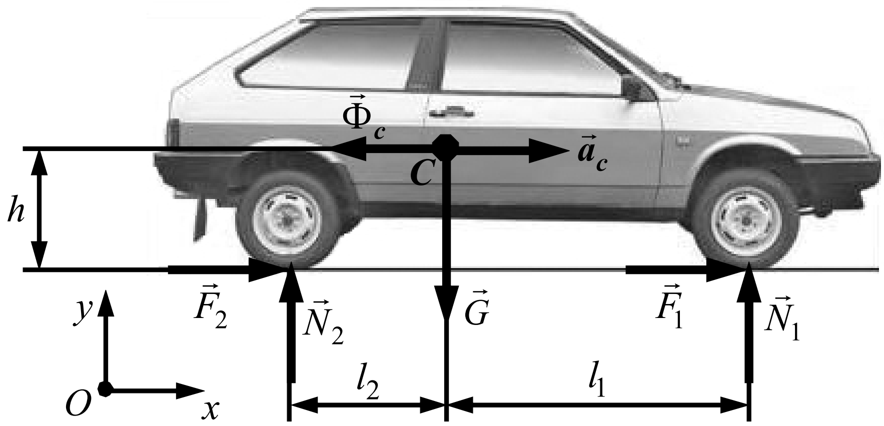

Рисунок 2 – Сили, що діють на автомобіль, з урахуванням сил інерції

Так як масою коліс автомобіля за умовою задачі нехтуємо, а корпус автомобіля рухається поступально, то всі сили інерції, що діють на автомобіль зводяться до однієї рівнодіючої ($\vec{\Phi}_c$), що прикладена в центрі мас автомобіля. Рівнодіюча сил інерції завжди спрямована в сторону, протилежну прискоренню центра мас системи (тіла) й визначається по формулі

$$\Phi_c = m \cdot a_c .$$

Покажемо на схемі (рис. 2) всі зовнішні сили, що діють на автомобіль, і рівнодіючу сил інерції.

Використовуючи принцип Даламбера для даної задачі одержимо

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{N}_1 + \vec{N}_2 + \vec{G} + \vec{\Phi}_c = 0 .$$

У проекціях на осі координат Ox і Oy одержимо

$$Ox \ : \ F_1 + F_2 - \Phi_c = 0 \text{, або } F_1 + F_2 = m \cdot a_c ;$$

$$Oy \ : \ N_1 + N_2 - G = 0 .$$

Рівняння моментів для принципу Даламбера складемо відносно центра мас автомобіля.

$$\sum M_c\left(\vec{F}_i^E\right)+\sum M_c\left(\vec{\Phi}_j\right)=0,$$

$$N_1\cdot l_1-N_2\cdot l_2+F_1\cdot h+F_2\cdot h+M_c\left(\vec{\Phi}_c\right)=0.$$

Так як момент рівнодіючої сил інерції $M_c\left(\vec{\Phi}_c\right)$ відносно центра мас автомобіля дорівнює нулю, то

$$N_1\cdot l_1-N_2\cdot l_2+F_1\cdot h+F_2\cdot h=0.$$

Додавши до отриманих рівнянь формули (1) і (2) для знаходження сил зчеплення, одержимо систему рівнянь, ідентичну розглянутої в попередньому розв'язку задачі. Далі задача вирішується аналогічно попередньому способу.

ЗАДАЧА 2
Визначення умови перекидання автомобіля при його розгоні

Умова

Визначити умови перекидання автомобіля (умови відриву передніх коліс від землі при розгоні). Положення центра мас автомобіля (точка C) визначається розмірами: $l=0{,}8$ (м), $h=0{,}56$ (м) (рис. 3). Масою коліс і опором повітря знехтувати.

Рішення

У момент відриву передніх коліс від дороги на них перестають діяти реакції опори. Тоді із зовнішніх сил на автомобіль будуть діяти: рівнодіюча сил ваги ($\vec{G}$), що прикладена в центрі мас автомобіля й спрямована вертикально вниз; сила зчеплення задніх коліс із опорою ($\vec{F}$), яка спрямована вбік руху автомобіля; нормальна реакція опори ($\vec{N}$) для задніх коліс, що спрямована перпендикулярно опорі вгору.

Згідно із принципом Даламбера для моментів сил – сума моментів зовнішніх сил і сил інерції відносно довільно обраного центра O рана нулю

$$\sum M_O\left(\vec{F}_i^E\right)+\sum M_O\left(\vec{\Phi}_j\right)=0.$$

Як вже згадувалося в попередній задачі, сили інерції тіла, що здійснює поступальний рух, приводяться до однієї рівнодіючої, прикладеної в центрі мас тіла. Ця рівнодіюча спрямована в сторону, протилежну прискоренню центра мас системи й визначається по формулі

$$\vec{\Phi}_c=-m\cdot\vec{a}_c,$$

$$\Phi_c=m\cdot a_c.$$

Покажемо на схемі (рис. 3) всі зазначені зовнішні сили і рівнодіючу сил інерції.

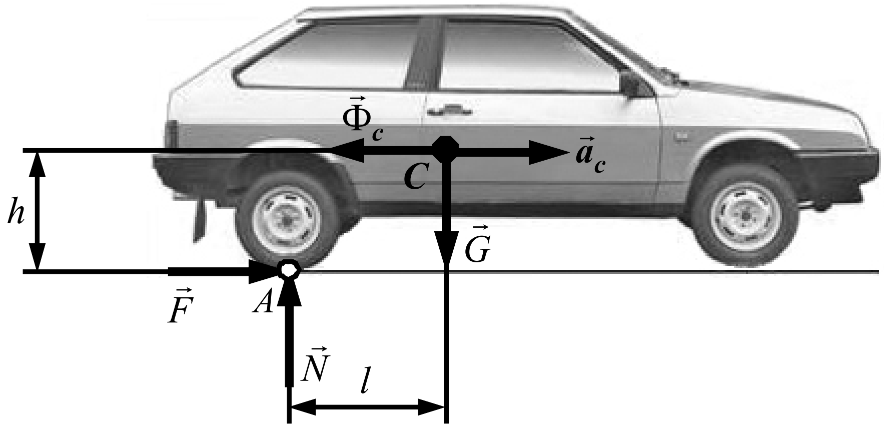

Рисунок 3 – Сили, що діють на автомобіль в момент відриву передніх коліс від дороги

Складемо згідно із принципом Даламбера рівняння моментів відносно точки контакту задніх коліс із дорогою (точка A):

$$\sum M_A\left(\vec{F}_i^E\right)+\sum M_A\left(\vec{\Phi}_j\right)=0;$$

$$\Phi_c\cdot h-G\cdot l=0;$$

$$m\cdot a_c\cdot h-m\cdot g\cdot l=0,$$

звідки

$$a_c = \frac{\cancel{m} \cdot g \cdot l}{\cancel{m} \cdot h} = \frac{g \cdot l}{h}.$$

Таким чином, умовою відриву передніх коліс від дороги є досягнення автомобілем прискорення, що дорівнює

$$a_c = \frac{9{,}81 \cdot 0{,}8}{0{,}56} \approx 14 \text{ (м/с}^2\text{)}.$$

У попередній задачі відзначалося, що для подібного автомобіля максимальне прискорення, яке він може розвити, дорівнює $a_c \approx 4{,}9$ м/с^2. Тому перекидання автомобіля можливо тільки при збільшенні коефіцієнта тертя ковзання між колесами й дорогою, тому що від нього залежить максимальне прискорення автомобіля, а також при зміщенні положення центра ваги автомобіля до задніх коліс (тобто, при зменшенні l) або вгору (тобто, при збільшенні h).

ЗАДАЧА 3
Визначення вертикального навантаження, що діє на опору кривошипно-шатунного механізму

Умова

Кривошип обертається з постійною кутовою швидкістю $\omega = 1000$ (об/хв); маса кривошипа $m_1 = 3$ (кг); маса шатуна $m_2 = 0{,}7$ (кг); маса поршня $m_3 = 0{,}35$ (кг). Центр мас кривошипа знаходиться в точці O; центр мас шатуна (точка C) розташований посередині відрізка AB; маса поршня зосереджена в точці A (рис. 4). Довжина кривошипа BO і довжина шатуна AB дорівнюють $l = 0{,}15$ (м). Визначити вертикальне навантаження, що діє на опору кривошипно-шатунного механізму. Силами тертя знехтувати. Додатково визначити відстань, на яку необхідно змістити центр мас кривошипа уздовж прямої BO щоб усунути вертикальне навантаження на опору механізму (зневажаючи силами ваги).

Рішення

Для розв'язку даної задачі скористуємося теоремою про рух центра мас механічної системи, яка записується у вигляді

$$M \cdot \vec{a}_C = \sum \vec{F}_i^E ,$$

де M - маса всієї системи; $\vec{a}_C$ - прискорення центра мас системи; $\sum \vec{F}_i^E$ - сума всіх зовнішніх сил, що діють на систему.

На кривошипно-шатунний механізм діють наступні зовнішні сили: сила ваги кривошипа ($\vec{G}_1$), яка спрямована вертикально вниз і прикладена, згідно з умовою, у точці O; сили ваги шатуна ($\vec{G}_2$) і поршня ($\vec{G}_3$), які також спрямовані вертикально вниз і прикладені в точках C і D відповідно. Також на механізм діють сили тертя, але за умовою задачі вони не враховуються. З боку опори на механізм діє реакція опори, напрямок і модуль якої невідомі й залежать від часу. Реакцію опори зручно розкласти на складові ($\vec{R}_x$ і $\vec{R}_y$), спрямовані уздовж осей декартової системи координат. Зв'яжемо систему координат Oxy з нерухомою точкою O та покажемо всі перераховані сили на схемі (рис. 4).

Вертикальне навантаження, що діє на опору механізму, дорівнює по модулю вертикальній складовій реакції опори (R_y) і спрямоване в протилежну сторону. Для знаходження R_y запишемо теорему про рух центра мас системи в проекціях на вісь Oy

$$M \cdot a_{Cy} = \sum F_{iy}^E .$$

Для даної задачі це рівняння прийме вид

$$\left(m_1 + m_2 + m_3\right) \cdot a_{Cy} = -G_1 - G_2 - G_3 + R_y ,$$

звідки

$$R_y = \underbrace{G_1 + G_2 + G_3}_{\text{стат.складова}} + \underbrace{\left(m_1 + m_2 + m_3\right) \cdot a_{Cy}}_{\text{інерц. складова}} . \tag{1}$$

Тут, сума сил ваги є статичною складовою навантаження – це сила, що діє на опору, коли механізм перебуває в стані спокою. Коли механізм приводиться до руху, з'являється інерційна (динамічна) складова навантаження, що представляє собою вплив сил інерції на опору (у рівнянні (1) – це впив на опору сил інерції у вертикальному напрямку).

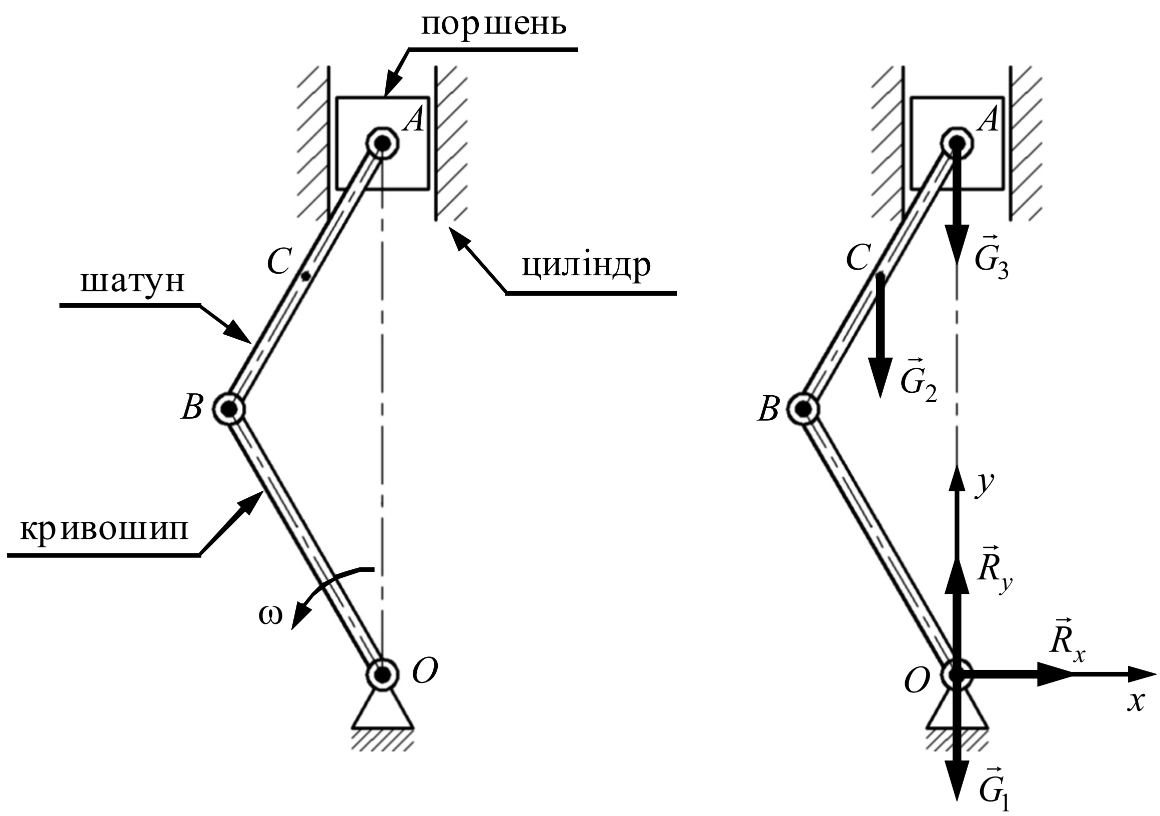

Рисунок 4 – Сили, що діють на кривошипно-шатунний механізм

Для визначення вертикального прискорення центра мас системи (a_{Cy}) скористуємося формулою для знаходження координати центра мас відносно осі Oy

$$y_C = \frac{\sum m_i \cdot y_{Ci}}{M},$$

де m_i - маса складових частин системи, для яких відоме положення їх центра мас (y_{Ci}) відносно осі Oy.

У даній задачі такими частинами є кривошип, шатун і поршень. Тоді отримаємо

$$y_C = \frac{m_1 \cdot y_{C1} + m_2 \cdot y_{C2} + m_3 \cdot y_{C3}}{m_1 + m_2 + m_3}. \qquad (2)$$

За умовою, центр мас кривошипа знаходиться в точці O, тому $y_{C1} = 0$. Введемо до розгляду кут φ (рис. 5), який буде описувати поворот кривошипа навколо опори. Знайдемо залежність координат центрів мас шатуна й поршня від кута φ

$$y_{C2} = BO \cdot \cos\varphi + BC \cdot \cos\varphi = l \cdot \cos\varphi + \frac{l}{2} \cdot \cos\varphi = \frac{3l}{2}\cos\varphi;$$

$$y_{C3} = BO \cdot \cos\varphi + AB \cdot \cos\varphi = l \cdot \cos\varphi + l \cdot \cos\varphi = 2l \cdot \cos\varphi.$$

Так як кривошип обертається рівномірно, то кут повороту φ можна виразити як

$$\varphi = \omega \cdot t,$$

де ω - задана кутова швидкість обертання кривошипа, t - час. Тоді

$$y_{C2} = \frac{3l}{2}\cos(\omega \cdot t);$$

$$y_{C3} = 2l \cdot \cos(\omega \cdot t).$$

Отримані формули визначають положення центрів мас шатуна й поршня відносно осі Oy в залежності від часу t.

Підставляючи формули для координат центрів мас кривошипа, шатуна і поршня в рівняння (2), одержимо

$$y_C = \frac{m_2 \cdot \frac{3l}{2} \cdot \cos(\omega \cdot t) + m_3 \cdot 2l \cdot \cos(\omega \cdot t)}{m_1 + m_2 + m_3} = \cos(\omega \cdot t)\frac{\left(\frac{3m_2}{2} + 2m_3\right) \cdot l}{m_1 + m_2 + m_3}.$$

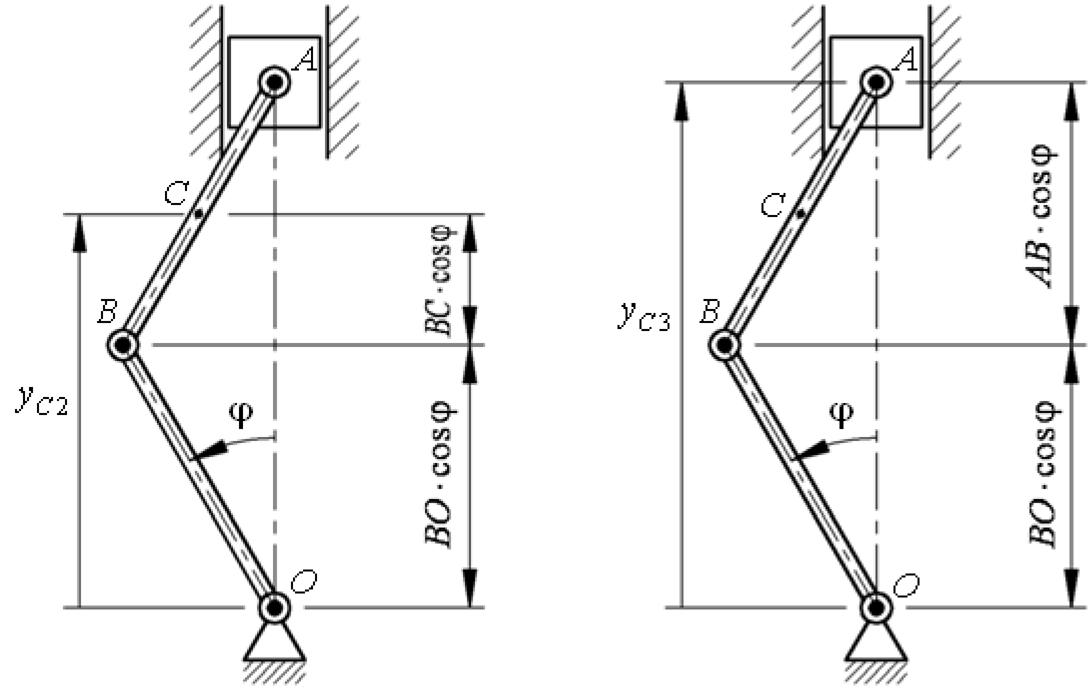

Рисунок 5 – Визначення положення центрів мас шатуна і поршня

Дане рівняння є законом руху центра мас кривошипно-шатунного механізму відносно осі Oy. Якщо знайти від цього рівняння другу похідну за часом, то одержимо прискорення центра мас механізму відносно осі Oy

$$a_{C\,y} = \ddot{y}_C = -\omega^2 \cdot \cos(\omega \cdot t) \cdot \frac{\left(\frac{3m_2}{2} + 2m_3\right) \cdot l}{(m_1 + m_2 + m_3)}.$$

У рівнянні (1) замість прискорення підставимо отримане вираження

$$R_y = G_1 + G_2 + G_3 - \cancel{(m_1 + m_2 + m_3)} \cdot \omega^2 \cdot \cos(\omega \cdot t) \cdot \frac{\left(\frac{3m_2}{2} + 2m_3\right) \cdot l}{\cancel{(m_1 + m_2 + m_3)}}.$$

Сила ваги дорівнює добутку маси тіла на прискорення вільного падіння (g), тоді

$$R_y = (m_1 + m_2 + m_3) \cdot g - \omega^2 \cdot \cos(\omega \cdot t) \cdot \left(\frac{3m_2}{2} + 2m_3\right) \cdot l. \qquad (3)$$

Приведемо кутову швидкість до розмірності в системі СІ.

$$\omega = \frac{1000\,\text{об}}{1\,\text{хв}} = \frac{1000 \cdot 2\pi\,\text{рад}}{60\,\text{с}} = \frac{1000 \cdot 2 \cdot 3{,}14}{60} \approx 104{,}7 \text{ (рад/с).}$$

Підставляючи всі задані числа у формулу (3) остаточно одержимо

$$R_y = \left(3 + 0{,}7 + 0{,}35\right) \cdot 9{,}81 -$$

$$-104{,}7^2 \cdot \cos\left(104{,}7 \cdot t\right) \cdot \left(\frac{3 \cdot 0{,}7}{2} + 2 \cdot 0{,}35\right) \cdot 0{,}15 \approx$$

$$\approx 39{,}7 - 2878 \cdot \cos\left(104{,}7 \cdot t\right) \text{ (Н).}$$

Отримана формула визначає залежність вертикальної реакції опори від часу. Побудуємо графік цієї залежності (рис. 6).

Як можна бачити по рівнянню й графіку, навантаження є циклічним з періодом

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{104.7} = 0{,}06 \text{ (с).}$$

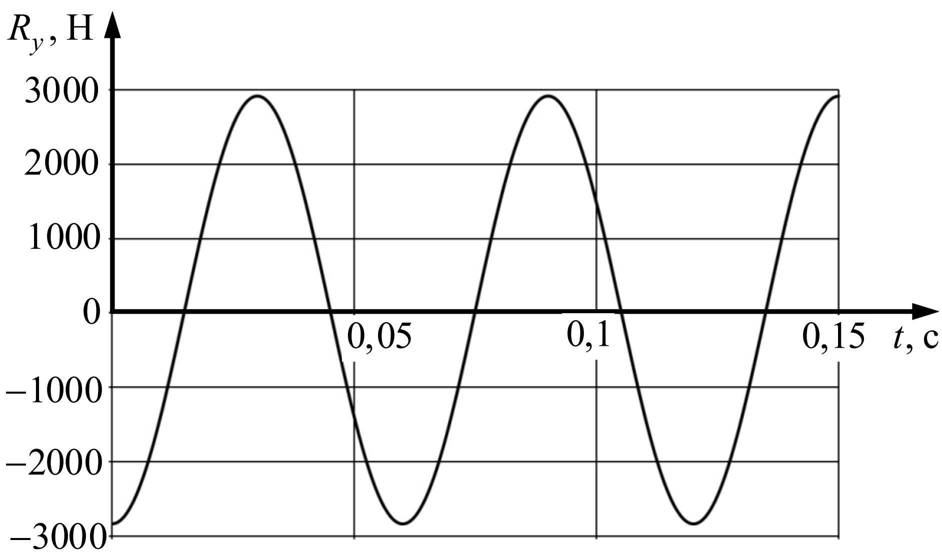

Рисунок 6 – Графік залежності вертикальної реакції опори від часу

Граничні значення навантаження досягаються при $\cos(104,7 \cdot t) = \pm 1$ та дорівнюють

$$R_y^* = 39,7 - 2878 \cdot (-1) = 2917,7 \text{ (Н)};$$

$$R_y^{**} = 39,7 - 2878 \cdot 1 = -2838,3 \text{ (Н)}.$$

Знак “-” означає, що сила змінює напрямок на протилежний.

Аналогічно розглянутому алгоритму, можна визначити горизонтальне навантаження на опору. Для цього необхідно скласти рівняння руху центра мас системи в проекціях на вісь Ox і виразити невідому реакцію опори R_x.

Розглянемо додаткове питання про усунення вертикального навантаження на опору (нехтуючи силою ваги, тобто, статичним навантаженням). Змістимо центр мас кривошипа уздовж прямої BO у точку D (рис. 7). Тоді відстанню, на яку треба змістити центр мас кривошипа уздовж прямої BO щоб усунути вертикальне навантаження на опору механізму, буде довжина відрізка DO.

Якщо знехтувати силами ваги, то рівняння (1) для визначення вертикальної реакції опори прийме вид

$$R_y = (m_1 + m_2 + m_3) \cdot a_{Cy}.$$

Умова усунення вертикального навантаження означає рівність нулю вертикальної реакції опори (R_y), тоді

$$(m_1 + m_2 + m_3) \cdot a_{Cy} = 0,$$

або

$$a_{Cy} = 0. \tag{4}$$

Таким чином, якщо прискорення центра мас механізму відносно осі Oy буде дорівнювати нулю, то опора не буде відчувати вертикального навантаження (нехтуючи силою ваги).

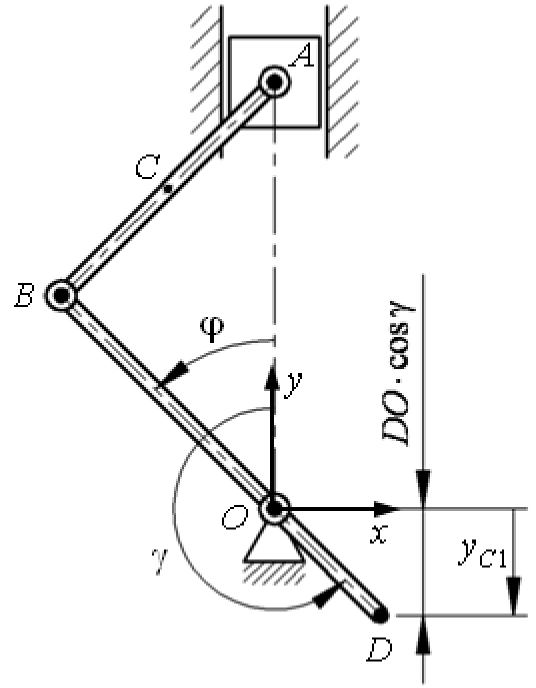

Рисунок 7 – Зміщення центра мас кривошипа

Для визначення вертикального прискорення центра мас системи (a_{Cy}) повернемося до рівняння (2), яке було отримано у вигляді

$$y_C = \frac{m_1 \cdot y_{C1} + m_2 \cdot y_{C2} + m_3 \cdot y_{C3}}{m_1 + m_2 + m_3}.$$

Формули для знаходження положення центрів мас шатуна й поршня залишаться такими ж, як і були

$$y_{C2} = \frac{3l}{2}\cos(\omega \cdot t); \qquad y_{C3} = 2l \cdot \cos(\omega \cdot t).$$

Нове положення центра мас кривошипа можна визначити як

$$y_{C1} = DO \cdot \cos\gamma = DO \cdot \cos(\varphi + \pi) = -DO \cdot \cos\varphi = -DO \cdot \cos(\omega \cdot t).$$

Підставляючи формули для координат центрів мас кривошипа, шатуна й поршня в рівняння (2) для центра мас усього механізму, одержимо

$$y_C = \frac{-m_1 \cdot DO \cdot \cos(\omega \cdot t) + m_2 \cdot \frac{3l}{2} \cdot \cos(\omega \cdot t) + m_3 \cdot 2l \cdot \cos(\omega \cdot t)}{m_1 + m_2 + m_3},$$

$$y_C = \cos(\omega \cdot t)\frac{\left(-m_1 \cdot DO \cdot + m_2 \cdot \dfrac{3l}{2} + m_3 \cdot 2l\right)}{(m_1 + m_2 + m_3)}.$$

Двічі продиференціювавши отримане рівняння, визначимо прискорення центра мас механізму відносно осі Oy

$$a_{Cy} = \ddot{y}_C = -\omega^2 \cdot \cos(\omega \cdot t)\frac{\left(-m_1 \cdot DO \cdot + m_2 \cdot \dfrac{3l}{2} + m_3 \cdot 2l\right)}{(m_1 + m_2 + m_3)}.$$

Згідно з умовою (4) отримане прискорення повинно дорівнюватися нулю, тоді

$$-\omega^2 \cdot \cos(\omega \cdot t)\frac{\left(-m_1 \cdot DO \cdot + m_2 \cdot \dfrac{3l}{2} + m_3 \cdot 2l\right)}{(m_1 + m_2 + m_3)} = 0,$$

або

$$-m_1 \cdot DO \cdot + m_2 \cdot \frac{3l}{2} + m_3 \cdot 2l = 0.$$

Виразимо шукану відстань DO

$$DO = \frac{m_2 \cdot \dfrac{3l}{2} + m_3 \cdot 2l}{m_1}.$$

Підставляючи числа, одержимо

$$DO = \frac{0,7 \cdot \dfrac{3 \cdot 0,15}{2} + 0,35 \cdot 2 \cdot 0,15}{3} = 0,0875 \text{ (м)}.$$

Таким чином, якщо змістити центр мас кривошипа уздовж прямої BO на відстань 0,0875 м, то інерційне вертикальне навантаження на опору механізму буде усунуто.

ЗАДАЧА 4
Визначення сили тиску автомобіля на дорогу

Умова

Автомобіль масою $m = 1100$ (кг) рухається у вертикальній площині з постійною швидкістю $V = 60$ (км/год). Профіль дороги в системі координат Oxy задається рівнянням косинусоїди $y = a \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{l} \cdot x\right)$, де $a = 1$ (м), $l = 50$ (м). Розглядаючи автомобіль як матеріальну точку, визначити силу його тиску на дорогу в нижчій (точка A) і вищій (точка B) точках траєкторії руху (рис. 8).

Рішення

Переведемо розмірність швидкості до стандартних одиниць виміру в системі СІ

$$V = \frac{60\,\text{км}}{1\,\text{ч}} = \frac{60 \cdot 1000\,\text{м}}{3600\,\text{с}} \approx 16,67 \text{ (м/с)}.$$

Скористуємося основним законом динаміки для матеріальної точки

$$m\vec{a} = \vec{F},$$

де m - маса матеріальної точки, $\vec{a}$ - її прискорення, $\vec{F}$ - рівнодіюча сил, що діють на точку.

У положеннях A і B на автомобіль, прийнятий за матеріальну точку, будуть діяти сила ваги $\vec{G}$, спрямована вертикально вниз, і нормальна реакція опори $\vec{N}$, спрямована вертикально вгору. Так як, за умовою, автомобіль рухається з постійною швидкістю, то всі сили, що діють у горизонтальному напрямку, є врівноваженими й у сумі дають нуль.

Прискорення матеріальної точки, що рухається по криволінійній траєкторії можна розкласти на дві складові – дотичну й нормальну. Дотичне прискорення ($\vec{a}_\tau$) спрямоване по дотичній до траєкторії руху і характеризує зміну швидкості по величині. Нормальне прискорення ($\vec{a}_n$) спрямоване уздовж вектора нормалі траєкторії (до центра кривизни траєкторії) і характеризує зміну швидкості за напрямком.

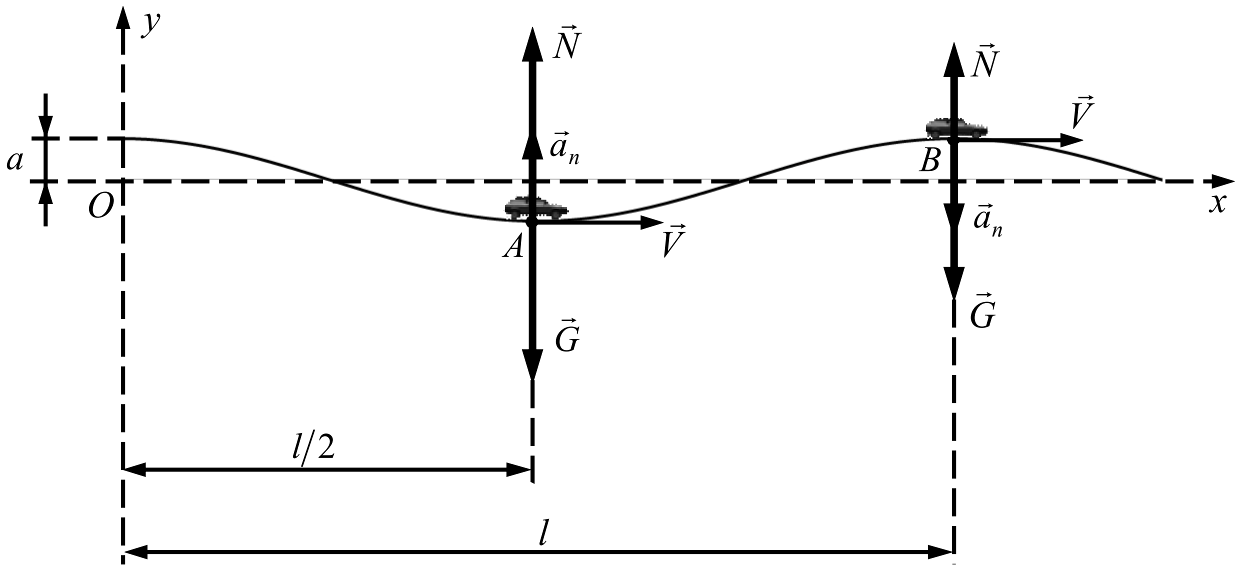

Рисунок 8 – Рух автомобіля по криволінійній траєкторії

У даній задачі автомобіль рухається з постійною швидкістю, тому його рух буде рівномірним криволінійним. Для такого виду руху дотичне прискорення дорівнює нулю (тому що швидкість не змінюється по величині), а повне прискорення точки дорівнює його нормальній складовій

$$a = a_n = \frac{V^2}{\rho},$$

де V - швидкість точки, ρ - радіус кривизни траєкторії руху.

Рівняння основного закону динаміки в проекції на вісь Oy прийме вид

- для точки A: $\quad ma_n = N - G$ або $m\frac{V^2}{\rho} = N - G$;

- для точки B: $\quad -ma_n = N - G$ або $-m\frac{V^2}{\rho} = N - G$.

Сила тиску автомобіля на дорогу дорівнює нормальній реакції опори і спрямована в протилежну сторону. Тому, для її знаходження виразимо нормальну реакцію опори з отриманих рівнянь.

Для точки A: $$N = G + m\frac{V^2}{\rho}.$$

Для точки B: $$N = G - m\frac{V^2}{\rho}.$$

Як видно з формули, нормальна реакція опори складається із двох частин, перша з яких є статичною складовою і являє собою силу ваги автомобіля, а друга є динамічною складовою і являє собою відцентрову силу інерції, що діє на автомобіль при русі по криволінійній траєкторії. При цьому в нижчій точці дороги відцентрова сила інерції буде збільшувати нормальну реакцію опори (і відповідно силу тиску автомобіля на дорогу), а у вищій точці – зменшувати. Автомобіль втратить контакт із дорогою (тобто, коли $N = 0$), якщо сила інерції у вищій точці траєкторії буде дорівнювати силі ваги автомобіля.

У будь-якій точці кривизну лінії, що задана рівнянням $y = f(x)$, можна обчислити по формулі

$$k = \frac{d^2y/dx^2}{\left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

Знаючи кривизну лінії, у відповідній точці можна визначити радіус кривизни траєкторії по формулі

$$\rho = \frac{1}{k}.$$

Тоді, радіус кривизни траєкторії в довільній точці буде дорівнювати

$$\rho = \frac{\left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}.$$

Для знаходження радіуса кривизни дороги визначимо першу та другу похідні від y по x

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d\left(a\cdot\cos\left(\frac{2\pi}{l}\cdot x\right)\right)}{dx}=-a\frac{2\pi}{l}\cdot\sin\left(\frac{2\pi}{l}\cdot x\right);$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-a\frac{4\pi^2}{l^2}\cdot\cos\left(\frac{2\pi}{l}\cdot x\right).$$

Визначимо радіус кривизни в нижчій і вищій точках траєкторії руху.

Для точки A:

$$x=\frac{l}{2},$$

$$\frac{dy}{dx}=-a\frac{2\pi}{l}\cdot\sin\left(\frac{\cancel{2}\pi}{\cancel{l}}\cdot\frac{\cancel{l}}{\cancel{2}}\right)=-a\frac{2\pi}{l}\cdot\sin(\pi)=0,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-a\frac{4\pi^2}{l^2}\cdot\cos\left(\frac{\cancel{2}\pi}{\cancel{l}}\cdot\frac{\cancel{l}}{\cancel{2}}\right)=-a\frac{4\pi^2}{l^2}\cdot\cos(\pi)=-a\frac{4\pi^2}{l^2}\cdot(-1)=a\frac{4\pi^2}{l^2},$$

$$\rho=\frac{\left(1+(0)^2\right)^{\frac{3}{2}}}{a\frac{4\pi^2}{l^2}}=\frac{l^2}{4\pi^2 a}.$$

Для точки B:

$$x=l,$$

$$\frac{dy}{dx}=-a\frac{2\pi}{l}\cdot\sin\left(\frac{2\pi}{\cancel{l}}\cdot\cancel{l}\right)=-a\frac{2\pi}{l}\cdot\sin(2\pi)=0,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-a\frac{4\pi^2}{l^2}\cdot\cos\left(\frac{2\pi}{\cancel{l}}\cdot\cancel{l}\right)=-a\frac{4\pi^2}{l^2}\cdot\cos(2\pi)=-a\frac{4\pi^2}{l^2}\cdot 1=-a\frac{4\pi^2}{l^2},$$

$$\rho = \frac{\left(1+(0)^2\right)^{\frac{3}{2}}}{-a\dfrac{4\pi^2}{l^2}} = -\frac{l^2}{4\pi^2 a}.$$

В останній формулі знак “-” вказує на те, що радіус кривизни траєкторії спрямований убік негативних значень осі Oy. Далі будемо брати його значення по модулю.

Підставимо отримані формули в рівняння для визначення нормальної реакції опори.

Для точки A:

$$N = G + m\frac{V^2}{\rho} = mg + mV^2\frac{4\pi^2 a}{l^2} = m\left(g + V^2\frac{4\pi^2 a}{l^2}\right),$$

$$N = 1100\left(9,81 + 16,67^2\frac{4\cdot 3,14^2\cdot 1}{50^2}\right) = 15613,18 \text{ (Н)}.$$

Для точки B:

$$N = m\left(g - V^2\frac{4\pi^2 a}{l^2}\right),$$

$$N = 1100\left(9,81 - 16,67^2\frac{4\cdot 3,14^2\cdot 1}{50^2}\right) = 5968,82 \text{ (Н)}.$$

Як було відзначено раніше, сила тиску автомобіля на дорогу дорівнює нормальній реакції опори і спрямована в протилежну сторону.

Визначимо на скільки відрізняються знайдені сили тиску автомобіля на дорогу від його сили ваги.

У нижчій точці (точка A):

$$N/G = N/mg = 15613,18/1100\cdot 9,81 \approx 1,45.$$

У вищій точці (точка B):

$$N/G = 5968,82/1100\cdot 9,81 \approx 0,55.$$

Таким чином, у нижчій точці траєкторії автомобіль давить на дорогу із силою, приблизно, у півтора рази більшою, ніж його сила ваги, а у вищій – із силою, приблизно, у два рази меншою.

ЗАДАЧА 5
Визначення сили тиску колеса на дорогу при попаданні на нерівність

Умова

Автомобіль рухається по горизонтальній дорозі з постійною швидкістю $V = 60$ (км/год). Одне з коліс автомобіля попадає на нерівність дороги, задану рівнянням $y = \frac{a}{2} \cdot \left(\cos\left(\frac{2\pi}{l} \cdot x \right) - 1 \right)$, де a і l - глибина та довжина нерівності відповідно (рис. 9). Визначити мінімальну й максимальну силу тиску між колесом і дорогою на ділянці нерівності, вважаючи їх абсолютно твердими тілами. На колесо з боку автомобіля діє вертикальна сила $P = 2750$ (Н), зміною якої при попаданні колеса на нерівність знехтувати. Маса колеса $m = 18$ (кг).

Рішення

Переведемо розмірність швидкості до одиниць виміру в системі СІ

$$V = \frac{60\,\text{км}}{1\,\text{ч}} = \frac{60 \cdot 1000\,\text{м}}{3600\,\text{с}} \approx 16{,}67 \text{ (м/с)}.$$

У вертикальному напрямі на колесо діють: сила ваги ($\vec{G}$), яка прикладена в центрі мас колеса й спрямована вниз; нормальна реакція опори ($\vec{N}$), яка прикладена в точці контакту колеса з дорогою і спрямована до центра колеса; сила тиску автомобіля на колесо ($\vec{P}$), яка прикладена в місці з'єднання колеса з автомобілем і спрямована, за умовою, вертикально вниз.

При русі колеса по нерівності, нормальна реакція опори буде відхилятися від вертикалі (так як вона завжди буде направлена до центра колеса). Але, у даній задачі ми не будемо враховувати це відхилення від вертикалі, вважаючи його незначним. Таким чином, приймемо, що нормальна реакція опори спрямована завжди вертикально вгору.

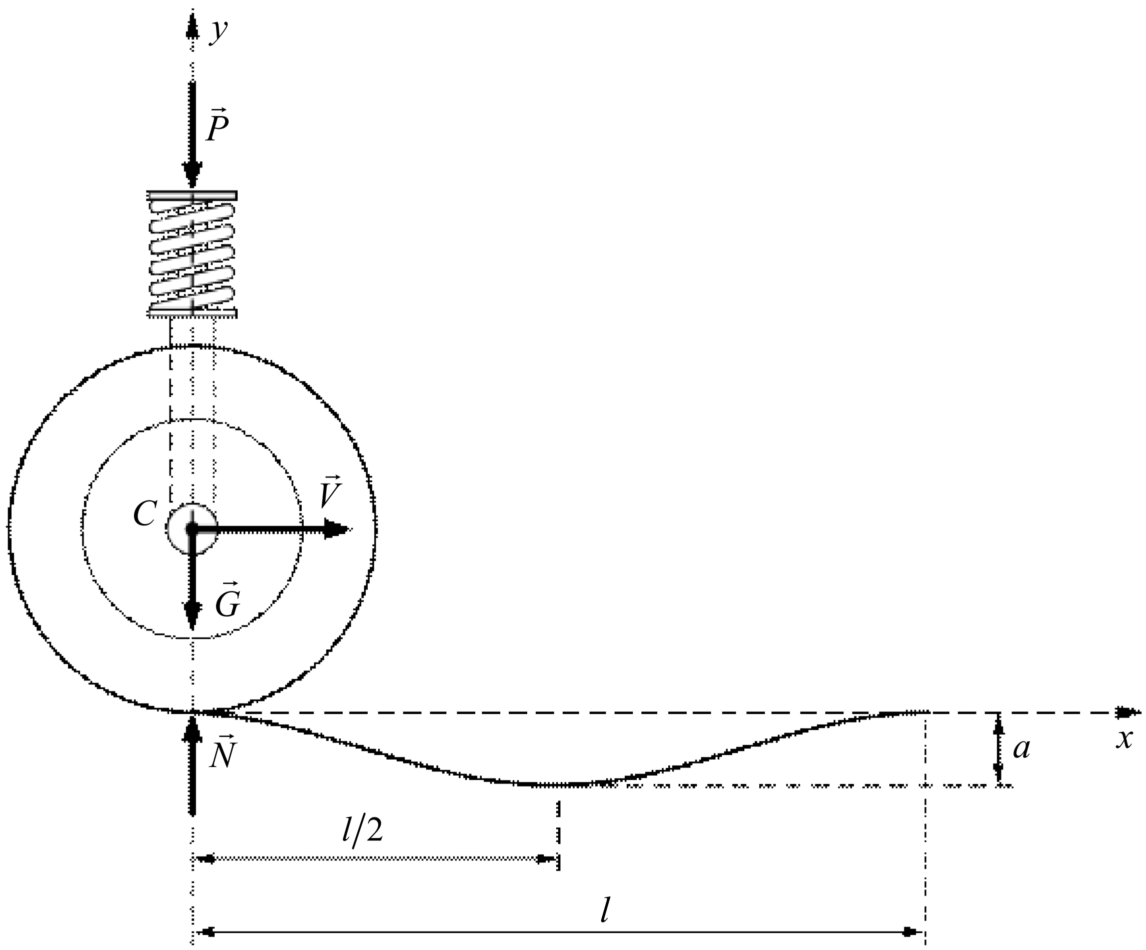

Рисунок 9 – Рух колеса автомобіля по нерівності дороги

Запишемо диференціальне рівняння руху центра мас колеса в проекції на вісь y

$$m\ddot{y} = N - P - G,$$

де m - маса колеса, $y = y(t)$ - закон руху центра мас колеса відносно осі y, $\ddot{y} = a_y$ - прискорення центра мас колеса в проекції на вісь y.

Зробимо припущення, що колесо буде рухатися без відриву від дороги при попаданні на нерівність. Тоді центр мас колеса (точка C) буде рухатися по траєкторії, що повторює профіль дороги, заданий, згідно з умовою задачі, рівнянням $y = \frac{a}{2} \cdot \left(\cos\left(\frac{2\pi}{l} \cdot x \right) - 1 \right)$. Тоді можна визначити прискорення центра мас колеса, якщо двічі продиференціювати за часом дане рівняння.

Знайдемо першу похідну від y за часом t

$$\dot{y} = \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot V ,$$

де $\frac{dx}{dt} = V$ – швидкість центра мас колеса в проекції на вісь x, яка дорівнює швидкості автомобіля (вона задана наперед за умовою).

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a}{2} \cdot \frac{2\pi}{l} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{l} \cdot x \right) = \frac{a\pi}{l} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{l} \cdot x \right);$$

$$\dot{y} = V \cdot \frac{a\pi}{l} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{l} \cdot x \right).$$

Знайдемо другу похідну від y за часом t

$$\ddot{y} = \frac{d\dot{y}}{dt} = \frac{d\dot{y}}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{d\dot{y}}{dx} \cdot V ;$$

$$\frac{d\dot{y}}{dx} = -V \cdot \frac{a\pi}{l} \cdot \frac{2\pi}{l} \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{l} \cdot x \right) = -V \cdot \frac{2a\pi^2}{l^2} \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{l} \cdot x \right);$$

$$\ddot{y} = -V^2 \cdot \frac{2a\pi^2}{l^2} \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{l} \cdot x \right).$$

Підставимо отриману формулу в рівняння руху центра мас колеса в проекції на вісь y

$$-mV^2 \cdot \frac{2a\pi^2}{l^2} \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{l} \cdot x \right) = N - P - G .$$

Сила тиску між колесом і дорогою дорівнює нормальній реакції опори.

Виразимо нормальну реакцію опори з отриманого рівняння

$$N = P + G - mV^2 \cdot \frac{2a\pi^2}{l^2} \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{l} \cdot x\right).$$

З отриманої формули можна бачити, що при заданих значеннях P, G, V, a і l величина N залежить від x. Максимальне значення косинуса, яке дорівнює 1, досягається при $x = l$, тобто, коли колесо перебуває у вищій точці нерівності. Мінімальне значення, що дорівнює -1, досягається при $x = l/2$, тобто, коли колесо перебуває в нижчій точці нерівності. Тоді мінімальне й максимальне значення нормальної реакції опори будуть дорівнювати

$$N_{\min} = P + G - mV^2 \cdot \frac{2a\pi^2}{l^2} \cdot 1, \text{ при } x = l;$$

$$N_{\max} = P + G - mV^2 \cdot \frac{2a\pi^2}{l^2} \cdot (-1), \text{ при } x = l/2.$$

Нехай глибина нерівності $a = 0{,}01$ (м), а довжина $l = 1$ (м), тоді

$$N_{\min} = P + mg - mV^2 \cdot \frac{2a\pi^2}{l^2} =$$

$$= 2750 + 18 \cdot 9{,}81 - 18 \cdot 16{,}67^2 \cdot \frac{2 \cdot 0{,}01 \cdot 3{,}14^2}{1^2} \approx 1940{,}23 \text{ (Н)};$$

$$N_{\max} = P + mg + mV^2 \cdot \frac{2a\pi^2}{l^2} =$$

$$= 2750 + 18 \cdot 9{,}81 + 18 \cdot 16{,}67^2 \cdot \frac{2 \cdot 0{,}01 \cdot 3{,}14^2}{1^2} \approx 3912{,}93 \text{ (Н)}.$$

ЗАДАЧА 6
Визначення частоти коливань корпусу автомобіля

Умова

Визначити частоту вільних поздовжніх коливань автомобіля на пружинних ресорах із коефіцієнтом жорсткості $k = 70$ (кгс/см) без урахування сил опору. Центр мас автомобіля знаходиться в точці C (рис. 10). Відстань між осями коліс (колісна база) $a = 2{,}5$ (м). Момент інерції автомобіля відносно центра мас $I_C = 15000$ $(\text{кг} \cdot \text{м}^2)$.

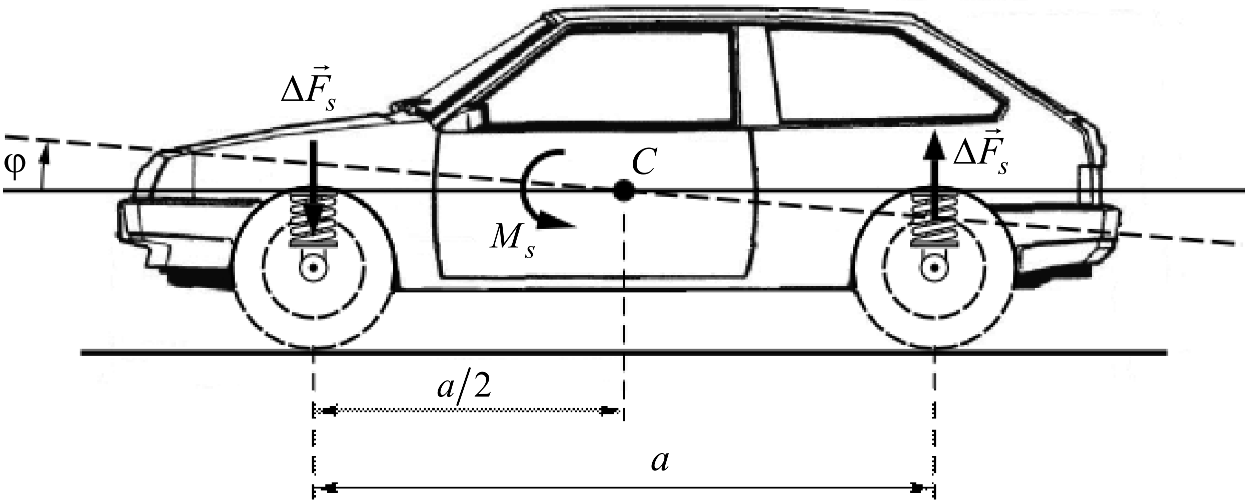

Рисунок 10 – Коливання автомобіля відносно центра мас

Рішення

Випадкові збурювання можуть викликати поворот корпуса автомобіля навколо центра мас на кут φ. При цьому в пружинах ресор автомобіля виникне додаткове розтягнення-стиск, яке можна визначити по формулі

$$\Delta x = \frac{a}{2}\operatorname{tg}(\varphi).$$

Для малих кутів φ справедливим є рівняння $\operatorname{tg}(\varphi) = \varphi$. Тоді

$$\Delta x = \frac{a \cdot \varphi}{2}.$$

За рахунок додаткового розтягнення-стиску виникне додаткова сила пружності пружин (ΔF_S), яку можна визначити по формулі

$$\Delta F_S = k \cdot \Delta x = k \cdot \frac{a \cdot \varphi}{2},$$

де k - коефіцієнт жорсткості пружин.

При повороті корпуса автомобіля відносно центра мас, додаткові сили пружності пружин для передніх і задніх коліс будуть спрямовані уздовж вертикальної прямої у протилежні сторони. Сумарний момент додаткових сил пружності чотирьох ресор відносно центра мас автомобіля буде дорівнювати

$$M_S = 4 \cdot \Delta F_S \cdot \frac{a}{2} = 4 \cdot k \cdot \frac{a \cdot \varphi}{2} \cdot \frac{a}{2} = k \cdot a^2 \cdot \varphi .$$

Рівняння вільних коливань у даній задачі є диференціальним рівнянням обертового руху корпуса автомобіля навколо центра мас

$$I_C \cdot \ddot{\varphi} = M_S ,$$

де I_C - момент інерції автомобіля відносно центра мас; φ - кут повороту корпуса автомобіля відносно центра мас; $\ddot{\varphi}$ - кутове прискорення корпуса автомобіля відносно центра мас. Підставимо в дане рівняння формулу сумарного моменту сил пружності

$$I_C \cdot \ddot{\varphi} = k \cdot a^2 \cdot \varphi .$$

Розділивши обидві частини рівняння на I_C, одержимо

$$\ddot{\varphi} = \frac{k \cdot a^2 \cdot \varphi}{I_C},$$

або

$$\ddot{\varphi} - \frac{k \cdot a^2}{I_C} \cdot \varphi = 0 .$$

Дане рівняння є диференціальним рівнянням вільних коливань при відсутності сил опору.

Зробимо заміну

$$\frac{k \cdot a^2}{I_C} = \omega_C^2 ,$$

тоді

$$\ddot{\varphi} - \omega_C^2 \cdot \varphi = 0 .$$

Згідно з теорією коливань ω_C є круговою частотою коливань. У даній задачі ω_C - це частота вільних поздовжніх коливань корпуса автомобіля на ресорах. При цьому корпус здійснює зворотно-обертальний рух навколо центра мас.

Згідно зі зробленою заміною кругова частота коливань буде дорівнювати

$$\omega_C = \sqrt{\frac{k \cdot a^2}{I_C}}.$$

Переведемо розмірність коефіцієнта жорсткості пружини до одиниць виміру в системі СІ.

$$k = \frac{70 \text{ кгс}}{1 \text{ см}} = \frac{70 \cdot 9{,}81 \text{ Н}}{0{,}01 \text{ м}} = 68670 \ (\text{Н/м}).$$

Якщо підставити у формулу для кругової частоти коливань числові значення, то одержимо

$$\omega_C = \sqrt{\frac{68670 \cdot 2{,}5^2}{15000}} \approx 28{,}61 \ (\text{рад/с}).$$

Період коливань

$$T = \frac{2\pi}{\omega_C} = \frac{2 \cdot 3{,}14}{28{,}61} \approx 0{,}22 \ (\text{с}).$$

Число коливань, що здійснюються за одну секунду, визначається частотою коливань, яка дорівнює

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{1}{0{,}22} \approx 4{,}55 \ (1/\text{с}).$$

Таким чином, за одну секунду автомобіль буде здійснювати, приблизно, чотири з половиною поздовжніх коливання навколо центра мас.

ЗАДАЧА 7
Визначення максимальної швидкості автомобіля з урахуванням сили опору повітря

Умова

Автомобіль рухається під дією крутного моменту $M = 120$ (Нм), який є прикладеним до передніх (ведучих) коліс. При цьому на нього діє сила опору повітря, яка є пропорційною квадрату швидкості автомобіля, тобто $R = \mu \cdot V^2$, де $\mu = 0,3$ (кг/м) - коефіцієнт опору. На задні (відомі) колеса автомобіля діє постійний момент тертя $M_f = 25$ (Нм). Радіус коліс автомобіля $r = 0,28$ (м).

Нехтуючи моментом опору коченню коліс, визначити граничну швидкість, яку може розвити автомобіль. Також, визначити сили тертя ковзання, що діють на ведучі та відомі колеса автомобіля при його русі з максимальною швидкістю.

Рішення

При русі автомобіля на нього діють сила ваги ($\vec{G}$), сила опору повітря ($\vec{R}$), нормальні реакції опор ($\vec{N}_1$ і $\vec{N}_2$) і сили тертя ковзання ($\vec{F}_1$ і $\vec{F}_2$), що прикладені в точках контакту коліс із дорогою (рис. 11).

Для ведучих коліс сила тертя ковзання перешкоджає обертанню коліс під дією крутного моменту, тому спрямована убік руху автомобіля. Для відомих коліс сила тертя ковзання спрямована убік, протилежний руху автомобіля (якби даної сили не було, то задні колеса проковзували б уздовж дороги, здійснюючи поступальний рух разом з кузовом автомобіля).

На етапі розгону під дією крутного моменту, що прикладений до ведучих коліс, автомобіль буде набирати швидкість. Разом зі зростанням швидкості, згідно з умовою задачі, буде збільшуватися сила опору повітря, яка перешкоджає руху автомобіля. Розгін буде тривати доти, поки сила опору не зросте на стільки, що не дозволить автомобілю рухатися з більшою швидкістю під дією заданого крутного моменту. Коли це відбудеться, автомобіль досягне граничної швидкості й буде рухатися рівномірно, тому що сили й моменти, що діють на автомобіль, будуть зрівноважені. Так як рівномірний прямолінійний рух є еквівалентним стану спокою, то для знаходження граничної швидкості автомобіля можна скористатися методами статики.

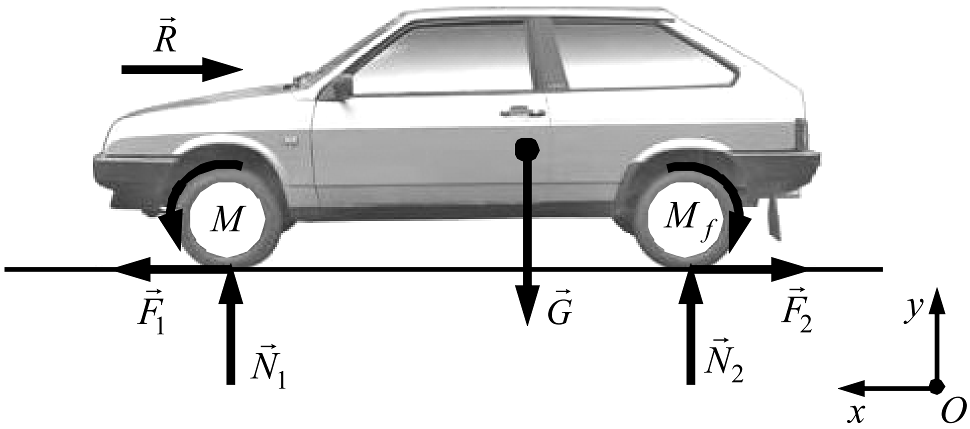

Рисунок 11 – Сили і моменти, які діють на автомобіль

Складемо рівняння рівноваги автомобіля під дією прикладених сил відносно осі Ox

$$F_1 - F_2 - R = 0.$$

Дане рівняння відповідає руху автомобіля з максимальною швидкістю. Підставивши в нього задану за умовою формулу для сили опору повітря, одержимо

$$F_1 - F_2 - \mu \cdot V_{\max}^2 = 0,$$

звідки, максимальна швидкість автомобіля буде дорівнювати

$$V_{\max} = \sqrt{\frac{F_1 - F_2}{\mu}}.$$

Для знаходження сил тертя ковзання розглянемо умови рівноваги коліс автомобіля. На передні та задні колеса, крім вже зазначених сил і моментів, будуть діяти сили ваги самих коліс ($\vec{G}_{w1}$ і $\vec{G}_{w2}$) та сили тиску корпуса автомобіля на осі коліс ($\vec{F}_{a1}$ і $\vec{F}_{a2}$, їхній напрямок заздалегідь невідомий) (рис. 12).

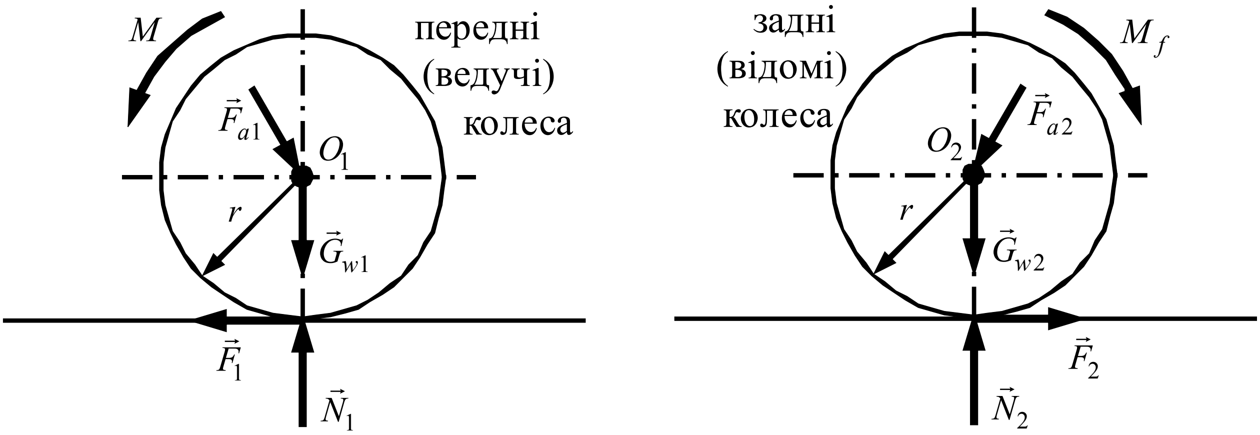

Рисунок 12 – Сили і моменти, що діють на колесо автомобіля

Складемо рівняння рівноваги для моментів сил, що діють на передні та задні колеса автомобіля відносно їхніх осей обертання.

Для передніх (ведучих) коліс

$$M - F_1 \cdot r = 0,$$

звідки

$$F_1 = \frac{M}{r} = \frac{120}{0,28} \approx 428,6 \text{ (Н)}.$$

Для задніх (відомих) коліс

$$F_2 \cdot r - M_f = 0,$$

звідки

$$F_2 = \frac{M_f}{r} = \frac{25}{0,28} \approx 89,3 \text{ (Н)}.$$

Підставивши отримані формули для сил тертя ковзання в рівняння для максимальної швидкості автомобіля, одержимо

$$V_{\max} = \sqrt{\frac{M - M_f}{\mu \cdot r}} = \sqrt{\frac{120 - 25}{0,3 \cdot 0,28}} \approx 33,63 \text{ (м/с)} \approx 121,1 \text{ (км/год)}.$$

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Романенко Л. Г. Теоретична механіка: Навчальний посібник для технічних вузів / Л. Г. Романенко, В. Г. Солодов. – Харків: ХНАДУ, 2000. – 268 с.

2. Теоретична механіка. Теорія і задачі: Навчальний посібник / [Солодов В. Г., Авершин А. Г., Стародубцев Ю. В., Хандримайлов А. О., Шипенко О. М.]. – Харків: ХНАДУ, 2007. – 212 с.

Навчальне видання

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

з теоретичної механіки
до розв’язання задач динаміки
автомобіля та його механізмів
для студентів спеціальності 7.07010601

Укладачі: ОНИЩЕНКО Володимир Михайлович
ХАНДРИМАЙЛОВ Андрій Олексійович

Відповідальний за випуск *В.Г. Солодов*

В авторській редакції