МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ, МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ

ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ АВТОМОБІЛЬНО-ДОРОЖНІЙ УНІВЕРСИТЕТ

В.І. ВЕРБИЦЬКИЙ, В.М. КОЛОДЯЖНИЙ, О.Ю. ЛІСІНА

ДИСКРЕТНА МАТЕМАТИКА

Основи курсу для студентів технічних університетів

Харків-2011

ЗМІСТ

ОСНОВИ ТЕОРІЇ МНОЖИН

§ 1. Поняття множини.

Поняття множини є базовим в математиці. Воно не визначається, а тільки тим чи іншим способом задається. Можна сказати, що множина визначається сукупністю предметів, об'єднаних деякою ознакою. Наприклад, множина студентів даної групи, книг у бібліотеці, букв алфавіту та інше. Найрізноманітніші множини зустрічаються у математиці: числові множини (наприклад, множини натуральних чисел, раціональних чисел, дійсних чисел та інші), множина точок на прямій чи на площині, множина граней багатогранника і т.д.; цей ряд прикладів можна необмежено продовжувати.

Множини складаються з *елементів*. Наприклад, буква «х» - елемент множини букв латинської абетки, число 10 – елемент множини натуральних чисел.

Найчастіше множини позначаються великими буквами чи переліком елементів в фігурних дужках. Наприклад, А чи {1; 2; 3}. Для елементів множин використовуються малі букви (як правило, латинської або грецької абетки).

Твердження «елемент a належить до множини А» символічно записується так: $a \in \mathbf{A}$; запис $a \notin \mathbf{A}$ свідчить про те, що a не є елементом множини А. Наприклад, якщо $\boldsymbol{N}$ – множина натуральних чисел, то $5 \in \boldsymbol{N}$, але $0 \notin \boldsymbol{N}$.

Множина вважається заданою (відомою), якщо або вказані всі її елементи, або вказана така властивість його елементів, яка дозволяє робити висновок, чи належить даний елемент множині, чи ні (такі властивості називаються *характеристичними*). Таким чином ми маємо два основних способи завдання множин: *переліком* чи визначенням характеристичної властивості (або, інакше, *описом*).

Очевидно, якщо множина нескінченна, тобто має нескінченну кількість елементів (наприклад, множина $\boldsymbol{N}$ натуральних чисел, множина $\boldsymbol{R}$ дійсних чисел, відрізок [0; 1], де елементи – точки відрізку, та інше), то її можна задати тільки описом. Так, наприклад, коли мова йде про множину всіх парних натуральних чисел, вказується характеристична властивість її елементів: кожне число, яке належить до цієї множини, ділиться на два без залишку. Це записується так: $\{\mathbf{x} \in N \mid \mathbf{x} \vdots 2\}$.

Тут фігурні дужки вказують на наявність множини, знак « | » (вертикальна риска) замінює слова «таких, що…» (або «такі, що…»); знак « $\vdots$ » – «ділиться без залишку на».

Якщо множина скінчена, її можна визначити як описом, так і переліком.

Наприклад, одну і ту саму множину можна визначити {0; 2; 3; 4; 5} або $\{x \in Z \mid 0 \le x \le 5\}$ (Z – множина цілих чисел). В багатьох випадках (особливо, коли множина складається з великої кількості елементів) зручніше користуватися описом. Очевидний приклад: $\{n\in N \mid n\le 1000\}$ (дуже нерозумно було б робити перелік 1 000 елементів).

Коли множина задається перерахунком елементів треба стежити за тим, щоб будь-який елемент не був записаним більше одного разу. Наприклад, запис { 5; 6; 6; 7 } є некоректним, бо елемент « 6 » в запису зустрічається двічі. Не можна також використовувати для двох різних елементів однакові позначення (наприклад, якщо множина студентів задається переліком їх прізвищ, а в групі присутні різні студенти з однаковими прізвищами, то до прізвищ таких студентів треба додати імена або якісь інші ознаки, які б відрізняли їх).

Якщо всі елементи, з яких складається множина А, являються також елементами іншої множини В, то кажуть, що множина А є *підмножиною* множини В; цей факт записується у вигляді $\mathbf{A}\subseteq\mathbf{B}$ (або $\mathbf{B}\supseteq\mathbf{A}$).

Якщо множини А і В складаються (утворюються) з одних і тих же елементів, то вони називаються *рівними* (однаковими). В цьому випадку використовується запис: $\mathbf{A}=\mathbf{B}$. Очевидно, що останній запис рівносильний запису: $\mathbf{A}\subseteq\mathbf{B}$, $\mathbf{A}\supseteq\mathbf{B}$. Якщо множини А і В не рівні, пишемо $\mathbf{A}\neq\mathbf{B}$, то множина А є власною підмножиною множини В, що можна записати $\mathbf{A}\subset\mathbf{B}$ (відповідно $\mathbf{A}\subseteq\mathbf{B}$). Наприклад, $\mathbf{A}\subseteq\mathbf{B}$.

З визначення ясно, що будь-яка множина є своєю підмножиною (але множиною не власною).

Для зручності розглядають і таку множину яка не містить жодного елемента. Така множина зветься порожньою. Для позначення використовується символ Ø.

За визначенням, порожня множина є підмножиною будь-якої множини.

Очевидно, що будь-яка не порожня множина А має дві очевидні підмножини: А та Ø.

Приклад. Нехай А =(1; 2; 3). Підмножинами А є {1}; {2}; {3}; {1; 2}; {1; 3}; {2; 3}; Ø {1; 2; 3}. Всі наведені підмножини, крім останньої, є власними.

Якщо в даній задачі розглядаються тільки підмножини деякої множини Е, то цю множину називають універсальною множиною. Для множини всіх підмножин множини Е використовується позначення Ф(Е) та термін «булеан множини Е».

Характеристичною функцією множини $\mathbf{A}\subset\mathbf{E}$ називається числова функція на множині Е, яка визначається так:

$$X_A(x)=\begin{cases}1, & \text{якщо} \quad x\in A;\\ 0, & \text{якщо} \quad x\notin A\end{cases}.$$

Легко довести, що в множині Е з n елементів міститься 2^n характеристичних функцій. Підмножина однозначно визначається своєю характеристичною функцією. Таким чином, множина з з n елементів міститься 2^n підмножин.

§ 2. Операції над множинами.

Нехай А і В – довільні множини. А чи В. Об’єднанням цих множин є множина, яка позначається $\mathbf{A} \bigcup \mathbf{B}$ та складається з усіх елементів, що належать хоча би одної множини А чи В. Це визначення має наступне представлення:

$\mathbf{A} \bigcup \mathbf{B} = \{\mathbf{x} |\ \mathbf{x} \in \mathbf{A}\ \ \textbf{або}\ \mathbf{x} \in \mathbf{B}\ \}$

Приклади. $[1;\ 3] \bigcup [2;\ 4] = [1;\ 4]$;

$\{1; 2; 3\} \bigcup \{3;\ 4;\ 5\} = \{1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5\}$.

Перерізом множин А і В, що позначається $\mathbf{A} \bigcap \mathbf{B}$ та складається з усіх елементів, що належать як до А так і до В: $\mathbf{A} \bigcap \mathbf{B} = \{\mathbf{x} |\ \mathbf{x} \in \mathbf{A}\ \ \textbf{та}\ \mathbf{x} \in \mathbf{B}\ \}$.

Приклади. $[1;\ 3] \bigcap [2;\ 4] = [2;\ 3]$;

$\{1; 2; 3\} \bigcap \{3;\ 4;\ 5\} = \{3\}$;

$\{1;\ 2\} \bigcap \{3\} = \varnothing$.

Аналогічно визначаються операції об’єднання та переріз кількох множин.

Різницею А \ В множин А і В є сукупність тих елементів А, які не є елементами В: $\mathbf{A} \setminus \mathbf{B} = \{\mathbf{x} |\ \mathbf{x} \in \mathbf{A}\ \textbf{але}\ \mathbf{x} \notin \mathbf{B}\ \}$.

Якщо А – підмножина універсальної множини Е, то Е \ А називається доповненням А і позначається А'. Якщо

Приклади. $[0;\ 2] \setminus [0;\ 1] = (1;\ 2]$;

$\{1; 2; 3;\ 4\} \setminus \{4;\ 5\} = \{3\}$;

$\{1\} \bigcap \{23\} = \{1\}$;

$\{1\} \setminus \{1;\ 2\} = \varnothing$. $\mathbf{B} \subseteq \mathbf{E}$, то $\mathbf{A} \setminus \mathbf{B} = \mathbf{A} \bigcap \mathbf{B}'$.

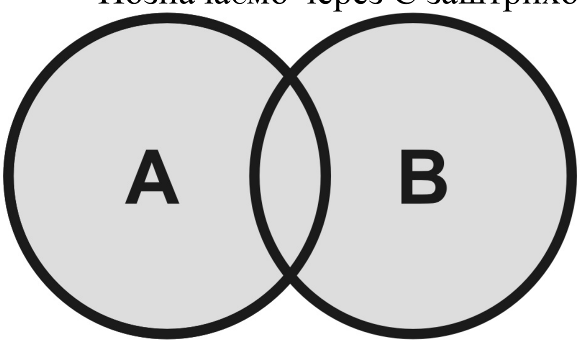
Приклади. Якщо $\mathbf{E} = \mathbf{R}$, $\mathbf{A} = [0;1]$, то $\mathbf{A}' = (-\infty;\ 0) \bigcup (1;\ +\infty)$.

Якщо $\mathbf{E} = \{1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5\}$, $\mathbf{a} = \{1;\ 2;\ 3\}$, то $\mathbf{A}' = \{4;\ 5\}$.

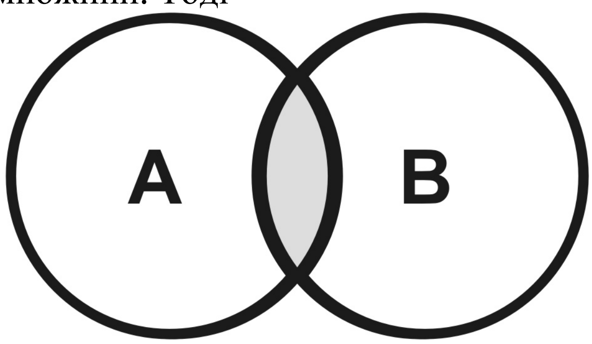
Очевидно, $\mathbf{E}' = \varnothing$, а $\varnothing' = \mathbf{E}$.

Існує ясне геометричне представлення співвідношення між множинами та операцій над ними які наочно демонструються за допомогою так званих *кіл Ейлера*, або *діаграм Венна*. Приклади наведемо нижче.

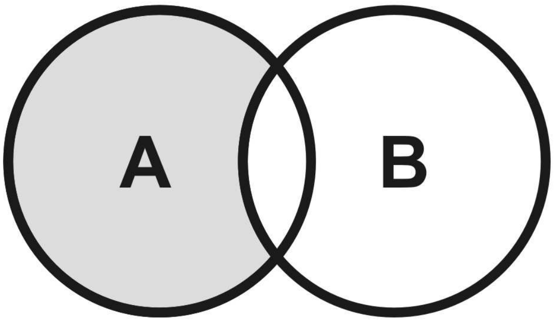
Позначаємо через С заштриховані множини. Тоді



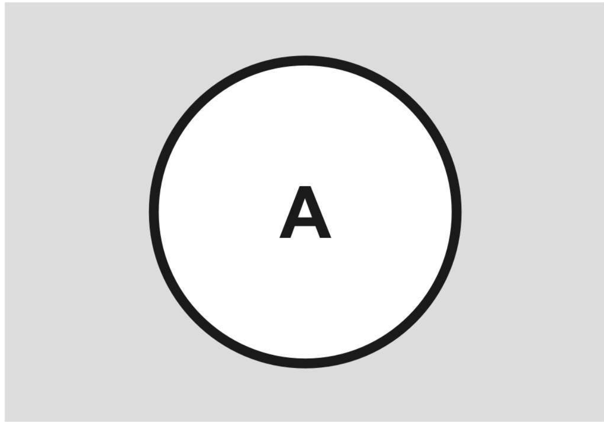
$\mathbf{C} = \mathbf{A} \bigcup \mathbf{B}$



$\mathbf{C} = \mathbf{A} \bigcap \mathbf{B}$



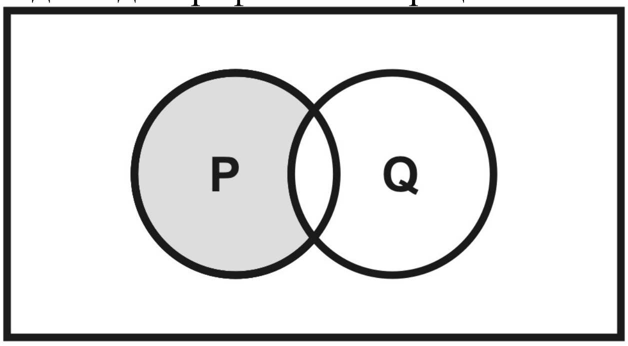
$\mathbf{C} = \mathbf{A} \setminus \mathbf{B}$



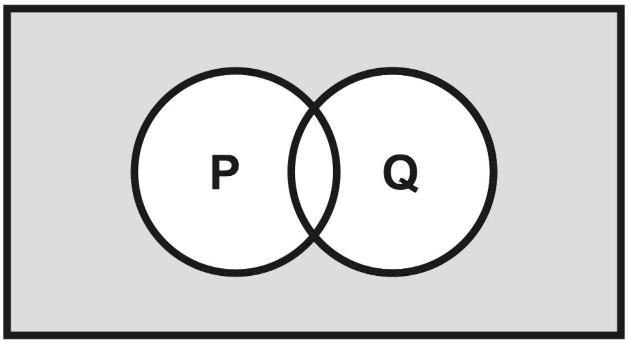
$\mathbf{C} = \mathbf{A}'$

За допомогою кіл Ейлера можна доводи ти тотожності та спрощувати вирази з множинами.

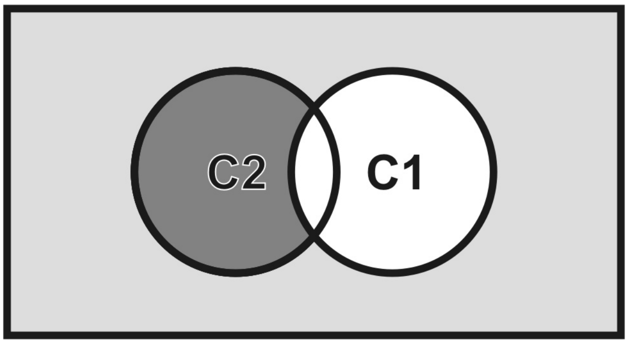
Приклад. Треба спростити вираз: $(\mathbf{P}'\backslash\mathbf{Q}) \cup (\mathbf{P} \cap \mathbf{Q}')$. Побудуємо відповідні графічні ілюстрації:



$\mathbf{C}_1 = \mathbf{P}'\backslash\mathbf{Q}$



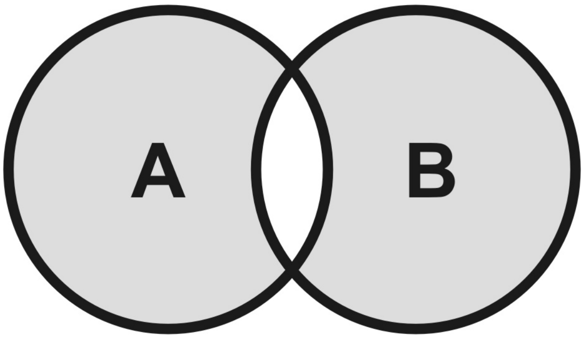
$\mathbf{C}_2 = \mathbf{P} \cap \mathbf{Q}'$



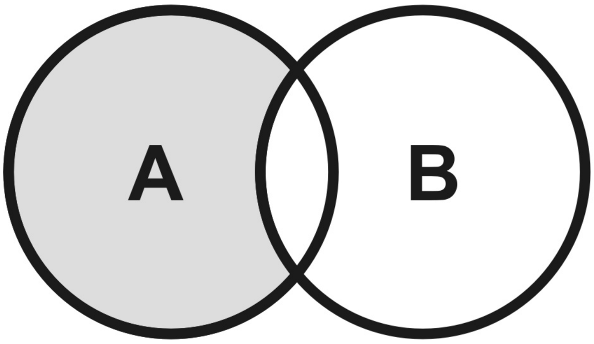
$\mathbf{C} = \mathbf{C}_1 \cup \mathbf{C}_2 = \mathbf{Q}'$.

Очевидно, що на останньому малюнку заштриховано все Е, за винятком Q, тобто $(\mathbf{P}'\backslash\mathbf{Q}) \cup (\mathbf{P} \cap \mathbf{Q}') = \mathbf{Q}'$.

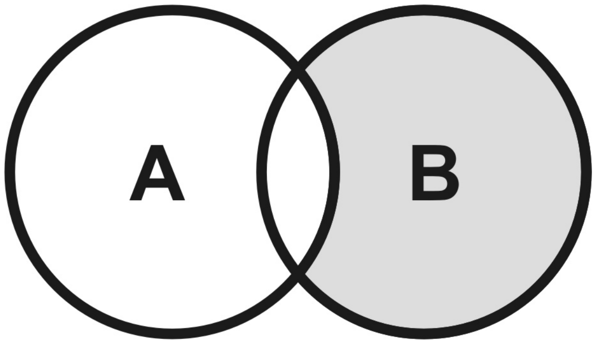
Приклад. Довести тотожність $(\mathbf{A} \setminus \mathbf{B}) \cup (\mathbf{B} \setminus \mathbf{A}) = (\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) \setminus (\mathbf{B} \cup \mathbf{A})$.



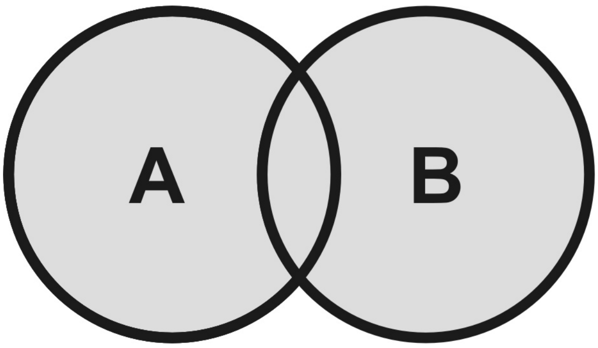
$\mathbf{C} = (\mathbf{A} \setminus \mathbf{B}) \cup (\mathbf{B} \setminus \mathbf{A})$



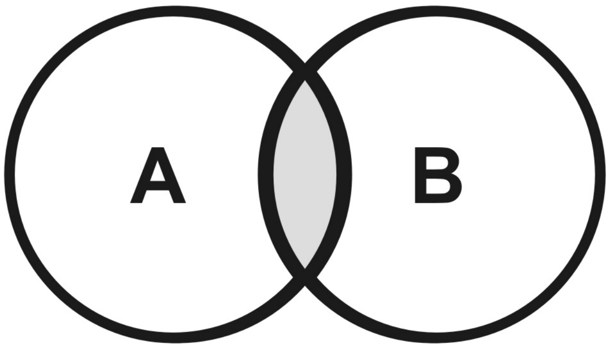
$\mathbf{A} \setminus \mathbf{B}$



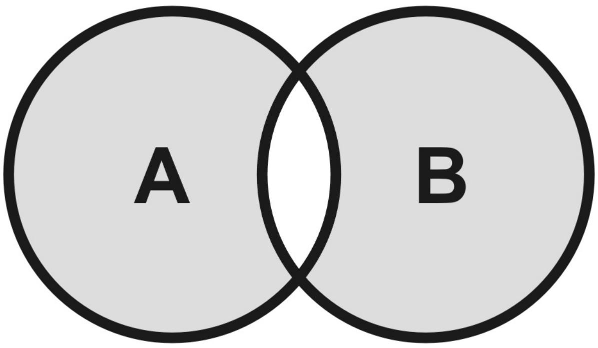
$\mathbf{B} \setminus \mathbf{A}$



$\mathbf{A} \cup \mathbf{B}$



$\mathbf{A} \cap \mathbf{B}$



$\mathbf{C} = (\mathbf{A} \setminus \mathbf{B}) \cup (\mathbf{B} \setminus \mathbf{A})$

§ 3. Алгебра множин

Ознайомимось з властивостями співвідношень між множинами, з законами операцій над множинами, які систематизуємо відповідним чином. Почнемо з співвідношення $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{B}$. Воно має наступні властивості:

1. $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{A}$;
2. Якщо $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{B}$ та $\mathbf{B} \subseteq \mathbf{A}$, то $\mathbf{A} = \mathbf{B}$;
3. Якщо $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{B}$ та $\mathbf{B} \subseteq \mathbf{C}$, то $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{C}$;
4. $\varnothing \subseteq \mathbf{A}$ для будь-якого $\mathbf{A}$;
5. $\mathbf{E} \subseteq \mathbf{A}$ для будь-якого $\mathbf{A}$ (де універсальна множина $\mathbf{E}$ вважається заданою);

Перелічимо властивості операцій об'єднання та перерізу:

6. $\mathbf{A} \bigcup \mathbf{B} = \mathbf{B} \bigcup \mathbf{A}$;
7. $\mathbf{A} \bigcap \mathbf{B} = \mathbf{B} \bigcap \mathbf{A}$;
8. $\mathbf{A} \bigcup (\mathbf{B} \bigcup \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \bigcup \mathbf{B}) \bigcup \mathbf{C}$;
9. $\mathbf{A} \bigcap (\mathbf{B} \bigcap \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \bigcap \mathbf{B}) \bigcap \mathbf{C}$;
10. $\mathbf{A} \bigcup \mathbf{A} = \mathbf{A}$;
11. $\mathbf{A} \bigcap \mathbf{A} = \mathbf{A}$;
12. $\mathbf{A} \bigcap (\mathbf{B} \bigcup \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \bigcap \mathbf{B}) \bigcup (\mathbf{A} \bigcap \mathbf{C})$;
13. $\mathbf{A} \bigcup (\mathbf{B} \bigcap \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \bigcup \mathbf{B}) \bigcap (\mathbf{A} \bigcup \mathbf{C})$;
14. $\mathbf{A} \bigcup \varnothing = \mathbf{A}$;
15. $\mathbf{A} \bigcap \mathbf{E} = \mathbf{A}$;
16. $\mathbf{A} \bigcup \mathbf{E} = \mathbf{E}$;
17. $\mathbf{A} \bigcap \varnothing = \varnothing$;
18. співвідношення $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{B}$ рівносильне кожному зі співвідношень $\mathbf{A} \bigcup \mathbf{B} = \mathbf{B}$; $\mathbf{A} \bigcap \mathbf{B} = \mathbf{A}$;

Всі ці властивості перевіряються тривіально (для переконання, можна скористатися колами Ейлера). Для ілюстрації, доведемо тотожність 12:

$$A \bigcap (B \bigcup C) = \{x | x \in A \text{ та } (x \in B \text{ або } x \in C\} = \{x | (x \in A \text{ та } x \in B) \text{або } (x \in A \text{ та } x \in C\} =$$
$$= (A \bigcap B) \bigcup (A \bigcap C).$$

Звернемо увагу на те, що властивості 6 та 7 по формі співпадають з комутативними законами; властивості 8 та 9 – з асоціативними законами, а властивість 12 – з дистрибутивним законом звичайної алгебри, які є наслідками цих властивостей і є справедливими у алгебрі множин.

Проте, властивості 10, 11 та 13 не мають аналогів у звичайній алгебрі і тому надають алгебрі множин більш просту структуру. Властивості 14, 15 та 17 свідчать про те, що властивості операцій об'єднання та перерізу з порожніми множинами Ø та універсальними множинами E схожі з властивостями чисел 0 та1 відносно операцій складання та добутку. Але властивість 16 не має аналогів в числовій алгебрі.

Перелічимо, нарешті, властивості операцій доповнення:

19. $\mathbf{A} \bigcup \mathbf{A}' = \mathbf{E}$;

20. $A \bigcap A' = \varnothing$;

21. $\varnothing' = \mathrm{E}$;

22. $\mathrm{E}' = \varnothing$;

23. $\mathbf{A}'' = \mathbf{A}$;

24. співвідношення $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{B}$ рівносильне співвідношенню $\mathbf{B}' \subseteq \mathbf{A}'$;

25. $(\mathbf{A} \bigcup \mathbf{B})' = \mathbf{A}' \bigcap \mathbf{B}'$;

26. $(\mathbf{A} \bigcap \mathbf{B})' = \mathbf{A}' \bigcup \mathbf{B}'$.

Властивості 25 та 26 називаються законами (формулами) *де Моргана*. Для ілюстрації доведемо властивість 25:

$$(A \bigcup B)' = \{x | x \notin A \bigcup B\} = \{x | x \notin A \text{ та } x \notin B\} = A' \bigcap B'.$$

Властивості 1-26 складають базу алгебри множин. Відмітимо, що вони мають дуже цікаву рису «подвійності», а саме, якщо в будь-якій властивості 1-26 символи $\subseteq$ та $\supseteq$, або Ø та E, або $\bigcup$ та $\bigcap$ міняються місцями, то в результаті знову отримуємо одну з властивостей 1-26. Такі пари утворюють властивості 4 та 5, 12 та 13, 25 та 26. Таким чином, кожній теоремі, яка є наслідком властивостей 1-26 відповідає «подвійна» теорема, яка утворюється перестановками відповідних символів.

За допомогою цих властивостей алгебри множин (їх також вважають законами) можна систематично та строго доводити тотожності та спрощувати вирази з множинами.

Приклад. Спростити вираз: $[\mathbf{A} \bigcup (\mathbf{A} \bigcup \mathbf{B})'] \bigcap \mathbf{B}$.

$$[\mathbf{A} \bigcup (\mathbf{A} \bigcup \mathbf{B})'] \bigcap \mathbf{B} = [\mathbf{A} \bigcup (\mathbf{A}' \bigcap \mathbf{B}')'] \bigcap \mathbf{B} = [(\mathbf{A} \bigcup \mathbf{A}') \bigcap (\mathbf{A} \bigcup \mathbf{B})'] \bigcap \mathbf{B} = [\mathbf{E} \bigcap (\mathbf{A} \bigcup \mathbf{B}')] \bigcap \mathbf{B} =$$
$$= (\mathbf{A} \bigcup \mathbf{B}') \bigcap \mathbf{B} = (\mathbf{A} \bigcap \mathbf{B}) \bigcup (\mathbf{B} \bigcap \mathbf{B}') = (\mathbf{A} \bigcap \mathbf{B}) \bigcup \varnothing = \mathrm{A} \bigcap \mathrm{B}.$$

В першій рівності була застосована властивість 25, а в другій – властивість 13, в третій – 19, в четвертій – 7 та 15, в п'ятій – 7 та 12, в шостій – 7 та 20, в сьомій – 14. Використання наведеного вище результату, приводить до наступного:

$$[\mathbf{A}\cap(\mathbf{A}\cap\mathbf{B})']\cup\mathbf{B}=\mathbf{A}\cup\mathbf{B}.$$

Треба звернути увагу на факт, що всі твердження 1-26, разом з іншими теоремами алгебри множин, можуть бути одержані з наступних трьох рівностей:

$$\mathbf{A}\cup\mathbf{B}=\mathbf{B}\cup\mathbf{A};$$

$$(\mathbf{A}\cup\mathbf{B})\cup\mathbf{C}=\mathbf{A}\cup(\mathbf{B}\cup\mathbf{C});$$

$$(\mathbf{A}'\cup\mathbf{B}')'\cup(\mathbf{A}'\cup\mathbf{B})'=\mathbf{A},$$

якщо вважати їх аксіомами, а операцію перерізу та співвідношення включення визначити як $\mathbf{A}\cap\mathbf{B}=(\mathbf{A}'\cup\mathbf{B}')'$; нагадаємо, що твердження $\mathbf{A}\subseteq\mathbf{B}$ означає $\mathbf{A}\cup\mathbf{B}=\mathbf{B}$.

Таким чином можна побудувати алгебру множин на базі трьох наведених вище аксіом. Існують також інші приклади математичних систем, в яких виконуються всі формальні закони алгебри множин. Розглянемо наступні приклади.

Приклад 1. Нехай задана система двох чисел $\{0; 1\}$. Операцію $a\cup b$ будемо позначати як $\max\{a; b\}$ (більше з чисел *a* та *b*, або *a*, якщо *a*= *b*); операцію $a\cap b$ розглядаємо як $\min\{a;b\}$ (менше з чисел *a* та *b*, або а, якщо *a*= *b*); твердження $a\subseteq b$ означає, що $a\le b$; $a'=1-a$; число 0 відповідає ∅, а число 1 відповідає E.

Приклад 2. Розглянемо систему чисел {1; 2; 3; 5; 6; 10; 15; 30}; (елементи системи є дільниками числа 30). Операцію $a\cup b$ можна розглядати як найменше спільне кратне чисел *a* та *b;* операцію $a\cap b$ позначаємо як найбільший спільний дільник чисел *a* та *b*; $a\subseteq b$ означатиме «$a \vdots b$» (*b* є дільником *a*); $a'=\dfrac{30}{a}$; число 1 відповідає ∅, а число 30 відповідає E.

Наявність таких прикладів приводить до вивчення математичних систем, які мають властивості, характерні для алгебри множин. Такі системи називають булєвими алгебрами. Розглянуті вище наведених прикладах системи відносяться до таих систем. Зауважимо також, що при вивченні математичної логіки, мають справу з алгеброю висловлювань, яка становить один з найважливіших прикладів булєвих алгебр.

§ 4. Декартів добуток. Відношення.

Розглянемо одну спеціальну операцію над множинами, яка не має аналогів в числовій алгебрі, але дуже важлива для подальшого вивчення теорії множин.

Нехай ми маємо n множин А, А,…,А. Будемо називати *кортежем* на цих множинах впорядковану су) добутком множинкупність елементів $a_1; a_2; ...; a_n$, де $a_1 \in \mathbf{A}_1$, $a_2 \in \mathbf{A}_2, ...,$ $a_n \in A_n$.
Декартовим (або *прямим*) *добутком* множин А, А,…,А є множина, елементами якої є всі кортежі на цих множинах. Використовується позначення А×А× …А, або скорочена форма $\prod_{i=1}^{n} \mathbf{A_i}$:

$$\prod_{i=1}^{n} \mathbf{A_i} = \mathbf{A}_1 \times \mathbf{A}_2 \times ...\mathbf{A_n} = \{(a_1; a_2; ...; a_\mathbf{n}) \mid a_1 \in \mathbf{A}_1; a_2 \in \mathbf{A}_2; ...\ a_\mathbf{n} \in \mathbf{A_n}\}$$

.

Легко пересвідчитись, що для двох множин декартовим добутком буде сукупність всіх впорядкованих пар
$\mathbf{A}_1 \times \mathbf{A}_2 = \{(a_1; a_2) \mid a_1 \in \mathbf{A}_1; a_2 \in \mathbf{A}_2\}$
Якщо А= А=…=А=А, то відповідний Декарті добуток називається n-м *декартовим ступенем* А та позначається А (у випадку, коли n=2, маємо Декарті квадрат).

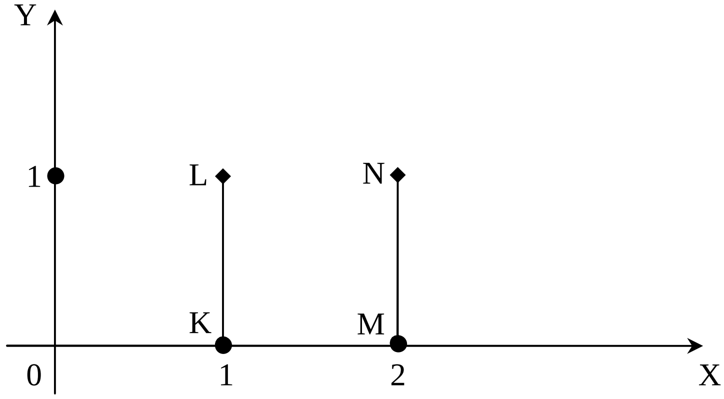
Приклад. Нехай А={1; 2; 3}; В={2; 5}.

Тоді А×В={(1; 2); (1; 5); (2; 2); (2; 5); (3; 2); (3; 5)}.

Легко встановити що якщо A_i (i=1, 2,…, n) – скінченні множини, та кожна множина складається з k_i елементів, то їх декартів добуток містить (k_1 k_2 … k_n) елементів.

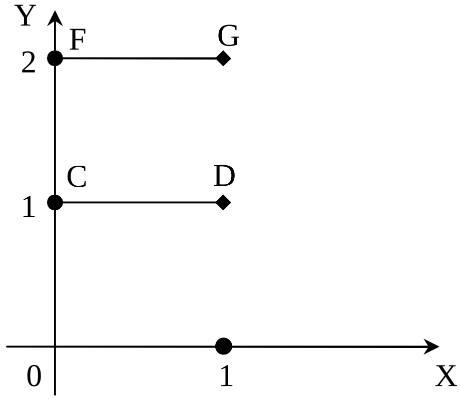
Для опису декартового добутку зручно використовувати «мову геометрії». Так елементи **a**=($a_1; a_2; ...; a_n$) множини А= $\prod_{i=1}^{n} \mathbf{A_i}$ називаємо *точками*, елемент $a_i \in \mathbf{A}_i$ – *і-ю координатою* точки **a**. У випадку, коли n=2, відповідні координати називаються *абсцисою* та *ординатою*. Ця термінологія виправдана, бо звичайну площину $\boldsymbol{R}^2$ можна розглядати як декартів квадрат дійсної вісі (тобто множини дійсних чисел) $\boldsymbol{R}$.

Приклад. Нехай А={1; 2}; В=[0; 1]. Тоді А×В є об'єднанням двох відрізків, зображених на рисунку.



A×B=$KL \cup MN$.

Зауважимо, що B×A є об’єднанням двох інших відрізків.



B×A=$CD \cup FG$.

Таким чином, встановлюється, що операція декартового добутку не комутативна.

Тепер введемо нове важливе поняття.

Відношенням на множинах $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, ..., \mathbf{A}_n$ є підмножина їх декартового добутку $R_n = \prod_{i=1}^{n} \mathbf{A}_i$. Очевидно, відношення визначається властивістю, яка відокремлює відповідну підмножину: $R_n = \{(a_1; a_2; ...; a_n) \mid \mathbf{P}_n\}$, де $\mathbf{P}_n$ – деяка властивість.

В загальному випадку n множин відношення називається n-місним. Якщо n=1, відношення називається *унарним,* якщо n=2 – *бінарним,* у випадку n=3 – *тринарним.*

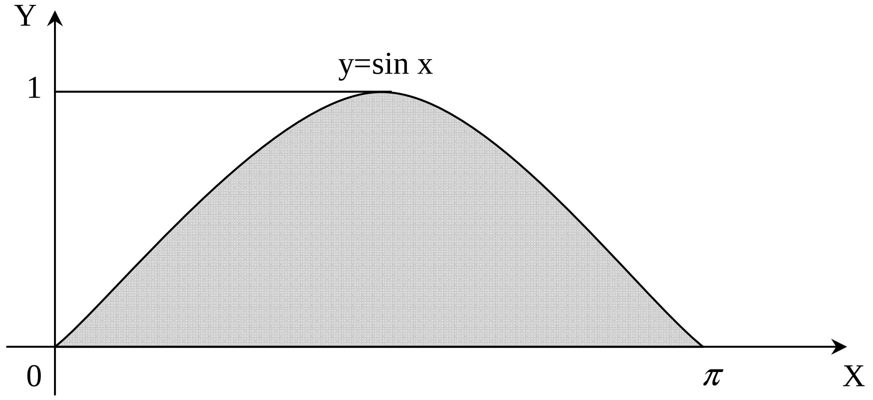
Надалі будуть розглядатися переважно бінарні відношення.

Якщо $\mathbf{A}_1 = \mathbf{A}_2 = ... = \mathbf{A}_n = \mathbf{A}$, то кажуть, що R_n є n-місним відношенням на множині A.

Розглянемо декілька прикладів.

Приклад 1. Нехай на множині цілих чисел $\mathbf{Z}$ властивість $\mathbf{P}_1$: «число $x \in \mathbf{Z}$ парне». Тоді $R_1 = \{x \mid \mathbf{P}_1\}$ унарне відношення на $\mathbf{Z}$. Очевидно, унарне відношення це просто підмножина (в даному випадку – підмножина $\mathbf{Z}$, яка складається з усіх парних чисел).

Приклад 2. Нехай задані множини: А=[0; π] і В=[0; 1] та властивість $\mathbf{P}_2$: «$y \le \sin x;\ x \in \mathbf{A};\ y \in \mathbf{B}$». Тоді $R_2 = \{(x;y) \mid \mathbf{P}_2\}$ – бінарне відношення на А×В. Відповідна множина зображена на рисунку.



Приклад 3. Нехай А={1; 2; 3}; $\mathbf{P}_3$: « $a+b+c \le 4$, де $a \in \mathbf{A}; b \in \mathbf{A}; c \in \mathbf{A}$ ». Тоді $R_3 = \{(a;b;c) \mid \mathbf{P}_3\}$ – тринарне відношення на А: $R_3 = \{(1;1;1);\ (1;1;2); (1;2;1); (2;1;1) \mid \mathbf{P}_3\}$.

Приклад 4. Нехай А – множина всіх прямих на площині; $\mathbf{P}_3$: «прямі **a**, **b**, **c**, які перетинаються в одній точці». Тоді $R_3 = \{(a;b;c) \mid \mathbf{P}_3\}$ – трипарне відношення на А. Трійка прямих належить до R_3, якщо вони перетинаються в одній точці.

§ 5. Бінарні відношення

Як вже відмічалося, найважливішими в нашому курсі будуть бінарні відношення. Бінарним відношенням на множинах X, Y є підмножина декартового добутку X×Y: $\mathbf{R} \subseteq$ X×Y.

Якщо X=Y, кажуть, що задане бінарне відношення на множині X.

Для бінарних відношень можна скористатися замість запису (X, Y)$\in$ **R** записом в скороченій формі: X**R**Y.

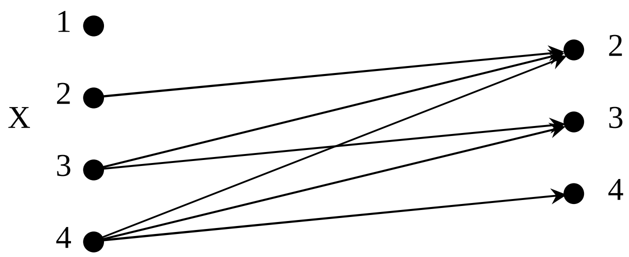
Існують різні способи зображення бінарних відношень. Якщо хоча б одна з множин X, Y нескінченна, можливе зображення тільки аналітичне (за допомогою формул), або графічне (далі буде приведений приклад). У випадку, коли обидві множини скінчені, можливе зображення відношення за допомогою таблиці або стрілок.

Приклад. Розглянемо наступне бінарне відношення: $\mathbf{R} = \{(x,y) \mid x \in \mathbf{X}; y \in \mathbf{Y}; x \ge y\}$, де X={1; 2; 3; 4}; Y={2; 3; 4}. Звичайно, можна просто перелічити відношення $\mathbf{R}$: $\mathbf{R}=\{(2;2); (3;2); (3;3); (4;2); (4;3); (4;4)\}$.

Проте, можливе зображення $\mathbf{R}$ за допомогою таблиці:

		X			
		1	2	3	4
Y	2		+	+	+
	3			+	+
	4				+

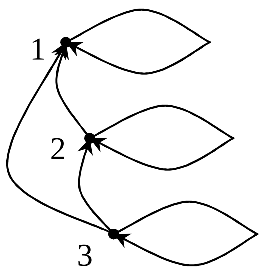
В таблиці комірки, яким відповідають пара (x, y), відмічені символом «плюс», якщо має місце x**R**y. Таке відношення можна зобразити за допомогою стрілок:



В зображенні стрілка йде в напрямку від x до y, якщо x**R**y.

У випадку, коли бінарне відношення розглядається на одні множині X, існує більш зручний спосіб його зображення за допомогою стрілок.

Приклад. Нехай $\mathbf{R}=\{(x,y)\mid x\in \mathbf{X};\, y\in \mathbf{Y}; x\geq y\}$, де X={1; 2; 3}; Y={1; 2; 3}.



Спосіб зображення від попереднього відрізняється тим, що враховується умова X = Y. Тоді відношення зображується, так званим, *скінченим графом*. У подальшому, при розгляданні теорії скінчених графів, такий спосіб зображення буде поданий більш детально.

Випишемо основні поняття, що стосуються бінарних відношень.

Нехай $\mathbf{R}\subseteq X\times Y$.

Областю визначення відношення $\mathbf{R}$ є множина $Dot(\mathbf{R})=\{x\in \mathbf{X}\mid$ існує $y\in \mathbf{Y}:\ x\mathbf{R}y\}$.

Областю значень відношення $\mathbf{R}$ є множина $Rang(\mathbf{R}) = \{y \in \mathbf{Y} \mid$ існує $x \in \mathbf{X}: \; x\mathbf{R}y\}$.с

Оберненим відношенням до $\mathbf{R}$ є відношення: $\mathbf{R}^{-1} = \{(y;x) \mid x\mathbf{R}y\}$.

Розрізом відношення $\mathbf{R}$ по елементу $a \in \mathbf{X}$ є множина $\mathbf{R}_{x=a} = \{y \in Y \mid a\mathbf{R}y\}$.

Приклад. Нехай $\mathbf{R} = \{(x;\, y) \mid x^2 + y^2 = 1;\, x \in \mathbf{R}; y \in \mathbf{R}\}$. Тоді $Dot(\mathbf{R}) = [-1;1]$; $Rang(\mathbf{R}) = [-1;1]$; $\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}$;

$$R_{x=a} = \begin{cases} \{-\sqrt{1-a^2};\; \sqrt{1-a^2}\}, \text{ якщо } |a|<1; \\ \{0\}, \text{ якщо } |a|=1; \\ \varnothing, \text{ якщо } |a|>1. \end{cases}$$

Приклад. Нехай X={1; 2; 3}; Y={1; 2; 3; 4}; P: «$x \in \mathbf{X}$ є дільником $y \in \mathbf{Y}$»;

$\mathbf{R} = \{(x;\, y) \mid \mathbf{P}\}$. Тоді $\mathbf{R}$={(1; 1); (1; 2); (1; 3); (1; 4); (2; 2); (2; 4); (3; 3)}.

$Dot(\mathbf{R}) = \mathbf{X}$; $Rang(\mathbf{R}) = \mathbf{Y}$;

$\mathbf{R}^{-1} = \{(y;x) \mid x \in \mathbf{X}$ є дільником $y \in \mathbf{Y}\}$={ (1; 1); (2; 1); (3; 1); (4; 1); (2; 2); (4; 2); (3; 3)}.

$\mathbf{R}_{x=1} = \{1;2;3;4\}$; $\mathbf{R}_{x=2} = \{2;4\}$; $\mathbf{R}_{x=3} = \{3\}$.

Визначимо деякі класи бінарних відношень на множині X. Бінарне відношення $\mathbf{R}$ на множині $\mathbf{X}$ є *рефлексивним*, якщо $x\mathbf{R}x$ для будь-якого $x \in \mathbf{X}$.

Бінарне відношення $\mathbf{R}$ на множині $\mathbf{X}$ є *антирефлексивним*, якщо $x\mathbf{R}x$ не виконується для жодного $x \in \mathbf{X}$.

Бінарне відношення $\mathbf{R}$ на множині $\mathbf{X}$ є *транзитивним*, якщо при наявності співвідношень $x\mathbf{R}x$, $y\mathbf{R}z$ виконується $x\mathbf{R}z$.

Бінарне відношення $\mathbf{R}$ на множині $\mathbf{X}$ є *симетричним*, якщо при наявності співвідношення $x\mathbf{R}y$ виконується $y\mathbf{R}x$Є та *асиметричним*, якщо немає таких x, y, при яких має місце $x\mathbf{R}y$, $y\mathbf{R}x$.

Бінарне відношення $\mathbf{R}$ на множині $\mathbf{X}$ є *антисиметричним*, якщо при наявності співвідношень $x\mathbf{R}y$, $y\mathbf{R}x$ виконується $x = y$.

Бінарне відношення $\mathbf{R}$ на множині $\mathbf{X}$ є *повним*, якщо для будь-яких x, y, таких, що $x \in \mathbf{X}; y \in \mathbf{X}$; $x = y$ виконується або $x\mathbf{R}y$, або $y\mathbf{R}x$.

Очевидно, якщо $\mathbf{R}$ – рефлексивне співвідношення, то $Dot(\mathbf{R}) = \mathbf{X}$. Відношення $\mathbf{R}$ симетричне в тому і тільки в тому випадку, коли $\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}$.

Легко довести, якщо відношення $\mathbf{R}$ симетричне та транзитивне і $Dot(\mathbf{R}) = \mathbf{X}$, то $\mathbf{R}$ рефлексивне. Відмітимо також, що для рефлексивного відношення завжди $a \in \mathbf{R}_{x=a}$.

Приклад 1. Відношення $\mathbf{R}$={(1; 1); (2; 2); (3; 3); (1; 2); (2; 1); (1; 3)} на множині X={1; 2; 3} є рефлексивним та транзитивним, але не є ні симетричним, а ні антисиметричним. Воно не є також повним (можна розглянути випадок $x = 2$, $y = 3$).

Відношення $\mathbf{R}$={(2; 2); (3; 3); (1; 2); (2; 3); (3; 2); (1; 3); (3; 1)} на множині X={1; 2; 3} є симетричним, але не є ні рефлексивним, а ні анти рефлексивним. Воно не є також транзитивним. Це відношення повне.

Відношення $\mathbf{R}$={(1; 2); (2; 1); (2; 2)} на множині X={1; 2; 3} є транзитивним та симетричним, Але не є ні рефлексивним, а ні антирефлексивним. Воно не є повним.

Відношення $\mathbf{R} = \{(x;\ y) \mid x \geq y+1;\ x\in \mathbf{R}; y\in \mathbf{R}\}$ на множині X=$\mathbf{R}$ є антирефлексивним та транзитивним. Воно не є ні симетричним, а ні антисиметричним. Воно також не є повним.

Відношення $\mathbf{R} = \{(x;\ y) \mid\ |x-y| \leq 1;\ x\in \mathbf{R}; y\in \mathbf{R}\}$ на множині X=$\mathbf{R}$ є рефлексивним та симетричним, але не є ні транзитивним, а ні повним.

Відношення $\mathbf{R} = \{(m;\ n) \mid\ m \,\vdots\, n\ \}$ на множині X=$\mathbf{N}$ є рефлексивним, транзитивним та антисиметричним. Воно не є повним. Це ж саме відношення на множині X=$\mathbf{Z}$ не є антисиметричним, бо 1$\vdots$(-1); (-1) $\vdots$ 1.

§ 6. Відношення еквівалентності та порядку.

Розглянемо детальніше два важливих класи бінарних відношень.

Відношення є відношенням еквівалентності, якщо воно рефлексивне, транзитивне та симетричне. Тривіальний приклад дає відношення $\mathbf{R} = \{(x;\ y) \mid\ x = y\}$ на будь-якій числовій множині. Розглянемо ще приклади.

Приклад 1.Відношення $\mathbf{R}$ на множині всіх прямих на площині визначимо так: $x\mathbf{R}y$, коли прямі x та y паралельні.

Відношення $\mathbf{R} = \{(x;\ y) \mid x\in \mathbf{R}; y\in \mathbf{R};\ x-y\in \mathbf{Z}\}$є відношенням на множині еквівалентності $\mathbf{R}$.

Відношення $\mathbf{R}$ на множині всіх мешканців даної країни: $x\mathbf{R}y$, коли x та y народилися в один рік.

Якщо $\mathbf{R}$ – відношення еквівалентності, то розріз елемента $a\in$ X по відношенню $\mathbf{R}$ називається класом еквівалентності елемента *а*. Для будь-яких $a\in$ X, b$\in$ X або $\mathbf{R}_{\ x=a} = \mathbf{R}_{\ x=b}$, або $\mathbf{R}_{\ x=a} \cap \mathbf{R}_{\ x=b} = \varnothing$. Таким чином, можна отримати розбиття множини X на класи, тобто X представляється у вигляді об’єднання множин, які не перетинаються та кожна є класом еквівалентності деякого елементу. З іншого боку, можна отримати розбиття множин X (тобто, X=$\bigcup\limits_{i} \mathrm{X}_i$, де $\mathrm{X}_i \cap \mathrm{X}_j$ = Ø, якщо $i \neq j$), то можна побудувати відповідне відношення еквівалентності, припускаючи: $x\mathbf{R}y$, якщо існує такий індекс i, що $x\in \mathrm{X}_i$ та $y\in \mathrm{X}_i$. Звідси маємо, що кожне відношення еквівалентності можна ототожнити з деяким розбиттям на класи і навпаки.

Приклади. Якщо $\mathbf{R} = \{(x;\ y) \mid\ x = y\}$, то $\mathbf{R}_{\ x=a} = \{a\}$.

Нехай $\mathbf{R}$ – відношення на множині всіх прямих на площині: $x\mathbf{R}y$, якщо x та y паралельні. Тоді $\mathbf{R}_{x=a}$ м – множина всіх прямих, паралельних прямій a; $\mathbf{R}_{x=a}$ можно ототожнити з будь-яким вектором, колінеарним a.
Розіб'ємо множину $\mathbf{R}$: $\mathbf{R} = (-\infty;\, 0) \bigcup [0;\, +\infty)$. Визначимо відношення $\mathbf{R}$ так: $\mathbf{R} = \{(x;\, y) \mid (x < 0;\ y < 0) \text{ або } (x \geq 0;\ y \geq 0)\}$. Відношення $\mathbf{R}$ є відношенням еквівалентності. Класами еквівалентності є $(-\infty;\, 0)$ та $[0;\, +\infty)$.

Для відношення $\mathbf{R}$={(a; a), (b; b), (c; c), (b; c), (c; b)} на множині X={a; b; c}классами еквівалентності є {a} та {b;c}.

Відношення є *відношенням порядку*, якщо воно рефлексивне, транзитивне та антисиметричне. Відношення є *відношенням строгого порядку*, якщо воно антирефлексивне та транзитивне (відношення строгого порядку не є відношенням порядку). Таке відношення завжди є асиметричним.

Якщо відношення строгого порядку $\mathbf{R}$ на множині X повне, то кажуть, що множина X *лінійно впорядкована* В іншому випадку кажуть, що множина X *частково впорядкована*. Відношення строгого порядку можна отримати з відношення порядку, якщо відкинути всі пари (x; x).

Приклади. Відношення R={(x; y) | $x \leq y$; $x \in \mathbf{R}$; $y \in \mathbf{R}$ } є відношенням повного порядку на множині $\mathbf{R}$. Відношення R={(x; y) | x<y} є відношенням лінійного строгого порядку на $\mathbf{R}$.

Відношення R ={(A; B) | $A \subseteq B$} є відношенням порядку на множині Ф(Е) всіх підмножин універсальної множини Е. Це відношення не є повним, якщо Е містить більш одного елементу. Відношення R ={(A; B) | $A \subset B$} є відношенням строгого порядку на множині Ф(Е) (з відповідним зауваженням про повноту)

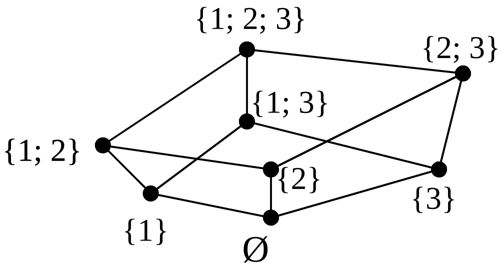
Відношення R ={(m; n) | $m \,\vdots\, n$ } є відношенням порядку на множині $\mathbf{N}$. Воно не є повним. Відношення R ={(m; n) | $m \,\vdots\, n$; $m \neq n$ } є відношенням порядку (воно також є неповним).

Нехай на скінченій множині X задано відношення строгого порядку $\prec$. Кажуть, що елемент y покриває елемент x (або елемент x безпосередньо передує елементу y), якщо $x \prec y$ і не існує такого елементу u, що $x \prec u \prec y$.

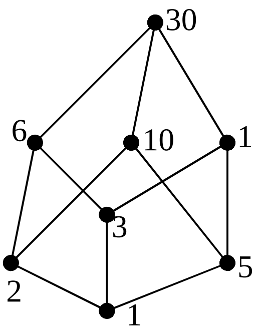
Якщо $x \prec y$, але y не покриває x, то завжди знайдеться така послідовність елементів x, x, …, x, що $x = x \prec x \prec \ldots \prec x = y$, де x покриває x для кожного $i = 1, 2, \ldots, n$-1.

При графічному зображенні відношення строгого порядку на скінченій множині можна з'єднувати тільки безпосередньо зв'язані елементи, а саме: елемент x з'єднується з елементом y за допомогою лінії, що направлена вгору, якщо y покриває x. Таке зображення повністю характеризує відношення та називається діаграмою Гессе.

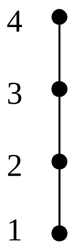
Наприклад, нехай A = {1; 2; 3}, X = Ф(A) (булєан множини A); B $\prec$ C, якщо B$\subset$C. Відповідна діаграма Гессен має вигляд



Якщо X = {1; 2; 3; 5; 6; 10; 15; 30} (множина дільників числа 30), а $x \prec y$, якщо $y \vdots x$ та $y \neq x$, то діаграма Гессен має алогічний вигляд:



Множини в розглянутих прикладах є частково впорядкованими. Якщо множина є лінійно впорядкованою, то відповідна діаграма Гессен має вигляд однієї лінії. Наприклад, якщо X = {1; 2; 3; 4} $x \prec y$, коли $x < y$, то діаграма Гессе буде мати наступний вигляд:



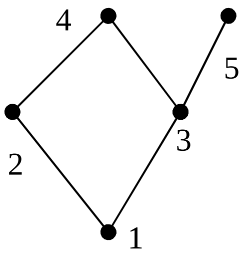
Елемент a впорядкованої множини X називається *найбільшим*, якщо $x \prec a$ для будь-якого елемента $x \neq a$. Аналогічно, a є *найменшим*, якщо $a \prec x$ для будь-якого елементу $x \neq a$. Елемент a називається *максимальним*, якщо не існує такого елементу x, що $a \prec x$, та називається *мінімальним*, якщо не існує такого елементу x, що $x \prec a$.

Очевидно, впорядкована множина має не більше одного найбільшого та не більше одного найменшого елементу. Найбільший елемент обов'язково є максимальним, а найменший – мінімальним. Кожна скінчена впорядкована множина має хоча б один максимальний та хоча б один мінімальний елемент. Разом з тим, найменшого та найбільшого елементів може і не бути (вони завжди є, якщо скінчена множина є лінійно впорядкованою).

Якщо найменший (найбільший) елемент існує, то він є єдиним мінімальним (максимальним) елементом.

Для розглянутих раніше прикладів найменшими елементами є відповідно ∅; 1; 1, найбільшими – відповідно {1; 2; 3}; 30; 4.

Розглянемо ще один приклад. Нехай на множині X = {1; 2; 3; 4; 5} задано відношення {(1; 2), (1; 3), (1; 4), (1; 5), (2; 4), (3; 4), (3; 5)}. Очевидно, воно є відношенням строгого порядку (нелінійного). Діаграма Гессе для цього відношення матиме наступний вигляд:



Тут 1 є найменшим елементом (єдиним мінімальним); 4 та 5 – максимальними елементами; найбільшого елементу немає.

§ 7. Відображення. Функції.

Відношення R на множинах X, Y буде *функцією,* якщо при наявності співвідношень $x\ R\ y$, $x\ R\ z$ виконується y = z, тобто для кожного $a \in$ X множина $R_{x=a}$ містить не більше одного елементу. В цьому випадку замість $R \subseteq X \times У$ записують F: X$\to$Y, а замість $x\ F\ y$ пишуть F(x) = y. Якщо Dot (F) = X, то функція F є відображенням множини X в множину Y.

Приклад. Нехай X=**R**, Y=**R**, F**(**x**)=ln** x. Тоді F: X$\to$Y є функцією, але не є відображенням. Якщо X = (0; $+\infty$); Y=**R;** F**(**x**)=ln** x, то F є відображенням.

Якщо F: X$\to$Y та G: Y$\to$W є відображеннями, то відображення H: X$\to$W називається *композицією* G та F і позначається $F \circ G$, якщо H(x) = G(F(x)) для кожного $x \in X$.

Образом F(A) підмножини A$\subseteq$X при відображенні F: X$\to$Y є підмножина B=$y \in Y$ | існує таке $x \in X$, що y=F(x)}.

Повним прообразом F^{-1}(B) підмножини B$\subseteq$Y є підмножина A={$x \in X$ | F(x) $\in$ B}.

Відображення F: X$\to$Y є *сур'єктивним,* якщо Rang(F) =Y.

Відображення F: $X \to Y$ є *ін'єктивним*, якщо з $F(x_1) = F(x_2)$ витікає $x_1 = x_2$.

Відображення F: $X \to Y$ є *бієктивним*, якщо воно є *сур'єктивним* та *ін'єктивним*.

Бієктивне відображення називається також *взаємно-однозначним*.

Приклади. Нехай X = {1; 2; 3}, Y = {1; 2; 3; 4}, $F(x) = x$. Тоді F: $X \to Y$ є ін'єкцією, але не сур'єкцією.

Нехай X = {1; 2; 3; 4}, Y = {1; 2; 3}, $F(1) = 1$; $F(2) = 2$, $F(3) = 3$, $F(4) = 3$. Тоді F: $X \to Y$ є сур'єкцією, але не ін'єкцією.

Нехай $F(x) = x^2$. Якщо X=**R,** Y=**R,** то F: $X \to Y$ не є ні сур'єкцією, ані ін'єкцією.

Якщо X = $[0; +\infty)$; Y=**R,** то F: $X \to Y$ є ін'єкцією, але не сур'єкцією.

Якщо X=**R,** Y = $[0; +\infty)$**,** то F: $X \to Y$ є сур'єкцією, але не ін'єкцією.

Якщо X = $[0; +\infty)$ та Y = $[0; +\infty)$, то F: $X \to Y$ є бієкцією.

Легко встановити, що якщо X – скінчена множина, то відображення F: $X \to Y$ ін'єктивне в тому, і тільки в тому випадку, коли воно є сур'єктивним.

Якщо F ін'єктивне, то повний прообраз будь-якої одноелементної підмножини Y містить не більше одного елемента. В цьому випадку обернене відношення F^{-1} буде функцією.

Навпаки, якщо F^{-1} – функція, то F - ін'єктивне.

Відображення F бієктивне в тому і тільки в тому випадку, коли F^{-1} є відображенням. Тоді таке відображення F^{-1} називають *оберненим відображенням*.

Легко перевіряється і наступна тотожність: $(G \circ F)^{-1} = F^{-1} \circ G^{-1}$.

Очевидно, що композиція бієкцій також є бієкцією.

§ 8. Еквівалентність множин. Потужність множин.

Множини X та Y є *еквівалентними* (X ~Y), коли існує бієкція F: $X \to Y$ Легко пересвідчити, що відношення: R ={(X; Y) | X Y} насправді є відношенням еквівалентності на Φ(E).

Дві нескінченні множини еквівалентні в тому і тільки в тому випадку, коли вони містять однакову кількість елементів.

Приклад. Група складається з 30 студентів. Кожному з них ставиться у відповідність його номер за списком. Таким чином, існує взаємно-однозначна відповідність між списком студентів (30 елементів) та множиною чисел списку $\{n \in N \mid n \le N\}$. Отже ці множини вважаються еквівалентними.

Кількість елементів скінченої множини А називається її *потужністю* та позначається |A|.

Якщо А та В скінчені множини, то ці множини еквівалентні, A~B, в тому і тільки в тому випадку, коли |A|=|B|.

Нескінченні множини також можна порівняти за потужністю. Для цього кожній нескінченій множині приписується символ – так звана *потужність множини*.

Дві множини вважаються рівно потужними, якщо вони еквівалентні. Для потужності множини **N** використовується символ $/\mathbf{C}_0$ (алеф-нуль), для потужності відрізка – символ **/C** (алеф). Відомо, що $/\mathbf{C}_0 \neq /\mathbf{C}$, тобто **N** **[0; 1].**

Якщо множина еквівалентна **N,** то вона називається *зліченною*, в іншому випадку – *незліченною*. Елемент зліченної множини можна перенумерувати.

Можна довести, що множина **Z** та множина **Q** (раціональних чисел) – злічені множини. Разом з тим, множина **R** незлічена, але вона еквівалентна відрізку [0; 1], тобто |R| = /C. Якщо |A| = /C, то кажуть, що A – *множина потужності континууму*. Так інтервал (0; 1), множина **R**, дійсна площина $\mathbf{R}^2$, множина комплексних чисел мають потужність континууму. Разом з тим, множина Ф(**R**) є незліченою множиною, але вона не є множиною потужності континууму.

ЛОГІКИ ВИСЛОВЛЮВАНЬ

§ 1. Основні поняття логіки висловлювань. Операції над висловлюваннями.

Основним поняттям математичної логіки є поняття висловлювання. Під висловлюванням ми розуміємо твердження про яке можна однозначно сказати, чи воно істинне, чи хибне. В алгебрі висловлювань не розглядають зміст висловлювання, а тільки цікавляться, чи воно істинне, чи ні. Тоді висловлювання можна розглядати як величину, яка може набувати одного з двох значень: «І» (істинне) або «Х» (хибне).

Приклад. Розглянемо висловлювання:

«5>3»;   «2х2=4»;   «0 – натуральне число»; « сьогодні п'ятниця».

Першим двом висловлюванням відповідає значення «І», третьому – «Х», а четвертому – в залежності від обставин «І» або «Х».

Як правило, висловлювання позначають великими латинськими літерами. Літери, які позначають висловлювання, називають також пропозиціональними символами, а символи «І», «Х» - логічними константами.

Логічні зв'язки «і», «або», «якщо…, то», «тоді і тільки тоді, коли», части ця «не» дозволяють з висловлювань, що вже задані, будувати нові, складніші.

Наприклад, якщо дані висловлювання «х>2» та «х<3», то за допомогою зв'язки «і» можна побудувати висловлювання «х>2 і х<3», за допомогою зв'язки «або» - «х>2 або х<3», за допомогою « якщо…, то» – «якщо х>2, то х<3» **.**

З висловлювання «*3 є натуральним числом*» за допомогою частці «не» можна побудувати висловлювання «3 не є натуральним числом»

Під операціями над висловлюваннями розуміють утворення складного висловлювання за допомогою логічних зв'язок та частки «не».

Нехай маємо довільне висловлювання А. Інверсією (запереченням) висловлювання А є висловлювання, яке хибне, коли А істинне, та істинне, коли А хибне. Воно позначається $\overline{\mathbf{A}}$ і утворюється з А за допомогою частки «не» («не А» або «невірно, що А»).

Кон'юнкція двох висловлювань А і В є висловлюванням, яке істинне тоді і тільки тоді, коли істинні обидва висловлювання (А і В). Це висловлювання позначається $A \wedge B$ і утворюється з А і В за допомогою зв'язки «і» («А і В»).

Диз'юнкція двох висловлювань А і В є висловлюванням, яке істинне тоді і тільки тоді, коли істинне хоча б одне з висловлювань (А або В). Це висловлювання позначається $A \vee B$ і утворюється з А і В за допомогою зв'язки «або» («А або В»). Тут мається на увазі, що диз'юнкція є істинним висловлюванням і тоді, коли обидва висловлювання істинні, і тоді, коли одне істинне, а інше хибне.

Відмітимо, що операція диз'юнкції аналогічна операції об'єднання в теорії множин, операція кон'юнкції – операції перерізу, а операція інверсія – операції доповнення. Дійсно, якщо висловлювання А: «$x \in A$», висловлювання В: «$x \in B$», то $A \vee B$: «$x \in A \bigcup B$»; $A \wedge B$: «$x \in A \cap B$»; $\overline{\mathbf{A}}$: «$x \in A^{/}$».

Імплікацією двох висловлювань А і В є висловлювання, яке хибне виключно в тому випадку, коли А істинне, а В хибне. Воно позначається $A \rightarrow B$ і утворюється з А і В за допомогою зв'язки «якщо…, то» («якщо А, то В»).

Відмітимо, що при хибному А імплікація $A \rightarrow B$ завжди істинна незалежно від В (з хибного слідує що завгодно; наприклад, обидва висловлювання «якщо 2х2=5, то 1>0», якщо 2х2=5, то 1< 0» є істинними).

Еквіваленцією двох висловлювань А і В є висловлювання, яке істинне виключно в тих випадках, коли А і В набувають однакових значень (обидва істинні або обидва хибні). Ця операція позначається $A \leftrightarrow B$ і утворюється з А і В за допомогою зв'язки «тоді і тільки тоді, коли» (А тоді і тільки тоді, коли В»).

Значення істинності висловлювання, утвореного з інших висловлювань за допомогою логічних операцій залежить від сукупності значень істинності вихідних висловлювань. Цю залежність зручно описувати за допомогою так званих таблиць істинності логічних операцій. Вони мають наступний вигляд:

A	$\overline{A}$
I	**X**
X	**I**

A	**B**	$\mathbf{A \wedge B}$
I	**I**	**I**
I	**X**	**X**

X	**I**	**X**
X	**X**	**X**

A	**B**	**A∨B**
I	**I**	**I**
I	**X**	**I**
X	**I**	**I**
X	**X**	**X**

A	**B**	**A∧→B**
I	**I**	**I**
I	**X**	**X**
X	**I**	**I**
X	**X**	**I**

A	**B**	**A∧↔B**
I	**I**	**I**
I	**X**	**X**
X	**I**	**X**
X	**X**	**I**

§ 2. Логічні формули. Рівносильність висловлювань.

Поняття логічної формули є формалізацією поняття складного висловлювання. Строге означення логічної формули можна дати наступним чином:

- будь який пропозиціональний символ, а також будь-яка логічна константа є формулою;
- якщо F і G – формули, то (F*G), $\overline{F}$ також є формулами (тут * –одна з логічних зв'язок ∧ , ∨ , →, ↔);
- формулою є тільки вираз, утворений за допомогою двох попередніх пунктів. Наприклад, формулами будуть

$((A\wedge B)\vee C)\rightarrow\overline{\mathbf{A}}$;

$((A\rightarrow B)\leftrightarrow C)\wedge\overline{\mathbf{A}\vee\mathbf{B}}$.

Вираз AB→ не є формулою.

Логічна формула визначає деяку функцію від змінних, що набувають значень I і X, і сама ця функція теж набуває значень I і X. Така функція зветься булєвою функцією.

Нехай F і G – формули, X_1, …, X_n – сукупність всіх пропозиціональних символів, що входять до них. Формули F і G є рівносильними, якщо їм відповідає одна і та ж булєва функція. Факт рівносильності формул позначається F=G. Легко перевірити, що рівносильність є відношенням еквівалентності на множині логічних формул.

Два висловлювання є рівносильними, якщо відповідні формули є рівносильними. Очевидно, F=G у тому та тільки тому випадку, коли $F\leftrightarrow G=I$.

§ 3. Закони алгебри логіки. Еквівалентні перетворення. Таблиці істинності.

Еквівалентним перетворенням формули F є її заміна на рівносильну формулу за допомогою певного правила. Еквівалентне перетворення формули F' на формулу F" записується у вигляді F'= F".

Для опису правил еквівалентних перетворювань визначимо поняття підформули:

- якщо F*G – формула, то F і G – її підформули (тут * - одна з логічних зв'язок $\wedge$, $\vee$, $\to$, $\leftrightarrow$); якщо $\overline{\mathbf{F}}$ - формула, то F – її підформула;

- якщо G – підформула формули F, а H – підформула формули G, то H – під формула формули F;

- підформулою є тільки вираз, який можна отримати за допомогою двох попередніх пунктів. Наприклад, для формули $((A\to B)\leftrightarrow C)\wedge(\overline{\mathbf{A}\vee\mathbf{B}})$ під формулами є вона сама, а також: $(A\to B)\leftrightarrow C)$; $(\overline{\mathbf{A}\vee\mathbf{B}})$; $A\to B$; $A\vee B$; A; B; C.

Правило еквівалентних перетворень.

Будь-яке еквівалентне перетворення формули F можна здійснити заміною деякої її підформули G_1 на рівносильну їй підформулу G_2 (така заміна зветься підстановкою).

Законами алгебри логіки є основні рівносильності для класу формул, що оперують тільки з логічними знаками $\wedge$, $\vee$, $\overline{}$.

Визначимо основні закони алгебри логіки та відмітимо, що вони аналогічні правилам дій над множинами, тобто алгебра логіки є ще одним прикладом булєвої алгебри (див. **§** 3 гл. 1).

1. Закони ідемпотентності:
$X\vee X=X$; $X\wedge X=X$.
2. Закони комутативності:
$X\vee Y=Y\vee X$; $X\wedge Y=Y\wedge X$.
3. Закони асоціативності:
$X\vee(Y\vee Z)=(X\vee Y)\vee Z$; $X\wedge(Y\wedge Z)=(X\wedge Y)\wedge Z$.
4. Закони дистрибутивності:
$X\wedge(Y\vee Z)=(X\wedge Y)\vee(X\wedge Z)$; $X\vee(Y\wedge Z)=(X\vee Y)\wedge(X\vee Z)$.
5. Закони де Моргана:
$\overline{\mathbf{X}\vee\mathbf{Y}}=\overline{\mathbf{X}}\wedge\overline{\mathbf{Y}}$; $\overline{\mathbf{X}\wedge\mathbf{Y}}=\overline{\mathbf{X}}\vee\overline{\mathbf{Y}}$.
6. Закони поглинання:
$X\wedge(X\vee Y)=X$; $X\vee(X\wedge Y)=X$.
7. Закон зняття подвійного заперечення:
$\overline{\overline{\mathbf{X}}}=\mathbf{X}$.
8. Закон протиріччя:
$X\wedge\overline{\mathbf{X}}=X$.

9. Закон виключеного третього:
$X \vee \overline{X} = I$.

10.Дії з логічними константами:
$X \wedge I = X$; $X \wedge X = X$; $X \vee I = I$; $X \vee X = X$.

Відмітимо також, що операції імплікації та еквіваленції можна виразити через кон'юнкцію, диз'юнкцію та інверсію таким чином:

11. $X \to Y = \overline{X} \vee Y$;

12. $X \leftrightarrow Y = (\overline{X} \vee Y) \wedge (X \vee \overline{Y}) = (X \wedge Y) \vee (\overline{X} \wedge \overline{Y})$.

Ці рівносильності можна отримати безпосередньо з таблиць істинності для імплікації та еквіваленції.

Наведемо ще два склеювання правила, що часто застосовуються при еквівалентних перетвореннях.

13.Закони склеювання:
$(X \wedge Y) \vee (X \wedge \overline{Y}) = X$;
$(X \vee Y) \wedge (X \vee \overline{Y}) = X$.

Дійсно, застосовуючи правила 4, 9, 10 отримуємо
$(X \wedge Y) \vee (X \wedge \overline{Y}) = X \wedge (Y \vee \overline{Y}) = X \wedge I = X$;
$(X \vee Y) \wedge (X \vee \overline{Y}) = X \vee (Y \wedge \overline{Y}) = X \vee X = X$.

14.Закони узагальненого склеювання:
$(X \wedge Y) \vee (\overline{X} \wedge Z) \vee (Y \wedge Z) = (X \wedge Y) \vee (\overline{X} \wedge Z)$;
$(X \vee Y) \wedge (\overline{X} \vee Z) \wedge (Y \vee Z) = (X \vee Y) \wedge (\overline{X} \vee Z)$.

Дійсно, за правилами 6, 9, 10 отримуємо
$(X \wedge Y) \vee (\overline{X} \wedge Z) \vee (Y \wedge Z) = (X \wedge Y) \vee (\overline{X} \wedge Z) \vee (I \wedge (Y \wedge Z) =$
$= (X \wedge Y) \vee (\overline{X} \wedge Z) \vee ((X \vee \overline{X}) \wedge (Y \wedge Z)) = (X \wedge Y) \vee (\overline{X} \wedge Z) \vee (X \wedge (Y \wedge Z))$
$\wedge (\overline{X} \wedge (Y \wedge Z) =$
$= (X \wedge Y) \vee (X \wedge Y \wedge Z) \vee (\overline{X} \wedge Z)(\overline{X} \vee Y \vee Z) = (X \wedge Y) \vee (\overline{X} \wedge Z)$;

Аналогічно перевіряється другий закон.

Відмітимо, що у виразах $A \vee B \vee C$, $A \wedge B \wedge C$ дужки можна не ставити завдяки законам асоціативності (правило 3).

Вже відмічалося (див. §2), що кожній логічній формулі відповідає певна булєва функція, і формули рівносильні тоді і тільки тоді, коли відповідні функції співпадають. Булєву функцію, яка відповідає формулі, можна представити у вигляді так званої таблиці істинності (для найпростіших формул відповідні приклади було приведено у §1). Наприклад, для формули

$F = (X_1 \vee \overline{X}_2) \to (X_1 \wedge X_2)$

Таблиця істинності має вигляд

X_1	X_2	$\overline{X}_2$	$X_1 \vee \overline{X}_2$	$X_1 \wedge X_2$	F
I	I	X	I	I	I
I	X	I	I	X	X
X	I	X	X	X	I
X	X	I	I	X	X

Тут в перших двох стовпчиках містяться всі можливі оцінки (тобто сукупності значень істинності) змінних X_1, X_2; далі значення істинності основних підформул, а в останньому стовпчику – значення істинності формули F. В даному випадку, очевидно, $F=X_2$.
Для формули

$$F= ((X_1 \rightarrow X_2)\leftrightarrow X_3)\wedge(\overline{\mathbf{X}_1 \vee \mathbf{X}_2})$$

таблиця істинності має вигляд:

X_1	X_2	X_3	$X_1\rightarrow X_2$	$(X_1\rightarrow X_2)\leftrightarrow X_3$	$X_1\vee X_2$	$(\overline{X_1 \vee X_2})$	F
I	I	I	I	I	I	X	X
I	I	X	I	X	I	X	X
I	X	I	X	X	I	X	X
I	X	X	X	I	I	X	X
X	I	I	I	I	I	X	X
X	I	X	I	X	I	X	X
X	X	I	I	I	X	I	I
X	X	X	I	X	X	I	X

Легко побачити, що в даному випадку $F= \overline{\mathbf{X}}_1\wedge \overline{\mathbf{X}}_2 \wedge X_3$.

Таблиця істинності формули з n змінними $(X_1,\ldots,X_n)$ завжди має 2^n рядків. Формули рівносильні тоді і тільки тоді, коли їх таблиці істинності (точніше, їх останні стовпчики) співпадають.

Формула F є тавтологією (або тотожньо істинною), якщо відповідна функція приймає тільки значення «I», тобто коли F=I. Формула F є тотожньо хибною, коли F=X. Очевидно, якщо F – тавтологія, то $\overline{\mathbf{F}}$ – тотожньо хибна, і навпаки.

Наприклад, формула
$F=X_1\rightarrow(X_1\vee X_2)$ є тавтологією, а формула $\overline{\mathbf{F}} = \overline{X_1 \rightarrow (\mathbf{X}_1 \vee \mathbf{X}_2)}$ тотожньо хибна.

§ 4. Двоїстість. Принцип двоїстості.

Нехай $F(X_1,\ldots,X_n)$ – формула з пропозіціональними символами $X_1,\ldots,X_n$. Формула $F^*(X_1,\ldots,X_n)$ є двоїстою до формули F

$$F^*(X_1,\ldots,X_n) = \overline{\mathbf{F}(\overline{\mathbf{X}}_1,\ldots,\overline{\mathbf{X}}_\mathbf{n})}.$$

Якщо формула F містить тільки зв'язки $\wedge, \vee, \neg$ (це можна зробити, вилучивши зв'язки $\rightarrow, \leftrightarrow$ за допомогою правил 11, 12 **§ 3**), то двоїсту формулу можна отримати таким чином. В формулі F всі знаки $\wedge$ замінемо на $\vee$, а знаки $\vee$ – на $\wedge$, і отримаємо формулу F*. Це є наслідком правил 5, 7 **§ 3**.

Наприклад, якщо $F=(X_1 \wedge X_2)\vee(X_1\vee \overline{X}_3)$, то $F^*=(X_1\vee X_2)\wedge(X_1\vee \overline{X}_3)$.

Принцип двоїстості

Якщо формули F і G рівносильні, то формули F* і G* також рівносильні. Принцип двоїстості використовується для отримання нових рівносильностей з вже встановлених. Наприклад, якщо відомий перший закон де Моргана $\overline{\mathbf{X} \vee \mathbf{Y}} = \overline{\mathbf{X}} \wedge \overline{\mathbf{Y}}$, то згідно принципу двоїстості отримуємо другий закон де Моргана $\overline{\mathbf{X} \wedge \mathbf{Y}} = \overline{\mathbf{X}} \vee \overline{\mathbf{Y}}$. Відмітимо, що закони 1 – 3 § 3 є парами двоїстих, закон 10 містить дві пари двоїстих формул (очевидно, символи I і X є двоїстими один до одного) закони 8 і 9 є двоїстими один до одного, закон 7 є само двоїстими (двоїстими до себе).

§ 5. Нормальні форми.

Для скорочення запису формул будемо дотримуватися наступних узгоджень:

- зовнішні дужки у формул не ставляться;
- якщо над формулою стоїть знак $\neg$ (заперечення), то дужками ця формула не відокремлюється;
- формула $(\mathbf{F} \wedge \mathbf{G})$ записується як $\mathbf{FG}$ (знак $\wedge$ не ставиться);
- згідно з асоціативним законом формулу $(...(\mathbf{F}_1 \vee \mathbf{F}_2) \vee ... \vee \mathbf{F}_\mathbf{n})$ записуємо як $(\mathbf{F}_1 \vee \mathbf{F}_2 ... \vee \mathbf{F}_\mathbf{n})$.

Наприклад, замість формули

$$((\overline{\mathbf{X} \wedge \mathbf{Y}}) \to ((\mathbf{X} \vee \mathbf{Y}) \vee \mathbf{Z}))$$

будемо писати $\overline{\mathbf{XY}} \to (\mathbf{X} \vee \mathbf{Y} \vee \mathbf{Z})$.

Нехай $\mathbf{X}_1,...,\mathbf{X}_\mathbf{n}$ – пропозиціональні символи. Літералом є пропозиціональний символ зі знаком заперечення над ним або без знака.

Елементарною кон’юнкцією є або літерал, або кон’юнкція різних літералів, яка не містить жодної пари літералів $\mathbf{X}_\mathbf{i}, \overline{\mathbf{X}}_\mathbf{i}$. Літерали, що складають елементарну кон’юнкцію, називаються також множниками.

Елементарна кон’юнкція є повною, якщо вона містить всі символи $\mathbf{X}_1,...,\mathbf{X}_\mathbf{n}$ або їх заперечення.

Наприклад, якщо $\mathbf{n} = 3$, то елементарні кон’юнкції $\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\mathbf{X}_3$, $\overline{\mathbf{X}}_1\mathbf{X}_2\overline{\mathbf{X}}_3$ є повними, а елементарні кон’юнкції $\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2$, $\overline{\mathbf{X}}_2\overline{\mathbf{X}}_3$ не є повними.

Елементарна кон’юнкція або формула $\mathbf{F} = \mathbf{K}_1 \vee ... \vee \mathbf{K}_\mathbf{s}$, де $\mathbf{K}_\mathbf{i} (1 \le \mathbf{i} \le \mathbf{s})$ – елементарні кон’юнкції, називається диз’юнктивною нормальною формою (скорочено ДНФ).

Досконалою диз’юнктивною нормальною формою (ДДНФ) є ДНФ, що складається з повних попарно різних елементарних кон’юнкцій.

Наприклад, якщо $\mathbf{n} = 3$, то формули

а) $\overline{\mathbf{X}}_1$;

б) $\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2 \vee \mathbf{X}_2\overline{\mathbf{X}}_3$;

в) $\mathbf{X}_1\overline{\mathbf{X}}_2\mathbf{X}_3 \vee \mathbf{X}_2\mathbf{X}_3$;

г) $\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\overline{\mathbf{X}}_3 \vee \mathbf{X}_1\overline{\mathbf{X}}_2\mathbf{X}_3 \vee \overline{\mathbf{X}}_1\mathbf{X}_2\overline{\mathbf{X}}_3$;

д) $\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\mathbf{X}_3 \vee \overline{\mathbf{X}}_1\overline{\mathbf{X}}_2\overline{\mathbf{X}}_3$

є ДНФ, але тільки формули г) і д) являються ДДНФ.

Кон'юнктивна нормальна форма (КНФ) визначається двоїстим способом до ДНФ.

Елементарною диз'юнкцією є літерал або диз'юнкція різних лібералів, що не містять жодної пари $\mathbf{X_i}, \overline{\mathbf{X}}_\mathbf{i}$. Літерали, що складають елементарну диз'юнкцію, називаємо також складовими.

Елементарна диз'юнкція є повною, якщо вона містить всі символи $\mathbf{X}_1,\ldots,\mathbf{X_n}$ або їх заперечення.
Наприклад, якщо $\mathbf{n}=3$, то елементарні диз'юнкції $\mathbf{X}_1 \vee \mathbf{X}_2 \vee \mathbf{X}_3$, $\overline{\mathbf{X}}_1 \vee \mathbf{X}_2 \vee \overline{\mathbf{X}}_3$ є повними, а елементарні диз'юнкції $\mathbf{X}_1 \vee \mathbf{X}_2$, $\overline{\mathbf{X}}_2 \vee \overline{\mathbf{X}}_3$ – ні.

Елементарна диз'юнкція або формула $\mathbf{F} = \mathbf{D}_1 \wedge \ldots \wedge \mathbf{D_s}$, де $\mathbf{D_i}$ $(1 \le \nu \le \mathbf{s})$ – елементарні диз'юнкції, називається кон'юнктивною нормальною формою (скорочено КНФ).

Досконалою кон'юнктивною нормальною формою (ДКНФ) є КНФ, що складається з повних попарно різних елементарних диз'юнкцій.
Наприклад, якщо $\mathbf{n}=3$, то формула

а) $\overline{\mathbf{X}}_1$;

б) $(\mathbf{X}_1 \vee \mathbf{X}_2)(\mathbf{X}_2 \vee \overline{\mathbf{X}}_3)$;

в) $(\mathbf{X}_1 \vee \overline{\mathbf{X}}_2 \vee \mathbf{X}_3)(\mathbf{X}_2 \vee \mathbf{X}_3)$;

г) $(\mathbf{X}_1 \vee \mathbf{X}_2 \vee \overline{\mathbf{X}}_3)(\mathbf{X}_1 \vee \overline{\mathbf{X}}_2 \vee \mathbf{X}_3)(\overline{\mathbf{X}}_1 \vee \mathbf{X}_2 \vee \overline{\mathbf{X}}_3)$;

д) $(\mathbf{X}_1 \vee \mathbf{X}_2 \vee \mathbf{X}_3)(\overline{\mathbf{X}}_1 \vee \overline{\mathbf{X}}_2 \vee \overline{\mathbf{X}}_3)$

є КНФ, але тільки формули г) і д) являються ДКНФ.

Нормальні форми мають особливе значення як у самій математичній логіці, так і у її застосуваннях. Існують різні способи приведення формули до нормальної форми. Відмітимо, що одна формула може мати кілька ДНФ (КНФ), наприклад:

$\mathbf{X}_1 = \mathbf{X}_1\mathbf{X}_2 \vee \mathbf{X}_1\overline{\mathbf{X}}_2$;

$\mathbf{X}_1 = (\mathbf{X}_1 \vee \mathbf{X}_2)(\mathbf{X}_1 \vee \overline{\mathbf{X}}_2)$,

але кожна формула, яка не є тотожно хибною, має тільки одну ДДНФ з точністю до порядку розташування елементарних кон'юнкцій і множників у кожній кон'юнкції.

Аналогічно, кожна формула, яка не є тавтологією, має тільки одну ДКНФ з точністю до порядку розташування елементарних диз'юнкцій і складових у кожній диз'юнкції.

Наведемо два алгоритми приведення формул до ДДНФ.

Приведення формули до ДДНФ за допомогою таблиць істинності.

Нехай формула $\mathbf{F}$ не є тотожно хибною. Розглянемо всі оцінки змінних $\mathbf{X}_1,\ldots,\mathbf{X_n}$, на яких вона набуває значення «І». Легко побачити, що $\mathbf{F}$ рівносильна диз'юнкції всіх повних елементарних кон'юнкцій, які набувають значення «І» на цих самих оцінках змінних (на кожній оцінці значення «І» набуває рівно одна повна елементарна кон'юнкція).

Таким чином, $\mathbf{F}$ рівносильна диз'юнкції повних елементарних кон'юнкцій, кожна з яких відповідає рядку таблиці істинності зі значенням «І».

Побудуємо, наприклад, СДНФ для формули $\mathbf{F} = (\mathbf{X}_1 \to \mathbf{X}_2) \leftrightarrow (\overline{\mathbf{X}}_2 \to \mathbf{X}_3)$:

X_1	X_2	X_3	$X_1 \to X_2$	$\overline{X}_2$	$\overline{X}_2 \to X_3$	F
І	І	І	І	Х	І	І
І	І	Х	І	Х	І	І
І	Х	І	Х	І	І	Х
І	Х	Х	Х	І	Х	І
Х	І	І	І	Х	І	І
Х	І	Х	І	Х	І	І
Х	Х	І	І	І	І	І
Х	Х	Х	І	І	Х	Х

Визначимо повні елементарні кон'юнкції, що набувають значення «І» на оцінках, які дають значення «І» для $\mathbf{F}$.

Для оцінки (І; І; І) це $\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\mathbf{X}_3$, для оцінки (І; І; Х) це $\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\overline{\mathbf{X}}_3$,

для (І; Х; Х) це $\mathbf{X}_1\overline{\mathbf{X}}_2\overline{\mathbf{X}}_3$, для (Х; І; І) це $\overline{\mathbf{X}}_1\mathbf{X}_2\mathbf{X}_3$,

для (Х; І; Х) це $\overline{\mathbf{X}}_1\mathbf{X}_2\overline{\mathbf{X}}_3$, для (Х; Х; І) це $\overline{\mathbf{X}}_1\overline{\mathbf{X}}_2\mathbf{X}_3$.

Тому $\mathbf{F} = \mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\mathbf{X}_3 \vee \mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\overline{\mathbf{X}}_3 \vee \mathbf{X}_1\overline{\mathbf{X}}_2\overline{\mathbf{X}}_3 \vee \overline{\mathbf{X}}_1\mathbf{X}_2\mathbf{X}_3 \vee \overline{\mathbf{X}}_1\mathbf{X}_2\overline{\mathbf{X}}_3 \vee \overline{\mathbf{X}}_1\overline{\mathbf{X}}_2\mathbf{X}_3$.

Очевидно, тотожно хибна формула не має ДДНФ.

Приведення формули до ДДНФ за допомогою еквівалентних перетворень.

1. Приводимо формулу до вигляду, що містить тільки зв'язки $\wedge, \vee, \neg$ (правила 11, 12 **§ 3).**

2. За допомогою правил 5, 7 § 3 перетворюємо формулу на таку, в якій під знаком заперечення немає жодного складного висловлювання. Під знаком заперечення можуть бути тільки пропозиціональні символи $(X_1,...,X_n)$.

3. Якщо отримана формула не є ДНФ, то замінюємо всі її під формули $H_1(H_2 \vee H_3)$ на рівносильні $H_1H_2 \vee H_1H_3)$ (правило 4 § 3), доки формула не буде перетворена на диз'юнкцію кон'юнкцій літералів.

4. Якщо не всі кон'юнкції літералів елементарні, то застосовуючи правила 1, 8, 10 **§ 3** $(X \wedge X = X;\ X \wedge \overline{X} = x;\ X \wedge x = x)$**,** отримуємо або логічну константу x, або елементарну кон'юнкцію. Якщо константа x опинилася складовою, то відкидаємо її (бо $X \vee x = X$). Таким чином, отримуємо або ДНФ, або логічну константу x. В останньому випадку формула не має ДДНФ, інакше переходимо до наступного пункту.

5. Якщо отримана ДНФ представлена елементарною кон'юнкцією K, що не містить символу X_i, то замінюємо K на рівносильну; $K = X_iK \vee \overline{X}_iK$ (правило 13 § 3).

Там, де це можливо робимо поглинання (правило 6 § 3). Будемо застосовувати це перетворення, доки всі елементарні кон’юнкції в ДНФ не стануть повними.

6. Якщо в отриманій ДНФ появляться однакові повні елементарні кон’юнкції, то вилучимо всі з них, крім одної (правило 1 § 3). Отримуємо в результаті ДДНФ.

Наприклад,

$$\mathbf{F} = (\mathbf{X}_1 \to \mathbf{X}_2) \leftrightarrow (\overline{\mathbf{X}}_2 \to \mathbf{X}_3) = (\overline{\mathbf{X}}_1 \vee \mathbf{X}_2) \leftrightarrow (\mathbf{X}_2 \vee \mathbf{X}_3) =$$
$$= (\overline{\mathbf{X}}_1 \vee \mathbf{X}_2)(\mathbf{X}_2 \vee \mathbf{X}_3) \vee (\overline{\mathbf{X}_2 \vee \mathbf{X}_3})(\overline{\mathbf{X}_2 \vee \mathbf{X}_3}) = \overline{\mathbf{X}}_1\mathbf{X}_2 \vee \overline{\mathbf{X}}_1\mathbf{X}_3 \vee \mathbf{X}_2 \vee \mathbf{X}_2\mathbf{X}_3 \vee \mathbf{X}_1\overline{\mathbf{X}}_2\overline{\mathbf{X}}_2\overline{\mathbf{X}}_3 =$$
$$= \overline{\mathbf{X}}_1\mathbf{X}_2 \vee \overline{\mathbf{X}}_1\mathbf{X}_3 \vee \mathbf{X}_2 \vee \mathbf{X}_2\mathbf{X}_3 \vee \mathbf{X}_1\overline{\mathbf{X}}_2\overline{\mathbf{X}}_3 =$$
$$= \overline{\mathbf{X}}_1\mathbf{X}_2\mathbf{X}_3 \vee \overline{\mathbf{X}}_1\mathbf{X}_2\overline{\mathbf{X}}_3 \vee \overline{\mathbf{X}}_1\mathbf{X}_2\mathbf{X}_3 \vee \overline{\mathbf{X}}_1\overline{\mathbf{X}}_2\mathbf{X}_3 \vee \mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\mathbf{X}_3 \vee \overline{\mathbf{X}}_1\mathbf{X}_2\mathbf{X}_3 \vee \mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\overline{\mathbf{X}}_3 \vee \overline{\mathbf{X}}_1\mathbf{X}_2\overline{\mathbf{X}}_3 \vee \mathbf{X}_1\overline{\mathbf{X}}_2\overline{\mathbf{X}}_3 =$$
$$= \mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\mathbf{X}_3 \vee \mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\overline{\mathbf{X}}_3 \vee \mathbf{X}_1\overline{\mathbf{X}}_2\overline{\mathbf{X}}_3 \vee \overline{\mathbf{X}}_1\mathbf{X}_2\mathbf{X}_3 \vee \overline{\mathbf{X}}_1\mathbf{X}_2\overline{\mathbf{X}}_3 \vee \overline{\mathbf{X}}_1\overline{\mathbf{X}}_2\overline{\mathbf{X}}_3$$

Алгоритми приведення формули до ДКНФ є двоїстими до алгоритмів приведення до ДДНФ. Знаки диз’юнкції замінюються знаками кон’юнкції і навпаки, значення «І» замінюється значеннями «Х» і навпаки.

Наприклад, приведемо до ДКНФ вище розглянуту формулу $\mathbf{F} = (\mathbf{X}_1 \to \mathbf{X}_2) \leftrightarrow (\overline{\mathbf{X}}_2 \to \mathbf{X}_3)$.

Формула $\mathbf{F}$ рівносильна кон’юнкції всіх повних елементарних диз’юнкцій, які набувають значення «Х» на тих оцінках змінних, на яких $\mathbf{F}$ отримує значення «Х». Це оцінки (І; Х; І), (Х; Х; Х). Відповідними повними елементарними диз’юнкціями є $\overline{\mathbf{X}}_1 \vee \mathbf{X}_2 \vee \overline{\mathbf{X}}_3$ та $\mathbf{X}_1 \vee \mathbf{X}_2 \vee \mathbf{X}_3$. Звідки $\mathbf{F} = (\overline{\mathbf{X}}_1 \vee \mathbf{X}_2 \vee \overline{\mathbf{X}}_3)(\mathbf{X}_1 \vee \mathbf{X}_2 \vee \mathbf{X}_3)$.

Приведення за допомогою еквівалентних перетворень здійснюється таким чином:

$$\mathbf{F} = (\mathbf{X}_1 \to \mathbf{X}_2) \leftrightarrow (\overline{\mathbf{X}}_2 \to \mathbf{X}_3) = (\overline{\mathbf{X}}_1 \vee \mathbf{X}_2) \leftrightarrow (\mathbf{X}_2 \vee \mathbf{X}_3) =$$
$$= (\overline{\mathbf{X}}_1 \vee \mathbf{X}_2 \vee \overline{\mathbf{X}_2 \vee \mathbf{X}_3})(\overline{\overline{\mathbf{X}}_1 \vee \mathbf{X}_2} \vee \mathbf{X}_2 \vee \mathbf{X}_3) =$$
$$= (\overline{\mathbf{X}}_1 \vee \mathbf{X}_2 \vee \overline{\mathbf{X}}_2\overline{\mathbf{X}}_3)(\mathbf{X}_1\overline{\mathbf{X}}_2 \vee \mathbf{X}_2 \vee \mathbf{X}_3) =$$
$$= (\overline{\mathbf{X}}_1 \vee \mathbf{X}_2 \vee \overline{\mathbf{X}}_2)(\overline{\mathbf{X}}_1 \vee \mathbf{X}_2 \vee \overline{\mathbf{X}}_3)(\mathbf{X}_1 \vee \mathbf{X}_2 \vee \mathbf{X}_3)(\overline{\mathbf{X}}_2 \vee \mathbf{X}_2 \vee \mathbf{X}_3) =$$
$$= \mathbf{I}(\overline{\mathbf{X}}_1 \vee \mathbf{X}_2 \vee \overline{\mathbf{X}}_3)(\mathbf{X}_1 \vee \mathbf{X}_2 \vee \mathbf{X}_3)\mathbf{I} = (\overline{\mathbf{X}}_1 \vee \mathbf{X}_2 \vee \overline{\mathbf{X}}_3)(\mathbf{X}_1 \vee \mathbf{X}_2 \vee \mathbf{X}_3).$$

Очевидно, тавтологія не має ДКНФ.

Критерій рівносильності формул алгебри логіки.

Дві формули алгебри логіки, що не являються тотожно хибними, рівносильні тоді і тільки тоді, коли співпадають їх ДДНФ. Дві формули алгебри логіки, що не являються тавтологіями, рівносильні тоді і тільки тоді, коли співпадають їх ДКНФ.

§ 6. Гіпотези та наслідки складного висловлювання. Перевірка правильності аргументів.

Нехай $\mathbf{F}$ і $\mathbf{G}$ – формули з пропозиціональними символами $\mathbf{X}_1,...,\mathbf{X}_\mathbf{n}$. Формула $\mathbf{G}$ є наслідком формули $\mathbf{F}$ (а $\mathbf{F}$ є, відповідно, гіпотезою формули $\mathbf{G}$), якщо

$$\mathbf{F} \to \mathbf{G} = \mathbf{I}.$$

Як правило, це позначається як $\mathbf{F} \Rightarrow \mathbf{G}$.

Очевидно, в цьому випадку $\mathbf{G}$ набуває значення «І» на кожній оцінки змінних, на якій $\mathbf{F}$ набуває значення «І». Тому ДДНФ для формули $\mathbf{F}$ є частинною ДДНФ формули $\mathbf{G}$. З іншого боку, $\mathbf{F}$ набуває значення «Х» на кожній оцінці змінних, на якій $\mathbf{G}$ набуває значення «Х».

Таким чином, ДКНФ формули $\mathbf{G}$ є частиною ДКНФ формули $\mathbf{F}$. Отже, щоб отримати всі наслідки формули, треба привести її до ДКНФ та виписати всі її частини, а щоб отримати всі гіпотези формули, треба привести її до ДДНФ та виписати всі її частини.

Наприклад, з прикладу, наведеного в § 5, витікає, що наслідками формули $\mathbf{F} = (\mathbf{X}_1 \to \mathbf{X}_2) \leftrightarrow (\overline{\mathbf{X}}_2 \to \mathbf{X}_3)$ є формули $\overline{\mathbf{X}}_1 \vee \mathbf{X}_2 \vee \overline{\mathbf{X}}_3$; $\mathbf{X}_1 \vee \mathbf{X}_2 \vee \mathbf{X}_3$, а також сама формула $\mathbf{F}$ і тавтологія І. Гіпотезами формули $\mathbf{F}$ є формули $\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\mathbf{X}_3$; $\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\overline{\mathbf{X}}_3$; $\mathbf{X}_1\overline{\mathbf{X}}_2\overline{\mathbf{X}}_3$; $\overline{\mathbf{X}}_1\mathbf{X}_2\mathbf{X}_3$; $\overline{\mathbf{X}}_1\mathbf{X}_2\overline{\mathbf{X}}_3$; $\overline{\mathbf{X}}_1\overline{\mathbf{X}}_2\overline{\mathbf{X}}_3$ і їх різноманітні диз’юнкції (зокрема сама формула $\mathbf{F}$), а також тотожно хибна формула Х; загалом маємо 64 гіпотези.

Якщо треба отримати всі наслідки гіпотез $\mathbf{F}_1,...,\mathbf{F}_\mathbf{m}$, то це значить, що треба знайти всі формули $\mathbf{G}$ (з точністю до рівносильності), такі, що $(\mathbf{F}_1 \wedge ... \wedge \mathbf{F}_\mathbf{m}) \Rightarrow \mathbf{G}$ (тобто, якщо $\mathbf{F}_1,...,\mathbf{F}_\mathbf{m}$ разом набувають значення «І», то $\mathbf{G}$ теж набуває значення «І» на цій оцінці). Очевидно, для розв’язання цієї задачі треба привести $\mathbf{F}_1 \wedge ... \wedge \mathbf{F}_\mathbf{m}$ до ДКНФ та взяти всі її частини.

Наприклад, нехай треба отримати всі наслідки гіпотез

$$\mathbf{X}_1 \to \mathbf{X}_2;\ \ \mathbf{X}_3 \to (\mathbf{X}_1 \vee \mathbf{X}_2):$$

$$(\mathbf{X}_1 \to \mathbf{X}_2)(\mathbf{X}_3 \to (\mathbf{X}_1 \vee \mathbf{X}_2)) =$$

$$=(\overline{\mathbf{X}}_1 \vee \mathbf{X}_2)(\overline{\mathbf{X}}_3 \vee (\mathbf{X}_1 \vee \mathbf{X}_2))=(\overline{\mathbf{X}}_1 \vee \mathbf{X}_2 \vee \mathbf{X}_3)(\overline{\mathbf{X}}_1 \vee \mathbf{X}_2 \vee \overline{\mathbf{X}}_3)(\mathbf{X}_1 \vee \mathbf{X}_2 \vee \overline{\mathbf{X}}_3).$$

Тому наслідками є формули

$$\overline{\mathbf{X}}_1 \vee \mathbf{X}_2 \vee \mathbf{X}_3;\ \overline{\mathbf{X}}_1 \vee \mathbf{X}_2 \vee \overline{\mathbf{X}}_3;\ \ \mathbf{X}_1 \vee \mathbf{X}_2 \vee \overline{\mathbf{X}}_3$$

і їх різноманітні диз’юнкції, а також тавтологія І; загалом 8 наслідків.

Взагалі, якщо ДКНФ формули $(\mathbf{F}_1 \wedge ... \wedge \mathbf{F}_\mathbf{m})$ містить $\mathbf{k}$ множників, то кількість наслідків дорівнює $2^\mathbf{k}$.

Нехай $\mathbf{F}_1,...,\mathbf{F}_\mathbf{m}$, $\mathbf{F}$ – формули з символами $\mathbf{X}_1,...,\mathbf{X}_\mathbf{n}$. Кажуть, шо аргумент

$$\begin{array}{|c} \mathbf{F}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{F_m} \\ \hline \mathbf{F} \end{array}$$

з посилками $\mathbf{F}_1,...,\mathbf{F_m}$ та висновком $\mathbf{F}$ вірний, якщо $\mathbf{F}$ є наслідком $\mathbf{F}_1,...,\mathbf{F_m}$, тобто $(\mathbf{F}_1 \wedge ... \wedge \mathbf{F_m}) \Rightarrow \mathbf{F}$.

Таким чином, питання про вірність аргументу можна вирішити за допомогою приведення до ДКНФ або до ДДНФ, але, як правило, це можна зробити простіше.

Наприклад, перевіримо вірність аргументу

$$\begin{array}{|c} \mathbf{X}_1 \to \mathbf{X}_2 \\ \mathbf{X}_3 \to (\mathbf{X}_1 \vee \mathbf{X}_2) \\ \hline \mathbf{X}_3 \to \mathbf{X}_2 \end{array}$$

Припустимо, що висновок $\mathbf{X}_3 \to \mathbf{X}_2$ хибний. Тоді $\mathbf{X}_3 = \mathbf{I}$; $\mathbf{X}_2 = \mathrm{X}$. Щоб перша посилка $(\mathbf{X}_1 \to \mathbf{X}_2)$ була істинною, треба, щоб було $\mathbf{X}_1 = \mathrm{X}$. Але тоді друга посилка $(\mathbf{X}_3 \to (\mathbf{X}_1 \vee \mathbf{X}_2))$ набуває значення «Х», тобто не може бути істинною.

Таким чином, не існує оцінки змінних, на якій посилки є істинними, а висновок є хибним. Отже, якщо посилки є істинними, то висновок теж є істинним. Аргумент вірний.

Розглянемо ще один аргумент:

$$\begin{array}{|c} \mathbf{X}_1 \to \mathbf{X}_2 \\ \mathbf{X}_3 \to (\mathbf{X}_1 \vee \mathbf{X}_2) \\ \hline \mathbf{X}_3 \end{array}$$

Нехай висновок $\mathbf{X}_3$ хибний. Тоді друга посилка буде істинною, якщо $\mathbf{X}_1 = \mathrm{X}$; $\mathbf{X}_2 = \mathrm{X}$. В цьому випадку і перша посилка буде істинною.

Таким чином, на оцінці (Х; Х; Х) обидві посилки є істинними, а висновок – хибний. Аргумент невірний.

§ 7. Булєві функції.

Вже відмічалося (див. § 2), що кожній формулі логіки висловлювань від n змінних відповідає функція від n логічних змінних, яка називається булєвою функцією. Далі будемо вважати, що значення істинності істинного висловлювання дорівнює 1 (замість «І»), а хибного – 0 (замість «Х»). Тоді булєву функцію $\Im(x_1,...,x_n)$ від n змінних можна розглядати як функцію $\Im:\{0;1\}^n \to \{0;1\}$. Очевидно, формули рівносильні тоді і тільки тоді, коли їм відповідає одна булєва функція. Булєва функція однозначно визначається таблицею істинності. Наприклад, таблиця істинності для функції

$\Im(x_1,...,x_n)=(x_1\to x_2)\leftrightarrow x_3)\overline{(x_1\vee x_2)}$ має вигляд (див. приклад в **§** 3):

x_1	x_2	x_3	$f(x_1;x_2;x_3)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	0

Булєву функцію n змінних зручно описувати таким способом. Оцінки змінних розглядаються як n-значні двійкові числа та впорядковуються за зростанням: 00…00; 00…01; 11..11. Функція описується впорядкованим набором своїх значень на всіх оцінках. Наприклад, опис функції $\Im$ з попереднього прикладу має вигляд (01000000).

Таким чином, кожній булєвій функції n змінних відповідає кортеж з нулів та одиниць довжини 2^n(бо існує 2^n різних оцінок змінних), тобто 2^n-значне двійкове число. Одже, кількість різних булєвих функцій від n змінних дорівнює 2^{2^n}.

Використовуючи результати **§** 5, можна отримати таку теорему.

Теорема про зображення булєвої функції.

Нехай $\Im(x_1,...,x_n)$ - булєва функція. Якщо $\Im\neq 0$, то існує формула від змінних $x_1,...,x_n$, які знаходяться в ДДНФ та виражає функцію $\Im$. Якщо $\Im\neq 1$, то існує формула від $x_1,...,x_n$ в ДКНФ, яка виражає $\Im$. Відповідна формула визначається однозначно з точністю до перестановки складових (множників) Наприклад, для функції (01011001) це відповідно

$$\bar{x}_1\bar{x}_2x_3\vee\bar{x}_1x_2x_3\vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3\vee x_1x_2x_3$$

і $$(x_1\vee x_2\vee x_3)(x_1\vee\bar{x}_2\vee x_3)(\bar{x}_1\vee x_2\vee\bar{x}_3)(\bar{x}_1\vee\bar{x}_2\vee x_3).$$

Очевидно, є тільки 4 булєві функції від однієї змінної: тотожні 0 та 1 (їм відповідають кортежі (0 0) та (1 1) відповідно, функція $\mathbf{x}$ (тобто (0 1)) і функція $\bar{\mathbf{x}}$ (тобто (1 0)).

Перелічимо тепер всі 16 булєвих функцій від двох змінних.

1. (0 0 0 0) $\mapsto$ $\Im\equiv 0$ (тотожній нуль).
2. (0 0 0 1) $\mapsto$ $\Im=\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2$ (кон’юнкція).
3. (0 0 1 0) $\mapsto$ $\Im=\mathbf{x}_1\bar{\mathbf{x}}_2$.
4. (0 0 1 1) $\mapsto$ $\Im=\mathbf{x}_1$.
5. (0 1 0 0) $\mapsto$ $\Im=\bar{\mathbf{x}}_1\mathbf{x}_2$.
6. (0 1 0 1) $\mapsto$ $\Im=\mathbf{x}_2$.

7. (0 1 1 0) $\mapsto$ $\Im = \mathbf{x}_1\bar{\mathbf{x}}_2 \vee \bar{\mathbf{x}}_1\mathbf{x}_2 = \overline{\mathbf{x}_1 \leftrightarrow \mathbf{x}_2}$ (ця функція зветься сумою за модулем 2 та позначається $\mathbf{x}_1 \oplus \mathbf{x}_2$)

8. (0 1 1 1) $\mapsto$ $\Im = \mathbf{x}_1 \vee \mathbf{x}_2$ (диз'юнкція).

9. (1 0 0 0) $\mapsto$ $\Im = \bar{\mathbf{x}}_1\bar{\mathbf{x}}_2$ (ця функція зветься штрихом Шиффера та позначається $\mathbf{x}_1 \mid \mathbf{x}_2$).

10. (1 0 0 1) $\mapsto$ $\Im = \mathbf{x}_1\mathbf{x}_2 \vee \bar{\mathbf{x}}_1\bar{\mathbf{x}}_2 = \mathbf{x}_1 \leftrightarrow \mathbf{x}_2$ (еквіваленція)

11. (1 0 1 0) $\mapsto$ $\Im = \bar{\mathbf{x}}_2$.

12. (1 0 1 1) $\mapsto$ $\Im = \mathbf{x}_1 \vee \bar{\mathbf{x}}_2 = \mathbf{x}_2 \to \mathbf{x}_1$ (обернена (зворотня) імплікація).

13. (1 1 0 0) $\mapsto$ $\Im = \bar{\mathbf{x}}_1$.

14. (1 1 0 1) $\mapsto$ $\Im = \bar{\mathbf{x}}_1 \vee \mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_1 \to \mathbf{x}_2$ (імплікація).

15. (1 1 1 0) $\mapsto$ $\Im = \bar{\mathbf{x}}_1 \vee \bar{\mathbf{x}}_2$ (ця функція зветься стрілкою Пірса та позначається $\mathbf{x}_1 \downarrow \mathbf{x}_2$).

16. (1 1 1 1) $\mapsto$ $\Im \equiv 1$ (тотожна одиниця).

Система булєвих функцій $\{\Im_1;\ldots;\Im_k\}$ є повною, якщо будь-яка булава функція може бути зображена як композиція функцій даної системи.
Наприклад, система функцій $\{\wedge;\vee;\neg\}$ є повною за теоремою про зображення булєвої функції (у записі як ДКНФ, так і ДДНФ використовуються тільки ці три операції).

Оскільки $\mathbf{x}_1 \vee \mathbf{x}_2 = \overline{\bar{\mathbf{x}}_1 \wedge \bar{\mathbf{x}}_2}$; $\mathbf{x}_1 \wedge \mathbf{x}_2 = \overline{\bar{\mathbf{x}}_1 \vee \bar{\mathbf{x}}_2}$, то системи $\{\wedge;\neg\}$ та $\{\vee;\neg\}$ також є повними.

Легко побачити, що система $\{\wedge;\vee\}$ не є повною (використовуючи тільки операції кон'юнкції та диз'юнкції неможливо отримати інверсію.

Стандартним прикладом повної системи є так звана система Жегалкіна $\{1;\vee;\oplus\}$. Дійсно, $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{x} \oplus 1$а система $\{\neg;\wedge\}$ є повною.
Існують тільки дві повні системи, що складаються з однієї функції двох змінних. Це $\{\,|\,\}$ і $\{\downarrow\}$. Дійсно, $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{x} \mid \mathbf{x}$; $\mathbf{x}_1 \vee \mathbf{x}_2 = \overline{\mathbf{x}_1 \mid \mathbf{x}_2} = (\mathbf{x}_1 \mid \mathbf{x}_2) \mid (\mathbf{x}_1 \mid \mathbf{x}_2)$, а система $\{\neg;\vee\}$ є повною.

Аналогічно, $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{x} \downarrow \mathbf{x}$; $\mathbf{x}_1 \wedge \mathbf{x}_2 = \overline{\mathbf{x}_1 \downarrow \mathbf{x}_2} = (\mathbf{x}_1 \downarrow \mathbf{x}_2) \downarrow (\mathbf{x}_1 \downarrow \mathbf{x}_2)$, а система $\{\neg;\wedge\}$ є повною. Таким чином, будь-яку булаву функцію двох змінних можна зобразити за допомогою однієї операції ($\mid$ або $\downarrow$), але відповідна формула може бути досить громіздкою.

§ 8. Мінімізація нормальних форм.

Вже відмічалося (див. § 5), що формула може мати кілька ДНФ (КНФ). Важливою є задача побудови нормальної форми, яка містить найменшу кількість літералів. Така форма зветься мінімальною.

Будемо розглядати тільки мінімізацію ДНФ (мінімізація КНФ виконується аналогічно).

Для мінімізації ДНФ можливо застосувати операції поглинання, склеювання та узагальненого склеювання (див. § 3). Наприклад,

$\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2\mathbf{x}_3 \vee \mathbf{x}_1\mathbf{x}_2\bar{\mathbf{x}}_3 \vee \bar{\mathbf{x}}_1\bar{\mathbf{x}}_2\mathbf{x}_3 \vee \bar{\mathbf{x}}_1\bar{\mathbf{x}}_2\bar{\mathbf{x}}_3 = \mathbf{x}_1\mathbf{x}_2 \vee \bar{\mathbf{x}}_1\bar{\mathbf{x}}_2$;

$\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2 \vee \mathbf{x}_1\mathbf{x}_3 \vee \bar{\mathbf{x}}_2\bar{\mathbf{x}}_3 = \mathbf{x}_1\mathbf{x}_2 \vee \bar{\mathbf{x}}_2\bar{\mathbf{x}}_3 \vee \mathbf{x}_1\bar{\mathbf{x}}_3 \vee \mathbf{x}_1\mathbf{x}_3 = \mathbf{x}_1\mathbf{x}_2 \vee \bar{\mathbf{x}}_2\bar{\mathbf{x}}_3 \vee \mathbf{x}_1 =$
$= \mathbf{x}_1 \vee \bar{\mathbf{x}}_2\bar{\mathbf{x}}_3$

(в останньому прикладі була виконана операція узагальненого склеювання «у зворотному порядку», тобто $\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2 \vee \bar{\mathbf{x}}_2\bar{\mathbf{x}}_3 = \mathbf{x}_1\mathbf{x}_2 \vee \bar{\mathbf{x}}_2\bar{\mathbf{x}}_3 \vee \mathbf{x}_1\bar{\mathbf{x}}_3$, потім – операція склеювання: $\mathbf{x}_1\bar{\mathbf{x}}_3 \vee \mathbf{x}_1\mathbf{x}_3 = \mathbf{x}_1$, а потім – поглинання: $\mathbf{x}_1 \vee \mathbf{x}_1\mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_1$).

Існує кілька способів мінімізації нормальних форм. Розглянемо один з них, що є ефективним для мінімізації формули від формули від $n \le 4$ змінних, так званий метод Карно.

Нехай формула логіки висловлювань від n змінних приведена до ДДНФ. Картою Карно є матриця з 2^n клітинами розмірності $2^k \times 2^l$ $(n = k + l)$ у якій кожен рядок однозначно відповідає деякій елементарній кон'юнкції перших k змінних, а кожний стовпчик – елементарній кон'юнкції решти l змінних, таким чином, що сусідні елементи в кожному рядку та в кожному стовпчику відрізняються лише одним літералом. Кожна клітина однозначнпрямокутник розмірностю о відповідає деякій повній елементарній кон'юнкції. Кожній елементарній кон'юнкції відповідає $2^i \times 2^j$ $(0 \le i \le k;\ 0 \le j \le l)$.

На карті Карно формули відмічаються всі елементарні кон'юнкції, зщо є складовими ДДНФ.

Очевидно, тавтології відповідає цілком заповнена карта Карно, тотожно хибній формулі – пуста.

Найпростіший вигляд має карта Карно для $(n = 2\ (k = 1;\ l = 1)$. На зображеній карті Карно відмітимо формулу $\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2 \vee \bar{\mathbf{x}}_1\bar{\mathbf{x}}_2$:

	x_2	$\bar{x}_2$
x_1	×	
$\bar{x}_1$		×

На наступній карті Карно відмітимо формулу $\bar{\mathbf{x}}_1$:

	x_2	$\bar{x}_2$
x_1		
$\bar{x}_1$	×	×

В останньому випадку замість приведення до ДДНФ можна просто відмітити всі клітини, які містять літерал $\bar{\mathbf{x}}_1$. Зобразимо карту Карно для $(n=3\ \ (k=1;\ l=2)$. На карті відмітимо формулу $\mathbf{x}_1 \vee \bar{\mathbf{x}}_2\mathbf{x}_3$:

	x_2x_3	$x_2\bar{x}_3$	$\bar{x}_2\bar{x}_3$	$\bar{x}_2x_3$
x_1	X	X	X	X
$\bar{x}_1$				X

На наступній карті відмітимо $\bar{\mathbf{x}}_3$

	x_2x_3	$x_2\bar{x}_3$	$\bar{x}_2\bar{x}_3$	$\bar{x}_2x_3$
x_1		X	X	
$\bar{x}_1$		X	X	

Якщо $n=3$, то будемо вважати сусідніми перший та четвертий стовпчики (бо елементи в них відрізняються тільки одним літералом; можна уявити, що вони приклеєні один до одного, і розглядається карта на циліндрі).

Карта Карно для $n=4\ (k=2;\ l=2)$ має такий вигляд (зображено формулу ($x_1\bar{x}_2 \vee x_3\bar{x}_4 \vee \bar{x}_1x_2x_3$).

	x_3x_4	$x_3\bar{x}_4$	$\bar{x}_3\bar{x}_4$	$\bar{x}_3x_4$
x_1x_2	X			
$x_1\bar{x}_2$	X	X	X	X
$\bar{x}_1\bar{x}_2$	X			
$\bar{x}_1x_2$	X	X		

Якщо $n=4$, то вважаємо сусідніми не тільки перший і четвертий стовпчики, але й перший і четвертий рядки (бо в них елементи відрізняються тільки одним літералом; можна увити, що основи циліндра приклеєні одна до одній, і розглядати карту на торі.

Наприклад, прямокутник

	x_3x_4	$x_3\bar{x}_4$	$\bar{x}_3\bar{x}_4$	$\bar{x}_3x_4$
x_1x_2	X			X
$x_1\bar{x}_2$				
$\bar{x}_1\bar{x}_2$				
$\bar{x}_1x_2$	X			X

Відповідає елементарній кон’юнкції x_2x_4

Метод Карно.

1. Скласти карту Карно формули.
2. Покрити відповідні клітини прямокутниками максимальних розмірів ($2^i \times 2^j$) так, щоб їх кількість була найменшою.
3. Диз’юнкція елементарних кон’юнкцій, що відповідають прямокутникам покриття, є шуканою мінімальною ДНФ.

Приклад 1.

Нехай $F = x_1x_2 \vee \overline{x}_1x_2 \vee \overline{x}_1\overline{x}_2$.

	x_2	$\overline{x}_2$
x_1	X	
$\overline{x}_1$	X	X

Після мінімізації: $F = \overline{x}_1 \vee x_2$

Приклад 2.

Нехай $F = x_1x_2 \vee \overline{x}_1x_3 \vee x_2x_3$.

	x_2x_3	$x_2\overline{x}_3$	$\overline{x}_2\overline{x}_3$	$\overline{x}_2x_3$
x_1	X	X		
$\overline{x}_1$	X			X

Після мінімізації: $F = x_1x_2 \vee \overline{x}_1x_3$ (маємо ще один спосіб обґрунтування операції узагальненого склеювання).

Приклад 3.

Нехай $F = x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee \overline{x}_2\overline{x}_3$.

	x_2x_3	$x_2\overline{x}_3$	$\overline{x}_2\overline{x}_3$	$\overline{x}_2x_3$
x_1	X	X	X	X
$\overline{x}_1$			X	

Після мінімізації: $F = x_1 \vee \overline{x}_2\overline{x}_3$ (цей приклад також вже був розглянутий)

Приклад 4.

Нехай $F = x_1x_2\overline{x}_3 \vee x_1\overline{x}_2\overline{x}_3 \vee x_1\overline{x}_2\overline{x}_3 \vee x_1\overline{x}_2x_3$.

	x_2x_3	$x_2\overline{x}_3$	$\overline{x}_2\overline{x}_3$	$\overline{x}_2x_3$
x_1		X	X	X
$\overline{x}_1$			X	

Після мінімізації $F = x_1\overline{x}_3 \vee x_1\overline{x}_2 \vee \overline{x}_2\overline{x}_3$

Приклад 5.

Нехай $F = x_1x_2\overline{x}_3x_4 \vee x_1\overline{x}_2x_3\overline{x}_4 \vee \overline{x}_1\overline{x}_2x_3x_4 \vee \overline{x}_1x_2\overline{x}_3\overline{x}_4 \vee \overline{x}_1x_2x_3\overline{x}_4 \vee \overline{x}_1x_2x_3x_4$.

	x_3x_4	$x_3\overline{x}_4$	$\overline{x}_3\overline{x}_4$	$\overline{x}_3x_4$
x_1x_2				X
$x_1\overline{x}_2$		X		
$\overline{x}_1\overline{x}_2$	X			
$\overline{x}_1x_2$	X	X	X	

Після мінімізації $F = x_1x_2\overline{x}_3x_4 \vee \overline{x}_1x_3x_4 \vee \overline{x}_1x_2x_3 \vee \overline{x}_1x_2\overline{x}_4 \vee x_1\overline{x}_2x_3\overline{x}_4 \vee x_1x_2\overline{x}_3x_4$.

Приклад 6.

Нехай

$$F = x_1x_2\overline{x}_3x_4 \vee x_1x_2x_3x_4 \vee x_1x_2x_3\overline{x}_4 \vee x_1x_2\overline{x}_3x_4 \vee x_1\overline{x}_2x_3x_4 \vee x_1\overline{x}_2x_3\overline{x}_4 \vee$$
$$\vee x_1\overline{x}_2\overline{x}_3x_4 \vee \overline{x}_1x_2x_3\overline{x}_4.$$

	x_3x_4	$x_3\overline{x}_4$	$\overline{x}_3\overline{x}_4$	$\overline{x}_3x_4$
x_1x_2	X	X		X
$x_1\overline{x}_2$	X	X		X
$\overline{x}_1\overline{x}_2$				
$\overline{x}_1x_2$		X		

Після мінімізації $F = x_1x_3 \vee x_1x_4 \vee x_2x_3\overline{x}_4$.

Відмітимо, що метод Карно можливо застосовувати і для мінімізації формул з 5-а та 6-а змінними, але відповідні карти Карно матимуть дуже громіздкий вигляд.

Зауважимо також, що інколи формула може мати декілька мінімальних ДНФ. Наприклад, Нехай $F = x_1x_2x_3 \vee x_1x_2\overline{x}_3 \vee x_1\overline{x}_2\overline{x}_3 \vee \overline{x}_1x_2x_3 \vee \overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3$

	x_2x_3	$x_2\overline{x}_3$	$\overline{x}_2\overline{x}_3$	$\overline{x}_2x_3$
x_1	X	X	X	
$\overline{x}_1$	X		X	

	x_2x_3	$x_2\overline{x}_3$	$\overline{x}_2\overline{x}_3$	$\overline{x}_2x_3$
x_1	X	X	X	
$\overline{x}_1$	X		X	

Утворюючи покриття двома способами маємо дві мінімальні ДНФ:

$$F_1 = x_2x_3 \vee x_2\overline{x}_3 \vee \overline{x}_2\overline{x}_3;$$

$$F_2 = x_2x_3 \vee x_1x_2 \vee \overline{x}_2\overline{x}_3$$

§ 9. Релейно-контактні схеми.

Розглянемо найпростіші застосування логіки висловлювань до проектування та аналізу дискретних технічних пристроїв.
Релейно-контактною схемою будемо звати схематичне зображення технічного пристрою, що складається з:

а) контактів (це можуть бути реле, вимикачі, кнопки тощо;

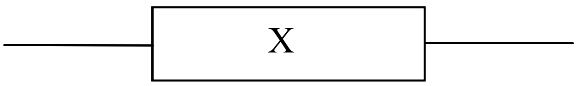
б) провідників, що з'єднують контакти;

в) входів у схему та виходів з неї (полюси схеми).

Решта (резистори, конденсатори тощо) не зображується. Кожний контакт може знаходитися в одному з двох станів (замкнутий або вимкнутий).

Найпростіша релейно-контактна схема (далі РКС) містить один вхід, один вихід та один контакт. Контакту X ставиться у відповідність висловлювання «X замкнутий». Схема проводить струм, коли це висловлювання істинне, та не проводить, коли воно хибне.

Кожному висловлюванню X відповідає найпростіша РКС:

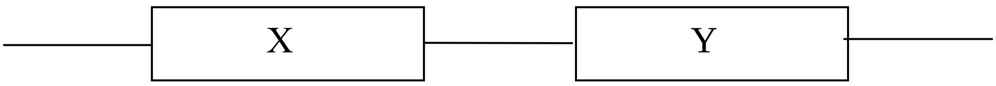


Контактом $\overline{X}$, інверсним до X, є контакт який є замкнутим, якщо X вимкнутий, та вимкнутим, якщо X замкнутий. Контакти, які завжди знаходяться у одному стані, позначаються однією літерою.

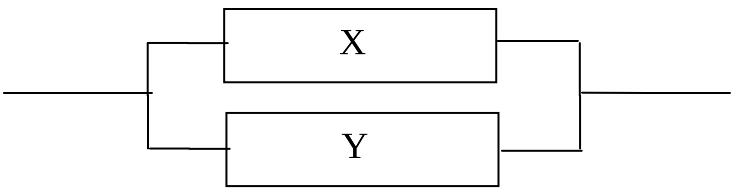
Очевидно, контакт, інверсний до X, відповідає інверсії (запереченню) висловлювання X.

Побудуємо схему, яка відповідає операції кон'юнкції простих висловлювань ( ).

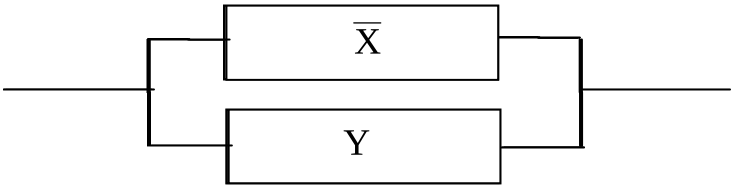
Очевидно, вона повинна проводити струм, коли обидва контакти, X і Y, є замкнутими, і тільки тоді. Для цього контакти треба з'єднати послідовно:



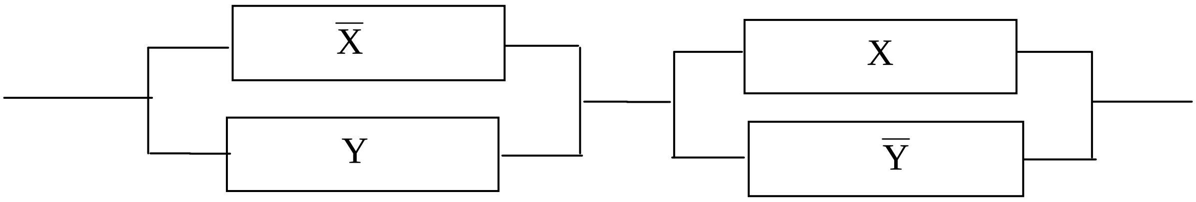
Побудуємо схему, яка відповідає диз'юнкції ($X \vee Y$) Вона проводить струм тільки коли хоча б один з контактів є замкнутим. Це реалізується паралельним з'єднанням контактів:



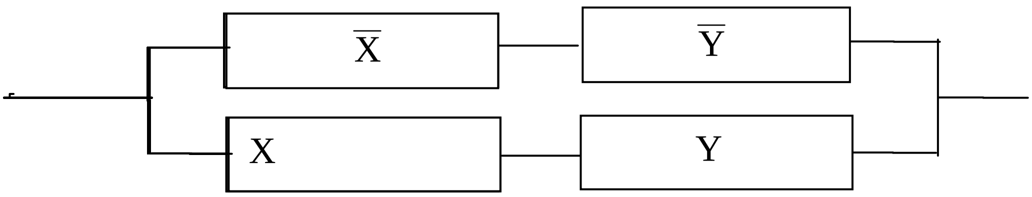
Оскільки $X \to Y = \overline{X} \vee Y$, операцію імплікації можна реалізувати таким чином:



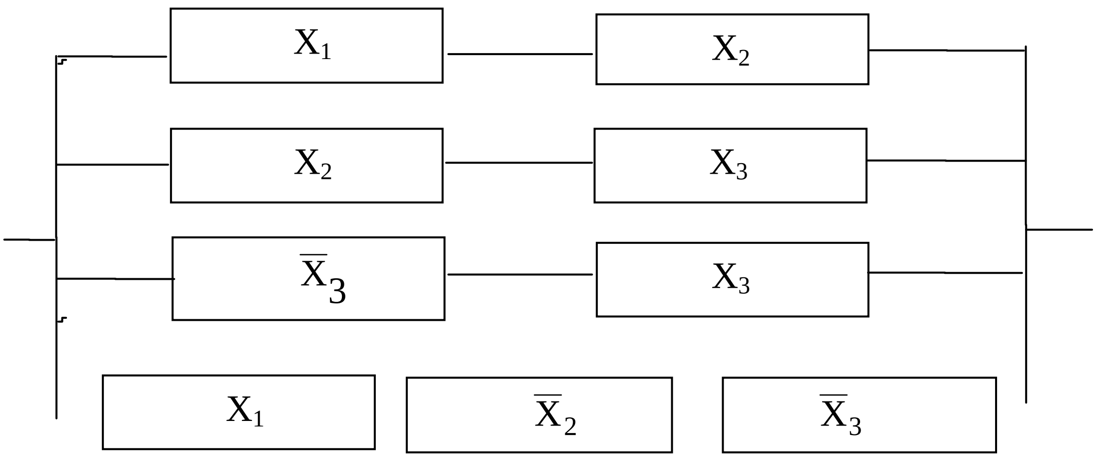
Завдяки тому, що $X \leftrightarrow Y = (\overline{X} \vee Y)(X \vee \overline{Y}) = \overline{X}\overline{Y} \vee XY$, операцію еквіваленції можна реалізувати одним з двох способів:



або



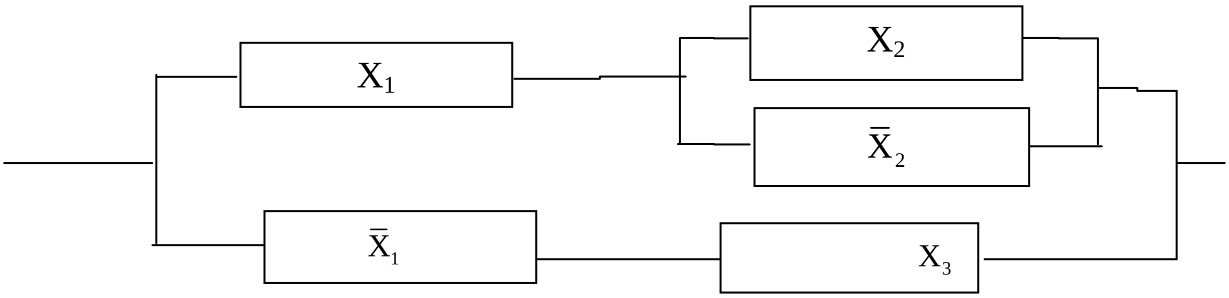
Наприклад, формулі $\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2 \vee \mathbf{x}_2\mathbf{x}_3 \vee \overline{\mathbf{x}}_1\mathbf{x}_3 \vee \mathbf{x}_1\overline{\mathbf{x}}_2\overline{\mathbf{x}}_3$ відповідає схема



Ця схема містить 9 контактів, але ми можемо спростити формулу:

$$\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2 \vee \mathbf{X}_2\mathbf{X}_3 \vee \overline{\mathbf{X}}_1\mathbf{X}_3 \vee \mathbf{X}_1\overline{\mathbf{X}}_2\overline{\mathbf{X}}_3 =$$
$$= \mathbf{X}_1\mathbf{X}_2 \vee \overline{\mathbf{X}}_2\mathbf{X}_3 \vee \mathbf{X}_1\overline{\mathbf{X}}_2\overline{\mathbf{X}}_3 = \mathbf{X}_1(\mathbf{X}_2 \vee \overline{\mathbf{X}}_2\overline{\mathbf{X}}_3) \vee \overline{\mathbf{X}}_1\mathbf{X}_3 =$$
$$= \mathbf{X}_1(\mathbf{X}_2 \vee \overline{\mathbf{X}}_2)(\mathbf{X}_2 \vee \overline{\mathbf{X}}_3) \vee \overline{\mathbf{X}}_1\mathbf{X}_3 = \mathbf{X}_1(\mathbf{X}_2 \vee \overline{\mathbf{X}}_3) \vee \overline{\mathbf{X}}_1\mathbf{X}_3.$$

Відповідна схема (очевидно, еквівалентна вихідній) матиме вигляд:
Ця схема містить вже тільки 5 контактів.



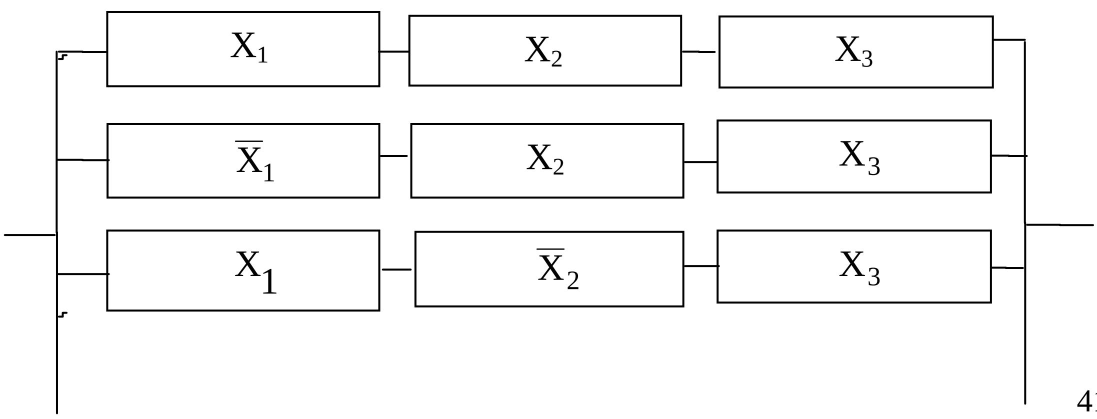
Задачею мінімізації РКС є задача побудови РКС, що еквівалентна даній (тобто відповідає рівносильній формулі) і містить найбільшу кількість контактів. Це можна зробити, мінімізуючи відповідну ДНФ (шляхом алгебраїчних перетворень або за допомогою карт Карно) та використовуючи закони дистрибутивності $(\mathbf{AB} \vee \mathbf{AC} = \mathbf{A}(\mathbf{B} \vee \mathbf{C}))$.

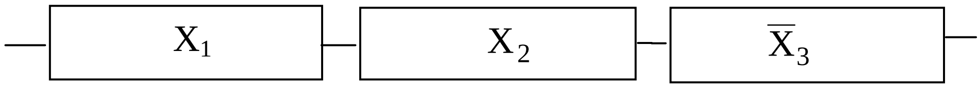
Як приклад, розглянемо так звану «задачу про комітет». Нехай комітет у складі трьох членів приймає деяке рішення більшістю голосів. Кожний член комітету натискує на кнопку, якщо голосує «за і не натискує, якщо «проте». Рішення прийняте(схема проводить струм, і лампочка загоряється), якщо натиснуто не менше ніж дві кнопки. Треба побудувати оптимальну (тобто з мінімальною кількістю контактів) РКС, що реалізує цю процедуру.

Якщо висловлювання $\mathbf{X_k}$ розуміти як «$\mathbf{k}$-й член комітету голосує за» ($\mathbf{k} = 1;\ 2;\ 3$), то відповідна формула має вигляд

$$X_1X_2X_3 \vee \overline{X}_1X_2X_3 \vee X_1\overline{X}_2X_3 \vee X_1X_2\overline{X}_3,$$

а відповідна схема





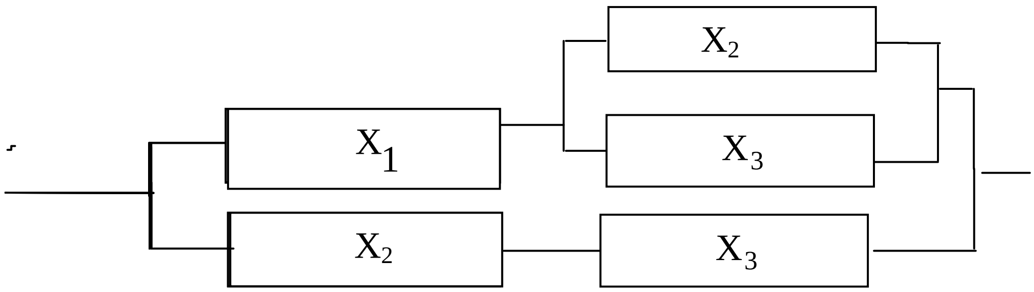
містить 12 контактів. Якщо цю ДНФ мінімізувати,

$$\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2 \vee \mathbf{X}_2\mathbf{X}_3 \vee \mathbf{X}_1\mathbf{X}_3 .$$

Завдяки властивості дистрибутивності, маємо

$\mathbf{X}_1(\mathbf{X}_2 \vee \mathbf{X}_3) \vee \mathbf{X}_2\mathbf{X}_3$ (або $\mathbf{X}_2(\mathbf{X}_1 \vee \mathbf{X}_3) \vee \mathbf{X}_1\mathbf{X}_3$, або $\mathbf{X}_3(\mathbf{X}_1 \vee \mathbf{X}_2) \vee \mathbf{X}_1\mathbf{X}_2$).

Відповідна схема:



має вже тільки 5 контактів. Вона вже буде оптимальною.

§ 10. Елементи логіки предикатів.

Логіка предикатів є узагальненням логіки висловлювань. Деякі твердження, що мають форму висловлювань, насправді не є висловлюваннями, бо містять змінні, конкретні значення яких не вказані. Оскільки таке твердження при одних значеннях змінних є істинним, а при інших – хибним, то йому не відповідає конкретне значення істинності. Наприклад, твердження «х – парне число» істинне, якщо $\mathbf{x} = 4$, та хибне, якщо х=3.

Предикатом є твердження, що містить предметні змінні, визначені на відповідних множинах. При заміні предметних змінних конкретними значеннями (елементами множин) твердження стає висловлюванням, тобто набуває значення «І» (1) або «Х» (0). Предикат, що містить n змінних, зветься n-місцевим предикатом та позначається $\mathbf{P}(\mathbf{X}_1;\mathbf{X}_2;...;\mathbf{X}_n)$.

Вираз $\mathbf{P}(\mathbf{a}_1;\mathbf{a}_2;...;\mathbf{a}_n)$ можна розуміти як висловлювання «$\mathbf{P}(\mathbf{a}_1;\mathbf{a}_2;...;\mathbf{a}_n)$ істинне» або «$\mathbf{M}_1\times...\times\mathbf{M}_n$ =1». Тоді n-місцевий предикат $\mathbf{P}(\mathbf{X}_1;\mathbf{X}_2;...;\mathbf{X}_n)$ можна розглядати як функцію $\mathbf{P}:\mathbf{M}_1\times...\times\mathbf{M}_n \to \{0;1\}$, де $\mathbf{M}_k$ – k-та предметна область (область визначення змінної $\mathbf{x}_k$). Область істинності предиката – це множина тих елементів області визначення, на яких він набуває значення 1 (тобто повний прообраз одиниці).

Очевидно, кожний n-місцевий предикат $\mathbf{P}(\mathbf{X}_1;\mathbf{X}_2;...;\mathbf{X}_n)$ визначає n-арне відношення на множинах $\mathbf{M}_1;...;\mathbf{M}_n$, а само: кортеж $(a_1;a_2;...;a_n)$ належить цьому відношенню тоді і тільки тоді, коли $P(a_1;a_2;...;a_n)$ =1.

Над предикатами можна здійснювати ті же логічні операції, що й над висловлюваннями. Очевидно, область істинності кон'юнкції предикатів є перерізом їх областей істинності, диз'юнкції – об'єднанням. Область істинності інверсії предикату є доповненням його області істинності.

Наприклад, якщо $\mathbf{P}_1(\mathbf{x})$, $\mathbf{P}_2(\mathbf{x})$ - одно місцеві предикати на множині натуральних чисел, $\mathbf{P}_1(\mathbf{x})$: «$\mathbf{x}\vdots 2$»(ділиться на 2); $\mathbf{P}_2(\mathbf{x})$: «$\mathbf{x}\vdots 3$», то предикат $\mathbf{P}_1(\mathbf{x}) \wedge \mathbf{P}_2(\mathbf{x})$ означає:

«ділиться на 2 і на 3», тобто «$x \vdots 6$»;

$\mathbf{P}_1(\mathbf{x}) \vee \mathbf{P}_2(\mathbf{x})$: «$\mathbf{x}$ ділиться на 2 або на 3»;

$\overline{\mathbf{P}}_2(\mathbf{x})$: «$\mathbf{x}$ не ділиться на 3»;

$\mathbf{P}_1(\mathbf{x}) \to \mathbf{P}_2(\mathbf{x})$: «якщо $\mathbf{x}$ ділиться на 2, то $\mathbf{x}$ ділиться на 3» (або, що еквівалентно, «$\mathbf{x}$ ділиться на 2 або ділиться на 3»).

Крім стандартних логічних операцій, над предикатами можна здійснювати так звані операції квантифікації. Нехай $\mathbf{P}(\mathbf{x})$ – предикат, визначений на множині $\mathbf{M}$. Висловлювання «існує такий елемент $\mathbf{x} \in \mathbf{M}$, що $\mathbf{P}(\mathbf{x})$ істинне» позначається $\exists \mathbf{x} \mathbf{P}(\mathbf{x})$; знак $\exists$ називається квантором існування.

Висловлювання «для кожного $\mathbf{x} \in \mathbf{M}$ $\mathbf{P}(\mathbf{x})$ істинне» позначається $\forall \mathbf{x} \mathbf{P}(\mathbf{x})$; знак $\forall$ називається квантором спільності. Перехід від $\mathbf{P}(\mathbf{x})$ до $\exists \mathbf{x} \mathbf{P}(\mathbf{x})$ або $\forall \mathbf{x} \mathbf{P}(\mathbf{x})$ зветься зв'язування змінної $\mathbf{x}$ (або її квантифікацією). Квантифікована змінна називається *зв'язною*. Незв'язана змінна називається вільною.

Відмітимо, що вирази $\forall \mathbf{x} \mathbf{P}(\mathbf{x})$, $\exists \mathbf{x} \mathbf{P}(\mathbf{x})$ не залежать від $\mathbf{x}$ і є висловлюваннями.

Наприклад, якщо $\mathbf{M} = \mathbf{N}$ (множина натуральних чисел); $\mathbf{P}(\mathbf{x})$: «$\mathbf{x} < 2$», то висловлювання $\forall \mathbf{x} \mathbf{P}(\mathbf{x})$ є хибним, а $\exists \mathbf{x} \mathbf{P}(\mathbf{x})$ – істинним.

Дамо означення формули логіки предикатів:

– якщо $\mathbf{A}$ – символ предикату, $\mathbf{x}_{\mathbf{i}_1}, ..., \mathbf{x}_{\mathbf{i}_k}$ – символи предметних змінних (не обов'язково різні), то $\mathbf{A}(\mathbf{x}_{\mathbf{i}_1}, ..., \mathbf{x}_{\mathbf{i}_t})$ – формула (така формула називається атомарною, всі її змінні вільні):

– якщо $\mathbf{A}$ – формула, то $\overline{\mathbf{A}}$ – формула (вільні і зв'язані змінні в $\overline{\mathbf{A}}$ – ті ж, що і в $\mathbf{A}$);

– якщо $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ – формули (немає змінних, що є вільними в одній з формул і зв'язаними в іншій), то $\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}$; $\mathbf{A} \vee \mathbf{B}$; $\mathbf{A} \to \mathbf{B}$: $\mathbf{A} \leftrightarrow \mathbf{B}$ – також формула (вільні змінні формул $\mathbf{A}$ і $\mathbf{B}$ залишаються вільними, зв'язані – зв'язаними);

– якщо $\mathbf{A}$ – формула, що має вільну змінну $\mathbf{x}$, то $\forall \mathbf{x} \mathbf{P}(\mathbf{x})$ та $\exists \mathbf{x} \mathbf{P}(\mathbf{x})$ – теж формули, в яких змінна $\mathbf{x}$ стає зв'язаною (для решти змінних: зв'язані змінні залишаються зв'язаними, вільні – вільними; формула $\mathbf{A}$ називається областю дії квантора);

– формулою є тільки вираз, утворений за допомогою попередніх пунктів.

Відмітимо, що ніяка змінна не може бути в один і той же час вільною і зв'язаною в формулі.

Наприклад, в формулі $\mathbf{A}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3)$ всі три змінні є вільними. В формулі
$\forall \mathbf{x} \exists \mathbf{y} \mathbf{A}_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})) \to (\forall \mathbf{x} \mathbf{A}_2(\mathbf{x}, \mathbf{t}))$ змінні $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ є зв'язаними, $\mathbf{z}, \mathbf{t}$ – вільними.

Вираз $\forall \mathbf{x} \exists \mathbf{y} \mathbf{P}(\mathbf{x}, \mathbf{z})) \wedge \mathbf{Q}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ не є формулою, бо в першому кон'юнктивному члені змінна $\mathbf{x}$ є зв'язаною, а у другому – вільною.

Кажуть, що задано інтерпретацію формули, якщо вказано множину, якій належать змінні, та кожному предикативному символу поставлено у відповідність деякий предикат.

Наприклад, нехай $\mathbf{M} = \mathbf{N}$; $\mathbf{A}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$: «$\mathbf{x} \le \mathbf{y}$» . Тоді для формули $\mathbf{A}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ область істинності - це множина всіх пар натуральних чисел $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, таких, що $\mathbf{x} \le \mathbf{y}$: $\{(\mathbf{x}; \mathbf{y}) \mid \mathbf{x} \in IN;\ y \in IN;\ x \le y\}$.

Для формули $\forall \mathbf{y} \quad \mathbf{A}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ яка вже є одномісцевим предикатом, областю істинності є множина $\{1\}$.

Формула $\exists \mathbf{x}\ \forall \mathbf{y} \quad \mathbf{A}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ є істинними висловлюванням, а формула $\forall \mathbf{x}\ \forall \mathbf{y} \quad \mathbf{A}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ є хибним висловлюванням.

Формула $\mathbf{A}$ називається *істинною* в даній інтерпретації, якщо вона приймає значення 1 на будь-якому наборі значень вільних змінних.

Формула $\mathbf{A}$ називається *виконаною*, якщо вона виконана в деякій інтерпретації, та загально значимою, якщо вона істинна в будь-якій інтерпретації.

Очевидно, формула $\mathbf{A}$ є загально значимою тоді і тільки тоді, коли $\overline{\mathbf{A}}$ не є виконаною, а $\mathbf{A}$ є виконаною тоді і тільки тоді, коли $\overline{\mathbf{A}}$ не є загально значимою.

Легко побачити, що загально значимими є формули:

$\forall \mathbf{x}\ (\mathbf{A}(\mathbf{x}) \vee \overline{\mathbf{A}}(\mathbf{x}))$;

$(\forall \mathbf{x}\ (\mathbf{A}(\mathbf{x})) \to \mathbf{A}(\mathbf{y})$;

$(\mathbf{A}(\mathbf{y}) \to (\exists \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x}))$;

$\forall \mathbf{x}\ \forall \mathbf{y}\ (\mathbf{A}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \to (\exists \mathbf{y}\ \exists \mathbf{x} \quad \mathbf{A}(\mathbf{x}, \mathbf{y}))$;

$\exists \mathbf{x}\ \forall \mathbf{y}\ (\mathbf{A}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \to (\forall \mathbf{y}\ \exists \mathbf{x} \quad \mathbf{A}(\mathbf{x}, \mathbf{y}))$.

Відмітимо, що формула

$\forall \mathbf{y}\ \exists \mathbf{x}\ (\mathbf{A}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \to (\exists \mathbf{x}\ \forall \mathbf{y} \quad \mathbf{A}(\mathbf{x}, \mathbf{y}))$ не є загально значимою.

Наприклад, якщо $\mathbf{M} = IN$; $\mathbf{A}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$: «$\mathbf{x} > \mathbf{y}$», то висловлювання $\forall \mathbf{y}\ \exists \mathbf{x}\ (\mathbf{A}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ істинне, а $(\exists \mathbf{x}\ \forall \mathbf{y} \quad \mathbf{A}(\mathbf{x}, \mathbf{y}))$ – хибне.

Для кожної формули логіки висловлювань можливо визначити, чи є вона тавтологією (за допомогою таблиці істинності або алгебраїчних перетворень). На відміну від цього, немає алгоритму, який для кожної формули логіки предикатів дозволяв би визначати, чи є вона загально значимою.

§ 11. Рівносильність формул логіки предикатів. Попередня форма.

Формули $\mathbf{F}_1$ і $\mathbf{F}_2$ логіки предикатів називаються рівносильними, якщо вони приймають однакові значення на будь-якому наборі значень вільних змінних. Цей факт позначається $\mathbf{F}_1 \sim \mathbf{F}_2$.

Очевидно, $\mathbf{F}_1 \sim \mathbf{F}_2$ тоді і тільки тоді, коли формула $\mathbf{F}_1 \leftrightarrow \mathbf{F}_2$ є загально значимою.

На відміну від логіки висловлювань, перевірка рівносильності формул прямим перебором всіх значень змінних може виявитися неможливою (якщо змінні належать нескінченій множині). Тому в логіці предикатів застосовуються правила рівносильних перетворень. Крім всіх рівносильностей логіки висловлювань, це ще й співвідношення, що містять квантори.

Перелічимо основні рівносильності з кванторами (далі під Y розуміємо формулу, що не мстять змінної $\mathbf{x}$):

1. $\overline{\exists \mathbf{x}\, \mathbf{P}(\mathbf{x})} \sim \forall \mathbf{x}\, \overline{\mathbf{P}}(\mathbf{x})$;
2. $\overline{\forall \mathbf{x}\, \mathbf{P}(\mathbf{x})} \sim \forall \mathbf{x}\, \overline{\mathbf{P}}(\mathbf{x})$;
3. $\forall \mathbf{x}\, (\mathbf{P}_1(\mathbf{x}) \wedge \mathbf{P}_2(\mathbf{x})) \sim (\forall \mathbf{x}\, \mathbf{P}_1(\mathbf{x})) \wedge (\forall \mathbf{x}\, \mathbf{P}_2(\mathbf{x}))$;
4. $\exists \mathbf{x}\, (\mathbf{P}_1(\mathbf{x}) \wedge \mathbf{P}_2(\mathbf{x})) \sim (\exists \mathbf{x}\, \mathbf{P}_1(\mathbf{x})) \wedge (\exists \mathbf{x}\, \mathbf{P}_2(\mathbf{x}))$;
5. $\forall \mathbf{x} \forall \mathbf{y}\, \mathbf{P}(\mathbf{x},\mathbf{y}) \sim \forall \mathbf{y} \forall \mathbf{x}\, \mathbf{P}(\mathbf{x},\mathbf{y})$;
6. $\exists \mathbf{x} \exists \mathbf{y}\, \mathbf{P}(\mathbf{x},\mathbf{y}) \sim \exists \mathbf{y} \exists \mathbf{x}\, \mathbf{P}(\mathbf{x},\mathbf{y})$;
7. $\forall \mathbf{x}\, (\mathbf{P}(\mathbf{x}) \wedge \mathbf{y}) \sim \forall \mathbf{x}\, \mathbf{P}(\mathbf{x})) \wedge \mathbf{y}$;
8. $\forall \mathbf{x}\, (\mathbf{P}(\mathbf{x}) \vee \mathbf{y}) \sim \forall \mathbf{x}\, \mathbf{P}(\mathbf{x})) \vee \mathbf{y}$;
9. $\exists \mathbf{x}\, (\mathbf{P}(\mathbf{x}) \wedge \mathbf{y}) \sim \exists \mathbf{x}\, \mathbf{P}(\mathbf{x})) \wedge \mathbf{y}$;
10. $\exists \mathbf{x}\, (\mathbf{P}(\mathbf{x}) \vee \mathbf{y}) \sim \exists \mathbf{x}\, \mathbf{P}(\mathbf{x})) \vee \mathbf{y}$.

Правила 1-2 дозволяють будувати заперечення формул з кванторами. Наприклад, $\forall \mathbf{x} \exists \mathbf{y}\, (\mathbf{P}(\mathbf{x}) \wedge \mathbf{Q}(\mathbf{x},\mathbf{y})) \sim \exists \mathbf{x} \forall \mathbf{y}\, (\overline{\mathbf{P}}(\mathbf{x}) \vee \overline{\mathbf{Q}}(\mathbf{x},\mathbf{y}))$.

Правила 3-4 виражають закони дистрибутивності квантора спільності $\forall$ відносно кон'юнкції $\wedge$ та квантора існування $\exists$ відносно диз'юнкції $\vee$. Якщо в цих правилах поміняти місцями квантори $\exists$ і $\forall$, то отримаємо співвідношення, які вірні тільки в один бік:

$$(\exists \mathbf{x}\, (\mathbf{P}_1(\mathbf{x}) \wedge \mathbf{P}_2(\mathbf{x}))) \to (\exists \mathbf{x}\, \mathbf{P}_1(\mathbf{x})) \wedge (\exists \mathbf{x}\, \mathbf{P}_2(\mathbf{x})));$$

$$((\forall \mathbf{x}\, (\mathbf{P}_1(\mathbf{x})) \vee (\forall \mathbf{x} \mathbf{P}_2(\mathbf{x}))) \to (\forall \mathbf{x}\, (\mathbf{P}_1(\mathbf{x})) \vee (\, \mathbf{P}_2(\mathbf{x}))).$$

В таких випадках в одному з предикатів перейменують змінну на нову:

$$(\exists \mathbf{x}\, (\mathbf{P}_1(\mathbf{x})) \wedge (\exists \mathbf{y} \mathbf{P}_2(\mathbf{y}))) \sim (\exists \mathbf{x} \exists \mathbf{y} (\mathbf{P}_1(\mathbf{x}) \wedge (\, \mathbf{P}_2(\mathbf{y})));$$

$$(\forall \mathbf{x}\,(\mathbf{P}_1(\mathbf{x}))\vee(\exists \mathbf{y}\mathbf{P}_2(\mathbf{y})))\sim(\forall \mathbf{x}\forall \mathbf{y}(\mathbf{P}_1(\mathbf{x})\vee(\,\mathbf{P}_2(\mathbf{y}))).$$

Правила 5-6 свідчать про комутативність однойменних кванторів. Іншими словами, однойменні квантори можна міняти місцями, а різнойменні – не можна (наприклад, формула $\forall \mathbf{x}\exists \mathbf{y}\,\mathbf{P}(\mathbf{x},\mathbf{y})$). Правила 7-10 дозволяють виносити за границі дії квантора, що зв'язує змінну $\mathbf{x}$, формулу, яка не містить $\mathbf{x}$.

Будь-яку формулу логіки предикатів можна за допомогою рівносильних перетворень зобразити у вигляді, що зветься попередньою формою, тобто у формі $\mathbf{T}_1\mathbf{x}_1\mathbf{T}_2\mathbf{x}_2\ldots\mathbf{T}_m\mathbf{x}_m)\mathbf{P}(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\ldots,\mathbf{x}_m,\ldots,\mathbf{x}_n)$, де $\mathbf{T}_k$ є квантором $\exists$ або $\forall$ $(k=1,2,\ldots,m)$, а формула $\mathbf{P}(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\ldots,\mathbf{x}_n)$ не містить ані кванторів, ані знаків $\rightarrow, \leftrightarrow$. Наприклад,

$$(\forall \mathbf{x}\,\mathbf{P}(\mathbf{x}))\rightarrow(\forall \mathbf{x}\mathbf{Q}(\mathbf{x}))\sim\overline{\forall \mathbf{x}\,\mathbf{P}(\mathbf{x})}\vee(\forall \mathbf{x}\mathbf{Q}(\mathbf{x}))\sim$$
$$\sim(\exists \mathbf{x}\,\overline{\mathbf{P}}(\mathbf{x}))\vee(\forall \mathbf{x})\mathbf{Q}(\mathbf{x}))\sim(\exists \mathbf{x}\,\overline{\mathbf{P}}(\mathbf{x}))\vee(\forall \mathbf{y})\mathbf{Q}(\mathbf{y}))\sim(\exists \mathbf{x}\,\forall \mathbf{y}(\overline{\mathbf{P}}(\mathbf{x})\vee\mathbf{Q}(\mathbf{y})).$$

Наведемо ще два приклади приведення формули логіки предикатів до попередньої форми.

Приклад 1. Нехай на множині $\mathbf{M}=\Phi(\mathbf{A})$ (булеан множини $\mathbf{A}$) задано двох місцевий предикат $\mathbf{P}(\mathbf{x},\mathbf{y})$: «$x\subseteq y$». Треба записати твердження: «$z=x\bigcap y$» означає, що $z\subseteq x$; $z\subseteq y$ і будь-яка множина $\mathbf{H}$, що задовольняє умовам $\mathbf{H}\subseteq\mathbf{X}$; $\mathbf{H}\subseteq\mathbf{Y}$, задовольняє і умові $\mathbf{H}\subseteq\mathbf{Z}$:

$$\mathbf{P}(\mathbf{Z},\mathbf{X})\wedge\mathbf{P}(\mathbf{Z},\mathbf{Y})\wedge(\forall\mathbf{H}((\mathbf{P}(\mathbf{H},\mathbf{X})\wedge\mathbf{P}(\mathbf{H},\mathbf{Y}))\rightarrow\mathbf{P}(\mathbf{H},\mathbf{Z})))\sim$$
$$\sim\mathbf{P}(\mathbf{Z},\mathbf{X})\wedge\mathbf{P}(\mathbf{Z},\mathbf{Y})\wedge(\forall\mathbf{H}(\overline{\mathbf{P}}(\mathbf{H},\mathbf{X})\vee\overline{\mathbf{P}}(\mathbf{H},\mathbf{Y})\vee\mathbf{P}(\mathbf{H},\mathbf{Z})))\sim$$
$$\sim\forall\mathbf{H}(\mathbf{P}(\mathbf{Z},\mathbf{X})\wedge\mathbf{P}(\mathbf{Z},\mathbf{Y})\wedge(\overline{\mathbf{P}}(\mathbf{H},\mathbf{X})\vee\overline{\mathbf{P}}(\mathbf{H},\mathbf{Y})\vee\mathbf{P}(\mathbf{H},\mathbf{Z}))).$$

Приклад 2. Нехай $\mathbf{M}_\mathbf{x}$ описує множину студентів деякої групи, $\mathbf{M}_\mathbf{y}$ – множина задач контрольного іспиту. На множині $\mathbf{M}_\mathbf{x}\times\mathbf{M}_\mathbf{y}$ задано двох місцевий предикат $\mathbf{P}(\mathbf{x},\mathbf{y})$: «студент $\mathbf{x}$ розв'язав задачу $\mathbf{y}$», а на множині $\mathbf{M}_\mathbf{x}$ задано двох місцевий предикат $\mathbf{Q}(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2)$: «$\mathbf{x}_1=\mathbf{x}_2$» (якщо замість студентів указати їх номери за списком, це буде означати, що $\mathbf{x}_1=\mathbf{x}_2$). Треба записати твердження: «існує визначено один студент, який розв'язав усі задачі» мовою логіки предикатів у попередній формі.

Твердження, яке приведено вище, означає, що існує студент, який розв'язав усі задачі, а якщо таких студентів два, то вони є одними суб'єктами (тобто співпадають):

$$(\exists\mathbf{x}\,\forall\mathbf{y}(\mathbf{P}(\mathbf{x},\mathbf{y}))\wedge(\forall\mathbf{x}_1\forall\mathbf{x}_2(\forall\mathbf{y}(\mathbf{P}(\mathbf{x}_1,\mathbf{y})\wedge\mathbf{P}(\mathbf{x}_2,\mathbf{y})))\rightarrow\mathbf{Q}(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2))\sim$$
$$\sim(\exists\mathbf{x}\,\forall\mathbf{y}(\mathbf{P}(\mathbf{x},\mathbf{y}))\wedge(\overline{\forall\mathbf{x}_1\forall\mathbf{x}_2(\forall\mathbf{y}(\mathbf{P}(\mathbf{x}_1,\mathbf{y})\wedge\mathbf{P}(\mathbf{x}_2,\mathbf{y}))}\vee\mathbf{Q}(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2)))\sim$$

$$\sim (\exists \mathbf{x}\, \forall \mathbf{y}(\mathbf{P}(\mathbf{x},\mathbf{y})) \wedge (\forall \mathbf{x}_1 \forall \mathbf{x}_2 \exists \mathbf{y}(\overline{\mathbf{P}}(\mathbf{x}_1,\mathbf{y}) \vee \overline{\mathbf{P}}(\mathbf{x}_2,\mathbf{y}) \vee \mathbf{Q}(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2))) \sim$$

$$\sim (\exists \mathbf{x}\, \forall \mathbf{y}(\mathbf{P}(\mathbf{x},\mathbf{y})) \wedge (\forall \mathbf{x}_1 \forall \mathbf{x}_2 \exists \mathbf{y}_1(\overline{\mathbf{P}}(\mathbf{x}_1,\mathbf{y}_1) \vee \overline{\mathbf{P}}(\mathbf{x}_2,\mathbf{y}_1) \vee \mathbf{Q}(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2))) \sim$$

$$\sim (\exists \mathbf{x}\, \forall \mathbf{y} \forall \mathbf{x}_1 \forall \mathbf{x}_2 \exists \mathbf{y}_1(\mathbf{P}(\mathbf{x},\mathbf{y}) \wedge (\overline{\mathbf{P}}(\mathbf{x}_1,\mathbf{y}_1) \vee \overline{\mathbf{P}}(\mathbf{x}_2,\mathbf{y}_1) \vee \mathbf{Q}(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2))).$$

Відмітимо, що у прикладі 1 розглядався трьох місцевий предикат (змінна $\mathbf{H}$ зв'язана, змінні $\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}$ – вільні), а у прикладі 2 – висловлювання (всі змінні $\mathbf{x}$, $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{y}_1$ зв'язані).

Література

1. Алгебра и начала анализа. Часть 1. Под ред. Г.Н. Яковлева. – М.: Наука, 1981. – с.
2. Кук Д., Бейз Г. Компьютерная математика. – М.: Наука, 1990. – с.
3. Дороговцев А.Я. Математичний аналіз. Т.1. – Київ: Либідь, 1993. – с.
4. Кравчук А.Ф. Дискретний Аналіз.Харків: ВД «ІНЖЕК», 2005. – 332 с.