Міністерство освіти та науки України

ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ АВТОМОБІЛЬНО-ДОРОЖНІЙ УНІВЕРСИТЕТ

Вербицький В.І.
Михайленко А.Г.

МАТРИЦІ ТА СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ

Конспект лекцій з вищої математики

Затверджено методичною
радою університету,
протокол № 3 від 10.12.2008 р.

Харків
ХНАДУ
2009

Вербицький В.І., Михайленко А.Г. Матриці та системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Конспект лекцій з вищої математики. – Харків: ХНАДУ, 2009. 36 с.

Конспект лекцій написано відповідно програмі з курсу вищої математики для студентів технічних ВНЗ.

Мета лекцій – допомогти студентам при підготовці до тестування, при виконанні семестрових завдань та для успішної здачі іспитів.

Головною задачею є фундаментальне вивчення матеріалу курсу вищої математики.

Лекція 1.
МАТРИЦІ ТА ВИЗНАЧНИКИ

Мета лекції: розглянути основні типи матриць, операції над матрицями, опанувати поняття визначника, розглянути властивості визначників та обчислення визначників різними способами. Указати метод знаходження оберненої матриці.

План лекції

1.1. Матриці.
1.2. Окремі типи матриць.
1.3. Операції над матрицями.
1.4. Обернена матриця.
1.5. Визначники.
1.6. Властивості визначників.
1.7. Приклади знаходження визначників.
1.8. Метод знаходження оберненої матриці.

1.1. Матриці

Означення. Матрицею розміру $m \times n$ є прямокутна таблиця елементів, що складається з m рядків та n стовпців. Числа, з яких складається матриця, називаються її елементами.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Як правило, матриці позначаються великими літерами A, B, C тощо. Елемент матриці A, що стоїть на перетині i-го рядка та j-го стовпця, позначається a_{ij}. Наприклад:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Тут $m = 2;\ n = 3$, тобто розмір матриці є 2×3;

$a_{11} = 3;\ a_{12} = 1;\ a_{13} = 2;$

$a_{21} = -2;\ a_{22} = 0;\ a_{23} = 5.$

1.2. Окремі типи матриць

Матриця розміру $m \times n$ є матрицею-рядком, якщо $m = 1$, матрицею-стовпцем, якщо $n = 1$, та матрицею-числом, якщо $m = n = 1$.

Матриця є квадратною, якщо $m = n$. Порядок квадратної матриці є число n. Матриці є рівними, якщо вони мають один розмір та їх відповідні елементи співпадають.

В квадратних матрицях визначають головну та бічну діагоналі.

Наприклад:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 0 & 5 & 4 \\ -1 & 7 & -3 \end{pmatrix}.$$

Елементи $3; 5; -3$ утворюють головну діагональ, а елементи $1; 5; -1$ – бічну.

Нульова матриця – це матриця, всі елементи якої дорівнюють нулю. Вона позначається буквою О.

Квадратна матриця є діагональною, якщо всі її елементи, крім тих, що утворюють головну діагональ, дорівнюють нулю.

Діагональна матриця є одиничною, якщо всі елементи її головної діагоналі дорівнюють одиниці. Вона позначається буквою E.

Наприклад:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} -$$

одинична матриця четвертого порядку.

Нижня трикутна матриця – це матриця, у якої всі елементи, що стоять над головною діагоналлю, дорівнюють нулю.

Наприклад:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & 0 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Верхня трикутна матриця – це матриця, у якої всі елементи, що стоять під головною діагоналлю, дорівнюють нулю.

Наприклад:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Матриця називається трикутною, якщо вона верхньою трикутною або нижньою трикутною.

1.3. Операції над матрицями

Додавання.

Сумою двох матриць одного розміру A і B є матриця $C = A + B$ (того ж розміру), кожний елемент якої дорівнює сумі відповідних елементів матриць A і B:

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}.$$

Аналогічно визначається й різниця $A - B$ матриць A і B.

Матриці різних розмірів додавати (віднімати) не можна.

Множення матриці на число.

Добутком матриці A на число λ є матриця $C = \lambda A$, кожний елемент якої дорівнює відповідному елементу матриці A, помноженому на λ:

$$c_{ij} = \lambda a_{ij}.$$

Приклад 1.1.

Знайти матрицю $2A+3B$, якщо

$$A=\begin{pmatrix}-3 & 7 & 1\\ 2 & 1 & 3\end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 2 & -2 & 3\end{pmatrix}.$$

$$2A+3B=\begin{pmatrix}-6 & 14 & 2\\ 4 & 2 & 6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3 & 0 & 6\\ 6 & -6 & 9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3 & 14 & 8\\ 10 & -4 & 15\end{pmatrix}.$$

Добуток матриць.

Якщо число стовпців матриці A дорівнює числу рядків матриці B (такі матриці звуть узгодженими), то добуток матриць A і B – це така матриця $C=AB$, що її елемент c_{ij} дорівнює сумі добутків елементів i-го рядка матриці A на відповідні елементи j-го стовпця матриці B: $c_{ij}=\sum_{s=1}^{k}a_{is}b_{sj}$ $(i=1;...;m;\ j=1...;n;$ матриця A має розмір $m\times k$, B – розмір $k\times n)$.

Якщо A – квадратна матриця, то $A^n=\underbrace{A\cdot A\cdot ...\cdot A}_{n\text{ раз}}$

Приклад 1.2.

Знайти добуток матриць A і B, де

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & -2\\ -3 & 5 & 1\end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix}2 & 0 & -1\\ 3 & 2 & 0\\ -4 & 1 & 5\end{pmatrix}.$$

$$C=A\cdot B=\begin{pmatrix}10 & -2 & -11\\ 5 & 11 & 8\end{pmatrix},$$

де $c_{11}=1\cdot 2+0\cdot 3-2\cdot(-4)=10;$

$c_{12}=1\cdot 0+0\cdot 2-2\cdot 1=-2;$

$c_{13}=1\cdot(-1)+0\cdot 0-2\cdot 5=-11$ тощо.

Транспонування матриць.

Матриця $B=\{b_{ij}\}$ називається транспонованою до матриці $A=\{a_{ij}\}$ та позначається A^T, якщо $b_{ij}=a_{ij}$ для будь-яких i, j.

Наприклад:

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 5 \end{pmatrix}; \qquad A^T=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Закони операцій над матрицями:

1. $A+B=B+A$.
2. $(A+B)+C=A+(B+C)$.
3. $\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B$.
4. $A(B+C)=AB+AC$.
5. $(A+B)C=AC+BC$.
6. $\lambda(AB)=(\lambda A)B=A(\lambda B)$.
7. $A(BC)=(AB)C$.

Для добутку матриць не виконується комутативний закон, тобто в загальному випадку $AB\neq BA$.

1.4. Обернена матриця

Означення. Матриця *B* є оберненою до квадратної матриці *A*, якщо $AB=BA=E$, де E – одинична матриця. Обернена матриця позначається A^{-1}.

Якщо існує матриця A^{-1}, то вона єдина, має той самий порядок, що й матриця *A*, та $A^{-1}A=AA^{-1}=E$. Метод знаходження оберненої матриці буде наведено в розділі 1.8.

1.5. Визначники (детермінати)

Означення. Визначником 1-го порядку матриці *A* є її єдиний елемент a_{11}. Визначником 2-го порядку є вираз

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}.$$

Вираз

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32}$ є визначником 3-го порядку.

Елементами визначника є відповідні елементи матриці A. елементами визначника можуть бути не тільки числа, а і функції.

Приклад 1.3.

Обчислити визначники:

а) $\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = 3 \cdot 7 - 2 \cdot (-5) = 31;$

б) $\begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = \cos^2 x + \sin^2 x = 1.$

1.6. Властивості визначників

1. Величина визначника не змінюється при транспонуванні матриці.

2. Величина визначника змінює знак на протилежний, якщо переставити два будь-яких його рядка (стовпця).

3. Визначник з двома однаковими рядками (стовпцями) дорівнює нулю.

4. Якщо визначник містить рядок (стовпець), що складається з одних нулів, то визначник дорівнює нулю.

5. Якщо визначник містить два пропорційних рядка (стовпця), то він дорівнює нулю.

6. Спільний множник елементів одного рядка (стовпця) можна винести за знак визначника.

7. Величина визначника не зміниться, якщо до елементів деякого рядка (стовпця) додати відповідні елементи іншого рядка (стовпця), помножені на одне й те ж число.

Наприклад:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}+ma_{13} & a_{12}+na_{13} & a_{13} \\ a_{21}+ma_{23} & a_{22}+na_{23} & a_{23} \\ a_{31}+ma_{33} & a_{32}+na_{33} & a_{33} \end{vmatrix}$$

За допомогою цієї властивості можна зробити в будь-якому рядку (стовпці) визначника n-го порядку $(n-1)$ нулів, що істотно полегшує обчислення визначника.

8. Якщо елементи деякого рядка (стовпця) є сумами двох доданків, то визначник можна представити як суму двох визначників, наприклад

$$\begin{vmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}+b_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_{21} & a_{22} & a_{23} \\ b_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Наведемо поняття мінору та алгебраїчного доповнення.

Мінором M_{ij} деякого елемента a_{ij} є визначник $(n-1)$-го порядку, одержаний з визначника n-го порядку викреслюванням i-го рядка та j-го стовпця.

Алгебраїчне доповнення A_{ij} елемента a_{ij} визначається за формулою

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}.$$

Очевидно, алгебраїчне доповнення може відрізнятися від мінору тільки знаком. Якщо сума $(i+j)$ парна, то $A_{ij} = M_{ij}$, а якщо непарна, то $A_{ij} = -M_{ij}$.

Таблицю знаків алгебраїчних доповнень для визначника 3-го порядку можна символічно записати так:

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}.$$

Теорема про розклад визначника за елементами рядка (стовпця). Визначник дорівнює сумі добутків елементів будь-якого рядка (стовпця) на їх алгебраїчні доповнення.

Наприклад, для визначника третього порядку виконуються такі рівності:

$$\Delta = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$$

або

$$\Delta = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31}$$

тощо.

1.7. Приклади обчислення визначників

Визначники третього порядку можна обчислювати за однією з схем.

Схема 1 (правило трикутників)

Правило Саррюса: одна з трьох складових, що входять до правої частини (1) із знаком плюс, є добутком елементів головної діагоналі матриці *A*, кожна з двох інших – добуток елементів, що лежать на паралелі до цієї діагоналі, та елемента з протилежного кута матриці, а складові, що входять до (1) із знаком мінус, будуються так само, але відносно другої (бічної) діагоналі.

$$\underset{+}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}} \qquad \underset{-}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}$$

Схема 2 (правило діагоналів)

$$\begin{array}{ccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \\ - & - & -\;+ & + & + \end{array}$$

Приклад 1.4.

Обчислити визначник

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & -1 \\ 3 & 5 & 2 \end{vmatrix}$$

За схемою трикутників

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & -1 \\ 3 & 5 & 2 \end{vmatrix} = 2\cdot 2\cdot 2 + 3\cdot(-1)\cdot 3 + 4\cdot 5\cdot 1 - 1\cdot 2\cdot 3 - 5\cdot(-1)\cdot 2 - 4\cdot 3\cdot 2 = -1$$

За схемою діагоналів

$$\left|\begin{matrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & -1 \\ 3 & 5 & 2 \end{matrix}\right|\begin{matrix} 2 & 3 \\ 4 & 2 \\ 3 & 5 \end{matrix} =$$

$$= 2\cdot 2\cdot 2 + 3\cdot(-1)\cdot 3 + 1\cdot 4\cdot 5 - 1\cdot 2\cdot 3 - 2\cdot(-1)\cdot 5 - 3\cdot 4\cdot 2 = -1$$

Обидві схеми не є універсальними. Вони пригодні тільки для обчислення визначників третього порядку.

Наведемо приклад обчислення визначника розкладанням за елементами рядка (стовпця).

Приклад 1.5.

Обчислити визначник

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & -1 \\ 3 & 5 & 2 \end{vmatrix}$$

Розкладаємо за елементами першого рядка:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & -1 \\ 3 & 5 & 2 \end{vmatrix} = 2\cdot\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} - 3\cdot\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 1\cdot\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$= 2\cdot(4+5) - 3\cdot(8+3) + (20-6) = -1.$$

Можна розкласти той же визначник, наприклад, за елементами другого стовпця:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & -1 \\ 3 & 5 & 2 \end{vmatrix} = -3\cdot\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 2\cdot\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} - 5\cdot\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= -3\cdot(8+3) + 2\cdot(4-3) - 5(-2-4) = -1$$

Найзручніше розкривати визначник за елементами того рядка (стовпця), де серед елементів найбільша кількість нулів.

Можна обчислити визначники, використовуючи їх властивості, а саме перетворюючи матриці до трикутної форми або отримуючи нулі у рядках (стовпцях).

Приклад 1.6.

Обчислити визначник

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & -1 \\ 3 & 5 & 2 \end{vmatrix}$$

До елементів другого рядка додамо відповідні елементи першого рядка. Потім елементи першого рядка помножимо на (-2) та додамо до відповідних елементів третього рядка. Отримаємо

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & -1 \\ 3 & 5 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 6 & 5 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 5 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -6+5 = -1.$$

1.8. Метод знаходження оберненої матриці

Для розв’язування систем лінійних рівнянь можна використовувати обернену матрицю, якщо матриця системи *A* квадратна.

Проте не кожна квадратна матриця має обернену.

Якщо визначник матриці *A* відмінний від нуля $\left(|A| \neq 0\right)$, то така матриця називається невиродженою.

Теорема (необхідна та достатня умова існування оберненої матриці). Обернена матриця A^{-1} існує (та єдина) тоді та тільки тоді, коли матриця *A* невироджена.

Обернена матриця знаходиться за формулою:

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

де A_{ij} – алгебраїчне доповнення елемента a_{ij} $\left(i=1, \;\; n, j=1 \;\; ,n\right)$.

Обернена матриця A^{-1} складається з алгебраїчних доповнень елементів матриці *A* транспонування їх та множенням кожного з елементів на число $1/\Delta$, де Δ – визначник матриці *A*.

Для невироджених матриць мають місце наступні властивості:

1. $\left|A^{-1}\right| = \dfrac{1}{|A|}$.
2. $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$.
3. $\left(A^{m}\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^{m}$.
4. $\left(AB\right)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
5. $\left(A^{T}\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^{T}$

Приклад 1.7.

Знайти обернену матрицю до матриці *A*.

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & -1 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Знайдемо визначник матриці *A*:

$\Delta=-1$ (див. попередній приклад).

Оскільки $\Delta\neq 0$, матриця *A* невироджена, тобто існує A^{-1}.

2. Знайдемо алгебраїчні доповнення елементів матриці *A*:

$$A_{11}=\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}=9; \qquad A_{12}=-\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}=-11;$$

$$A_{13}=\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}=14; \qquad A_{21}=-\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}=-1;$$

$$A_{22}=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}=1; \qquad A_{23}=-\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}=-1;$$

$$A_{31}=\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}=-5; \qquad A_{32}=-\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}=6;$$

$$A_{33}=-\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}=-8.$$

3. Знайдемо обернену матрицю

$$A^{-1}=\frac{1}{\Delta}\cdot\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}.$$

$$A^{-1} = (-1) \cdot \begin{pmatrix} 9 & -1 & -5 \\ -11 & 1 & 6 \\ 14 & -1 & -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & 1 & 5 \\ 11 & -1 & -6 \\ -14 & 1 & 8 \end{pmatrix}.$$

4. Перевіряємо вірність обчислення оберненої матриці за формулою $A \cdot A^{-1} = E$;

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & -1 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -9 & 1 & 5 \\ 11 & -1 & -6 \\ -14 & 1 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

В даному конспекті лекцій розглянуто теми «Матриці» та «Визначники».

Наведено основні означення, формулювання теорем. Розглянуто дії з матрицями, основні методи обчислення визначників. Наведено приклади.

Контрольні питання для повторення та самоперевірки

1. Що є матрицею?
2. Які існують дії з матрицями?
3. Що є визначником 2-го та 3-го порядків?
4. Як обчислюється визначник 2-го порядку?
5. Як обчислюється визначник 3-го порядку за схемами?
6. Що таке мінор та алгебраїчне доповнення?
7. Сформулювати властивості визначників.
8. Як обчислюється визначник розкладанням за елементами рядка (стовпця)?
9. Що таке обернена матриця та які умови її існування?
10. Як знайти обернену матрицю?

Завдання для самостійної роботи

1. Дано матриці A і B. Знайти:
а) B^T – транспоновану матрицю;
б) $A \pm 2B^T$.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 1 & -4 & 0 \end{pmatrix}; \qquad B \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 2 & 0 \\ 6 & -7 \end{pmatrix}.$$

2. Знайти добуток $A \cdot B$ матриць A і B:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 7 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}; \qquad B \begin{pmatrix} -1 & 7 \\ 3 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

3. Обчислити визначник

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 7 & 5 \end{vmatrix}.$$

4. Обчислити визначник:

а) за схемою;
б) розкладанням за елементами 2-го стовпця;
в) розкладанням за елементами 1-го рядка.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & -3 & 4 \\ 2 & 4 & -3 \\ 6 & -5 & 2 \end{vmatrix}.$$

5. Знайти обернену матрицю A^{-1}, де

а) $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -4 \\ 3 & 15 & -9 \\ 5 & 5 & -7 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Лекція 2
СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ

2.1 Вступ

В даній лекції ми розглядаємо системи лінійних алгебраїчних рівнянь, тобто системи

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2; \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m; \end{cases} \tag{2.1}$$

де $a_{ij}\left(1 \le i \le m; 1 \le j \le n\right); b_i\left(1 \le i \le m\right)$ – відомі сталі, а $x_j\left(1 \le j \le n\right)$ – невідомі.

Система (2.1) містить m рівнянь з n невідомими. Числа a_{ij} є коефіцієнтами системи, b_i – правими частинами.

Розв’язком системи (2.1) є сукупність чисел $\left(x_1; x_2; \ldots; x_n\right)$, що перетворює усі рівняння системи у вірні числові рівності.

Приклад 2.1.

Розв’язком системи

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = -4; \\ 2x_1 + 3x_2 = 13 \end{cases}$$

є (2;3), оскільки

$$\begin{cases} 2 - 2 \cdot 3 = -4; \\ 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 = 13 \end{cases}$$

Цей розв’язок можна записати у вигляді

$$\begin{cases} x_1 = 2; \\ x_2 = 3 \end{cases}$$

Далі ми будемо вивчати виключно випадки $m = n = 2$ та $m = n = 3$.

2.2. Матричний метод розв’язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь

Запишемо систему (2.1) у вигляді $AX = B$,

де $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$; $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$.

Матриця A називається матрицею системи, стовпець X – стовпцем невідомих, стовпець B – стовпцем правих частин.

Якщо A – невироджена квадратна матриця, то розв’язок системи (2.1) знаходимо за формулою

$$X = A^{-1}B.$$

Спосіб знаходження оберненої матриці $\left(A^{-1}\right)$ наведено у розділі 1.8.

Приклад 2.2.

Розв’язати систему

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 5; \\ 4x_1 + 2x_2 - x_3 = 7; \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 = -1. \end{cases}$$

Тут $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & -1 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Матрицю A^{-1} було знайдено у прикладі 1.7:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -9 & 1 & 5 \\ 11 & -1 & -6 \\ -14 & 1 & 8 \end{pmatrix}.$$

$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} -9 & 1 & 5 \\ 11 & -1 & -6 \\ -14 & 1 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -43 \\ 54 \\ -71 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{cases} x_1 = -43; \\ x_2 = 54; \\ x_3 = -71. \end{cases}$$

2.3. Формули Крамера

Розглянемо спочатку випадок $m = n = 2$, тобто систему двох лінійних рівнянь з двома невідомими

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases} \tag{2.2}$$

Помножимо перше рівняння на a_{22} та віднімемо від отриманого рівняння друге, помножене на a_{12}:

$$\left(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}\right)x_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12}. \tag{2.3}$$

Аналогічно віднімаючи від другого рівняння, помноженого на a_{11}, перше рівняння, помножене на a_{21}, отримаємо:

$$\left(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}\right)x_2 = a_{11}b_2 - a_{12}b_1. \tag{2.4}$$

Введемо наступні позначення:

$$\begin{gathered} \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}; \\ \Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}; \\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}. \end{gathered} \tag{2.5}$$

Інакше кажучи, визначник Δ складений з коефіцієнтів системи, а визначники Δ_1 та Δ_2 отримані заміною відповідно першого та другого стовпців визначника Δ на стовпець правих частин. Визначник Δ – називається головним визначником системи, а Δ_1 та Δ_2 – допоміжними визначниками.

Очевидно, якщо $\Delta \neq 0$, то з рівнянь (2.3) та (2.4) отримаємо

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta}; \\ x_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta}, \end{cases} \tag{2.6}$$

де визначники Δ, Δ_1 та Δ_2 обчислюються за формулами (2.5)

Сформулюємо отриманий результат.

Формули Крамера (для $m = n = 2$).

Якщо визначник системи (2.2) відмінний від нуля, то система має єдиний розв’язок, отриманий за формулою (2.6). Ці формули звуть формулами Крамера.

Приклад 2.3.

Розв’яжемо систему з приклада 2.1 за формулами Крамера:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = -4; \\ 2x_1 + 3x_2 = 13. \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 7;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -4 & -2 \\ 13 & 3 \end{vmatrix} = 14;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 13 \end{vmatrix} = 21.$$

Звідси $x_1 = \dfrac{14}{7} = 2;\ x_2 = \dfrac{21}{7} = 3.$

$$\begin{cases} x_1 = 2; \\ x_2 = 3. \end{cases}$$

Формули Крамера у випадку $m = n = 3$ мають аналогічний вигляд, а саме розглядається система

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2; \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases} \tag{2.7}$$

Аналогічно визначаються визначник системи та допоміжні визначники:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix};$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix};$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}; \tag{2.8}$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

Формули Крамера (для $m = n = 3$).

Якщо головний визначник системи (2.7) відмінний від нуля $(\Delta \neq 0)$, то система має єдиний розв'язок, що обчислюється за формулами

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta}; \\ x_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta}; \\ x_3 = \dfrac{\Delta_3}{\Delta}, \end{cases}$$

де визначники $\Delta,\ \Delta_1,\ \Delta_2,\ \Delta_3$ обчислюється за формулами (2.8)

Приклад 2.4.

$$\begin{cases} 2x - 3x_2 + 4x_3 = 3; \\ 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 9; \\ 4x_1 + 3x_3 = 2. \end{cases}$$

Тут

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \\ 4 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 4 \cdot \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -53;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & -3 & 4 \\ 9 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 9 & 2 \end{vmatrix} = 53;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 9 & 5 \\ 4 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 9 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} + 4 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 9 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -53;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 3 \\ 3 & 2 & 9 \\ 4 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 \cdot \begin{vmatrix} -3 & 3 \\ 2 & 9 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -106.$$

Звідси $x_1 = \dfrac{53}{-53} = -1;\ x_2 = \dfrac{-53}{-53} = 1;\ x_3 = \dfrac{-106}{-53} = 2.$

$$\begin{cases} x_1 = -1; \\ x_2 = 1; \\ x_3 = 2. \end{cases}$$

Зауваження 1. Якщо $\Delta = 0$, то формули Крамера застосовувати не можна. В цьому випадку питання про існування розв’язку можна вирішити тільки за допомогою методу Гаусса.

2.4. Метод Гаусса

Метод Гаусса побудований на рівносильних перетвореннях системи.

Дві системи є рівносильними, якщо множини їх розв'язків співпадають. Відомо, що до рівносильної системи приводять наступні перетворення.

1) перестановка рівнянь;

2) множення одного з рівнянь на число, відмінне від 0;

3) додавання до одного з рівнянь іншого, помноженого на деяке число.

Метод Гаусса (метод послідовного виключення невідомих) полягає у наступному.

Система рівносильними перетвореннями 1) – 3) приводиться до трикутної форми.

Розглянемо спочатку випадок $m = n = 2$.

Розглянемо систему (2.2), припускаючи, що $a_1 \neq 0$ (інакше перемінимо рівняння місцями). Друге рівняння помножимо на a_{11} і віднімемо від нього перше, помножене на a_{21}. Отримаємо рівносильну систему

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1; \\ \tilde{a}_{22}x_2 = \tilde{b}_2. \end{cases}$$

З другого рівняння визначаємо x_2 та підстановкою в перше рівняння знаходимо x_1.

Приклад 2.5.

Розглянемо систему з приклада 2.1.

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = -4; \\ 2x_1 + 3x_2 = 13. \end{cases}$$

Помножимо перше рівняння на 2:

$$2x_1 - 4x_2 = -8$$

та віднімемо від другого рівняння:

$$7x_2 = 21.$$

Звідси $x_2 = 3$. Підставимо в перше рівняння:

$$x_1 - 2 \cdot 3 = -4.$$

$$x_1 = 2.$$

$$\begin{cases} x_1 = 2; \\ x_2 = 3. \end{cases}$$

У випадку $m = n = 3$ також будемо вважати $a_{11} \neq 0$ (інакше переставимо рівняння). Від другого рівняння системи (2.7), помноженого на a_{11}, віднімемо перше, помножене на a_{21}, а від третього, помноженого на a_1, віднімемо перше, помножене на a_{31}. Отримаємо систему

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1; \\ \qquad\quad \tilde{a}_{22}x_2 + \tilde{a}_{23}x_3 = \tilde{b}_2; \\ \qquad\quad \tilde{a}_{32}x_2 + \tilde{a}_{33}x_3 = \tilde{b}_3. \end{cases}$$

Останні два рівняння утворюють систему з $m = n = 2$. Застосовуємо до неї метод Гаусса та отримаємо

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1; \\ \qquad\quad \tilde{a}_{22}x_2 + \tilde{a}_{23}x_3 = \tilde{b}_2; \\ \qquad\qquad\qquad \tilde{\tilde{a}}_{33}x_3 = \tilde{\tilde{b}}_3. \end{cases}$$

З третього рівняння останньої системи знаходимо x_3, підстановкою у друге рівняння знаходимо x_2 та підстановкою x_2, x_3 в перше рівняння знаходимо x_1.

Приклад 2.6.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 7; \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 0; \\ 5x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 7. \end{cases} \qquad (2.10)$$

Помножимо друге рівняння на 2:

$$6x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 0$$

та віднімемо від нього перше, помножене на 3:

$$6x_1 - 3x_2 + 12x_3 = 21.$$

Отримаємо

$$7x_2 - 14x_3 = -21.$$

Аналогічно, віднімаючи від третього рівняння, помноженого на 2, тобто

$$10x_1 + 6x_2 + 10x_3 = 14$$

перше, помножене на 5, тобто

$$10x_1 - 5x_2 + 20x_3 = 35,$$

отримаємо

$$11x_2 - 10x_3 = -21.$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 7; \\ 7x_2 - 14x_3 = -21; \\ 11x_2 - 10x_3 = -21. \end{cases}$$

Для зручності поділимо друге рівняння на 7:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 7; \\ x_2 - 2x_3 = -3; \\ 11x_2 - 10x_3 = -21. \end{cases}$$

Далі від третього рівняння віднімемо друге, помножене на 11, тобто

$$11x_2 - 22x_3 = -33.$$

Отримаємо

$$12x_3 = 12.$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 7; \\ \qquad x_2 - 2x_3 = -3; \\ \qquad\quad 12x_3 = 12. \end{cases} \qquad (2.11)$$

З третього рівняння знаходимо

$$x_3 = 1.$$

Підставимо у друге рівняння:

$$x_2 - 2 \cdot 1 = -3.$$

$$x_2 = -1.$$

Підставлимо у перше рівняння:

$$2x_1 - (-1) + 4 \cdot 1 = 7.$$

$$x_1 = 1.$$

$$\begin{cases} x_1 = 1; \\ x_2 = -1; \\ x_3 = 1. \end{cases}$$

Розв'язування системи за методом Гаусса можна оформити зручніше, якщо замість систем використовувати їхні розширені матриці. Розширена матриця системи (2.1) має такий вигляд:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

Кожний рядок розширеної матриці відповідає рівнянню системи (i-й рядок відповідає i-му рівнянню). Перетворення рівнянь замінюються відповідними перетвореннями рядків. Наприклад, розв'язок системи (2.10) записується так:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 4 & 7 \\ 3 & 2 & -1 & 0 \\ 5 & 3 & 5 & 7 \end{array}\right)\begin{array}{lll} \times 3 & & \times 5 \\ \times(-2) & + & \qquad + \\ & & \times(-2) \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \\ :7 \\ \\ \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 4 & 7 \\ 0 & 7 & -14 & -21 \\ 0 & 11 & 10 & -21 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{r} \\ \times 11 \\ - \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 11 & -10 & -21 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -12 & 12 \end{array}\right).$$

Далі розв'язується система (2.11).

Метод Гаусса дозволяє дослідити та розв'язати систему і у тому випадку, коли її визначник дорівнює нулю. В цьому випадку можливі два варіанта:

а) система несумісна, тобто не має розв'язків;

б) система є невизначеною, тобто має нескінченну множину розв'язків. Розглянемо обидва випадки.

Приклад 2.7.

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 1; \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 4; \\ 5x_1 + 13x_2 + 2x_3 = 7. \end{cases} \qquad (2.12)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -4 & 1 \\ 2 & 5 & 3 & 4 \\ 5 & 13 & 2 & 7 \end{array}\right) \times(-2) \quad \times(-5) \quad \begin{array}{r} \\ + \\ :2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & -1 & 11 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

$$- \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & -1 & 11 & 2 \\ 0 & -1 & 11 & 1 \end{array}\right) \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & -1 & 11 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

Останнє рівняння остаточної системи має вигляд

$$0 = -1.$$

Воно, очевидно, невірне. Таким чином, система (2.12) несумісна.

Приклад 2.8.

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 1; \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 4; \\ 5x_1 + 13x_2 + 2x_3 = 9. \end{cases} \tag{2.13}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -4 & 1 \\ 2 & 5 & 3 & 4 \\ 5 & 13 & 2 & 9 \end{array}\right) \times(-2) \quad \times(-5) \quad \begin{array}{r} \\ + \\ :2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & -1 & 11 & 2 \\ 0 & -2 & 22 & 4 \end{array}\right)$$

$$- \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & -1 & 11 & 2 \\ 0 & -1 & 11 & 2 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & -1 & 11 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 1; \\ -x_2 + 11x_3 = 2; \\ 0 = 0. \end{cases}$$

Останнє рівняння можна відкинути, оскільки воно є тотожністю, але не несе ніякої інформації про невідомі. Нехай нам відоме значення x_3. Тоді з другого рівняння отримаємо

$$x_2 = -2 + 11x_3.$$

З першого рівняння знаходимо:

$$x_1 = 1 - 3x_2 + 4x_3 = 1 - 3\cdot\left(-2 + 11x_3\right) + 4x_3 = 7 - 29x_3.$$

Оскільки x_3 довільне, система (2.13) має нескінченну множину розв'язків.

Загальний розв'язок запишемо таким чином:

$$\begin{cases} x_1 = 7 - 29x_3; \\ x_2 = -2 + 11x_3; \\ x_3 \in \left(-\infty; +\infty\right). \end{cases}$$

Наприклад, якщо $x_3 = 0$, то $x_1 = 7$, $x_2 = -2$; якщо $x_3 = 1$, то $x_1 = -22$, $x_2 = 9$; тощо.

Очевидно, визначник систем (2.12), (2.13) дорівнює нулю, бо інакше кожна з цих систем мала б єдиний розв'язок.

В даному конспекті розглянуто тему «Системи лінійних алгебраїчних рівнянь».

Наведено основні означення, викладено основні методи розв'язування систем (формули Крамера, метод Гаусса). Наведено приклади.

Питання для контролю знань

1. Що є системою лінійних алгебраїчних рівнянь?
2. Що є розв'язком системи лінійних рівнянь?
3. Що є головним визначником системи та допоміжними визначниками?
4. Записати формули Крамера.
5. Що таке рівносильні перетворення системи?

6. Що таке розширена матриця системи?

7. Як розв'язувати за методом Гаусса систему з невиродженою матрицею?

8. Скільки розв'язків може мати система з виродженою матрицею?

Завдання для самостійної роботи

1. Розв'язати систему

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 7; \\ 2x_1 - 5x_2 + x_3 = 6; \\ 5x_1 + 3x_2 - 7x_3 = 4. \end{cases}$$

за формулами Крамера та методом Гаусса.

2. Знайти загальний розв'язок за методом Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 1; \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 7; \\ 5x_1 + 8x_2 + 6x_3 = 15. \end{cases}$$

ЛІТЕРАТУРА

1. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика. – К.: Вища школа, 1993.

2. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. – М.: Наука, 1975.

ЗМІСТ

ДЛЯ НОТОТОК

ДЛЯ НОТОТОК

ДЛЯ НОТОТОК

Навчальне видання

Вербицький В_____І_______
Михайленко А________Г____

МАТРИЦІ ТА СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ

Конспект лекцій з вищої математики

Відповідальний за випуск

Авторська редакція

Комп'ютерна верстка *О.В. Веретільник*

План 2009 р. Поз. 118.
Підписано до друку .2008 р. Формат 60×84 1/16. Папір газетний.
Гарнітура Times New Roman Cyr . Віддруковано на ризографі.
Ум. друк. арк. . Обл.-вид. арк. .
Зам. № /08. Тираж прим. Ціна договірна.

ВИДАВНИЦТВО
Харківського національного автомобільно-дорожнього університету

Видавництво ХНАДУ, 61002, Харків-МСП, вул. Петровського, 25.
Тел. /факс: (057)700-38-64; 707-37-03, e-mail: rio@khadi.kharkov.ua

Свідоцтво Державного комітету інформаційної політики, телебачення та радіомовлення України про внесення суб'єкта видавничої справи до Державного реєстру видавців, виготівників і розповсюджувачів видавничої продукції, серія ДК №897 від 17.04.2002 р.