ВВЕДЕНИЕ В ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ

Лекции 1,2

Линейное программирование

ИСТОРИЯ

Как самостоятельное научное направление исследование операций оформилось в начале 40-х годов.

- Первые публикации по исследованию операций относятся к 1939-1940 г., в которых методы применены для решения военных задач, в частности для анализа и исследования военных операций. Позднее принципы и методы исследования операций стали применяться в сфере промышленно финансового управления. С увеличением масштабов производства расширялись масштабы операционных исследований, круг решаемых задач, совершенствовались методы новой науки.
- Возникла необходимость в подготовке кадров специалистов по исследованию операций. В ведущих университетах США и Англии впервые было начато систематическое преподавание курса исследование операций.
- Возникла необходимость в координации работы многотысячной армии специалистов по исследованию операций, в регулярном обмене теоретическими исследованиями и прикладными разработками.
- С этой целью в 1957 г. была создана Международная федерация исследования операций IFORS , в состав которой входили национальные общества и комитеты по исследованию операций многих стран.
-

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Операция – система управляемых действий, объединенная единым замыслом и направленная на достижение определенной цели.

Под термином «**исследование операций**» понимают комплексную математическую дисциплину, которая занимается построением, анализом и применением математических моделей принятия оптимальных решений. Следует отметить, что на практике всегда учитываются и другие разнообразные факторы, не имеющие числового выражения, однако информация, полученная в процессе исследования математических моделей, является основой для принятия окончательного решения.

Исследование операций - наука, занимающаяся разработкой и практическим применением методов наиболее оптимального управления в различных областях человеческой деятельности.

Цель исследования операций - количественное обоснование принимаемых решений по управлению в различных областях человеческой деятельности. Решение, которое оказывается наиболее выгодным называется оптимальным.

Наиболее известными и эффективными методами ИО являются методы **линейного программирования**, когда целевая функция и все ограничения являются линейными функциями. Для решения математических моделей других типов предназначены методы **целочисленного программирования** (если все переменные должны принимать только целочисленные значения), **динамического программирования** (где исходную задачу можно разбить на меньшие подзадачи) и **нелинейного программирования** (когда целевая функция и/или ограничения являются нелинейными функциями). Перечисленные методы составляют только часть из большого количества самых разнообразных доступных методов исследования операций.

Особенности исследования операций

- **Системный подход к анализу поставленной проблемы.** Системный анализ является основным методологическим принципом исследования операций, который состоит в том. что любая задача, какой бы частной она не казалась, рассматривается сточки зрения ее влияния на критерий функционирования всей системы.
- Для исследования операций характерно, что при решении каждой проблемы возникают все новые и новые задачи. Если сначала ставится узкие цели, применение операционных методов неэффективно. Наибольший эффект может быть достигнут только при непрерывном исследовании, обеспечивающем преемственность в переходе от одной задачи к другой.
- Одной из существенных особенностей исследования операций является стремление найти оптимальное решение поставленной задачи. Однако, часто такое решение оказывается недостижимым из-за ограничений, накладываемых имеющимися в наличии ресурсами или уровнем современной науки. Например, для комбинаторных задач, в частности задач календарного планирования при числе станков белее 4 оптимальное решение при современном уровне развития математики оказывается возможным найти лишь простым перебором вариантов. Однако даже при небольших n число возможных вариантов оказывается настолько велико, что перебор всех вариантов при существующих ограничениях на быстродействие ЭВМ и допустимое машинное время практически невозможен. Тогда приходится ограничиваться поиском достаточно хорошего или субоптимального решения.
- Особенность операционных исследований состоит и в том, что они проводятся комплексно, по многим направлениям.

Основные этапы операционного исследования

- **Постановка задачи.**
  Первоначально задачу формулируют с точки зрения заказчика. Во время анализа системы задача постепенно уточняется.
- **Формализация задачи.**
  Получив достаточно строгую и логически непротиворечивую, содержательную постановку задачи, нужно построить ее математическую модель.
- **Нахождение метода решения.**
  Для нахождения оптимального решения в зависимости от структуры задачи применяют те или иные методы теории оптимальных решений, называемые также методами математического программирования.
- **Проверка и корректировка модели.**
  В сложных системах, к которым относятся системы организационного типа, модель лишь частично отражает реальный процесс. Поэтому необходима проверка степени соответствия или адекватности модели и реального процесса. Проверку производят сравнением предсказанного поведения с фактическим при изменении значений внешних неуправляемых воздействий. Корректировка может потребовать дополнительных исследований объекта, уточнения структуры математической модели, многочисленных изменений переменных. Таким образом, 4 этапа многократно повторяются, пока не будут достигнуто удовлетворительное соответствие между выходами объекта и модели.
- **Реализация найденного решения на практике.**
  Внедрение можно рассматривать как самостоятельную задачу, применив к ней системный подход и анализ.
-

ПРИМЕРЫ ЗАДАЧ

- Примеры операций.
- Пример 1.Предприятие выпускает несколько видов изделий, при изготовлении
- которых используются ограниченные ресурсы различного типа. Требуется составить план
- выпуска изделий на месяц, т.е. указать количество выпускаемых изделий каждою вида,
- так, чтобы максимизировать прибыль при выполнении ограничений на потребляемые
- ресурсы.
- Пример 2.Требуется создать сеть временных торговых точек так, чтобы
- обеспечивать максимальную эффективность продаж. Для этого требуется определить
- -число точек, их размещение, количество персонала и их зарплату, -цены на товары.
- Пример 3.Требуется организовать строительство магазина. При этом необходимо
- указать порядок выполнения работ во времени и распределить требуемые ресурсы между
- работами так, чтобы завершить строительство вовремя и минимизировать его стоимость.
- Пример 4. Имеется сеть поставщиков и потребителей. Требуется оставить план перевозок, обеспечивающий минимальный расход топлива и максимальную прибыль.

ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Набор управляющих параметров (переменных) при проведении операции называется решением.

Решение называется допустимым, если оно удовлетворяет набору определенных условий.

Решение называется оптимальным, если оно допустимо и, по определенным признакам, предпочтительнее других, или, по крайней мере, не хуже.

Признак предпочтения называется критерием оптимальности.

Критерий оптимальности включает в себя целевую функцию и направление оптимизации или набор целевых функций и соответствующих направлений оптимизации.

Целевая функция –это количественный показатель предпочтительности или эффективности решений.

Направление оптимизации – это максимум (минимум), если наиболее предпочтительным является наибольшее (наименьшее) значение целевой функции.

Например, критерием может быть максимизация прибыли либо минимизация расходов.

Учет человеческого фактора. Задача лифта и очередей в аэропортах Британии.

ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

- Критерий оптимальности может иметь любой вид, в том числе неформализуемый.

Наиболее распространенные формализуемые критерии оптимальности заключаются в оптимизации (минимизации либо максимизации) одной либо нескольких скалярных целевых функций.

Функция называется скалярной, если ее значением является некоторое число.

Задача оптимизации скалярной функции на заданном множестве допустимых числовых решений называется задачей математического программирования. Наиболее изученными представителями однокритериальных задач математического

программирования, т .е. задач с одной целевой функцией, являются следующие задачи:

- Задачи линейного программирования. Целевая функция линейная, множество допустимых решений –выпуклый многогранник.

ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

- Задачи квадратичного программирования. Целевая функция квадратичная а множество допустимых решений – выпуклый многогранник.
- Задачи стохастического программирования. Это задачи линейного программирования с неизвестными числовыми параметрами, о которых имеются статистические данные.
- Задачи дискретного программирования. Множество допустимых решений – дискретное множество.
- Задачи целочисленного программирования. Множество допустимых решений – точки целочисленной решетки.
- Задачи булева программирования. Множество допустимых решений – 0-1, матрицы.
- Задачи динамического программирования - способ решения сложных задач путём разбиения их на более простые подзадачи. Чтобы решить поставленную задачу, требуется решить отдельные части задачи (подзадачи), после чего объединить решения подзадач в одно общее решение. Подход динамического программирования состоит в том, чтобы решить каждую подзадачу только один раз, сократив тем самым количество вычислений.

1. ПОСТАНОВКА ОСНОВНОЙ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ С n ПЕРЕМЕННЫМИ

В линейном программировании изучаются свойства решений линейных систем уравнений и неравенств с n переменными следующего вида:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \quad (i = \overline{1, k}), \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \quad (i = \overline{k+1, m}), \\ x_j \ge 0 \qquad (j = \overline{1, n}). \end{cases} \tag{1.1}$$

- В системах (1.1) коэффициенты a_{ij} и правые части b_i являются *числами*.
  - Системы (1.1) называются *системами ограничений.*
  - Точка в n – мерном пространстве

$$\overline{x} = (x_1,\ x_2, \dots, x_n), \tag{1.2}$$

удовлетворяющая системе (1.1), называется *допустимым планом*.

ОСНОВНАЯ ЗАДАЧА ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ (ОЗЛП)

- *Основной задачей линейного программирования* (ОЗЛП) с n переменными называется задача о нахождении такого допустимого плана, который доставляет *максимум* функции

$$Z = c_0 + \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \ . \tag{1.3}$$

- Функция Z, определенная соотношением (1.3), называется *функцией прибыли* (*целевой функцией*).
- Допустимый план, доставляющий максимум функции (1.3), называется *оптимальным планом*.

Иногда в задачах линейного программирования вместо нахождения максимума функции прибыли Z требуется найти *минимум функции затрат*

$$R = c_0 + \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \ .$$

ГРАФИЧЕСКИЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ОЗЛП С ДВУМЯ ПЕРЕМЕННЫМИ

Задача 2.1. Для производства компьютерных столов I-го и II-го видов требуются три типа ресурсов: дерево, пластик и трудозатраты. Потребности в ресурсах для производства одного стола каждого вида, запасы ресурсов, а также прибыль от реализации одного стола каждого вида, заданы в следующей таблице 2.1.:

Таблица 2.1.

Тип ресурса	**Единица продукции вида I**	**Единица продукции вида II**	**Запас ресурса**
Дерево ($м^2$)	1	3	24
Пластик ($м^2$)	4	1	24
Трудозатраты (чел/час)	3	2	23
Прибыль (руб.)	200	300	

Требуется, решив задачу графическим методом, найти план выпуска продукции, позволяющий получить наибольшую прибыль.

ГРАФИЧЕСКИЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ОЗЛП С ДВУМЯ ПЕРЕМЕННЫМИ

Решение. Если обозначить символом x_1 выпуск (число единиц) продукции I-го вида, а символом x_2 выпуск (число единиц) продукции II-го вида, то, в соответствии с таблицей 2.1., неизвестные x_1 и x_2 будут удовлетворять следующей системе ограничений:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \le 24, \\ 4x_1 + x_2 \le 24, \\ 3x_1 + 2x_2 \le 23, \\ x_1 \ge 0, \ x_2 \ge 0. \end{cases} \tag{2.1}$$

По условию задачи необходимо найти оптимальный план производства продукции, т.е. такой план (x_1, x_2), который доставляет максимум функции прибыли

$$Z = 200\,x_1 + 300\,x_2.$$

ГРАФИЧЕСКИЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ОЗЛП С ДВУМЯ ПЕРЕМЕННЫМИ

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 24, \\ 4x_1 + x_2 = 24, \\ 3x_1 + 2x_2 = 23, \\ x_1 = 0, \\ x_2 = 0, \end{cases} \qquad (2.2)$$

$$200x_1 + 300x_2 = 0.$$

МИНИМАЛЬНОЕ ЗНАЧЕНИЕ ЦЕЛЕВОЙ ФУНКЦИИ

$$Z(O) = Z(0;\ 0) = 200 \cdot 0 + 300 \cdot 0 = 0;$$
$$Z(A) = Z(6;\ 0) = 200 \cdot 6 + 300 \cdot 0 = 1200;$$
$$Z(B) = Z(5;\ 4) = 200 \cdot 5 + 300 \cdot 4 = 2200;$$
$$Z(C) = Z(3;\ 7) = 200 \cdot 3 + 300 \cdot 7 = 2700;$$
$$Z(D) = Z(8;\ 0) = 200 \cdot 8 + 300 \cdot 0 = 1600.$$

Таким образом, наибольшая прибыль достигается в точке $C(3;\ 7)$, и оптимальный план имеет вид $(x_1, x_2) = (3;\ 7)$.

СИМПЛЕКС МЕТОД РЕШЕНИЯ ОЗЛП (ТЕОРИЯ)

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m. \end{cases}$$

ИСХОДНАЯ ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧИ

$x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{n+m}$ **ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ПЕРЕМЕННЫЕ**

$$\begin{cases} x_{n+1} = b_1 - a_{11}x_1 - a_{12}x_2 - \ldots - a_{1n}x_n, \\ x_{n+2} = b_2 - a_{21}x_1 - a_{22}x_2 - \ldots - a_{2n}x_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{n+m} = b_m - a_{m1}x_1 - a_{m2}x_2 - \ldots - a_{mn}x_n, \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + x_{n+2} = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m, \end{cases}$$

ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧИ С УЧЕТОМ ДОПОЛНИТЕЛЬНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

СИМПЛЕКС МЕТОД РЕШЕНИЯ ОЗЛП (ТЕОРИЯ)

переменные $x_1, x_2, ..., x_n$ **- свободные**

переменные $x_{n+1}, x_{n+2}, ..., x_{n+m}$ **- базисные**

- *Базисным решением* ОЗЛП называется такое решение системы уравнений (3.3), в котором *все свободные переменные равны* 0.
- Базисное решение ОЗЛП называется *опорным решением* (*опорным планом*), если в нем *все базисные переменные неотрицательны*.
- В теории симплекс-метода доказывается, что, если максимум целевой функции при данной в ОЗЛП системе ограничений существует, то он достигается на *опорном решении*.
- Опорное решение, на котором целевая функция достигает максимума, является *оптимальным планом*.

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ ЖОРДАНОВЫХ ИСКЛЮЧЕНИЙ

1. Рассмотрим какое-нибудь уравнение системы (3.3), в котором коэффициент a_{sr} при переменной x_r отличен от 0 (это уравнение с номером s).

2. Разделим это уравнение на a_{sr}. Тогда в нем коэффициент при переменной x_r станет равным 1.

3. Вычтем из каждого i - го уравнения системы $(i \neq s)$ уравнение с номером s, умноженное на a_{sr}.

В результате переменная x_r будет исключена из всех уравнений системы, кроме уравнения с номером s, и станет *базисной*, а переменная x_{n+s} станет *свободной*.

- Описанный процесс носит название *полного жорданова исключения с разрешающим элементом* a_{sr}. Коэффициенты s - го уравнения системы (3.3) называются *разрешающей строкой*, а элементы r - го столбца матрицы системы уравнений (3.3) – *разрешающим столбцом*.

РАСЧЕТНЫЙ АЛГОРИТМ СИМПЛЕКС-МЕТОДА

Алгоритм симплекс-метода состоит из нескольких этапов: сначала происходит *построение одного из опорных решений*, а затем – «улучшение» этого решения, т.е. *переход к другим опорным решениям*, на которых значение целевой функции *не уменьшается*.

Первый этап алгоритма. Формирование симплекс-таблицы

		x_1	x_2	…	x_n	x_{n+1}	x_{n+2}	…	x_{n+m}	Σ
x_{n+1}	b_1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1n}	1	0	…	0	
x_{n+2}	b_2	a_{21}	a_{22}	…	a_{2n}	0	1	…	0	
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	
x_{n+m}	b_m	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mn}	0	0	…	1	
z	c_0	$-c_1$	$-c_2$	…	$-c_n$	0	0	…	0	
φ	φ_0	φ_1	φ_2	…	φ_n	φ_{n+1}	φ_{n+2}	…	φ_{n+m}	

Для каждого уравнения системы (3.3) в первом столбце таблицы указывается соответствующая базисная переменная. Строка z называется *целевой строкой*. Строка φ добавляется в таблицу лишь в случае поиска опорного решения и называется *фиктивной целевой строкой*.

РАСЧЕТНЫЙ АЛГОРИТМ СИМПЛЕКС-МЕТОДА

Таблице соответствует базисное решение системы (3.3) вида

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0, x_{n+1} = b_1, x_{n+2} = b_2, \ldots, x_{n+m} = b_m. \qquad (3.4.1.1)$$

Возможны два случая:

а) Все числа $b_1, b_2, \ldots, b_m$ неотрицательны, т.е. решение (3.4.1.1) является опорным. В этом случае строку φ в таблице не заводим и сразу переходим ко 2-му этапу.

b) Среди чисел $b_1, b_2, \ldots, b_m$ существуют отрицательные, т.е. решение (3.4.1.1) не является опорным. Тогда для построения опорного решения запишем в строку φ сумму тех строк таблицы, где стоят отрицательные значения b_i, а затем перейдем к анализу и улучшению решения (3.4.1.1) по фиктивной целевой строке φ.

ВТОРОЙ ЭТАП АЛГОРИТМА. АНАЛИЗ РЕШЕНИЯ ПО ЦЕЛЕВОЙ (ФИКТИВНОЙ ЦЕЛЕВОЙ) СТРОКЕ СИМПЛЕКС ТАБЛИЦЫ

Рассмотрим элементы целевой (фиктивной целевой) строки, стоящие в столбцах $x_1, \dots, x_{n+m}$. Если среди них имеется хотя бы один отрицательный элемент, то решение надо улучшать по правилам этапа 3.

Если же все указанные элементы неотрицательны, то в случае, когда анализируется опорное решение по целевой строке z, это означает, что на этом решении функция z достигает максимума и нужно переходить к выписыванию соответствующего оптимального плана (этап 4).

В случае поиска опорного решения (анализ по фиктивной целевой строке φ) вся строка φ должна состоять из нулей, иначе система ограничений противоречива, и ОЗЛП не имеет решения. Получение же нулевой строки φ свидетельствует о том, что опорное решение построено. В этом случае фиктивная целевая строка удаляется из таблицы, а решение анализируется по целевой строке z.

ТРЕТИЙ ЭТАП АЛГОРИТМА. УЛУЧШЕНИЕ РЕШЕНИЯ ПО ЦЕЛЕВОЙ (ФИКТИВНОЙ ЦЕЛЕВОЙ) СТРОКЕ СИМПЛЕКС ТАБЛИЦЫ.

1. Найдем среди элементов $z_1, z_2, ..., z_n$ целевой строки z (или среди элементов $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n$ в случае фиктивной целевой строки φ) *наибольший по абсолютной величине отрицательный элемент*. Пусть это будет элемент z_r (или φ_r), тогда столбец x_r *объявим разрешающим*.

2. Найдем среди дробей вида ${b_i}/{a_{ir}}$ $(i = 1, 2, ..., m)$ *наименьшую неотрицательную дробь* (пусть это будет дробь ${b_s}/{a_{sr}}$), и *объявим строку* x_{n+s} *разрешающей*. Если же все дроби вида ${b_i}/{a_{ir}}$ окажутся отрицательными, то это означает, что при заданной системе ограничений функция z неограничена, т.е. поставленная ОЗЛП решений не имеет.

3. Элемент a_{sr}, стоящий на пересечении разрешающей строки и разрешающего столбца, *объявим разрешающим,* и, для наглядности, его можно обвести в таблице прямоугольником.

ТРЕТИЙ ЭТАП АЛГОРИТМА. УЛУЧШЕНИЕ РЕШЕНИЯ ПО ЦЕЛЕВОЙ (ФИКТИВНОЙ ЦЕЛЕВОЙ) СТРОКЕ СИМПЛЕКС ТАБЛИЦЫ.

4. Заготовим новую симплекс-таблицу, заменив в первом столбце переменную x_{n+s} на переменную x_r.

5. Пересчитаем все элементы старой симплекс-таблицы, включая строки z и φ, а также столбец Σ, по правилам метода полных жордановых исключений с разрешающим элементом a_{sr}. Результат запишем в новую симплекс-таблицу.

Контроль правильности вычислений осуществляем при помощи сравнений сумм элементов каждой строки с числами, записанными в последнем столбце Σ. Расхождение результатов свидетельствует об арифметической ошибке, и соответствующую строку надо пересчитать.

ЧЕТВЕРТЫЙ ЭТАП АЛГОРИТМА. Запись оптимального плана

В плане указываем значения только исходных переменных $x_1, x_2, ..., x_n$, причем значения тех из них, которые являются свободными, полагаем равными нулю, а значения остальных переменных берем из второго столбца таблицы (столбца свободных членов). Из этого же столбца выписываем максимальное значение z.

ПРИМЕР РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ СИМПЛЕКС-МЕТОДОМ

Таблица 1

	Кукуруза	Овес	Рожь
Ккал	200	175	100
Витамин *C* (г)	5	1	3
Цена (руб.)	6	4	1

Требуется составить наиболее дешевый комбинированный корм, 1кг которого содержал бы не менее 125 ккал и не менее 2 г витамина C.

Решение. Обозначим содержание кукурузы, овса и ржи в 1кг комбикорма символами x_1, x_2 и x_3 (кг), соответственно. По условию задачи эти переменные удовлетворяют следующей системе ограничений:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ 200x_1 + 175x_2 + 100x_3 \geq 125, \\ 5x_1 + x_2 + 3x_3 \geq 2, \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0. \end{cases} \qquad (3.5.1)$$

Требуется найти план, доставляющий минимум функции затрат

$$R = 6x_1 + 4x_2 + x_3 \to \min. \qquad (3.5.2)$$

ПРИМЕР РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ СИМПЛЕКС-МЕТОДОМ

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ -8x_1 - 7x_2 - 4x_3 \le -5, \\ -5x_1 - x_2 - 3x_3 \le -2. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ -8x_1 - 7x_2 - 4x_3 + x_4 = -5, \\ -5x_1 - x_2 - 3x_3 + x_5 = -2. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ -4x_1 - 3x_2 + x_4 = -1, \\ -2x_1 + 2x_2 + x_5 = 1. \end{cases}$$

Таблица 2

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Σ
x_3	1	1	1	1	0	0	4
x_4	–1	–4	–3	0	1	0	–7
x_5	1	–2	2	0	0	1	2
z	–1	5	3	0	0	0	7
φ	–1	–4	–3	0	1	0	–7

$$z = -6x_1 - 4x_2 - x_3 = -1 - 5x_1 - 3x_2 \to \max.$$

Поскольку базисное решение

$$x_1 = x_2 = 0, \quad x_3 = 1, \quad x_4 = -1, \quad x_5 = 1,$$

не является опорным ($x_4 < 0$), то для поиска опорного решения в симплекс-таблицу добавляется фиктивная целевая строка φ, в которую записывается строка x_4.

ПРИМЕР РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ СИМПЛЕКС-МЕТОДОМ

Таблица 2

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Σ
x_3	1	1	1	1	0	0	4
x_4	–1	–4	–3	0	1	0	–7
x_5	1	–2	2	0	0	1	2
z	–1	5	3	0	0	0	7
φ	–1	–4	–3	0	1	0	–7

В строке φ среди чисел $\{-4, -3, 0, 1, 0\}$ наибольшим по абсолютной величине отрицательным числом является число $\{-4\}$, поэтому *разрешающим столбцом объявляем столбец* x_1. Для элементов таблицы, расположенных в строках x_3, x_4 и x_5, рассмотрим дроби

$$\frac{1}{1}=1,\ \frac{-1}{-4}=0,25 \text{ и } \frac{1}{-2}=-0,5,$$

числители которых являются элементами второго столбца таблицы, а знаменатели – элементами *разрешающего столбца*. Наименьшей неотрицательной дробью является дробь $0,25$, поэтому строка x_4 *объявляется разрешающей строкой*. Таким образом, элемент таблицы, стоящий на пересечении строки x_4 и столбца x_1 (число -4) является *разрешающим элементом*.

ПРИМЕР РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ СИМПЛЕКС-МЕТОДОМ

Таблица 3

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Σ
x_3	0,75	0	0,25	1	0,25	0	2,25
x_1	0,25	1	0,75	0	–0,25	0	1,75
x_5	1,5	0	3,5	0	–0,5	1	5,5
z	–2,25	0	–0,75	0	1,25	0	–1,75
φ	0	0	0	0	0	0	0

Пересчет по правилу жордановых исключений

Так как строка φ стала нулевой, то опорное решение получено. Исключим строку φ из таблицы и проведем анализ по целевой строке z.

Среди чисел $\{0;\ -0,75;\ 0;\ 1,25;\ 0\}$ наибольшим по абсолютной величине отрицательным числом является число $\{-0,75\}$, поэтому *разрешающим столбцом объявляем столбец* x_2. Для элементов таблицы, расположенных в строках x_3, x_1 и x_5, рассмотрим дроби $\frac{0,75}{0,25}=3$, $\frac{0,25}{0,75}=\frac{1}{3}$ и $\frac{1,5}{3,5}=\frac{3}{7}$, числители которых являются элементами второго столбца таблицы, а знаменатели – элементами *разрешающего столбца*. Наименьшей неотрицательной дробью является дробь $\frac{1}{3}$, поэтому строка x_1 *объявляется разрешающей строкой*.

ПРИМЕР РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ СИМПЛЕКС-МЕТОДОМ

Таблица 3

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Σ
x_3	0,75	0	0,25	1	0,25	0	2,25
x_1	0,25	1	0,75	0	–0,25	0	1,75
x_5	1,5	0	3,5	0	–0,5	1	5,5
z	–2,25	0	–0,75	0	1,25	0	–1,75
φ	0	0	0	0	0	0	0

Таблица 4

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Σ
x_3	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	1	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{5}{3}$
x_2	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$	1	0	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{7}{3}$
x_5	$\frac{2}{3}$	$-\frac{28}{3}$	0	0	$\frac{4}{3}$	2	$-\frac{16}{3}$
z	–2	1	0	0	1	0	0

Теперь пересчитаем все элементы Таблицы 3 в новую симплекс-таблицу по правилам метода полных жордановых исключений с разрешающим элементом $0,75$. Получим следующую Таблицу 4:

В строке z среди чисел $\{1;\ 0;\ 0;\ 1;\ 0\}$ нет отрицательных.

оптимальный план: $x_1 = 0,\quad x_2 = \frac{1}{3},\quad x_3 = \frac{2}{3}$

Максимальное значение целевой функции z равно -2, а минимальное значение функции затрат R равно 2.