ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ АВТОМОБІЛЬНО-ДОРОЖНІЙ УНІВЕРСИТЕТ

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до практичних занять з дисципліни
«Введення в дослідження операцій в транспортних системах»
для студентів денної форми навчання
спеціальності 7.100403 «Транспортні системи».
Тема: «Лінійне програмування».

Затверджено методичною
радою університету

Харків 2010

Укладачі: доц. Плехова Г.А.

ас. Козачок Л.Н.

Кафедра прикладної математики

Мета вивчення дисципліни “Введення в дослідження операцій в транспортних системах” – формування у студентів знань основних положень загальної методології дослідження операцій на транспорті, методів та моделей дослідження операцій при розв'язанні транспортних задач.

При вивченні дисципліни студенти повинні закріпити теоретичний матеріал, вирішуючи конкретні задами на практичних заняттях,

В процесі управління, організації та планування роботи транспортних засобів дуже часто виникають задачі оптимізаційного характеру, тобто коли з безліч варіантів використовування наявних ресурсів, транспортно-технологічних схем та ін. необхідно вибрати кращій варіант. Ці задачі, як правило, виражають прагнення досягти максимуму або мінімуму деякого, раніше вибраного показника якості процесу (роботи), а вони виникають з-за обмеженості наявних ресурсів. В зв'язку з цим, оптимальний план знаходиться серед планів, які задовольняють обмеження, які накладаються ресурсами на параметри управління. Все це потребує від спеціаліста знань та вмінь в області оптимального управління та планування.

Запропоновані завдання передбачають використовування при розв'язанні задач методів математичного програмування (лінійного, динамічного), сітьового планування та управління, комбінаторного аналізу.

Навчальним планом передбачено читання-лекцій – 36 годин та проведення практичних занять - 36 годин. По закінченню семестру студенти складають іспит.

Аудиторні практичні заняття (згідно з розкладом) включають усне опитування студентів для виявлення ступеня їх підготовленості до виконання завдань (перелік контрольних запитань наведені у кожному завданні), розгляд методики виконання завдань, визначення початкових даних та самостійне виконання особистих завдань.

Самостійна поза аудиторна підготовка являє собою вивчення матеріалу лекцій та літературних джерел, рекомендованих до кожного завдання. В разі потреби завершуються розрахунки попереднього завдання.

Після виконання особистих завдань студенти оформляють звіт про практичні заняття в рукописному (машинописному) вигляді, бажано на аркушах листах формату А4. При цьому розрахунки супроводжуються коротким пояснювальним текстом, в якому показується параметр та розрахунки. Параметрам, які входять до формул, необхідно дати визначення та вказати розмірність, якщо вона є. В кінці звіту необхідно зробити висновки та навести перелік використаних літературних джерел, на які є посилання в тексті. Титульний лист оформляється у звичайному порядку. Остаточно оформлений звіт повинен бути підписаний студентом та представлений для перевірки та затвердження, після цього студент допускається до іспиту.

ЗАНЯТТЯ 1

Розробка математичної моделі лінійного програмування та графоаналітичний метод її розв'язання.

Мета заняття – придбати практичні навички складання математичної моделі задачі лінійного програмування та її розв'язання графоаналітичним методом.

Завдання. Скласти математичну модель задачі та розв'язати її графоаналітичним методом.

Задача. Необхідно сформувати і спрямувати до сільськогосподарських районів A і B вантажно-транспортні загони для вивозу врожаю. Укомплектованість кожного загону технічними засобами та їх загальна кількість наведені в табл. 1.1. Необхідно визначити кількість вантажно-транспортних загонів, направлених до кожного району, забезпечивши максимальний вивіз врожаю з урахуванням добової продуктивності; значення надані в табл. 1.2.

Вказівки до виконання

За своїм варіантом в табл. 1.1 та 1.2 знайти вихідні дані. Варіант завдання в табл. 1.1 для сільськогосподарських районів відповідає останній цифрі номера залікової книжки, а для загальної кількості технічних засобів – передостанній; в табл. 1.2 варіант завдання визначається цілою частиною результату, отриманого від ділення суми двох останніх цифр номера залікової книжки на два.

Виконання завдання здійснюється у такій послідовності:

1. Складання математичної моделі задачі.

1.1. Вибір параметрів управління.

Візьмемо за параметри управління кількість загонів, які треба відправити до сільськогосподарських районів *A* та *B*. Їх кількість невідома, тому нехай

x_1 − кількість загонів, спрямованих до району *A*;

x_2 − кількість загонів, спрямованих до району *B*.

Вектор $X=(x_1;\ x_2)$ – вектор управління або план, і знайти його треба такий, щоб забезпечити максимальне виконання завдання згідно з умовою задачі.

1.2. Встановлення критерія оптимальності.

При розв’язанні даної задачі нам потрібно забезпечити максимальний вивіз врожаю із с/г районів *A* і *B*. Добова продуктивність по вивозу врожаю для кожного загону, спрямованого до району *A* позначається p_1, а така ж характеристика для району *B* – p_2, значення яких наведені у таблиці 1.2.

Тоді із району А за добу буде вивезено врожаю $p_1 x_1$, а із району В – $p_2 x_2$.

Згідно з умовою задачі нам необхідно знайти такі x_1 та x_2, щоб величина, яка дорівнює $p_1x_1+p_2x_2$ набувала свого максимального значення.

1.3. Складання системи обмежень та вираження цільової функції.

Крім продуктивності в задачі надаються умови, яким повинна відповідати укомплектованість кожного вантажно-транспортного загону та загальна кількість технічних засобів. Ми маємо чотири види технічних засобів, їх кількість у кожному загоні j-го району $j=\overline{1,2}$ позначимо $a_{ij}, i=\overline{1,4}$, а загальну кількість машин i-го виду, $i=\overline{1,4}$ позначимо b_i , тому

$$\sum_{j=1}^{2} a_{ij}x_j \le b_j, i=\overline{1,4}$$

Ці нерівності, які задаються умовою задачі і складають систему обмежень для невідомих x_1, x_2, а нерівностей у системі буде стільки, скільки видів машин :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \le b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 \le b_3, \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 \le b_4. \end{cases}$$

Цільовою функцією виберемо ту функцію, екстремальне значення якої ми бажаємо знайти. У нашій задачі необхідно знайти максимальний вивіз врожаю, тобто максимальне значення функції

$$Z = p_1x_1 + p_2x_2.$$

Детальніше, потрібно отримати такий план $X=(x_1, x_2)$, який визначає кількість загонів, спрямованих до району *A* та *B* таку, що значення функції $Z = z(X)$ буде максимальним.

1.4. Запис математичної моделі задачі.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \le b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 \le b_3, \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 \le b_4, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0; \end{cases}$$

$$Z = p_1 x_1 + p_2 x_2 \to \max .$$

2. Розв'язання задачі лінійного програмування графоаналітичним методом.

2.1. Побудова багатокутника системи обмежень та лінії рівня цільової функції.

Побудуємо область припустимих значень для невідомих x_1 та x_2 , яка об'єднує всі умови, яким вони задовольняють. Ця множина Ω для x_1, x_2 графічно буде мати вигляд багатокутника (у загальному вигляді).

2.2. Визначення напрямку переміщення лінії рівня цільової функції.

Напрямок максимального зростання функції Z визначається вектором градієнтного напрямку $gradZ = \frac{\partial z}{\partial x_1}\bar{i} + \frac{\partial z}{\partial x_2}\bar{j},$ тобто

$$\overline{P} = gradZ = (p_1, p_2).$$

Градієнтний вектор завжди перпендикулярний лінії рівня цільової функції Z .

2.3. Знаходження оптимальних значень параметрів управління.

а) побудувати вектор $\overline{P} = (p_1, p_2);$

б) побудувати пряму, яка проходить через початок координат та перпендикулярна вектору $\overline{P}$ − лінію рівня цільової функції;

в) переміщати лінію рівня цільової функції у напрямку вектора $\overline{P}$;

г) функція Z набуває свого максимального значення в останній точці зустрічі лінії рівня з багатокутником рішень. Це буде вершина багатокутника рішень, або його сторона, координати якої і будуть рішенням задачі.

2.4. Перевірка аналітичне здобутих значень параметрів управління розв'язанням відповідної системи рівнянь.

3. Написати висновок виконання практичного заняття, в якому вказати знайдені значення невідомих та максимального значення функції Z.

Таблиця 1.1 – Кількість технічних засобів вантажно-транспортного загону та загальна їх кількість

Варіант	Технічні засоби			
	Автомобіль	Техдопомога	Навантажений механізм	Меддопомога
Сільськогосподарський район *A*				
0	100	2	1	1
1	50	1	1	1
2	75	1	1	1
3	150	3	2	2
4	60	1	1	1
5	80	2	1	1
6	90	2	1	1
7	70	1	1	1
8	120	3	2	2
9	110	2	2	1
Сільськогосподарський район *B*				
0	150	3	2	2
1	75	1	1	1
2	100	2	1	1
3	100	2	1	1
4	90	2	1	1
5	120	3	2	2
6	60	1	1	1
7	120	3	2	2
8	80	2	1	1
9	70	1	1	1
Загальна кількість технічних засобів				
0	1200	18	16	8
1	1000	16	17	7
2	900	14	15	9
3	1500	19	12	10
4	1100	17	10	8
5	1400	18	11	7
6	800	14	9	8
7	950	15	10	9
8	1050	16	12	10
9	1150	17	14	12

Таблиця 1.2 – Продуктивність добова вантажно-транспортних загонів

Сільськогосподарський район	Варіант									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	5,0	6,0	4,5	5,5	3,5	2,5	6,5	4,0	5,5	3,0
B	2,5	3,0	3,5	4,0	5,0	4,5	3,0	5,5	2,5	4,5

Контрольні запитання

1. Мета застосування економіко-математичних методів в управлінні та організації транспортного виробництва.

2. Перелік задач транспортного виробництва, що розв'язуються з використанням математичних методів.

3. Оптимальне рішення.

4. Значення понять лінійне, нелінійне та динамічне програмування.

5. Структура математичної моделі загальної задачі лінійного програмування.

6. Основні етапи побудови математичної моделі.

7. Геометричні образи структурних елементів математичної моделі.

8. Порядок розв'язання загальної задачі лінійного програмування.

9. Альтернативні оптимальні рішення.

ЛІТЕРАТУРА [1, 3, 4, 5]

ЗАНЯТТЯ 2

Рішення задачі лінійного програмування симплекс-методом.

Мета заняття – придбати практичні навички рішення задач лінійного програмування симплекс-методом, використовуючи симплекс-таблицю.

Завдання. Вирішити симплекс-методом задачу лінійного програмування, використовуючи симплекс-таблиці. Знайти додаткові значення змінних $x_1, x_2, x_{3,}$ які спрямовують в максимум лінійну форму (2.2) при умовах (2.1).

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \le b_2 , \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \le b_3 \end{cases} \qquad (2.1)$$

$$F = c_0 + c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 \to \max. \qquad (2.2)$$

Вказівки до виконання

За своїм варіантом в табл. 2.1 знайти значення постійних величин виражень (2.1) та (2.2), де *i* – остання, *j* – предостання цифра номеру залікової книжки.

Таблиця 2.1 - Значення постійних величин

$a_{11} = 2 + i$	$a_{12} = 7 + j$	$a_{13} = 1 + i$	$b_1 = 12 + i + j$
$a_{21} = 3 + j$	$a_{22} = 3 + i$	$a_{23} = 2 + j$	$b_2 = 18 + i + j$
$a_{31} = 2 + i + j$	$a_{32} = 2 + i + j$	$a_{33} = 2 + j$	$b_3 = 17 + i + j$
$c_0 = 0$	$c_1 = 2 + i + j$	$c_2 = 5 + j$	$c_3 = 3 + i$

Виконання завдання здійснюється у такій послідовності:

1. Записати систему обмежень для невідомих у канонічному вигляді.

Введемо додаткові змінні x_4, x_5, x_6 до кожної нерівності системи для того, щоб записати їх у вигляді рівнянь.

Якщо кожне обмеження має змінну, яка входить до лівої частини рівняння з коефіцієнтом 1, а до всіх інших обмежень – з коефіцієнтом 0, то ця система обмежень представлена у переважному виді. Для нашої задачи система обмежень має переважний вигляд відносно змінних x_4, x_5, x_6.

2. Скласти опорний план.

Якщо усі змінні, крім переважних прирівняти до 0, то переважні змінні будуть дорівнювати правим частинам рівнянь системи обмежень b_1, b_2, b_3. Згідно з теоремою о структурі координат базисного рішення отримане рішення (план) буде опорним.

$$X_0 = (0,0,0,b_1,b_2,b_3) \text{ – базисне рішення,}$$

x_4, x_5, x_6 – базисні змінні,

x_1, x_2, x_3 – вільні змінні.

3. Симплекс – таблиця.

Записати усі дані до симплекс – таблиці, основна частина якої складається з коефіцієнтів при основних змінних усіх рівнянь і одиничної матриці.

Симплекс-метод складається з математичних кроків, при яких від початкового опорного плану ми рухаємось до знаходження такого рішення, при якому функція цілі отримає своє максимальне значення, – знаходимо оптимальний план.

4. Кроки метода:

а) Оцінки змінних.

До симплекс-таблиці нижче додають рядок (індексний рядок), в яку записують оцінки змінних, обчислені за формулами:

$\Delta_0 = c_Б A_0$, де $c_Б$ – коефіцієнти при базисних змінних у функції цілі;

$A_0 = (b_1, b_2, b_3)$ – вектор вільних членів у системі обмежень.

Δ_0 дає значення функції цілі для наданого плану X_0.

$\Delta_0 = z(X_0)$

$\Delta_0 = c_Б A_j - c_j$; – оцінки вільних змінних, де

A_j – вектор коефіцієнтів при цій змінній у системі обмежень;

c_j – коефіцієнт при цій змінній у запису функції цілі.

Оцінки базисних змінних завжди дорівнюють 0.

Отриманий план дає функції цілі максимальне значення $z(X_0) = \Delta_0 = maxZ$, якщо усі оцінки вільних змінних невід'ємні.

Тобто вести обчислення у симплекс-методі потрібно до тих пір, доки усі оцінки вільних змінних не стануть ≥ 0.

б) Розв'язуючий стовпчик та рядок.

Після того, як знайдені Δ_j із значень $\Delta_j < 0$ обираємо найменше, відповідний стовпчик називають розв'язуючим.

Щоб отримати розв'язуючий рядок треба елементи стовпчика правих частин поділити на додатні елементи розв'зуючого стовпчика та серед отриманих часток обираємо найменшу:

$$\min_{a_{ij_0}>0}\left\{\frac{b_i}{a_{ij_0}}\right\}=\frac{b_{i_0}}{a_{i_0j_0}}\,.$$

Це число буде відповідати деякому рядку i_0, цей рядок називають розв’язуючим.

При рішенні задачі на *max Z* , якщо у розв'язуючому стовпчику нема жодного додатного елемента, то функція цілі *Z* необмежена зверху та немає *max* значення.

Змінну x_{j_0} , яка відповідає розв'язуючому стовпчику треба ввести до складу базисних змінних, а змінну x_{i_0} виводять із базису. Таким чином, не змінив нульові значення інших вільних змінних, потрібно збільшити функцію *Z* за рахунок зменшення значення x_{j_0}.

в) Друга симплекс-таблиця.

Для нових базисних змінних будують нову симплекс-таблицю, аналогічну першій. Щоб її заповнити, елементи розв'язуючого рядка ділять на розв'язуючий елемент, та результат записують у відповідний рядок, у тій клітинці, де стояв розв'язуючий елемент, тепер буде 1. Інші елементи розв'язуючого стовпчика будуть дорівнювати 0, так як x_{j_0} − базисна.

Щоб знайти інші елементи нової симплекс-таблиці застосовують правило прямокутника:

в початковій таблиці виділяють прямокутник, вершинами якого є потрібні для обчислення елементи;

діагональ,яка містить розв’язуючий та шуканий елементи називають головною, а іншу – побічною;

від добутку елементів головної діагоналі віднімають добуток кутових елементів побічної діагоналі та отримане число ділять на розв’язуючий елемент.

г) Отримавши нову симплекс-таблицю з нею поступають відповідно описаному методу.

Обчислення роблять до тих пір, доки усі Δ_j не стануть ≥0.

За даними останньої симплекс-таблиці визначити значення змінних, які забезпечують оптимальне розв'язання.

Контрольні запитання

1. Як будується симплекс-таблиця?.
2. Як визначаються ключовий стовпець, рядок і число?
3. Як визначаються числа головного рядку?
4. Правила визначення похідних чисел.
6. Ознака оптимального рішення.
7. Що визначають в результаті рішення числа в стовпці вільних членів і число в клітинці індексного рядку стовпця вільних членів?

ЛІТЕРАТУРА [1, 3, 5]

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Кожин А. Н. Математические методы в планировании и управлении грузовыми автомобильными перевозками. – М: Высшая школа, 1979.

2. Бобарыкин В.А., Тимошин Е.Ф. Математические методы на автотранспорте. – Л., 1969.

3. Громовой Э.П. Математические методы и модели в планировании и управлении на морском транспорте. – М.: Транспорт, 1979.

4. Пьяных С.М. Экономико-математические методы оптимального планирования работы речного транспорта. – М.: Транспорт, 1988.

5. Геронимус Б.Л. Экономико-математические методы в планировании на автомобильном транспорте. – М.: Транспорт, 1982

6. Воркут А.И. Грузовые автомобильные перевозки. – К.: Вища школа, 1986.