МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
"ХАРКІВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ"

О. С. МАЗМАНІШВІЛІ

ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ

НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК ДО ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України
як навчальний посібник для студентів спеціальностей
7.080201 "Інформатика" та 7.080202 "Прикладна математика"

Затверджено Редакційно-видавничою
Радою НТУ "ХПІ"

Харків НТУ "ХПІ" 2010

ББК 22.171
М12
УДК 519.2

Рецензенти :

Є.В. Бодянський, д-р техн. наук, проф., Харківський національний університет радіоелектроніки

Г.І. Загарій, д-р техн. наук, проф., Харківська державна академія залізничного транспорту

Гриф привласнено Міністерством освіти і науки України, лист № @@@@ від """"

М12 Теорія ймовірностей: Навчальний посібник до практичних занять / Мазманішвілі О.С. — Харків: НТУ "ХПІ", 2010. — 210 с. — Укр. мова.

ISBN 966–593–299–1

Підготовлений для виконання практикуму з курсу "Теорія ймовірностей". У посібнику систематизовано матеріали з основних тем дисципліни: теоретичні відомості, необхідні для розв'язання задач, приклади таких розв'язувань.

Призначений для студентів, що навчаються за спеціальністю "Прикладна математика". Буде корисний студентам фізико–математичних, інженерно–технічних і економічних спеціальностей університетів, а також фахівцям.

Подготовлено для выполнения практикума по курсу "Теория вероятностей". В пособии систематизированы материалы по основным темам дисциплины: теоретические сведения, необходимые для решения задач, примеры таких решений.

Предназначено для студентов, обучающихся по специальности "Прикладная математика". Будет полезно студентам физико–математических, инженерно–технических и экономических специальностей университетов, а также специалистам.

This textbook contains tasks on Theory of Probabilities sorted according to the topics of the course: theoretical information that is necessary for solving the tasks, examples of the solutions.

This textbook is created for students on Applied Mathematics. It can also be useful for students on Mathematics, Physics, Engineering and Economy.

Іл. 58. Табл. 3. Бібліогр. 28 назв.

ББК 22.171

ISBN 966–593–299–1

Зміст

Вступ

Це видання є посібником для студентів з виконання циклу практичних робіт з дисципліни "Теорія ймовірностей".

Посібник включає матеріал традиційних розділів, що утворюють в сукупності зміст дисципліни "Теорія ймовірностей" за такими головними темами:

1. Основні поняття теорії ймовірностей.
2. Основні теореми теорії ймовірностей.
3. Закони розподілу випадкових величин.
4. Нормальний закон розподілу.
5. Системи випадкових величин.
6. Закони розподілу функцій випадкових величин.
7. Граничні теореми.
8. Випадкові процеси.

Видання за своїм задумом переслідує основну мету: дати студентам зручний для роботи і практично опрацьований матеріал, який допомагає навчати їх методам та техніці розв'язання різноманітних задач теорії ймовірностей з урахуванням того, що сьогодні такі методи мають бути обов'язково орієнтовані на сучасний теоретичний рівень. Тому, з одного боку, частково видозмінюється навчання самій техніці обчислень, а з іншого боку, розширюється сфера застосувань, що вивчаються. До видання додано такий розділ, як "Випадкові процеси", і розширено матеріал інших розділів, зокрема, за рахунок великої кількості графічних ілюстрацій.

Таким чином, посібник систематизує та організує навчальний матеріал з практичних аспектів освоєння методів та заходів сучасної теорії ймовірностей. Для зручності роботи, а також для можливості самостійного поглибленого вивчення й контролю засвоєння матеріалу, посібник скомпонований із окремих самостійних тем, адаптованих до відповідних розділів дисципліни "Теорія ймовірностей".

В кожному розділі наведено необхідні плчаткові та довідкові дані, принципи побудови методів розв'язання відповідних задач, типові алгоритми, сформульовано завдання для самостійної роботи, а також контрольні запитання. Практикум базується на знаннях, що їх отримують студенти в стандартному обсязі спеціальності "Прикладна математика".

Посібник є розв'язником задач з курсу теорії ймовірностей. Він містить як традиційні приклади та задачі цього курсу, так і нові, які укладач узяв з наукової практики.

Це видання можна розглядати як першу (односеместрову) частину посібника для двосеместрової дисципліни "Теорія ймовірностей та математична статистика", друга (також односеместрова) частина якого – "Математична статистика" – підготовлена у вигляді відповідного посібника для практичних занять. Викладання матеріалу та всі позначення в цих двох частинах узгоджені між собою.

Головний матеріал посібника доповнено фондом завдань для самостійної роботи і контрольних перевірок знань, який подано у додатку. Задачі відокремлюються як за складністю розв'язань, так і за практичною значущістю. Матеріал цього фонду може бути корисним при організації навчальних програм різноманітної насиченості, зокрема, для контрольних, практичних і самостійних позааудиторних занять.

Укладений матеріал може бути адаптований до навчальних програм різного обсягу та тривалості.

1. Основні поняття теорії ймовірностей

1.1. Випадкові події

Теорія ймовірностей – прикладна математична наука, що вивчає закономірності у випадкових явищах.

Область застосування теорії ймовірностей – потоки масових однорідних подій.

Методи теорії ймовірностей можуть бути пристосовані тільки для дослідження однорідних масових випадкових явищ. Вони не дають можливості передбачити наслідок окремого випадкового явища, але дозволяють розрахувати середній результат маси однорідних випадкових подій.

Метою теорії ймовірностей є отримання на базі точних математичних методів кількісних результатів щодо маси однорідних випадкових подій, які дозволять зробити певні практичні висновки.

Одним з основних понять теорії ймовірностей є поняття *випадкової події* (або просто події).

Подією називається будь-який факт, що в результаті дослідження (випробування, експерименту) може відбутися або не відбутися. Приклади подій:

випадання шістки при киданні гральної кості;
відмова технічного приладу під час його роботи;
викривлення повідомлення при передачі його каналом зв'язку.

З подіями зв'язуються деякі *позитивні числа*, що характеризують ступінь їхньої об'єктивної можливості, які називаються **ймовірністю подій**.

Існує декілька підходів до поняття *ймовірності.* Один з них ("класичний") заснований на підрахунку кількості наслідків досліду, сприятливих даній події, і його відношення до загального числа рівноймовірних наслідків. В основі іншого підходу ("частотного" або "статистичного") – поняття частоти події у даній серії дослідів.

Частотою події у серії з N дослідів називається результат відношення кількості дослідів, в яких відбулася дана розглядувана подія, до загальної кількості зроблених дослідів.

Існують випадкові явища, в яких спостерігається *тривалість частот*; вона полягає в тому, що при збільшенні числа незалежних дослідів N частота події стабілізується, наближаючись до певної постійної величини; ця величина й називається *ймовірністю події.*

Нехай робиться деякий дослід (експеримент, випробування), результат якого є заздалегідь невідомим, випадковим. Розглянемо безліч Ω всіх можливих наслідків цього досліду: кожний його елемент ω (один окремий наслідок досліду) будемо називати *елементарною подією*, а всю безліч Ω – *простором елементарних подій*

ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	Ω
ω_5	ω_6	ω_7	ω_8	
ω_9	ω_{10}	ω_{11}	ω_{12}	
ω_{13}	ω_{14}	ω_{15}	ω_{16}	

Рисунок 1.1 — Приклад простору елементарних подій $\Omega = \sum\limits_{n=1}^{N} \omega_n$, який утворен з $N = 16$ елементарних подій

(рис. 1.1). Підмножини множини Ω називаються **подіями** (або випадковими подіями); будь-яка подія A — це підмножина множини Ω: $A \subseteq \Omega$.

Події, що не перетинаються, A та B (такі, що $AB = \emptyset$) називаються *несумісними*; поява однієї з них виключає появу іншої. Декілька подій A_1, A_2, $\ldots$, A_N називаються *попарно несумісними* (або просто несумісними), якщо поява кожної з них виключає появу кожної з інших.

Кажуть, що декілька подій A_1, A_2, $\ldots$, A_N *утворюють повну групу*, якщо $\sum_{n=1}^{N} A_n = \Omega$, тобто їх сума є достовірною подією (іншими словами, у результаті досліду неодмінно відбудеться хоча б одна з них).

Приклад

Випробування – кидання гральної кості; події $A = \{1, 2\}$, $B = \{2, 3, 4\}$ та $C = \{4, 5, 6\}$ утворюють повну групу: $A + B + C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = \Omega$.

1.2. Аксіоми теорії ймовірностей

Нехай кожній події ставиться у відповідність деяке *число*, що називається *ймовірністю події.*

Ймовірність події A прийнято позначати через P(A) [або Pr(A), або Prob(A)].

Припустимо, що ймовірності подій задовольняють наступним аксіомам:

1. *Ймовірність будь-якої події* A *укладена поміж нулем та одиницею*:

$$0 \le P(A) \le 1. \tag{1.1}$$

2. Аксіома додавання ймовірностей: *якщо* A і B – *несумісні події, то*

$$P(A + B) = P(A) + P(B). \tag{1.2}$$

Аксіома відразу узагальнюється на будь-яке скінченне число подій: *якщо* A_1, A_2, $\ldots$, A_N – *несумісні події, то*

$$P\Big(\sum_{n=1}^{N} A_n\Big) = \sum_{n=1}^{N} P(A_n). \tag{1.3}$$

3. Аксіома додавання ймовірностей для нескінченної послідовності подій: *якщо* $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \mathrm{A}_3, \ldots$ – *несумісні події, то*

$$\mathrm{P}\Big(\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{A}_n\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{P}(\mathrm{A}_n). \tag{1.4}$$

Викладені аксіоми теорії ймовірностей дозволяють обчислювати ймовірності будь-яких подій (підмножин простору Ω) за допомогою ймовірностей елементарних подій (якщо їх кількість є скінченне чи зчисленне число). Питання, як визначити ймовірності елементарних подій, при цьому не розглядається. На практиці вони визначаються або з міркувань, пов'язаних з симетрією досліду (наприклад, для симетричної гральної кості природно вважати однаково ймовірною появу кожної з граней), або ж на основі дослідницьких даних (частот).

Для дослідів, що мають симетрію можливих наслідків, застосовується спосіб безпосереднього обчислення ймовірностей подій у так званій *схемі випадків* (інакше – схемі урн).

Ця схема заснована на припущеннях про рівноймовірність, несумісність елементарних подій та повноту їх групи.

Декілька подій $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \ldots, \mathrm{A}_N$ називаються *рівноймовірними*, якщо в силу симетрії умов досліда відносно цих подій всі їх ймовірності є однаковими: $\mathrm{P}(\mathrm{A}_1) = \mathrm{P}(\mathrm{A}_2) = \ldots = \mathrm{P}(\mathrm{A}_N)$.

Якщо в будь-якому досліді простір елементарних подій Ω можна зобразити у вигляді несумісних і рівноймовірних подій $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_N$, то такі події називаються *випадками* (або шансами), а про самий дослід кажуть, що він *зводиться до схеми випадків.*

Випадок ω_n називають *сприятливим* події A, якщо він є елементом множини A: $\omega_n \in$A.

Якщо випадки $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_N$ утворюють повну групу подій, то

$$\sum_{n=1}^{N} \omega_n = \Omega. \tag{1.5}$$

Якщо елементарні випадкові події $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_N$ несумісні, то за аксіомою додавання ймовірностей

$$\mathrm{P}\Big(\sum_{n=1}^{N} \omega_n\Big) = \mathrm{P}(\Omega) = \sum_{n=1}^{N} \mathrm{P}(\omega_n) = 1. \tag{1.6}$$

Ймовірність повної групи подій тотожно дорівнює одиниці.

Якщо елементарні випадкові події $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_N$ рівноймовірні, то ймовірність кожної з них одна й та ж і дорівнює $1/N$:

$$\mathrm{P}(\omega_1) = \mathrm{P}(\omega_2) = \ldots = \mathrm{P}(\omega_N) = 1/N. \tag{1.7}$$

Звідси випливає класична формула для ймовірності події: якщо дослід зводиться до схеми випадків, то ймовірність події A в цьому досліді можна обчислити за формулою

$$\mathrm{P}(\mathrm{A}) = m_{\mathrm{A}}/N, \tag{1.8}$$

де m_A – кількість випадків, сприятливих події A; N – загальна кількість випадків.

Формула (1.8), що приймалася раніше за визначення ймовірності, при аксіоматичному підході є наслідком аксіоми додавання ймовірностей.

Приклад

В урні знаходяться 3 білих та 4 чорних кулі, ретельно перемішаних. З урни навмання вибирається одна куля.

Треба побудувати для цього досліду простір елементарних подій і знайти ймовірність події {A: вийнята біла куля}.

Для цього дамо номери кулям в урні – від 1 до 7; перші 3 кулі – білі, останні 4 – чорні:

$$\Omega = \{1,2,3,4,5,6,7\}; \qquad \mathrm{A} = \{1,2,3\}.$$

Через симетрію умов задачі відносно всіх куль (куля вибирається навмання) елементарні події рівноймовірні. Оскільки вони несумісні і утворюють повну групу, ймовірність події A знайдеться за формулою (1.8)

$$\mathrm{P(A)} = \frac{m_{\mathrm{A}}}{N} = 3/7.$$

Ця формула дозволяє у задачах, коли дослід має симетрію можливих наслідків, безпосередньо за умовами досліду обчислити ймовірності подій.

Природним узагальненням і поширенням безпосереднього підрахунку ймовірностей у схемі випадків може бути "геометричний" підхід до обчислення ймовірностей подій; він застосовується тоді, коли простір елементарних подій Ω містить у собі незліченну множину елементарних подій $\omega \in \Omega$, і, згідно з умовами симетрії досліду, жодна з них не має переваги перед іншими у сенсі можливості появи.

Нехай простір елементарних подій Ω – будь-яка область на площині, а елементарні події ω – окремі точки в межах цієї області. Якщо для досліду характерна симетрія можливих наслідків (наприклад, будь-який "точковий" об'єкт наугад кинутий у межах області), то всі елементарні події "рівноправні", і природно припустити, що ймовірності влучення елементарної події ω у дві області 1 і 2 рівної площі S є рівними, а ймовірність будь-якої події $\mathrm{A} \in \Omega$ дорівнює відношенню площі S_A області A до площі всієї області Ω, тобто

$$\mathrm{P(A)} = \frac{S_{\mathrm{A}}}{S_\Omega}. \tag{1.9}$$

Формулу (1.9) можна розглядати як узагальнення класичної формули (1.8) на незліченну множину елементарних подій.

Симетрія умов досліду відносно його елементарних наслідків ω формулюється звичайно за допомогою слова "наугад", що, по суті, рівнозначно вибору наугад однієї з куль в урні.

Ймовірності, обчислені за допомогою такого заходу, часто називають *геометричними ймовірностями.*

Приклад

Нехай на відрізку від 0 до 2 наугад ставляться точки з абсцисами x та y. Потрібно знайти ймовірність того, що відстань L поміж ними буде менша за одиницю.

Елементарна подія А для цього випадку характеризується парою координат (x, y). Простір елементарних подій – квадрат зі стороною 2 на площині $x0y$; $L = |y - x|$. Події $\{\mathrm{A} : |y - x| < 1\}$ відповідає геометричне місце точок, таких, що $|y - x| < 1$. Площа його дорівнює 3 і тому $\mathrm{P(A)} = \mathrm{Pr}\{|y - x| < 1\} = 3/4$.

Якщо простір елементарних подій не плоский, а тривимірний, то в (1.9) замість площ S_{A} і S_{Ω} ставляться об'єми V_{A} і V_{Ω}, для одновимірного простору елементарних подій — довжини L_{A} і L_{Ω} відповідних відрізків прямої.

1.3. Приклади

Приклад 1.1

В урні містяться a білих та b чорних куль. З урни виймають навмання одну кулю.

Знайти ймовірність P_A того, що ця куля – біла.

Розв'язання

Простір елементарних подій такий: $\Omega = \{б, б, \ldots, б, ч, ч, \ldots, ч\}$; тут символом "б" позначена біла куля (їх за умовою a штук), а символом "ч" — чорна куля (їх відповідно b штук).

Простір сприятливих подій А такий: $\mathrm{A} = \{б, б, \ldots, б\}$. Маємо $N = a + b$ та $m_{\mathrm{A}} = a$. За формулою (1.8) отримаємо

$$\mathrm{P_A} = a/(a + b).$$

Приклад 1.2

Диск, що швидко обертається, поділений на парне число рівних секторів, поперемінно пофарбованих у білий та чорний колір. По диску зроблений постріл.

Знайти ймовірність того, що куля влучить в один з секторів білого кольору. Припускається, що ймовірність влучення кулі у плоску фігуру пропорційна площі цієї фігури.

Відповідь: $\mathrm{P} = (0,5\,pR^2)\,/\,(pR^2) = 0,5$.

Приклад 1.3

Відділ технічного контролю виявив 5 бракованих деталей в партії з випадково відібраних 100 деталей.

Знайти частоту появи бракованих деталей.

Розв'язання

Частота $w(\mathrm{A})$ події А (поява бракованих деталей) дорівнює відношенню числа випробувань, в яких відбулася подія А, до загального числа зроблених випробувань:

$$w(\mathrm{A}) = 5\,/\,100 = 0,05.$$

Приклад 1.4

При перевезенні коробки, в якій містилася 21 стандартна та 10 нестандартних деталей, загублено одну деталь, причому невідомо яку. Наугад взята (після перевезення) з ящика деталь виявилася стандартною.

Знайти ймовірність того, що була загублена: а) стандартна деталь; б) нестандартна деталь.

Розв'язання

а) Взято деталь стандартну. Очевидно, вона не могла бути загублена; могла бути загублена будь-яка з інших 30 деталей, причому серед них було 20 стандартних. Імовірність того, що була загублена стандартна деталь, $P_1 = 20/30 = 2/3$.

б) Серед усіх 30 деталей, кожна з яких могла бути загублена, було 10 нестандартних та 20 стандартних. Імовірність того, що була втрачена нестандартна деталь, $P_2 = 10/30 = 1/3$.

Приклад 1.5

В партії з N деталей існує n стандартних. Наугад відібрані m деталей.

Знайти ймовірність того, що серед відібраних деталей виявиться рівно k стандартних.

Розв'язання

Загальна кількість можливих елементарних наслідків випробування дорівнює числу способів, якими можна витягти m деталей з N деталей, тобто C_N^m – числу сполучень з N елементів по m.

Підрахуємо кількість наслідків, що сприяють події, яка нас цікавить (серед m деталей рівно k стандартних): k стандартних деталей можна взяти з n стандарних деталей C_n^k способами; при цьому інші $(m-k)$ деталей мають бути нестандартними; взяти ж $(m-k)$ нестандартних деталей з $(N-n)$ нестандартних деталей можна C_{N-n}^{m-k} способами. Отже, кількість сприятливих наслідків дорівнює $C_n^k\, C_{N-n}^{m-k}$.

Ця ймовірність дорівнює відношенню кількості наслідків, що сприяють події, до кількості всіх елементарних наслідків :

$$P \;=\; C_n^k\, C_{N-n}^{m-k} \,/\, C_N^m.$$

Приклад 1.6

У групі M осіб $(M > 2)$. Вони довільно розсаджуються за круглим столом.

Знайти ймовірність того, що дві фіксовані особи A та B виявляться поруч.

Розв'язання

Число всіх випадків $n = M\,!$; з них сприятливих $m = 2M$, так що всього пар сусідніх місць M, а на кожній парі сусідніх місць особи A та B можна розсадити двома способами.

Тому

$$P \;=\; m/n \;=\; (2M)\,/\,M\,! \;=\; 2\,/\,(M-1)\,!.$$

Приклад 1.7

Микола та Петро домовилися зустрітися на зупинці автобуса між 9 та 10 годинами. Кожний, прийшовши на зупинку, чекає іншого 15 хвилин, а потім йде.

Знайти ймовірність зустрічі Миколи та Петра, припускаючи, що моменти їх приходу є координатами точки, яка має рівномірний розподіл у квадраті $[9, 10] \;\times\; [9, 10]$ (*годин*^{2}).

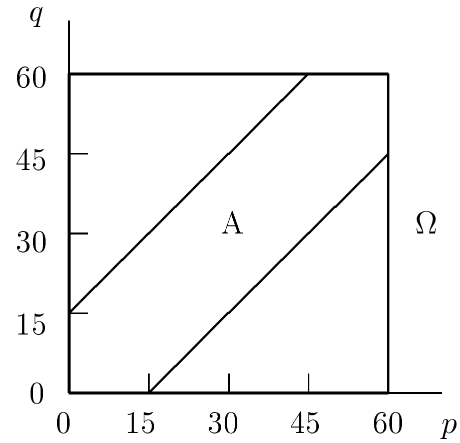


Рисунок 1.2 — До задачі про зустріч; Ω – простір елементарних подій; A – множина сприятливих наслідків (зустріч)

Розв'язання

Нехай Микола приходить на зупинку о 9 годині p хвилин, а Петро – о 9 годині q хвилин.

За повну множину елементарних подій виберемо (рис. 1.2)

$$\Omega \;=\; \{(p,q):\;\; 0 \le p \le 60,\;\; 0 \le q \le 60\}.$$

Тоді подія $\{\mathrm{A}:$ *зустріч Миколи та Петра відбувається*$\}$ відповідає множині

$$\mathrm{A} \;=\; \{(p,q):\; |p-q| \le 15,\;\; 0 \le p \le 60,\; 0 \le q \le 60\}.$$

Повній множині Ω можна поставити у відповідь квадрат, сторона якого дорівнює 60, а площа $S_\Omega = 60^2$.

Множині A також можна поставити у відповідь фігуру, площа якої складає

$$S_{\mathrm{A}} \;=\; 60^2 - 45^2 \;=\; \frac{7}{16} \times 60^2.$$

Тому шукана ймовірність P дорівнює відношенню

$$\mathrm{P(A)} \;=\; S_{\mathrm{A}}/S_\Omega \;=\; 7/16.$$

Приклад 1.8 (Задача Бюффона)

Площина розграфлена паралельними прямими, що знаходяться одна від іншої на відстані h. На площину наугад кидають голку довжиною L $(L < h)$.

Знайти ймовірність того, що голка перетне будь-яку пряму.

Розв'язання

Введемо позначення: x – відстань від середини голки до найближчої паралелі; φ — кут, складений голкою з цією паралеллю (рис. 1.3).

Положення голки повністю визначається завданням певних значень x і φ, причому x набуває значення від 0 до $h/2$; можливі значення φ змінюються від 0 до

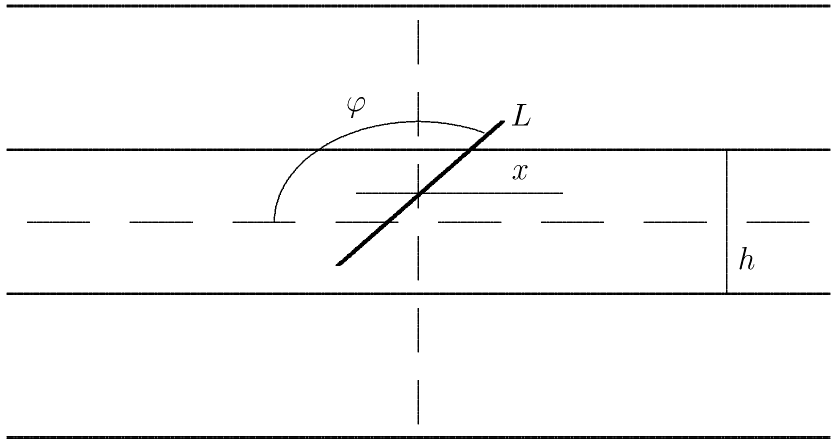


Рисунок 1.3 — Схема досліду Бюффона; h – відстань між паралелями; L – довжина голки; x – відстань від центру голки до найближчої паралелі; φ – кут між віссю голки та паралеллю

π. Іншими словами, для обраного положення голки її середина може влучити у будь-яку з точок прямокутника зі сторонами $h/2$ та π. Таким чином, цей прямокутник можна розглядати як фігуру G, геометричне місце точок якої відповідає множині всіх можливих положень середини голки (рис. 1.4).

Очевидно, площа фігури G дорівнює $S_G = \pi h/2$.

Знайдемо тепер фігуру g, кожна точка якої сприяє події, що нас цікавить, тобто кожна точка цієї фігури може служити серединою голки, що перетинає найближчу до неї паралель. Голка перетне найближчу до неї паралель за умови $x \leq \frac{L}{2}\sin\varphi$.

Знайдемо площу S_g фігури g:

$$S_g \;=\; \int\limits_0^\pi \frac{L}{2}\sin\varphi\, d\varphi \;=\; L.$$

Отже, ймовірність того, що голка перетне пряму,

$$\mathrm{P} \;=\; S_g \,/\, S_G \;=\; 2L/\pi h.$$

Приклад 1.9

В ящику міститься 10 однакових деталей, які позначені номерами 1, 2, ..., 10. Наугад взято 6 деталей.

Знайти ймовірність того, що серед деталей, які були взяті, виявляться: а) деталь № 1; б) деталі № 1 та № 2.

Розв'язання

а) Загальне число можливих елементарних наслідків випробування дорівнює кількості способів, якими можна взяти шість деталей з десяти, тобто C_{10}^6.

Підрахуємо число наслідків, що сприяють події, яка нас цікавить: серед відібраних шести деталей є деталь № 1 і, отже, інші 5 деталей мають інші номери.

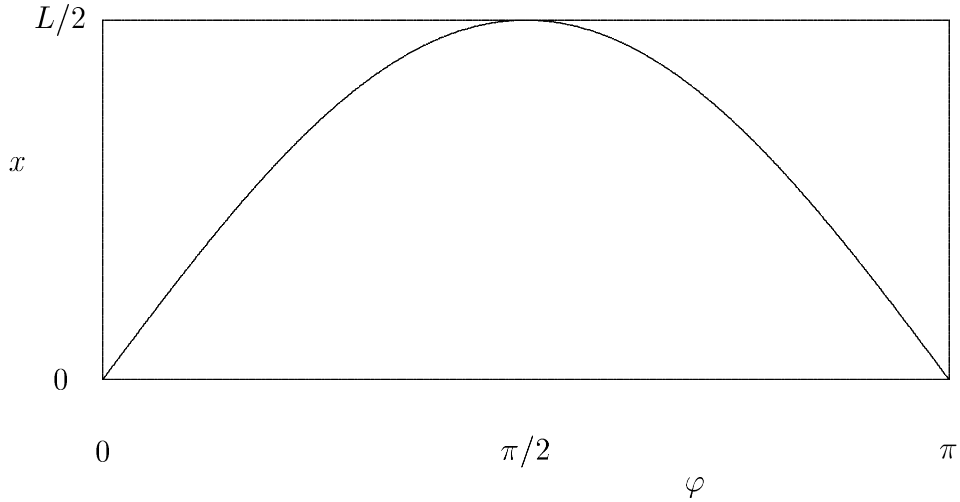


Рисунок 1.4 — До схеми досліду Бюффона

Число таких наслідків, очевидно, дорівнює кількості способів, якими можна відібрати 5 деталей з тих дев'яти, що залишилися, тобто C_9^5.

Ця ймовірність дорівнює відношенню кількості наслідків, що сприяють події, яка розглядається, до загальної кількості можливих елементарних наслідків:

$$\mathrm{P} \;=\; C_9^5 \,/\, C_{10}^6 \;=\; C_9^4 \,/\, C_{10}^4 \;=$$

$$=\; [(9\cdot 8\cdot 7\cdot 6)\,/\,(1\cdot 2\cdot 3\cdot 4)]\,/\,[(10\cdot 9\cdot 8\cdot 7)\,/\,(1\cdot 2\cdot 3\cdot 4)] \;=\; 0,6.$$

б) Число наслідків, що сприяють події, яка нас цікавить (серед відібраних деталей є деталі № 1 і № 2, отже, 4 деталі мають інші номери), дорівнює кількості способів, якими можна відібрати чотири деталі з тих восьми, що залишилися, тобто C_8^4. Шукана ймовірність

$$\mathrm{P} \;=\; C_8^4 \,/\, C_{10}^6 \;=\; C_8^4 \,/\, C_{10}^4 \;=\; 1/3.$$

1.4. Задачі для розв'язання

Задача 1.1
З урни, в якій a білих та b чорних куль, беруть підряд кулі.
Знайти ймовірність того, що друга в черзі куля буде білою.
Відповідь: $\mathrm{P} = a/(a+b)$.

Задача 1.2
В урні a білих та b чорних куль. З урни беруть всі кулі, крім однієї.
Знайти ймовірність того, що остання куля, що залишилася в урні, буде білою.
Відповідь: $\mathrm{P} = a/(a+b)$.

Задача 1.3

В урні a білих та b чорних куль. З урни взяли одну кулю і відклали її вбік. Ця куля виявилася білою. Після цього з урни беруть ще одну кулю.

Знайти ймовірність того, що ця куля теж буде білою.

Відповідь: $\text{P} = (a-1)/(a+b-1)$.

Задача 1.4

В урні a білих та b чорних куль. З урни взяли одну кулю і, не дивлячись, відклали її вбік. Після цього з урни взяли ще одну кулю.

Знайти ймовірність того, що ця куля буде білою.

Відповідь: $\text{P} = a/(a+b)$.

Задача 1.5

Наугад вибране чотиризначне число.

Визначити ймовірність того, що у цьому числі:

а) всі цифри різні;

б) існують тільки дві однакові цифри;

в) існують дві пари однакових цифр;

г) існують тільки три однакові цифри.

Відповідь: $\text{P}_1 = 504/1000$; $\text{P}_2 = 432/1000$; $\text{P}_3 = 27/1000$; $\text{P}_4 = 36/1000$.

Задача 1.6

На п'ятьох однакових картках написані цифри 1, 2, 3, 4, 5. Беруться наугад одна за другою дві картки.

Знайти ймовірність таких подій:

{A: *сума цифр на взятих картках – непарне число*};

{B: *друга цифра менша за першу*};

{C: *друга цифра більша за першу рівно на одиницю*}.

Відповідь: P(A) = 0,6; P(B) = 0,4; P(C) = 0,16.

Задача 1.7

Чотиритомний твір розміщений на полиці у випадковому порядку.

Знайти ймовірність того, що томи стоять у належному порядку справа наліво або зліва направо.

Відповідь: $\text{P} = 2/24 = 1/12$.

Задача 1.8

Кидається n шестигранних гральних костей.

Знайти ймовірність отримання суми очків, що дорівнює: а) n; б) $n+1$.

Відповідь: а) $\text{P} = 1/6^n$; б) $\text{P} = n/6^n$.

Задача 1.9

Набираючи номер телефону, абонент забув дві останні цифри. Але він пам'ятає, що ці цифри різні, і набрав їх наугад.

Визначити ймовірність P того, що набрано потрібні цифри.

Відповідь: $\text{P} = 1\,/\,A_{10}^2 = 1/90$.

Задача 1.10

У партії n стандартних і m бракованих тріодів. При контролі виявилося, що перші k тріоди стандартні.

Визначити ймовірність Р того, що наступний тріод буде стандартним.

Відповідь: $\mathrm{P} = (n-k)/(n+m-k)$.

Задача 1.11

При випробуваннях 200 випадково відібраних резисторів впродовж деякого терміну виявилося, що відносна частота справних резисторів дорівнює 0,95.

Визначити кількість n справних резисторів.

Відповідь: $n = 190$.

Задача 1.12

Кинуто три монети.

Припускаючи, що елементарні події рівноймовірні, знайти ймовірності подій:

$\{$A: *перша монета випала гербом угору*$\}$,

$\{$B: *випало рівно два герба*$\}$,

$\{$C: *випало не більше двох гербів*$\}$.

Відповідь: $\mathrm{P(A)} = 1/2$; $\mathrm{P(B)} = 3/8$; $\mathrm{P(C)} = 7/8$.

Задача 1.13

На поверхні сфери беруть наугад дві точки і з'єднують їх меншою дугою великого кола.

Знайти ймовірність того, що розмір одержаної дуги не перевершить α радіан.

Відповідь: $\mathrm{P} = \alpha/\pi$.

Задача 1.14

На площині накреслені паралельні прямі, що знаходяться одна від одної на відстані $2h$. На площину наугад кидається коло радіусом r $(r < h)$.

Знайти ймовірність того, що коло не перетне жодної прямої.

Відповідь: $\mathrm{P} = (h-r)/h$.

Задача 1.15

В урні 2 білих, 3 чорних та 5 червоних куль. Три кулі беруться наугад.

Знайти ймовірність Р того, що серед узятих куль хоча б дві будуть різного кольору.

Відповідь: $\mathrm{P} = 109/120$.

Задача 1.16

З першого ящика, що містить a червоних кулек й b зелених куль, наугад витягнули n куль та помістили (не розглядаючи) в другий ящик. З другого ящика наугад витягнули m куль.

Знайти ймовірність того, що серед витягнутих m кулек знайдеться 1 червона кулька, якщо $m \le b$.

Відповідь: $\mathrm{P} = \sum\limits_{k=0}^{n}\sum\limits_{l=0}^{m} \frac{C_a^k C_b^{n-k}}{C_{a+b}^n} \cdot \frac{C_k^l C_{n-k}^{m-l}}{C_n^m} \cdot \frac{C_l^1 C_{m-l}^0}{C_n^1}$.

Задача 1.17

Вирішити задачу Бюффона про ймовірность перетину відрізка длиною L хочаб однієї з прямих, що проведені на площині на відстані h одна від другої, якщо $L > h$.

Відповідь: $\mathrm{P} = \dfrac{2L}{\pi h}\left(1 - \sqrt{1 - \dfrac{h^2}{L^2}} + \arccos\dfrac{h}{L}\right).$

Задача 1.18

З колоди з 52 карт беруть водночас три карти.

Знайти ймовірність того, що серед взятих карт знайдеться хоча б одна червоної масті.

Відповідь: $\mathrm{P} = 15/17$.

1.5. Завдання для перевірки

1. Які задачі розглядає теорія ймовірностей?
2. Розкрийте поняття випадкової події.
3. Поясніть зміст імовірності події.
4. Розкрийте поняття випадкової величини, детермінованої величини.
5. Запропонуйте класифікацію випадкових величин, розкрийте поняття дискретних та неперервних випадкових величин.
6. Назовіть способи задання та опису випадкових величин.
7. Сформулюйте аксіоми теорії ймовірностей.
8. Побудуйте практичні приклади суми двох, трьох та чотирьох випадкових подій.
9. Побудуйте практичні приклади множення двох випадкових подій, трьох випадкових подій.
10. Побудуйте практичний приклад набору випадкових подій, які утворюють повну групу.
11. Дайте інтерпретацію ймовірності повної групи подій.

2. Основні теореми теорії ймовірностей

2.1. Алгебра випадкових подій

Головними в теорії ймовірностей є не прямі, а побічні методи обчислення ймовірностей, коли ймовірності випадкових подій, які нас цікавлять, виражаються через імовірності інших подій, з ними пов'язаних. Для цього, передусім, треба вміти виразити події, які нас цікавлять, через інші. Цій меті служить так звана *алгебра подій*. Для подій вводяться поняття "сума подій", "множення подій" та деякі інші, а також правила дій з подіями. Всі ці поняття вводяться тільки тоді, коли події, про які йде мова, являють собою підмножини одного й того ж простору елементарних подій Ω.

У зв'язку з тим, що випадкові події являють собою множини, то дії з ними (додавання, множення) визначаються так, як відповідні дії з множинами.

Сумою (A + B) *двох подій* A та B *називається подія, одержана з виконання хоч би однієї з цих подій.*

Сума двох подій являє собою об'єднання (суму) відповідних множин (рис. 2.1).

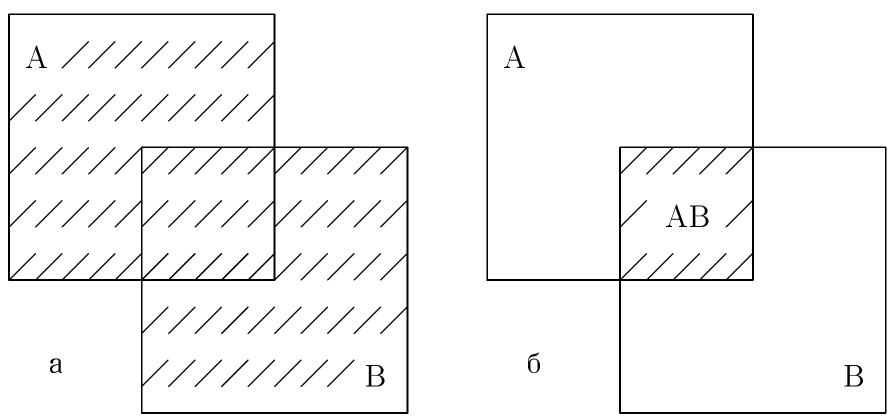


Рисунок 2.1 — До теореми про суму і добуток двох випадкових подій: а) сума подій A + B; б) добуток подій AB

Приклад

Якщо з рушниці зроблено два постріли і подія A – влучення при першому пострілі, подія B – влучення при другому пострілі, то подія (A + B) – влучення або при першому пострілі, або при другому, або при двох пострілах.

Аналогічно *сумою декількох подій* $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_N$ *називається подія*

$$\sum_{n=1}^{N} A_n \ = \ A_1 + A_2 + \ldots + A_N, \tag{2.1}$$

одержана з виконання хоча б однієї з них.

Підсумовуватися може і нескінченна (зчисленна) кількість випадкових подій (рис. 2.2)

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \ = \ A_1 + A_2 + \ldots + A_N + \ldots \tag{2.2}$$

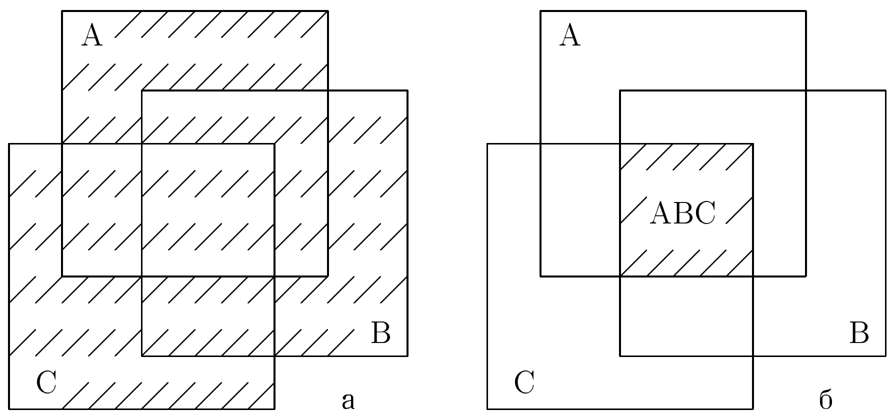


Рисунок 2.2 — До теореми про суму і добуток трьох випадкових подій: а) сума подій A + B + C; б) добуток подій ABC

Добутком AB *двох подій* A *та* B *називається подія, яка утворена у сумісному виконанні тієї та іншої події.* Добуток подій являє собою перехрещення відповідних множин. (Знак добутку, якщо це не викликає непорозуміння, може бути опущений.)

Приклад

Якщо у ящику містяться деталі, виготовлені заводами № 1 і № 2, та подія A – поява стандартної деталі, а подія B – деталь, виготовлена заводом № 1, то подія AB – поява стандартної деталі заводу № 1.

Добутком кількох подій $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_N$ *називається подія*

$$\prod_{n=1}^{N} A_n \ = \ A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_N, \tag{2.3}$$

яка утворена у спільному виконанні всіх цих подій.

Перемножатися може і нескінченна (зчисленна) кількість подій.

З визначення суми і добутку подій випливає:

$$\begin{aligned} A + A \ &= \ A; \qquad & A \cdot A \ &= \ A; \\ A + \Omega \ &= \ \Omega; \qquad & A \cdot \Omega \ &= \ A; \\ A + \varnothing \ &= \ A; \qquad & A \cdot \varnothing \ &= \ \varnothing. \end{aligned} \tag{2.4}$$

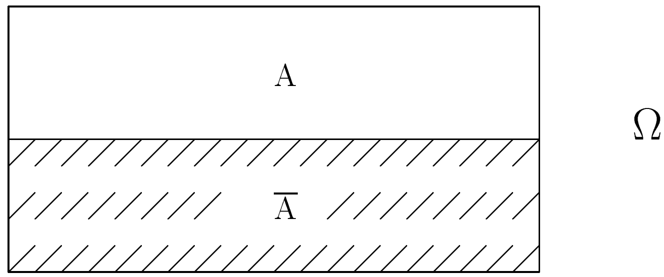


Рисунок 2.3 — Доповнення $\overline{\mathrm{A}}$ події A до повного простору Ω

Якщо $\mathrm{A} \subseteq \mathrm{B}$, то

$$\mathrm{A} + \mathrm{B} = \mathrm{B}, \qquad \mathrm{A} \cdot \mathrm{B} = \mathrm{A}. \tag{2.5}$$

Операції додавання та множення подій мають ряд властивостей, які належать звичайному додаванню та множенню:

1) переміщувальна властивість :

$$\mathrm{A} + \mathrm{B} = \mathrm{B} + \mathrm{A}; \qquad \mathrm{A} \cdot \mathrm{B} = \mathrm{B} \cdot \mathrm{A}; \tag{2.6}$$

2) сполучена властивість :

$$(\mathrm{A} + \mathrm{B}) + \mathrm{C} = \mathrm{A} + (\mathrm{B} + \mathrm{C}); \qquad (\mathrm{A} \cdot \mathrm{B}) \cdot \mathrm{C} = \mathrm{A} \cdot (\mathrm{B} \cdot \mathrm{C}); \tag{2.7}$$

3) розподільна властивість :

$$\mathrm{A} \cdot (\mathrm{B} + \mathrm{C}) = \mathrm{A} \cdot \mathrm{B} + \mathrm{A} \cdot \mathrm{C}. \tag{2.8}$$

Усі ці властивості випливають з того, що події є множинами.

Протилежною подією для події A (або її доповненням) *називається подія* $\overline{\mathrm{A}}$, *утворена в непояві події* A, тобто $\{\overline{\mathrm{A}}$: *не відбулася* A$\}$. Область $\overline{\mathrm{A}}$ доповнює A до повного простору Ω.

З визначення протилежної події випливає (рис. 2.3) :

$$\overline{(\overline{\mathrm{A}})} = \mathrm{A}; \qquad \overline{\Omega} = \varnothing; \qquad \overline{\varnothing} = \Omega. \tag{2.9}$$

Якщо $\mathrm{B} \subseteq \mathrm{A}$, то $\overline{\mathrm{A}} \subseteq \overline{\mathrm{B}}$. Для протилежних подій мають місце такі властивості :

$$\overline{\mathrm{A} + \mathrm{B}} = \overline{\mathrm{A}}\,\overline{\mathrm{B}}; \qquad \overline{\mathrm{A}\,\mathrm{B}} = \overline{\mathrm{A}} + \overline{\mathrm{B}}. \tag{2.10}$$

Правила алгебри дозволяють комбінуванням різних простих подій утворювати інші, більш складні. Ймовірності складних подій можна обчислювати за допомогою ймовірностей інших, більш простих, користуючись двома основними правилами теорії ймовірностей :

1) правилом додавання ймовірностей;

2) правилом множення ймовірностей.

Ці правила часто називають *основними теоремами теорії ймовірностей.*

2.2. Правило додавання ймовірностей

Ймовірність суми двох несумісних подій дорівнює сумі ймовірностей цих подій, тобто *якщо* $\mathrm{A} \cdot \mathrm{B} = \varnothing$, *то*

$$\mathrm{P}(\mathrm{A}+\mathrm{B}) \;=\; \mathrm{P}(\mathrm{A})+\mathrm{P}(\mathrm{B}). \tag{2.11}$$

Правило додавання ймовірностей легко узагальнюється на випадок довільної кількості N несумісних подій: якщо $\mathrm{A}_n{\cdot}\mathrm{A}_m = \varnothing$ при $n \neq m$, то

$$\mathrm{P}\Bigl(\sum_{n=1}^{N} \mathrm{A}_n\Bigr) \;=\; \sum_{n=1}^{N} \mathrm{P}(\mathrm{A}_n), \tag{2.12}$$

та на випадок нескінченної (зчисленної) кількості подій: якщо при $n \neq m$ маємо $\mathrm{A}_n{\cdot}\mathrm{B}_m = \varnothing$, то

$$\mathrm{P}\Bigl(\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{A}_n\Bigr) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{P}(\mathrm{A}_n). \tag{2.13}$$

З правила додавання ймовірностей маємо: *якщо події* $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \ldots, \mathrm{A}_N$ *несумісні та утворюють повну групу, то сума їх імовірностей дорівнює одиниці*, тобто якщо

$$\sum_{n=1}^{N} \mathrm{A}_n \;=\; \Omega \qquad \text{та} \qquad \mathrm{A}_n\mathrm{A}_m \;=\; \varnothing \qquad \text{при} \;\; n \neq m,$$

то

$$\sum_{n=1}^{N} \mathrm{P}(\mathrm{A}_n) \;=\; 1. \tag{2.14}$$

Зокрема, в зв'язку з тим, що дві протилежні події A та $\overline{\mathrm{A}}$ несумісні та утворюють повну групу, то *сума ймовірностей протилежних подій дорівнює одиниці*:

$$\mathrm{P}(\mathrm{A})+\mathrm{P}(\overline{\mathrm{A}}) \;=\; 1. \tag{2.15}$$

На практиці, розглядаючи поняття суми та добутку випадкових подій, часто виявляється корисною наочна геометрична інтерпретація.

На рис. 2.1 проілюстровано поняття суми і добутку двох подій A та B. Нехай подія A є влученням точки в область A, відповідно подія B є влученням точки в область B. Тоді подія A + B є влученням в область, заштриховану на рис. 2.1а, а подія AB є влученням в область, заштриховану на рис. 2.1б.

Аналогічно показано суму і добуток трьох подій – A, B та C. На рис. 2.2а заштрихована область, яка відповідає події A + B + C, а на рис. 2.2б заштрихована область, яка відповідає події ABC.

Якщо дві події A та B сумісні, ймовірність суми цих подій виражається формулою

$$\mathrm{P}(\mathrm{A}+\mathrm{B}) \;=\; \mathrm{P}(\mathrm{A})+\mathrm{P}(\mathrm{B})-\mathrm{P}(\mathrm{AB}). \tag{2.16}$$

Аналогічно ймовірність суми трьох сумісних подій знаходиться за формулою

$$\mathrm{P}(\mathrm{A}+\mathrm{B}+\mathrm{C}) \;= \tag{2.17}$$

$$= \mathrm{P(A)} + \mathrm{P(B)} + \mathrm{P(C)} - \mathrm{P(AB)} - \mathrm{P(AC)} - \mathrm{P(BC)} + \mathrm{P(ABC)}.$$

За допомогою рис. 2.1 і 2.2 можна переконатися у справедливості цих виразів. Загальна формула для ймовірності суми будь-якого числа сумісних подій така:

$$\mathrm{P}\Big(\sum_{n=1}^{N} \mathrm{A}_n\Big) = \sum_{n=1}^{N} \mathrm{P}(\mathrm{A}_n) - \sum_{n,m=1}^{N} \mathrm{P}(\mathrm{A}_n \mathrm{A}_m) + \qquad (2.18)$$

$$+ \sum_{n,m,k=1}^{N} \mathrm{P}(\mathrm{A}_n \mathrm{A}_m \mathrm{A}_k) - \ldots - (-1)^N \mathrm{P}(\mathrm{A}_1 \mathrm{A}_2 \ldots \mathrm{A}_N),$$

при цьому суми поширюються на всі можливі *різні* значення індексів n; n, m; n, m, k і так далі.

Аналогічні вирази можна написати для добутку подій.

З рис. 2.1 зрозуміло, що

$$\mathrm{P(AB)} = \mathrm{P(A)} + \mathrm{P(B)} - \mathrm{P(A+B)}, \qquad (2.19)$$

а з рис. 2.2, що

$$\mathrm{P(ABC)} = \mathrm{P(A)} + \mathrm{P(B)} + \mathrm{P(C)} - \qquad (2.20)$$

$$- \mathrm{P(A+B)} - \mathrm{P(A+C)} - \mathrm{P(B+C)} + \mathrm{P(A+B+C)}.$$

Загальна формула, яка виявляє ймовірність добутку довільної кількості подій через імовірності сум цих подій, узятих, як і в (2.18) по одній, по дві, по три і так далі, має вигляд

$$\mathrm{P}(\mathrm{A}_1 \mathrm{A}_2 \cdots \mathrm{A}_N) = \sum_{n=1}^{N} \mathrm{P}(\mathrm{A}_n) - \sum_{n,m=1}^{N} \mathrm{P}(\mathrm{A}_n + \mathrm{A}_m) + \qquad (2.21)$$

$$+ \sum_{n,m,k=1}^{N} \mathrm{P}(\mathrm{A}_n + \mathrm{A}_m + \mathrm{A}_k) - \ldots - (-1)^N \mathrm{P}\Big(\sum_{n=1}^{N} \mathrm{A}_n\Big),$$

при цьому суми поширюються на всі можливі *різні* значення індексів n; n, m; n, m, k і так далі.

2.3. Правило множення ймовірностей

Для того, щоб сформулювати правило множення ймовірностей, необхідно ввести поняття умовної ймовірності.

Умовною ймовірністю події A *при наявності події* B [позначається P(A|B)] *називається ймовірність події* A, *яка обчислена за умови, що подія* B *відбулася.*

Умова, складена з того, що подія B відбулася, рівнозначна зміні досліду, коли з усіх елементарних подій залишаються тільки ті, які сприяють події B, а усі інші відкидаються. З цього випливає, що замість простору елементарних подій Ω розглядається новий простір Ω_B, що відповідає події B. Область AB, яка відповідає перехрещенню A та B, сприяє події A при наявності події B.

Приклад

В урні 3 білих та 2 чорних кулі; два партнери виймають з урни по одній кулі.

Подія A – поява білої кулі у першого партнера.

Подія B – поява білої кулі у другого партнера.

Ймовірність події A до того, як стало відомо що-небудь про подію B, дорівнює $3/5$. Якщо стало відомо, що подія B відбулася, то ймовірність події A стає рівною $1/2$, отже, подія A залежить від події B.

Для цього прикладу безумовна ймовірність події A: $P(A) = 3/5$. Умовна імовірність події A: $P(A|B) = 1/2$.

Імовірність добутку двох подій A та B *дорівнює ймовірності однієї з них* (наприклад, A), *помноженої на умовну ймовірність іншої за наявності першої*:

$$P(AB) \;=\; P(A) \cdot P(B|A), \tag{2.22}$$

або, якщо за першу подію узяти B,

$$P(AB) \;=\; P(B) \cdot P(A|B). \tag{2.23}$$

Правило множення ймовірностей можна узагальнити на довільну кількість подій:

$$P(A_1 A_2 \ldots A_N) \;= \tag{2.24}$$

$$= \; P(A_1)\, P(A_2|\, A_1)\, P(A_3|\, A_1 A_2) \ldots P(A_N|\, A_1 A_2 \ldots A_{N-1}).$$

З формули (2.22) одержуємо такий вираз для умовної ймовірності:

$$P(B|A) \;=\; P(AB)\,/\,P(A). \tag{2.25}$$

Таким чином, *умовна ймовірність однієї події за наявності іншої дорівнює ймовірності добутку двох подій, поділених на ймовірність тієї з них, яка припускається виконаною.*

Аналогічно формулі (2.25) можна написати

$$P(A|B) \;=\; P(AB)\,/\,P(B). \tag{2.26}$$

Дві події A та B називаються *незалежними*, якщо поява однієї з них не змінює ймовірності появи іншої:

$$P(A|B) \;=\; P(A), \tag{2.27}$$

або, що рівнозначно,

$$P(B|A) \;=\; P(B). \tag{2.28}$$

Для двох незалежних подій правило множення ймовірностей набуває вигляду

$$P(AB) \;=\; P(A)\, P(B), \tag{2.29}$$

тобто *ймовірність добутку двох незалежних подій дорівнює добутку ймовірностей цих подій.*

Декілька подій називаються *незалежними у сукупності* (або просто незалежними), якщо поява будь-якої кількості з них не змінює ймовірностей інших подій. Для сукупності з N незалежних подій правило множення (2.24) набуває вигляду

$$\mathrm{P}(\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2\ldots\mathrm{A}_N) \;=\; \mathrm{P}(\mathrm{A}_1)\,\mathrm{P}(\mathrm{A}_2)\ldots\mathrm{P}(\mathrm{A}_N). \qquad (2.30)$$

тобто *ймовірність добутку незалежних подій дорівнює добутку ймовірностей цих подій.*

Кілька подій називаються *незалежними*, якщо ймовірність того чи іншого результату кожної з них *не залежить* від того, які результати мали інші досліди.

Приклад

Монета підкинута 2 рази. Ймовірність появи герба у першому досліді (подія A) не залежіть від появи або непояви герба у другому досліді (подія B). У свою чергу, ймовірність появи герба у другому досліді не залежить від результату першого досліду. Таким чином, події A та B – незалежні.

Відмітемо, що подія A або подія B є *простими* відносно події $\mathrm{A}+\mathrm{B}$ або події AB, які відповідно є *складними.* В теорії ймовірностей не розглядається питання про походження ймовірностей P(A) або P(B). Задачею теорії ймовірностей є пов'язати ймовірності складних подій з заданими ймовірностями простих подій.

2.4. Теорема про повторення дослідів (формула Бернуллі)

Наслідком правил додавання та множення ймовірностей є теорема про повторення дослідів, яка полягає у наступному.

Якщо виконується N незалежних дослідів, в кожному з яких подія A відбувається з імовірністю p, то ймовірність того, що в даній серії дослідів подія A повторюється рівно m разів, виражається формулою

$$\mathrm{P}_{m,N} \;=\; C_N^m\, p^m\, (1-p)^{N-m} \qquad (2.31)$$

або, якщо означити $1-p$ через q,

$$\mathrm{P}_{m,N} \;=\; C_N^m\, p^m\, q^{N-m}. \qquad (2.32)$$

Вираз (2.32) часто називають формулою Бернуллі.

Імовірність $\mathrm{R}_{m,N}$ того, що в серії з N незалежних дослідів подія A з'явиться не менш ніж m разів, виражається формулою

$$\mathrm{R}_{m,N} \;=\; \sum_{k=m}^{N} C_N^k\, p^k\, q^{N-k}. \qquad (2.33)$$

2.5. Формула повної ймовірності та формула Байєса

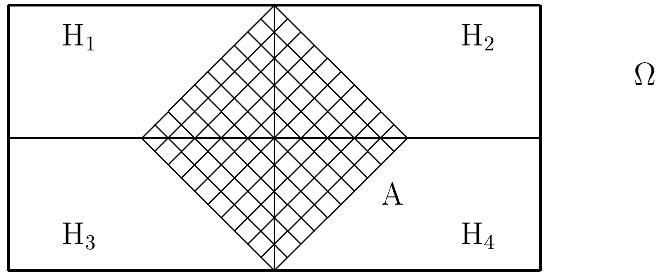


Рисунок 2.4 — До формули повної ймовірності; H_1, H_2, H_3, H_4 – гіпотези; повна група $\Omega = H_1+H_2+H_3+H_4$; подія A вказана штриховкою

Якщо з обставини досліду можна зробити N пропозицій (*гіпотез*) H_1, H_2, …, H_N, що виключають одна одну, та якщо подія A може з'явитися тільки разом з однією з цих гіпотез, то

$$P(A) \;=\; \sum_{n=1}^{N} P(H_n)P(A|H_n), \tag{2.34}$$

де $P(H_n)$ – ймовірність гіпотези H_n; $P(A|H_n)$ – умовна ймовірність події A за цією гіпотезою (рис. 2.4).

Формула (2.34) називається *формулою повної ймовірності.*

Якщо до досліду ймовірності гіпотез H_1, H_2, …, H_N дорівнювали $P(H_1)$, $P(H_2)$, …, $P(H_N)$, а в результаті досліду відбулася подія A, то нові умовні ймовірності гіпотез обчислюються за формулою

$$P(H_j|A) \;=\; P(H_j)\,P(A|H_j)\Big(\sum_{n=1}^{N} P(H_n)\,P(A|H_n)\Big)^{-1} \tag{2.35}$$

для $j = 1, 2, \ldots, N$.

Формула (2.35) називається *формулою Байєса.*

Початкові ймовірності гіпотез $P(H_1)$, $P(H_2)$, …, $P(H_N)$ називаються *апріорними*, а післядослідні ймовірності гіпотез $P(H_1|A)$, $P(H_2|A)$, …, $P(H_N|A)$ – *апостеріорними.*

Формула Байєса дає можливість "переглянути" можливості гіпотез з урахуванням спостереженого результату досліду.

Якщо після досліду, що дав подію A, проводиться ще один дослід, в результаті якого може відбутися або не відбутися подія B, то ймовірність (умовна) цієї останньої події обчислюється за формулою повної ймовірності, в яку підставлені не колишні ймовірності гіпотез $P(H_n)$, а нові $P(H_n|A)$:

$$P(B|A) \;=\; \sum_{n=1}^{N} P(H_n|A)\,P(B|H_nA). \tag{2.36}$$

Формулу (2.36) називають *формулою для ймовірностей майбутніх подій.*

2.6. Приклади

Приклад 2.1

В урні знаходяться 5 білих, 4 чорних та 3 синіх кулі. Кожне випробування складається з того, що наугад витягують одну кулю, не повертаючи її в урну.

Знайти ймовірність того, що при першому випробуванні з'явиться біла куля (подія A), при другому – чорна (подія B) та при третьому – синя (подія C).

Розв'язання

Імовірність появи білої кулі при першому випробуванні дорівнює $P(A) = 5/12$.

Імовірність появи чорної кулі при другому випробуванні, обчислена з припущенням, що при першому випробуванні з'явилася біла куля, тобто умовна ймовірність, $P(B|A) = 4/11$.

Імовірність появи синьої кулі при третьому випробуванні, обчислена з припущенням, що при першому випробуванні з'явилася біла куля, а при другому – чорна, $P(C|AB) = 3/10$.

За теоремою множення ймовірностей залежних подій маємо для шуканої ймовірності

$$P(ABC) \;=\; P(A)\,P(B|A)\,P(C|AB) \;=\; 1/22.$$

Приклад 2.2

Імовірність влучення у ціль при стрільбі першої та другої гармати відповідно $P_1 = 0{,}7$; $P_2 = 0{,}8$.

Знайти ймовірність влучення при пострілі (з обох гармат) хоча б однією з гармат.

Розв'язання

Імовірність влучення у ціль першою гарматою не залежить від результату стрільби з другої гармати, тому події A (влучення першої гармати) та B (влучення другої гармати) незалежні. Позначимо через A+B подію, ймовірність якої треба знайти. Події A та B сумісні та незалежні в умовах задачі. Застосуємо теорему додавання для сумісних подій:

$$P(A+B) \;=\; P(A) + P(B) - P(AB).$$

Імовірність події AB (обидві гармати влучили)

$$P(AB) \;=\; P(A)\,P(B) \;=\; 0,7 \cdot 0,8 = 0,56.$$

Шукана ймовірність

$$P(A+B) \;=\; 0,7 + 0,8 - 0,56 \;=\; 0,94.$$

Зауваження. В зв'язку з тим, що в цьому прикладі події A та B незалежні, можна скористатися такою теоремою: ймовірність появи хоча б однієї з незалежних подій A_1, A_2, ...різниці подій між одиницею та добутком імовірностей протилежних подій $\overline{A}_1, \overline{A}_2, \ldots, \overline{A}_n$:

$$P(A) \;=\; 1 - P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)\cdots P(\overline{A}_n).$$

Скористаємося формулою

$$P = 1 - P(\overline{A})\,P(\overline{B}),$$

де $P(\overline{A})$ та $P(\overline{B})$, тобто ймовірності промахів відповідно

$$P(\overline{A}) \;=\; 1 - P(A) \;=\; 1 - 0,7 \;=\; 0,3,$$

$$P(\overline{B}) \;=\; 1 - P(B) \;=\; 1 - 0,8 \;=\; 0,2.$$

Шукана ймовірність того, що при одному залпі хоча б одна гармата влучить,

$$P \;=\; 1 - P(\overline{A})P(\overline{B}) \;=\; 1 - 0,3 \cdot 0,2 \;=\; 1 - 0,06 \;=\; 0,94.$$

Як і слід було сподіватися, отримано той же самий результат.

Приклад 2.3

Маємо 3 ящики, в кожному – по 10 деталей. У першому ящику 8, у другому 7, а в третьому 9 стандартних деталей. З кожного ящика наугад виймають по одній деталі.

Знайти ймовірність того, що усі три вийняті деталі виявляться стандартними.

Розв'язання

Імовірність того, що з першого ящика вийнята стандартна деталь (подія A) $P(A) = 8/10 = 0{,}8$.

Імовірність того, що з другого ящика вийнята стандартна деталь (подія B) $P(B) = 7/10 = 0{,}7$.

Імовірність того, що з третього ящика вийнята стандартна деталь (подія C) $P(C) = 9/10 = 0{,}9$.

В зв'язку з тим, що події A, B та C незалежні (в сукупності), шукана ймовірність (за теоремою множення)

$$P(ABC) \;=\; P(A)\,P(B)\,P(C) \;=\; 0,8 \cdot 0,7 \cdot 0,9 \;=\; 0,504.$$

Приклад 2.4

Маємо 3 однакові за виглядом урни. У першій урні 2 білих та 1 чорна куля; у другій – 3 білих та 1 чорна; у третій – 2 білих та 2 чорних кулі. Дехто вибирає наугад одну з урн і виймає з неї кулю.

Знайти ймовірність того, що ця куля біла.

Розв'язання

Розглянемо три гіпотези: H_1 – вибір першої урни; H_2 – вибір другої урни; H_3 – вибір третьої урни та подію A – поява білої кулі.

В зв'язку з тим, що гіпотези, згідно з умовою задачі, рівноможливі, то

$$P(H_1) \;=\; P(H_2) \;=\; P(H_3) \;=\; 1/3.$$

Умовні ймовірності події A при цих гіпотезах відповідно

$$P(A|H_1) \;=\; 2/3; \qquad P(A|H_2) \;=\; 3/4; \qquad P(A|H_3) \;=\; 1/2.$$

За формулою повної ймовірності

$$P(A) \;=\; (1/3)\cdot(2/3)+(1/3)\cdot(3/4)+(1/3)\cdot(1/2) \;=\; 23/36.$$

Приклад 2.5

В урні знаходиться 30 куль: 10 червоних, 5 синіх та 15 білих.

Знайти ймовірність появи кольорової кулі.

Розв'язання

Поява кольорової кулі означає появу або червоної, або синьої кулі.

Імовірність появи червоної кулі (подія A): $P(A) \;=\; 10/30 \;=\; 1/3$.

Імовірність появи синьої кулі (подія B): $P(B) \;=\; 5/30 \;=\; 1/6$.

Події A та B несумісні (поява кулі одного кольору виключає появу кулі іншого кольору), тому можна застосувати теорему додавання.

Шукана ймовірність

$$P(A+B) \;=\; P(A)+P(B) \;=\; 1/3+1/6 \;=\; 1/2.$$

Приклад 2.6

За даними ремонтної майстерні у середньому зі 100 відмов телевізора 50 % обумовлено виходом з ладу електронних ламп, 15 % – конденсаторів, 12 % – резисторів, 5 % – кінескопа, а інші відмови обумовлені іншими причинами.

Знайти ймовірність $P_*(A)$ відмови телевізора з інших причин.

Розв'язання

Згідно з умовою ймовірності виходу з ладу телевізора через відмови різних елементів такі:

$$P_*(A_1)=0,50;\qquad P_*(A_2)=0,15;\qquad P_*(A_3)=0,12;\qquad P_*(A_4)=0,05,$$

де A_1, A_2, A_3, A_4 – відмови телевізора, обумовлені відповідно виходом з ладу електронних ламп, конденсаторів, резисторів та кінескопа. Події A, A_1, A_2, A_3, A_4 складають повну групу. Тому

$$P_*(A) \;=\; 1-\sum_{k=1}^{4}P_*(A_k) \;=\; 1-(0,5+0,15+0,12+0,05) \;=\; 0,18.$$

Приклад 2.7

Деталі, які виготовлені на підприємстві робітниками цеху, проходять перевірку на стандартність в одного з двох контролерів. Імовірність того, що деталь потрапить до першого контролера, дорівнює 0,6, що до другого – 0,4. Імовірність того, що виготовлена деталь буде визнана стандартною першим контролером, дорівнює 0,94, а другим – 0,98. Виготовлена деталь при перевірці була визнана стандартною.

Знайти ймовірність того, що цю деталь перевірив перший контролер.

Розв'язання

Позначимо через A подію, складену з того, що виготовлена деталь визнана стандартною. Можна зробити два припущення: 1) деталь перевірив перший контролер (гіпотеза H_1); 2) деталь перевірив другий контролер (гіпотеза H_2).

Шукану ймовірність того, що деталь перевірив перший контролер, знайдемо за формулою Байєса

$$\mathrm{P}(\mathrm{H}_1|\mathrm{A}) \;=\; \frac{\mathrm{P}(\mathrm{H}_1)\,\mathrm{P}(\mathrm{A}|\mathrm{H}_1)}{\mathrm{P}(\mathrm{H}_1)\,\mathrm{P}(\mathrm{A}|\mathrm{H}_1)+\mathrm{P}(\mathrm{H}_2)\,\mathrm{P}(\mathrm{A}|\mathrm{H}_2)}.$$

Згідно з умовою задачі

$\mathrm{P}(\mathrm{H}_1) = 0{,}60$ (імовірність того, що деталь потрапить до першого контролера);

$\mathrm{P}(\mathrm{H}_2) = 0{,}40$ (імовірність того, що деталь потрапить до другого контролера);

$\mathrm{P}(\mathrm{A}|\mathrm{H}_1) = 0{,}94$ (імовірність того, що виготовлена деталь буде визнана стандартною першим контролером);

$\mathrm{P}(\mathrm{A}|\mathrm{H}_2) = 0{,}98$ (імовірність того, що виготовлена деталь буде визнана стандартною другим контролером).

Шукана ймовірність

$$\mathrm{P}(\mathrm{H}_1|\mathrm{A}) \;=\; \frac{0,6\cdot 0,94}{0,6\cdot 0,94+0,4\cdot 0,98} \;\approx\; 0,59.$$

Звідси випливає, що до випробування ймовірність $\mathrm{P}(\mathrm{H}_1)$ гіпотези H_1 дорівнювала 0,60, а після того, як став відомим результат випробування, ймовірність цієї гіпотези (точніше, умовна ймовірність) змінилася і стала дорівнювати $\mathrm{P}(\mathrm{H}_1|\mathrm{A}) = 0,59$. Таким чином, використання формули Байєса дозволило переоцінити ймовірність розглядуваної гіпотези.

Приклад 2.8

Виконується 8 незалежних пострілів по резервуару з пальним, причому перший влучений снаряд викликає течу пального, але не запалює його, а другий влучений снаряд призводить до загорання пального. Відомо, що ймовірність влучення у ціль при кожному пострілі дорівнює 0,2.

Знайти ймовірність того, що резервуар буде підпалений.

Розв'язання

Для підпалення резервуара потрібно не менш двох влучень. За формулою

$$\mathrm{R}_{m,n} \;=\; 1-\sum_{i=0}^{m-1}\mathrm{P}_{i,n}$$

маємо

$$\mathrm{R}_{2,8} \;=\; 1-(\mathrm{P}_{0,8}\;+\;\mathrm{P}_{1,8}) \;=\; 1-\left(0,8^8\;+\;C_8^1\cdot 0,2\cdot 0,8^7\right) \;=\; 0,497.$$

Приклад 2.9

Каналом далекого зв'язку, схильному до дії перешкод, передається одна з двох команд управління у вигляді кодових комбінацій 11111 або 00000. Відомо, що априорні ймовірності передачі цих команд відповідно дорівнюють 0,7 та 0,3. При відсутності перешкод імовірності правильного прийому кожного з символів (1 та 0) дорівнюють 1. У зв'язку з наявністю перешкод ці ймовірності зменшуються до 0,6. Припускається, що символи кодових комбінацій спотворюються незалежно один від одного. На виході приймального пристрою зареєстрована комбінація 10110.

Визначити, яка команда була передана.

Розв'язання

Нехай A — подія, що полягає в прийомі комбінації 10110. До цієї події ведуть дві гіпотези: H_1 – була передана комбінація 11111; H_2 – була передана комбінація 00000. Згідно з умовою $P(H_1) = 0{,}7$; $P(H_2) = 0{,}3$.

Умовна ймовірність прийому кодової комбінації 10110 замість 11111 така:

$$P(A|H_1) \;=\; 0,6\cdot 0,4\cdot 0,6\cdot 0,6\cdot 0,4 \;\approx\; 0,035.$$

Аналогічно

$$P(A|H_2) \;=\; 0,4\cdot 0,6\cdot 0,4\cdot 0,4\cdot 0,6 \;\approx\; 0,023,$$

звідки

$$P(H_1|A) \;=\; P(H_1)\,P(A|H_1)\left(\sum_{k=1}^{2} P(H_k)\,P(A|H_k)\right)^{-1}.$$

Це дає

$$P(H_1|A) \;=\; \frac{0,7\cdot 0,035}{0,7\cdot 0,035+0,3\cdot 0,023} \;\approx\; 0,78$$

та аналогічно

$$P(H_2|A) \;=\; \frac{0,3\cdot 0,023}{0,0314} \;\approx\; 0,22.$$

Порівнюючи знайдені умовні ймовірності, робимо висновок, що при появі на виході комбінації 10110 з імовірністю 0,78 була передана команда 11111.

Приклад 2.10

Виконується 6 незалежних пострілів по цілі. Ймовірність p влучення при кожному пострілі дорівнює 0,75.

Обчислити: а) імовірність рівно 5 влучень; б) імовірність не менше 5 влучень; в) імовірність більше 3 промахів.

Розв'язання

а) Згідно з умовою ймовірність влучення при кожному пострілі дорівнює $p = 0{,}75$. Відповідно ймовірність промаху $q = 1 - p = 0{,}25$. Імовірність рівно 5 влучень

$$P_6(5) \;=\; C_6^5 p^5 q^1 \;=\; 6\cdot(0,75)^5\cdot 0,25 \;\approx\; 0,356.$$

б) Вимога, щоб при 6 пострілах було не менше 5 влучень, буде задоволена, якщо здійсниться 5 або 6 влучень. Ці події несумісні. Тому

$$P_6(m \ge 5) \;=\; \sum_{m=5}^{6} C_6^m p^m q^{6-m} \;=\; C_6^5 p^5 q^1 + C_6^6 p^6 q^0 \;=\; 6\cdot(0,75)^5\cdot 0,25+(0,75)^6 \;\approx\; 0,534.$$

в) Імовірність того, що при 6 пострілах буде більш 3 промахів, дорівнює ймовірності того, що при цих 6 пострілах буде менш 4 влучень (або жодного влучення, або одне, або два влучення). Тому

$$P_6(m \le 2) \;=\sum_{m=0}^{2} C_6^m p^m q^{6-m} \;=\; C_6^0 p^0 q^6 + C_6^1 p^1 q^5 + C_6^2 p^2 q^4 \;=$$

$$= (0,25)^6 + 6 \cdot 0,75 \cdot (0,25)^5 + 15 \cdot (0,75)^2 \cdot (0,25)^4 \approx 0,0376.$$

Приклад 2.11

Маємо 2 ящики з однотипними деталями. У першому a придатних деталей та b з дефектом, у другому c придатних та d з дефектом. Вибираємо наугад один ящик і з нього виймаємо одну деталь. Ця деталь виявилась придатною.

Знайти ймовірність того, що наступна деталь, яка буде вийнята з того ж ящика, теж буде придатною.

Розв'язання

Розглянемо гіпотези:

$$\mathrm{H}_1 = \{\textit{вибрано перший ящик}\}; \quad \mathrm{H}_2 = \{\textit{вибрано другий ящик}\}.$$

$$\mathrm{P}(\mathrm{H}_1) = 1/2; \qquad \mathrm{P}(\mathrm{H}_2) = 1/2.$$

Подія $\mathrm{A} = \{\textit{придатна деталь при першому вийманні}\}$:

$$\mathrm{P}(\mathrm{H}_1|\mathrm{A}) = \frac{a}{a+b}\left(\frac{a}{a+b} + \frac{c}{c+d}\right)^{-1},$$

$$\mathrm{P}(\mathrm{H}_2|\mathrm{A}) = \frac{c}{c+d}\left(\frac{a}{a+b} + \frac{c}{c+d}\right)^{-1}.$$

Подія $\mathrm{B} = \{\textit{придатна деталь при другому вийманні}\}$:

$$\mathrm{P}(\mathrm{B}|\mathrm{H}_1\mathrm{A}) = (a-1)\,/\,(a+b-1);$$

аналогічно

$$\mathrm{P}(\mathrm{B}|\mathrm{H}_2\mathrm{A}) = (c-1)\,/\,(c+d-1).$$

Звідси шукана ймовірність

$$\mathrm{P}(\mathrm{B}|\mathrm{A}) = \left(\frac{a}{a+b} + \frac{c}{c+d}\right)^{-1}\left(\frac{a(a-1)}{(a+b)(a+b-1)} + \frac{c(c-1)}{(c+d)(c+d-1)}\right).$$

Приклад 2.12

Імовірність появи події A, яка рівноможлива у будь-який момент проміжку T, дорівнює p. Відомо, що за час t $(t < T)$ дана подія не відбулася.

Визначити ймовірність P того, що подія A відбудеться у проміжок часу, що залишився.

Розв'язання

Імовірність p появи події за проміжок T дорівнює ймовірності $p\,(t/T)$ появи даної події за час t плюс добуток імовірності $(1 - pt/T)$ того, що подія не відбудеться за час t, на умовну імовірність P появи події за час, що залишився, якщо раніше вона не відбулася.

Таким чином, має місце рівняння

$$p = pt/T + (1 - pt/T)\mathrm{P}.$$

Звідси знаходимо:

$$\mathrm{P} \;=\; p\,(1-t/T)\,(1-pt/T)^{-1}.$$

Приклад 2.13

На змаганнях виконується 4 незалежних постріли в однакових умовах, причому ймовірність влучення при кожному пострілі дорівнює $p = 0{,}25$.

Знайти ймовірності $\mathrm{P}_{0,4}$, $\mathrm{P}_{1,4}$, $\mathrm{P}_{2,4}$, $\mathrm{P}_{3,4}$, $\mathrm{P}_{4,4}$.

Розв'язання

За формулою $\mathrm{P}_{n,m} = C_n^m p^m q^{n-m}$ маємо

$$\mathrm{P}_{0,4} \;=\; C_4^0 p^0 q^4 \;=\; 0,316; \qquad \mathrm{P}_{1,4} \;=\; C_4^1 p^1 q^3 \;=\; 0,422;$$

$$\mathrm{P}_{2,4} \;=\; C_4^2 p^2 q^2 \;=\; 0,211; \qquad \mathrm{P}_{3,4} \;=\; C_4^3 p^3 q^1 \;=\; 0,047;$$

$$\mathrm{P}_{4,4} \;=\; C_4^4 p^4 q^0 \;=\; 0,004.$$

2.7. Задачі для розв'язання

Задача 2.1

Імовірності влучення при кожному пострілі для 3 стрільців дорівнюють відповідно 4/5, 3/4 та 2/3. При одночасному пострілі усіх трьох стрільців було два влучення.

Визначити ймовірність того, що промахнувся перший стрілець.

Відповідь: $\mathrm{P} = \mathrm{P}(\mathrm{H}_1|\mathrm{A}) = 3/13$.

Задача 2.2

При заселенні квартири включили в освітлювальну мережу $2k$ нових електролампочок. Кожна лампочка за рік перегорає з імовірністю r.

Знайти ймовірність події $\{$A: *за рік не менше половини початково підключених лампочок треба буде замінити новими*$\}$.

Відповідь: $\mathrm{P} = \sum\limits_{m=k+1}^{2k} C_{2k}^m\, r^m\,(1-r)^{2k-m}$.

Задача 2.3

За допомогою шести карток, на яких написано по одній літері, складено слово "карета". Картки старанно перемішуються, а потім наугад витягаються по одній.

Яка ймовірність того, що порядок надходження літер утворить слово "ракета"?

Відповідь: $\mathrm{P} = 1/360$.

Задача 2.4

З повного набору доміно навмання беруться дві кістки.

Визначити ймовірність того, що другу кістку можна підставити до першої.

Відповідь: $\mathrm{P} = \dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{4}{9} + \dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{2}{9} = \dfrac{7}{18}$.

Задача 2.5

Стрілець виконує один постріл у мішень, що складена з центрального круга та двох концентричних кіл. Імовірності влучення у круг та кола відповідно 0,20, 0,15 та 0,10.

Визначити ймовірність невлучення у мішень.

Відповідь: P = 0,55.

Задача 2.6

На залізничній станції пасажиру надається сейф (індивідуальна камера для схову багажу). Цей сейф відчиняється тільки при наборі певного тризначного шифру (наприклад: 253, 009, 325 і т.д.). Усього таких шифрів $10 \times 10 \times 10 = 1000$. Пасажир набрав шифр, зачинив сейф та пішов. Стороння людина, яка не знає шифру, намагається відчинити сейф, вибираючи три цифри наугад (при цьому, природно, невдалі комбінації не повторюються).

Приймаючи, що $k \leq 1000$, знайти ймовірності подій:

{A: *сейф відчинеться з першої спроби*};

{B: *сейф відчинеться в результаті k-ї спроби*}.

Відповідь:

$$\mathrm{P(A)} = \frac{1}{1000};$$

$$\mathrm{P(B)} = 1 - \mathrm{P}(\overline{\mathrm{B}}) = 1 - \frac{999}{1000} \cdot \frac{998}{999} \cdots \frac{1000-k+1}{1000-k+2} \cdot \frac{1000-k}{1000-k+1} = \frac{k}{1000}.$$

Задача 2.7

Монету підкидають 5 разів.

Знайти ймовірність того, що "герб" випаде: а) менше 2 разів; б) не менше 2 разів.

Відповідь:

а) $\mathrm{P} = \mathrm{P}_5(0) + \mathrm{P}_5(1) = 3/16$;

б) $\mathrm{P} = 1 - [\,\mathrm{P}_5(0) + \mathrm{P}_5(1)\,] = 13/16$.

Задача 2.8

В деякому ящику міститься 5 виробів. З цієї партії виробів наугад витягли один виріб. Він виявився бракованим. Будь-яка кількість бракованих виробів рівноможлива.

Яке припущення про кількість бракованих виробів найімовірніше?

Відповідь: Гіпотези: H_k – маємо k бракованих виробів ($k = 0,\ 1,\ \ldots,\ 5$). Найімовірніша гіпотеза H_5, тобто усі п'ять виробів браковані.

Задача 2.9

З першої урни, що містить a червоних кульок та b синіх кульок, наугад взяли n кульок та вклали (не розглядаючи) в другу урну. З другої урни наугад узяли m кульок.

Знайти ймовірність того, що серед взятих m кульок буде 1 червона кулька, якщо $m \leq b$.

Відповідь: $\mathrm{P} = \sum\limits_{k=0}^{n} \sum\limits_{\alpha=0}^{m} \dfrac{C_a^k C_b^{n-k}}{C_{a+b}^n} \cdot \dfrac{C_k^\alpha C_{n-k}^{m-\alpha}}{C_n^m} \cdot \dfrac{C_\alpha^1 C_{m-\alpha}^0}{C_n^1}$.

Задача 2.10

Імовірність того, що в електричному колі напруга перевищить номінальне значення, дорівнює p. При підвищеній напрузі ймовірність аварії приладу-споживача електричного струму дорівнює q.

Визначити ймовірність аварії приладу внаслідок підвищення напруги.

Відповідь: $\mathrm{P} = pq$.

Задача 2.11

З колоди з 52 карт наугад беруть 6 карт.

Знайти ймовірність того, що серед цих карт будуть представники усіх чотирьох мастей.

Відповідь: $\mathrm{P}= 1 - \left(4 \cdot C_{39}^{6} + 6 \cdot C_{26}^{6} + 4 \cdot C_{13}^{6}\right) / C_{52}^{6}$.

Задача 2.12

Маємо 3 урни: у першій a білих куль та b чорних; у другій c білих куль та d чорних; у третій k білих куль (чорних нема). Вибрано наугад урну, та вийнято з неї одну кулю. Вона виявилася білою.

Знайти ймовірність того, що ця куля з першої, другої або третьої урни.

Відповідь:

$$\mathrm{P}(\mathrm{H}_1|\mathrm{A}) = \left(\frac{a}{a+b}\right)\left(\frac{a}{a+b} + \frac{c}{c+d} + 1\right)^{-1},$$

$$\mathrm{P}(\mathrm{H}_2|\mathrm{A}) = \left(\frac{c}{c+d}\right)\left(\frac{a}{a+b} + \frac{c}{c+d} + 1\right)^{-1},$$

$$\mathrm{P}(\mathrm{H}_3|\mathrm{A}) = \left(\frac{a}{a+b} + \frac{c}{c+d} + 1\right)^{-1}.$$

Задача 2.13

Маємо k_1 урн, у кожній з яких m_1 білих та n_1 чорних куль, та k_2 урн, що містять по m_2 білих та n_2 чорних куль. Витягнута з вибраної наугад урни одна куля виявилася білою.

Яка ймовірність того, що дана куля витягнута з першої групи урн?

Відповідь: $\mathrm{P} = \left(1 + \dfrac{k_2 m_2 (m_1 + n_1)}{k_1 m_1 (m_2 + n_2)}\right)^{-1}$.

Задача 2.14

Три стрільці незалежно зробили по одному пострілу. Дві кулі влучили у мішень.

Знайти ймовірність того, що в мішень влучив третій стрілець, якщо ймовірності влучення першим, другим та третім стрільцем відповідно дорівнюють 0,6, 0,5 та 0,4.

Відповідь: $\mathrm{P} = 10/19$.

Задача 2.15

У лотереї всього N квитків, з яких L виграшних. Куплено K квитків.

Визначити ймовірність того, що виграє хоча б один квиток.

Відповідь: $\mathrm{P} = 1 - \dfrac{(N-L)!\,(N-K)!}{N!\,(N-L-K)!}$.

Задача 2.16

Машина складається з N блоків. Надійність (імовірність безвідмовної роботи) з плином часу T першого блока дорівнює p_1, другого — p_2 і т.д. Блоки виходять з ладу незалежно один від одного. При відмові будь-якого блока виходить з ладу вся машина.

Знайти ймовірність того, що машина вийде з ладу за час T.

Відповідь: $\mathrm{P} = 1 - p_1 p_2 \dots p_N$.

Задача 2.17

Повідомлення, що переказується каналом зв'язку, складається з n знаків (символів). При передачі кожний знак спотворюється (незалежно від інших) з імовірністю p. Для надійності повідомлення дублюється (повторюється k разів).

Знайти ймовірність того, що хоча б одне з переданих повідомлень буде прийняте цілком правильно.

Відповідь: $\mathrm{P} = 1 - [1 - (1 - \mathrm{p})^n]^k$.

Задача 2.18

Скільки разів необхідно кидати пару гральних костей, щоб з імовірністю, більшою, ніж 0,5, очікувати суму очок, яка дорівнює 12, хоча б один раз? (Задача де-Мере).

Відповідь: $1 - (35/36)^n \geq 0,5$, тому $n \geq 25$.

Задача 2.19

У двох урнах знаходиться відповідно m та n білих куль та i та j чорних куль. З кожної урни наугад витягається одна куля, а потім з цих двох куль наугад береться одна.

Яка ймовірність того, що ця куля біла?

Відповідь: $\mathrm{P} = (mj + ni + 2mn)[\,2(m+i)(n+j)\,]^{-1}$.

Задача 2.20

З чисел 1, 2, ..., n одне за одним вибирають наугад два числа.

Яка ймовірність того, що різниця між першим вибраним числом та другим буде не менша m $(m > 0)$?

Відповідь: $\mathrm{P} = (n-m)\,(n-m+1)[2n(n-1)]^{-1}$.

Задача 2.21

В урні 2 білих та 3 чорних кулі. Два гравця по черзі виймають з урни по кулі, не вкладаючи їх назад. Виграє той, хто раніше отримає білу кулю.

Знайти ймовірність того, що виграє перший гравець.

Відповідь: $\mathrm{P} = (2/5) + (3/5)\cdot(2/4)\cdot(2/3) = 3/5$.

2.8. Завдання для перевірки

1. Сформулюйте основні теореми теорії ймовірностей.
2. Розкрийте значення основних теорем теорії ймовірностей.
3. Сформулюйте поняття додавання та множення випадкових подій.

4. Поясніть зміст теореми додавання ймовірностей.
5. Поясніть зміст теореми множення ймовірностей.
6. Сформулюйте зміст формули повної ймовірності.
7. Сформулюйте зміст поняття гіпотези.
8. Дайте інтерпретацію формули Байєса.
9. Дайте інтерпретацію теореми про повторення дослідів.
10. Побудуйте практичний приклад застосування формули Бернуллі.

3. Закони розподілу випадкових величин

3.1. Випадкові величини

Одне з найважливіших понять теорії ймовірностей – поняття **випадкової величини**. *Під випадковою величиною розуміється величина, яка в результаті досліду з випадковим наслідком набуває того чи іншого значення.*

Приклади :

а) дослід – чотири постріли в мішень; випадкова величина — кількість влучень;

б) дослід – експлуатація ЕОМ; випадкова величина – час роботи ЕОМ до першого виходу з ладу.

В теоретико-множинному тлумаченні основних понять теорії ймовірностей випадкова величина X – це деяка функція елементарної події ω: $\mathrm{X} = \varphi(\omega)$, де $\omega \in \Omega$. Значення цієї функції залежить від того, яка елементарна подія ω з'явилася у результаті досліду.

В подальшому будемо скрізь позначати: випадкові величини – великими літерами, а невипадкові – малими.

Законом розподілу випадкової величини називається будь-яке співвідношення, що встановлює зв'язок між можливими значеннями випадкової величини та відповідними їм імовірностями, наприклад, імовірністю того, що величина набуде будь-якого значення або влучить в будь-який проміжок.

Якщо випадкова величина X має конкретний закон розподілу, то про неї говорять, що вона *розподілена за цим законом* або ж "підкоряється цьому закону розподілу". Найбільш загальною формою закону розподілу є *функція розподілу*, яка являє собою ймовірність того, що випадкова величина X набуде значення, яке менше, ніж задане x :

$$F(x) = \Pr\{\mathrm{X} < x\}. \tag{3.1}$$

Функція розподілу $F(x)$ для будь-якої випадкової величини має властивості $F(-\infty) = 0$, $F(\infty) = 1$; при зростанні x функція $F(x)$ не зменшується. Найбільш простий вигляд мають закони у так званих дискретних випадкових величинах. Випадкова величина називається *дискретною*, якщо безліч її можливих значень скінченна або зліченна. Ці значення можуть бути пераховані, пронумеровані одне за одним.

У розглянутому вище прикладі випадкова величина X – кількість влучень у мішень при чотирьох пострілах – є дискретною. Її можливі значення: 0, 1, 2, 3, 4. Друга випадкова величина T – час напрацювання ЕОМ до першого виходу з ладу – недискретна. Її можливі значення безупинно заповнюють якусь ділянку осі абсцис, при цьому їх множина незліченна.

3.2. Дискретні випадкові величини

З розглянутих вище прикладів можна зробити висновок, що деякі випадкові величини мають тільки скінченну множину можливих значень. *Дискретною випадковою величиною* X називається випадкова величина зі скінченною або зліченною множиною можливих значень.

Найпростішою формою закону розподілу дискретної випадкової величини X є *ряд розподілу* – таблиця, в верхньому рядку якої перелічені всі значення випадкової величини $x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots$ у порядку їхнього зростання, а у нижній – відповідні їм імовірності $p_1,\, p_2,\, \ldots,\, p_i,\, \ldots$:

X : (3.2)

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_i	$\cdots$
P	p_1	p_2	$\cdots$	p_i	$\cdots$

де

$$p_n \;=\; \Pr\{\mathrm{X} = x_i\}, \qquad \sum_i p_i \;=\; 1. \tag{3.3}$$

Графічне зображення ряду розподілу називається *многокутником розподілу.*

Функція розподілу $F(x)$ дискретної випадкової величини X є розривною, решітчастою функцією, стрибки якої відповідають можливим значенням $x_1,\, x_2,\, x_3,\, \ldots,\, x_k,\, \ldots$ випадкової величини X та дорівнюють імовірностям $p_1,\, p_2,\, p_3,\, \ldots,\, p_k,\, \ldots$ цих значень; між стрибками функція $F(x)$ зберігає постійне значення. У точці розриву функція $F(x)$ дорівнює тому значенню, з яким вона підходить до точки розриву ліворуч. Функція $F(x)$ "неперервна ліворуч", тобто при підході до будь-якої точки ліворуч не зазнає розриву, а при підході праворуч – розрив можливий.

Ймовірність влучення випадкової величини X на ділянку від α до β (включаючи α) виражається, за допомогою функції розподілу, формулою

$$\Pr\{\alpha \le \mathrm{X} < \beta\} \;=\; F(\beta) - F(\alpha), \tag{3.4}$$

або (в інших позначеннях)

$$\Pr\{\mathrm{X} \in [\alpha, \beta)\} \;=\; F(\beta) - F(\alpha), \tag{3.5}$$

де знаком "[" позначено те, що точка α включається до складу відрізка від α до β, а знаком ")" – що точка β до нього не включається.

3.3. Числові характеристики дискретних випадкових величин

Математичним сподіванням (або очікуванням) дискретної випадкової величини X називається сума добутків усіх її можливих значень x_i на відповідні ймовірності p_i :

$$\mathrm{M}[\mathrm{X}] \;=\; \sum_i x_i\, p_i. \tag{3.6}$$

На практиці математичне сподівання випадкової величини інколи називають просто *середнім значенням* випадкової величини. Математичне сподівання випадкової величини може і не існувати, якщо відповідна сума розходиться. У випадку, коли треба математичне сподівання випадкової величини X позначити однією літерою, будемо писати

$$\mathrm{M}[\mathrm{X}] \;=\; m_{\mathrm{X}} \tag{3.7}$$

(іноді ще позначають $\mathrm{M}[\mathrm{X}] \;=\; \overline{x}$).

Центрованою випадковою величиною $\mathring{\mathrm{X}}$ називається різниця між випадковою величиною та її математичним сподіванням :

$$\mathring{\mathrm{X}} \;=\; \mathrm{X} - m_{\mathrm{X}}. \tag{3.8}$$

Дисперсією випадкової величини X називається математичне сподівання квадрату відповідної центрованої випадкової величини :

$$\mathrm{D}[\mathrm{X}] \;=\; \mathrm{M}[\mathring{\mathrm{X}}^2] \qquad \text{або} \qquad \mathrm{D}[\mathrm{X}] \;=\; \mathrm{M}[\mathrm{X}^2] - m_{\mathrm{X}}^2. \tag{3.9}$$

Дисперсія випадкової величини є характеристикою розсіювання, розкинутості значень біля її середнього значення. Для дискретної випадкової величини X дисперсія обчислюється за формулою

$$\mathrm{D}[\mathrm{X}] \;=\; \sum_i (x_i - m_{\mathrm{X}})^2\, p_i \qquad \text{або} \qquad \mathrm{D}[\mathrm{X}] \;=\; \sum_i x_i^2\, p_i - m_{\mathrm{X}}^2. \tag{3.10}$$

Якщо вимагається дисперсію випадкової величини X позначити однією літерою, її позначають D_{X} або D (якщо вона одна).

Середнім квадратичним відхиленням (або стандартом) випадкової величини X називається корінь квадратний з її дисперсії :

$$\sigma[\mathrm{X}] \;\equiv\; \sigma_{\mathrm{X}} \;=\; \sqrt{\mathrm{D}_{\mathrm{X}}}. \tag{3.11}$$

(мається на увазі арифметичне або позитивне значення кореня).

Початковим моментом k-го порядку випадкової величини X називається математичне сподівання k-го степеня цієї випадкової центрованої величини :

$$\alpha_k[\mathrm{X}] \;=\; \mathrm{M}[\mathrm{X}^k]. \tag{3.12}$$

Для дискретної випадкової величини X початковий момент обчислюється за формулою

$$\alpha_k[\mathrm{X}] \;=\; \sum_i x_i^k p_i. \tag{3.13}$$

Центральним моментом k-го порядку випадкової величини X називається математичне сподівання k-го степеня відповідної центрованої величини :

$$\mu_k[\mathrm{X}] \;=\; \mathrm{M}[\mathring{\mathrm{X}}^k]. \tag{3.14}$$

Для дискретної випадкової величини X центральний момент обчислюється за формулою

$$\mu_k[\mathrm{X}] \;=\; \sum_i (x_i - m_{\mathrm{X}})^k p_i. \tag{3.15}$$

Математичне сподівання випадкової величини X є її першим початковим моментом, а дисперсія — другим центральним:

$$\mathrm{M[X]} = \alpha_1[\mathrm{X}], \qquad \mathrm{D[X]} = \mu_2[\mathrm{X}]. \tag{3.16}$$

Центральні моменти виражаються через початкові моменти:

$$\begin{aligned} \mu_1[\mathrm{X}] &= \alpha_1[\mathrm{X}] - m_{\mathrm{x}}, \\ \mu_2[\mathrm{X}] &= \alpha_2[\mathrm{X}] - m_{\mathrm{x}}^2, \\ \mu_3[\mathrm{X}] &= \alpha_3[\mathrm{X}] - 3\alpha_2[\mathrm{X}]\, m_{\mathrm{x}} + 2m_{\mathrm{x}}^3, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \tag{3.17}$$

Особливо важлива друга з цих формул, яка виражає дисперсію через другий початковий момент:

$$\mathrm{D[X]} = \alpha_2[\mathrm{X}] - m_{\mathrm{x}}^2, \tag{3.18}$$

або в іншому вигляді

$$\mathrm{D[X]} = \mathrm{M[X^2]} - (\mathrm{M[X]})^2, \tag{3.19}$$

тобто *дисперсія дорівнює математичному сподіванню квадрата випадкової величини мінус квадрат її математичного сподівання.*

Індикатором події A називається дискретна випадкова величина U, що має два можливих значення: 0 та 1, яка дорівнює нулю, якщо подія A не настала, і одиниці, якщо вона настала:

$$\mathrm{U} = \begin{cases} 1 & \text{при } \omega \in \mathrm{A}, \\ 0 & \text{при } \omega \notin \mathrm{A}. \end{cases} \tag{3.20}$$

Якщо p – імовірність події у даному досліді і $q = 1 - p$, то ряд розподілу індикатора U події A має вигляд

U: (3.21)

U	0	1
P	q	p

Математичне сподівання і дисперсія величини U відповідно

$$\mathrm{M[U]} = p; \qquad \mathrm{D[U]} = pq. \tag{3.22}$$

У ряді практичних задач теорії ймовірностей користування індикаторами подій істотно спрощує розв'язання.

При обчисленні числових характеристик випадкових величин часто буває зручно користуватися теоремою про повне математичне сподівання: *якщо про умови досліду можна зробити* n *гіпотез* $\mathrm{H}_1, \mathrm{H}_2, \ldots, \mathrm{H}_n$, *повне математичне сподівання випадкової величини* X *може бути обчислено за формулою*

$$\mathrm{M[X]} = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{P(H}_i)\, \mathrm{M[X|H}_i], \tag{3.23}$$

де $\mathrm{M[X|H}_i]$ — *умовне математичне сподівання величини* X *при гіпотезі* H_i.

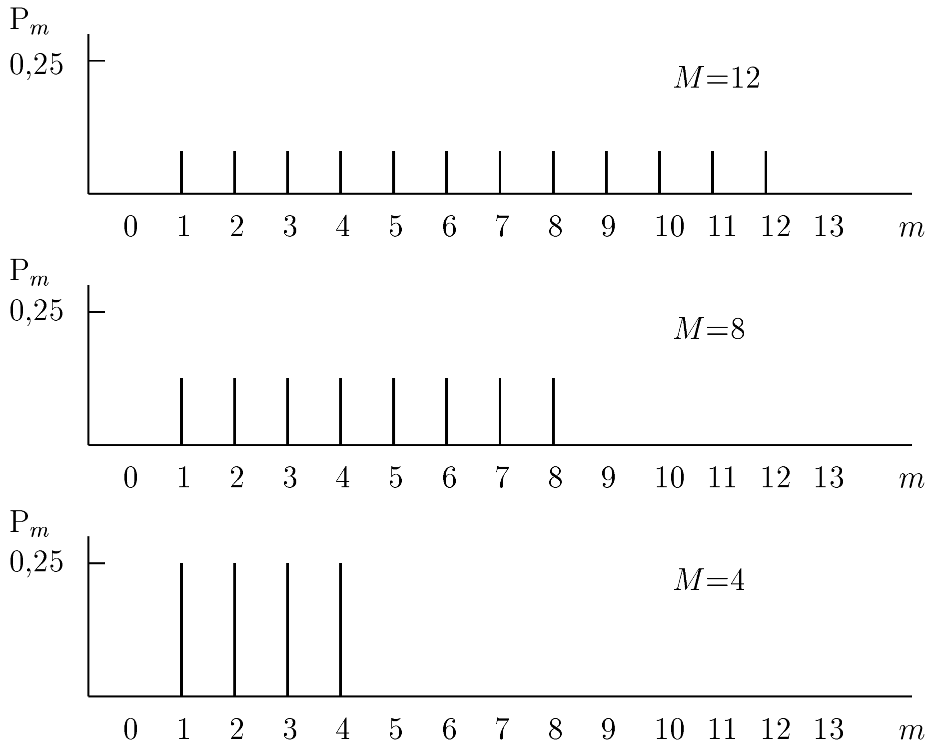


Рисунок 3.1 — Рівномірний дискретний закон; $M = 4; 8; 12$

Формулу повного математичного сподівання можна застосовувати при обчисленні початкових моментів будь-якого порядку:

$$\alpha_k[\mathrm{X}] \;=\; \sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}(\mathrm{H}_i)\,\mathrm{M}[\mathrm{X}^k|\mathrm{H}_i]. \tag{3.24}$$

Розглянемо декілька типів розподілу дискретних випадкових величин, що часто зустрічаються.

3.4. Дискретний рівномірний закон

Припущення про однакову ймовірність усіх можливих значень дискретної випадкової величини часто зустрічається (рис 3.1). Наприклад, при киданні гральної кості з рівною ймовірністю може випасти будь-яка з шести її граней.

Нехай можливі значення *дискретної випадкової величини* X – цілі числа від 1 до M. Якщо вони рівноймовірні, то

$$\mathrm{P}_m \;=\; \Pr\{\mathrm{X} = m\} \;=\; \frac{1}{M}, \qquad m = 1, 2, \ldots, M. \tag{3.25}$$

Для неї

$$\mathrm{M}[\mathrm{X}] \;=\; \frac{1}{2}\,(M+1), \qquad \mathrm{D}[\mathrm{X}] \;=\; \frac{1}{12}\,(M^2-1). \tag{3.26}$$

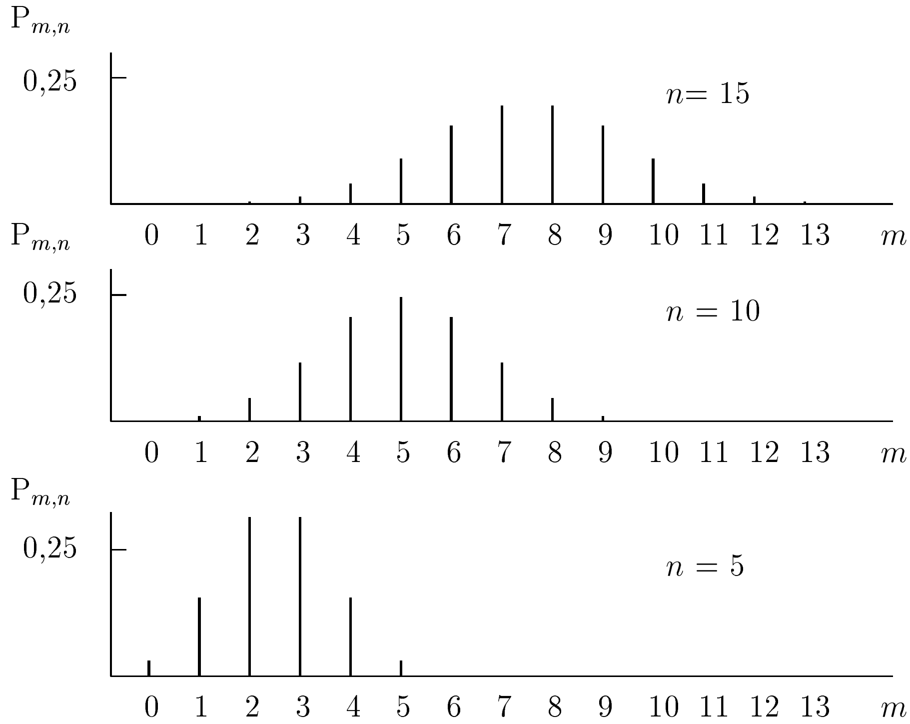


Рисунок 3.2 — Розподіл Бернуллі; $n = 5; 10; 15;$ $p = 0{,}5$

3.5. Біноміальний розподіл (розподіл Бернуллі)

Випадкова величина X називається *розподіленою щодо біноміального закону*, якщо вона є кількістю m появ випадкової події у n випробуваннях, за умови, що в одному (будь-якому) досліді ця подія настає з заданою ймовірністю p.

Закон розподілу випадкової величини X:

$$\mathrm{P}_{m,n} \;=\; \Pr\{\mathrm{X} = m\} \;=\; C_n^m p^m q^{n-m}, \tag{3.27a}$$

або

$$\mathrm{P}_{m,n} \;=\; \frac{n\,!}{m\,!\;(n-m)\,!}\,p^m q^{n-m}, \tag{3.27b}$$

де $0 < p < 1$, $q = 1 - p$; $m = 0, 1, \ldots, n$. Розподіл (3.27) залежить від двох параметрів: n (рис. 3.2) та p (рис. 3.3).

З теореми про повторення дослідів випливає, що *кількість* X *появ події при* n *незалежних дослідах має біноміальний розподіл.* Таким чином, імовірність однієї складної події, яка полягає в тому, що у n випробуваннях елементарна подія А настане m разів і не настане $n - m$ разів, дорівнює $\mathrm{P}_{m,n}$.

Для випадкової величини X, що має біноміальний розподіл з параметрами p і n,

$$\mathrm{M[X]} \;=\; np; \qquad \mathrm{D[X]} \;=\; npq. \tag{3.28}$$

Користуватися формулою Бернуллі (3.27) за великих значень параметра n достатньо важко, бо вона вимагає виконання дій над великими числами. Мають місце асимптотичні формули, що дозволяють наблизити ймовірність появи події, що дорівнює рівно m разів у n випробуваннях, якщо кількість випробувань достатньо велика.

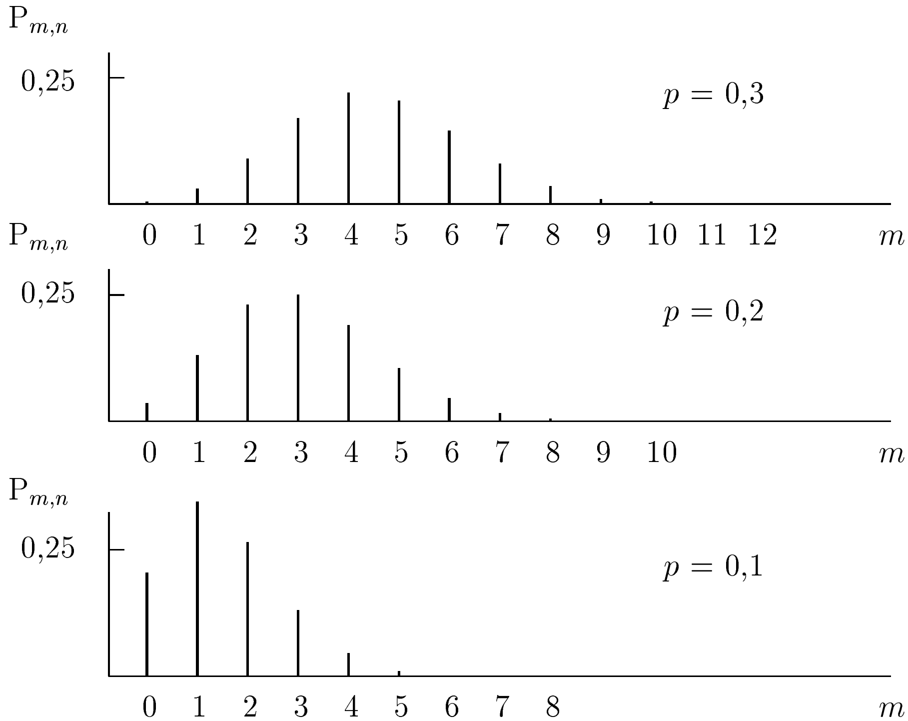


Рисунок 3.3 — Розподіл Бернуллі; $p = 0{,}1;\ 0{,}2;\ 0{,}3;\ \ n = 15$

3.6. Теорема Муавра-Лапласа

Ця теорема подається в локальній та в інтегральній формах.

Локальна форма теореми Муавра-Лапласа:

Якщо ймовірність p появи події A *у кожному випробуванні стала та відмінна від нуля та одиниці, то ймовірність* $\mathrm{P}_n(k)$ *того, що подія* A *відбудеться у n випробуваннях рівно k разів, буде приблизно*

$$\mathrm{P}_n(k) \;=\; \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}}\exp\left(-\frac{(k-np)^2}{2npq}\right), \tag{3.29}$$

тим точніше, чим більше кількість випробувань n.

Інтегральна форма теореми Муавра-Лапласа:

Якщо ймовірність p появи події A *у кожному випробуванні стала та відмінна від нуля та одиниці, то ймовірність* $\mathrm{P}_n(k_1, k_2)$ *того, що подія* A *настане у n випробуваннях у діапазоні від k_1 до k_2 разів, буде приблизно*

$$\mathrm{P}_n(k_1, k_2) \;=\; \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{\alpha}^{\beta}\exp\left(-z^2/2\right)\,dz, \tag{3.30}$$

де

$$\alpha \;=\; (k_1 - np)/\sqrt{npq}, \qquad\qquad \beta \;=\; (k_2 - np)/\sqrt{npq}.$$

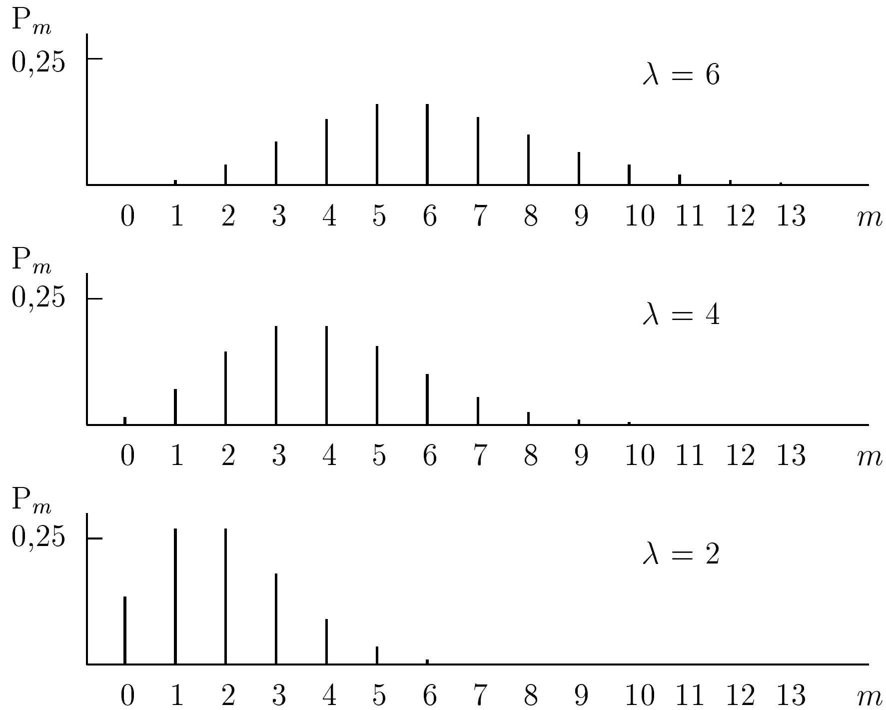


Рисунок 3.4 — Розподіл Пуассона; $\lambda = 2;\, 4;\, 6$

3.7. Розподіл Пуассона

Дискретна випадкова величина X називається *розподіленою щодо закону Пуассона*, якщо її можливі значення $0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ m,\ \ldots,$ а ймовірність випадкової події $\{X = m\}$ виражається формулою

$$\mathrm{P}_m \;=\; \Pr\{X = m\} \;=\; \frac{\lambda^m}{m!}\exp(-\lambda), \tag{3.31}$$

де $\lambda > 0$. Розподіл Пуассона залежить від одного параметра λ (рис. 3.4).

Для випадкової величини X, розподіленої за законом Пуассона, середнє значення та дисперсія такі:

$$M[X] \;=\; \lambda, \qquad D[X] \;=\; \lambda. \tag{3.32}$$

Пуассонівський розподіл є граничним для біноміального розподілу (3.27) при $p \to 0$, $n \to \infty$, за умови, що добуток $np = \lambda = const$. Цим розподілом можна користуватися приблизно в тому випадку, коли виконується велика кількість незалежних дослідів, у кожному з яких подія A відбувається з малою ймовірністю.

Пуассонівському закону розподілу підкоряється також кількість точок, що влучають в деяку задану область простору (одновимірного, двовимірного або тривимірного), якщо випадкове розміщення точок у цьому просторі задовольняє деяким обмеженням.

Одновимірний варіант зустрічається при розгляді "потоків подій". *Потоком подій* називається послідовність однорідних подій, що відбуваються одна за одною у випадкові моменти часу (рис. 3.5). Середня кількість подій λ, що відбуваються за

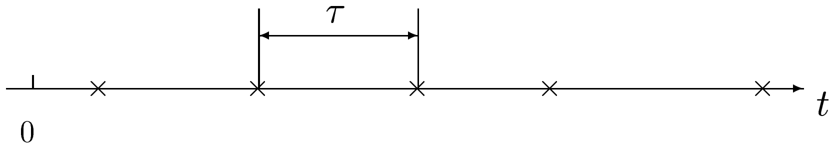


Рисунок 3.5 — Потік подій

одиницю часу, називається *інтенсивністю потоку.* Величина λ може бути як сталою, так і змінною: $\lambda = \lambda(t)$.

Потік подій називається *потоком без наслідків*, якщо ймовірність влучення того чи іншого числа подій на якусь ділянку часу не залежить від того, скільки подій влучило на будь-яку іншу ділянку, що не перетинається з нею.

Потік подій називається *ординарним*, якщо ймовірність появи на елементарній ділянці двох або більше подій зневажливо мала у порівнянні з імовірністю появи однієї події.

Ординарний потік подій без наслідків називається *пуассонівським.* Якщо події утворюють пуассонівський потік, то кількість X подій, що влучають на будь–яку ділянку часу $(t,\, t+\tau)$, розподілена за законом Пуассона:

$$\mathrm{P}_m \;=\; \frac{a^m}{m\,!}\,\exp(-a), \tag{3.33}$$

де a – математичне сподівання числа точок, що влучають на ділянку:

$$a \;=\; \int\limits_{t}^{t+\tau} \lambda(t)\,dt.$$

Якщо $\lambda(t) \;=\; \lambda \;=\; const$, пуассонівський потік називається стаціонарним пуассонівським або *найпростішим.* Для найпростішого потоку кількість подій, що влучають на будь–яку ділянку часу тривалістю τ, розподілена за законом Пуассона з параметром $a = \lambda\tau$.

Випадковим полем точок називається сукупність точок, випадковим чином розкиданих на площині (або у просторі).

Інтенсивністю (або густиною) поля λ називається середня кількість точок, що влучають в одиницю площі (об'єму).

Поле точок називається *пуассонівським*, якщо воно має такі властивості:

1) ймовірність влучення тієї чи іншої кількості точок у будь-яку область площини (простору) не залежить від того, скільки їх влучило у будь-яку область, що не перетинається з даною;

2) ймовірність влучення в елементарну область $\Delta x\, \Delta y$ двох або більше точок зневажливо мала у порівнянні з імовірністю влучення однієї точки (якість ординарності).

Кількість X точок пуассонівського поля, що влучають у будь-яку область S площини (простору), розподілена за законом Пуассона:

$$\mathrm{P}_m \;=\; \Pr\{\mathrm{X} = m\} \;=\; \frac{a^m}{m\,!}\,\exp(-a), \qquad m = 0, 1, 2, \ldots, \tag{3.34}$$

де a – математичне сподівання кількості точок, що влучають в область S.

Якщо інтенсивність поля $\lambda(x, y) = \lambda = const$, то воно називається *однорідним* (властивість, аналогічна стаціонарності потоку подій). При однорідному полі з інтенсивністю λ маємо $a = L\lambda$, де L – розмір ділянки, або $a = S\lambda$, де S – площа області, або $a = V\lambda$, де V – об'єм області.

Якщо поле неоднорідне, то

$$a = \int_L \lambda(x, y)\, dx \qquad \text{– для ділянки;} \tag{3.35a}$$

$$a = \iint_{(S)} \lambda(x, y)\, dx\, dy \qquad \text{– для площини;} \tag{3.35b}$$

$$a = \iiint_{(V)} \lambda(x, y, z)\, dx\, dy\, dz \qquad \text{– для об'єму.} \tag{3.35c}$$

3.8. Геометричний розподіл

Велика кількість задач містить розгляд послідовності незалежних випробувань, що можуть мати тільки два взаємно виключних виходи зі сталими ймовірностями p й $q = 1 - p$. Така схема відома як *схема Бернуллі.*

Говорять, що випадкова величина X має *геометричний розподіл*, якщо її можливі значення 1, 2, ..., m, ..., а ймовірності цих значень (рис. 3.6)

$$\mathrm{P}_m = q^{m-1} p, \qquad m = 1, 2, \ldots. \tag{3.36}$$

Геометричний розподіл визначає ймовірність того, що очікувана подія з'явиться при m-му випробуванні після $m - 1$ випробувань з протилежним наслідком.

Математичне сподівання і дисперсія випадкової величини X, що має геометричний розподіл, відповідно

$$\mathrm{M[X]} = q/p, \qquad \mathrm{D[X]} = q/p^2. \tag{3.37}$$

Ймовірності P_m для ряду послідовних значень m утворюють нескінченно спадну геометричну прогресію зі знаменником q.

Дискретна випадкова величина X — кількість "даремних" спроб *до першого досліду*, у якому *вперше* з'явиться подія A. (Відзначимо, що у ряді ситуацій виявляється зручним нумерувати спроби з $m = 0$, в цьому випадку наведені формули видозмінюються.)

X:

m	0	1	2	3	...	m	...
P_m	p	pq	pq^2	pq^3	...	pq^m	...

На практиці геометричний розподіл зустрічається, коли здійснюється ряд незалежних спроб досягнути якогось результату A; при кожній спробі результат досягається з імовірністю p.

Математичне сподівання та дисперсія випадкової величини Y, яка має "геометричний розподіл, що починається з одиниці", такі :

$$\mathrm{M[Y]} = 1/p, \qquad \mathrm{D[Y]} = q/p^2. \tag{3.38}$$

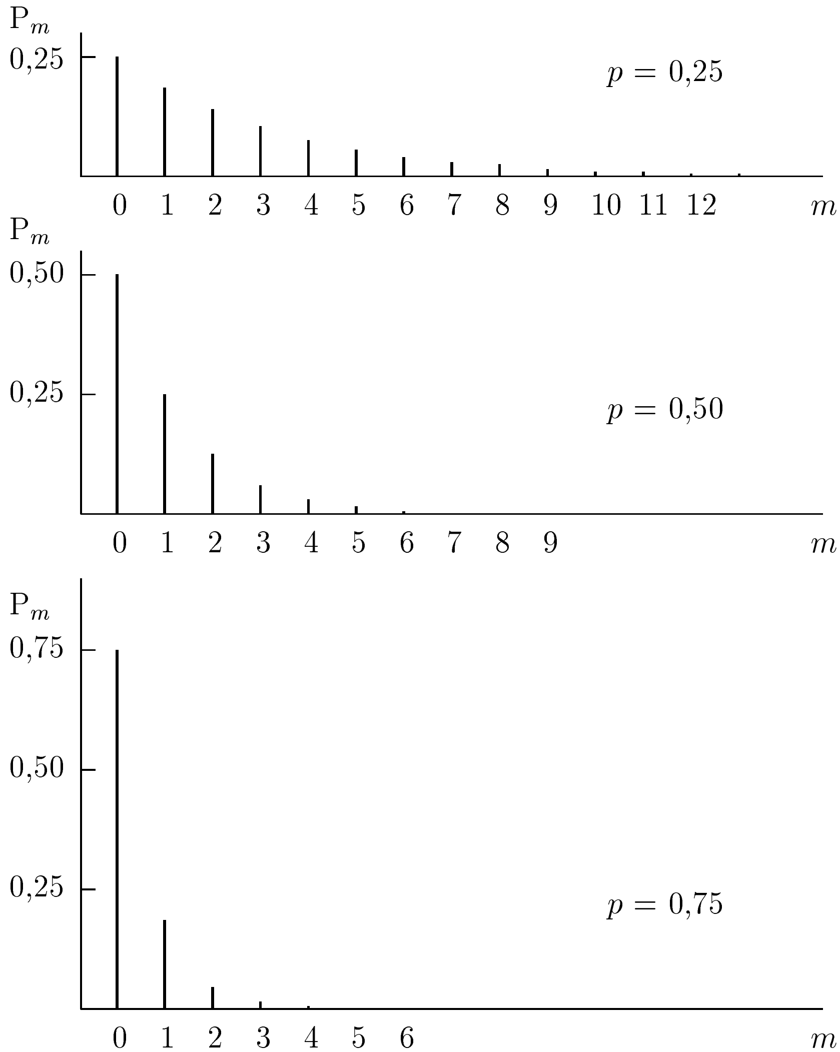


Рисунок 3.6 — Розподіл P_m геометричного закону; $p = 0{,}25$; 0,50; 0,75

3.9. Гіпергеометричний розподіл

Випадкова величина X з можливими цілими значеннями m має *гіпергеометричний розподіл* з параметрами n, M, N (при цьому $n \le N$ та $M \le N$), якщо $0 \le m \le \min(n, M)$, (рис. 3.7).

Ймовірність події $\{A : X = m\}$ така:

$$P_m = \Pr\{X = m\} = C_M^m C_{N-M}^{n-m} \,/\, C_N^n, \qquad (3.39)$$

де $m = 0, 1, \ldots, \min(n, M)$.

Гіпергеометричний розподіл виникає за наступних умов. Наприклад, є урна, у якій міститься усього N кульок, з них M білих та відповідно $(N - M)$ чорних. З неї наугад виймається n кульок. Випадкова величина X – кількість m білих кульок серед n вийнятих; її розподіл виражається формулою (3.39).

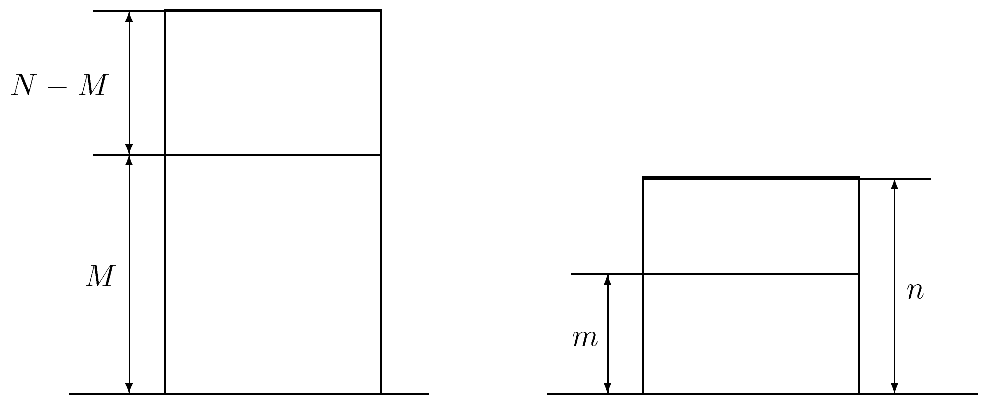


Рисунок 3.7 — До схеми гіпергеометричного розподілу; ліворуч – початкова кількість кульок (усього N кульок, з них M штук білих та $N-M$ штук чорних), праворуч – кульки, що вийняті (з n штук m – білих)

Математичне сподівання випадкової величини, що має розподіл (3.39),

$$\mathrm{M}[\mathrm{X}] \;=\; \frac{nM}{N}, \tag{3.40}$$

а її дисперсія

$$\mathrm{D}[\mathrm{X}] \;=\; \frac{nM}{N}\left(1-\frac{M}{N}\right)\frac{N-n}{N-1}. \tag{3.41}$$

3.10. Неперервні випадкові величини

Множина можливих значень дискретної випадкової величини скінченна або зчисленна; недискретні випадкові величини характеризуються тим, що множина їх можливих значень незчисленна. Приклади недискретних випадкових величин: дальність відкриття об'єкта локатором; час спізнення потягу; помилка виміру кута за допомогою кутоміра. У всіх цих випадкових величинах множина можливих значень незчисленна, бо неперервно заповнюється деяка ділянка осі абсцис.

Нагадаємо, як визначається інтегральна функція розподілу випадкової величини X:

$$F(x) \;=\; \Pr\{\mathrm{X} < x\}. \tag{3.42}$$

Функція розподілу $F(x)$ існує для будь-яких випадкових величин – як дискретних, так і недискретних.

Якщо функція розподілу $F(x)$ випадкової величини X за будь-якого x неперервна та має похідну $F'(x)$ скрізь, крім, можливо, окремих точок, то випадкова величина X називається *неперервною*.

Якщо функція розподілу $F(x)$ на деяких ділянках неперервно зростає, а в окремих точках має розриви, то випадкова величина X називається *змішаною*. Функція $F(x)$ для змішаної випадкової величини, як і для дискретної, неперервна ліворуч.

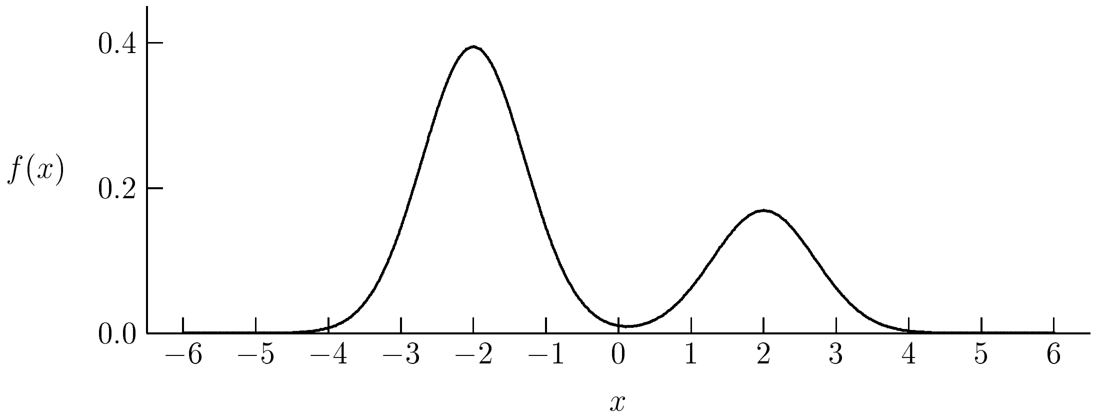


Рисунок 3.8 — Приклад густини розподілу $f(x)$ неперервної випадкової величини

Ймовірність кожного окремого значення неперервної випадкової величини дорівнює нулю. Ймовірність кожного окремого значення змішаної випадкової величини, що лежить на ділянці неперервності $F(x)$, також дорівнює нулю, а ймовірність кожного з тих значень $x_1, x_2, \ldots,$ у яких функція $F(x)$ вчиняє стрибки, чисельно дорівнює значенню відповідного стрибка.

Для будь-якої випадкової величини (дискретної, неперервної або змішаної) ймовірність влучення випадкової величини на ділянку осі абсцис від α до β (включаючи α та не включаючи β) виражається формулою

$$\Pr\{\alpha \le \mathrm{X} < \beta\} \;=\; F(\beta) - F(\alpha). \tag{3.43}$$

Оскільки для неперервної випадкової величини $\Pr\{\mathrm{X}{=}x\} = 0$, то знак рівності у цьому випадку в (3.43) можна відкинути:

$$\Pr\{\alpha < \mathrm{X} < \beta\} \;=\; F(\beta) - F(\alpha). \tag{3.44}$$

Густиною ймовірностей (або густиною розподілу, або просто густиною) неперервної випадкової величини X називається похідна функції розподілу (рис. 3.8 та 3.9)

$$f(x) \;=\; F'(x) \;=\; dF(x)\,/\,dx. \tag{3.45}$$

Елементом імовірності для неперервної випадкової величини X називається величина $f(x)\,dx$, яка наближено дорівнює ймовірності події, що полягає у влученні значення випадкової величини X на елементарний відрізок dx, що прилягає до точки x:

$$f(x)\,dx \;=\; \Pr\{x < \mathrm{X} < x + dx\}. \tag{3.46}$$

Густина $f(x)$ будь-якої випадкової величини невід'ємна, $f(x) \ge 0$, та має властивість

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx \;=\; 1, \tag{3.47}$$

тобто ймовірність повної групи подій дорівнює одиниці.

Графік густини називається *кривою розподілу.*

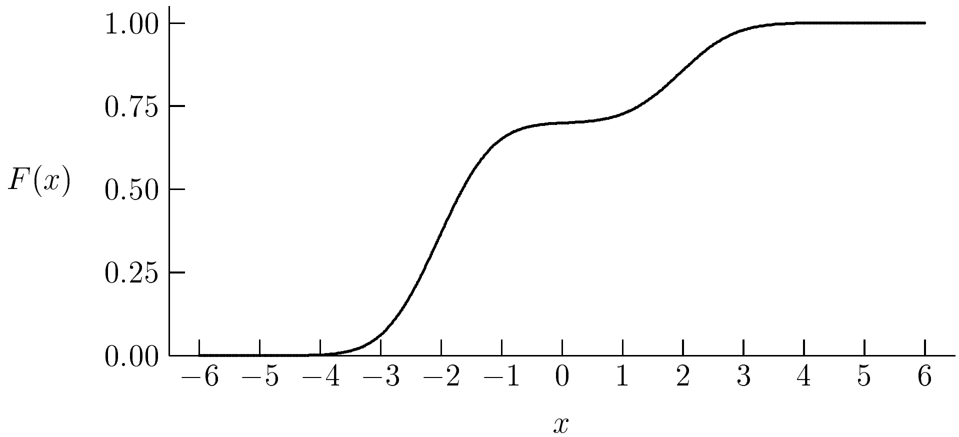


Рисунок 3.9 — Приклад функції розподілу $F(x)$ неперервної випадкової величини, яка відповідає густині $f(x)$ попереднього рисунка

Ймовірність влучення неперервної випадкової величини X на ділянку від α до β визначається виразом (рис. 3.10)

$$\Pr\{\alpha < \mathrm{X} < \beta\} = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx. \tag{3.48}$$

Функція розподілу неперервної випадкової величини X виражається через її густину

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx. \tag{3.49}$$

3.11. Числові характеристики неперервних випадкових величин

Математичним сподіванням неперервної випадкової величини X з густиною $f(x)$ називається її середнє значення, що обчислюється за формулою

$$\mathrm{M}[\mathrm{X}] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx. \tag{3.50}$$

Математичне сподівання M[X] змішаної випадкової величини з функцією розподілу $F(x)$ обчислюється за формулою

$$\mathrm{M}[\mathrm{X}] = \sum_i x_i\,p_i + \int_H x F'(x)\,dx, \tag{3.51}$$

де сума розповсюджується на всі точки розриву функції розподілу, а інтеграл – на всі ділянки її неперервності. Коли M[X] необхідно позначити однією літерою, будемо писати

$$\mathrm{M}[\mathrm{X}] = m_{\mathrm{X}} \tag{3.52}$$

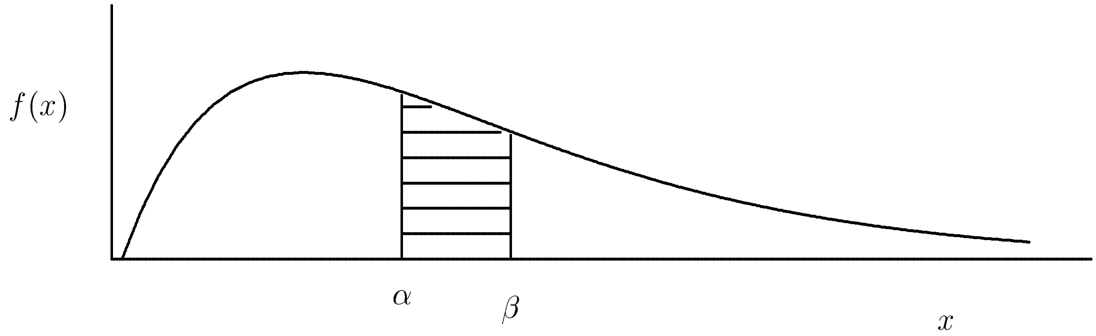


Рисунок 3.10 — До ймовірності $\Pr\{\alpha \le \mathrm{X} \le \beta\}$ влучення випадкової величини X на ділянку від α до β

(прийнято індексом вказувати саму випадкову величину для визначення її належності).

Дисперсія неперервної випадкової величини X

$$\mathrm{D[X]} \;=\; \mathrm{M}[(\mathrm{X} - m_{\mathrm{X}})^2] \tag{3.53}$$

обчислюється за формулою

$$\mathrm{D[X]} \;=\; \int\limits_{-\infty}^{\infty} (x - m_{\mathrm{X}})^2 f(x)\, dx. \tag{3.54}$$

Дисперсія змішаної випадкової величини виражається формулою

$$\mathrm{D[X]} \;=\; \sum_i (x_i - m_{\mathrm{X}})^2\, p_i + \int\limits_{(H)} (x - m_{\mathrm{X}})^2 F'(x)\, dx, \tag{3.55}$$

де сума розповсюджується на всі точки розриву функції $F(x)$, а інтеграл – на всі ділянки її неперервності.

Корінь квадратний з дисперсії називається *середнім квадратичним відхиленням (СКВ)* випадкової величини або *стандартом*:

$$\sigma_{\mathrm{X}} \;=\; \sqrt{\mathrm{D[X]}}. \tag{3.56}$$

Як характеристику ступеня випадковості невід'ємної випадкової величини інколи застосовують *коефіцієнт варіації*

$$\mathrm{Var}_{\mathrm{X}} \;=\; \sigma_{\mathrm{X}} \,/\, m_{\mathrm{X}}. \tag{3.57}$$

Відзначимо, що коефіцієнт варіації залежить від "початку відліку".

Середнє квадратичне відхилення σ_{X} може бути застосоване для орієнтовної оцінки діапазону можливих значень випадкової величини. При цьому частіше на практиці користуються так званим *правилом трьох сигм.* Суть цього правила полягає в тому, що *діапазон практично можливих значень випадкової величини* X *не виходить за межі інтервалу* $(m_{\mathrm{X}} - 3\sigma_{\mathrm{X}},\; m_{\mathrm{X}} + 3\sigma_{\mathrm{X}})$.

Це правило дійсне і для дискретної випадкової величини.

Початковий момент k-го порядку

$$\alpha_k \;=\; \mathrm{M}[\mathrm{X}^k] \tag{3.58}$$

для неперервної та змішаної випадкових величин виражається відповідними формулами

$$\alpha_k[\mathrm{X}] \;=\; \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^k\, f(x)\, dx, \tag{3.59a}$$

$$\alpha_k[\mathrm{X}] \;=\; \sum_i x_i^k\, p_i + \int\limits_H x^k F'(x)\, dx. \tag{3.59b}$$

Центральні моменти обчислюються за аналогічними формулами

$$\mu_k[\mathrm{X}] \;=\; \int\limits_{-\infty}^{\infty} (x - m_{\mathrm{X}})^k\, f(x)\, dx, \tag{3.60a}$$

$$\mu_k[\mathrm{X}] \;=\; \sum_i (x_i - m_{\mathrm{X}})^k\, p_i + \int\limits_H (x - m_{\mathrm{X}})^k F'(x)\, dx. \tag{3.60b}$$

Центральні моменти можуть бути виражені через початкові аналогічно тому, як для дискретної випадкової величини. Найбільший практичний інтерес має вираз дисперсії через другий початковий момент

$$\mathrm{D}[\mathrm{X}] \;=\; \alpha_2[\mathrm{X}] - m_{\mathrm{X}}^2, \tag{3.61}$$

або, в іншій формі,

$$\mathrm{D}[\mathrm{X}] \;=\; \mathrm{M}[\mathrm{X}^2] - (\mathrm{M}[\mathrm{X}])^2. \tag{3.62}$$

Медіаною Me випадкової величини X називається корінь рівняння $F(x) = 0,5$. Таким чином, $\Pr(\mathrm{X} < \mathrm{Me}) = \Pr(\mathrm{X} > \mathrm{Me})$, тобто однаково, чи виявиться випадкова величина меншою або більшою за свою медіану Me.

Модою випадкової величини називається її найбільш ймовірне значення. Для неперервної випадкової величини модою є те значення, в якому густина розподілу має максимум.

У випадку симетричного і одновершинного розподілу медіана збігається з математичним сподіванням та модою.

Третій центральний момент використовують для характеристики асиметрії розподілу. *Коефіцієнт асиметрії* Sk визначається як (рис. 3.11)

$$\mathrm{Sk} \;=\; \mu_3 \,/\, \sigma_{\mathrm{X}}^3. \tag{3.63}$$

Четвертий центральний момент служить для характеристики гостровершинності або плосковершинності розподілу. Ці властивості розподілів описуються за допомогою ексцесу. *Ексцесом* Ex випадкової величини X називається величина (рис. 3.12)

$$\mathrm{Ex} \;=\; \left(\mu_4 \,/\, \sigma_{\mathrm{X}}^4\right) - 3. \tag{3.64}$$

Число 3 віднімається з відношення $\mu_4 \,/\, \sigma_{\mathrm{X}}^4$ в зв'язку з тим, що для надто важливого нормального закону (з цим законом ми познайомимося в подальшому) це

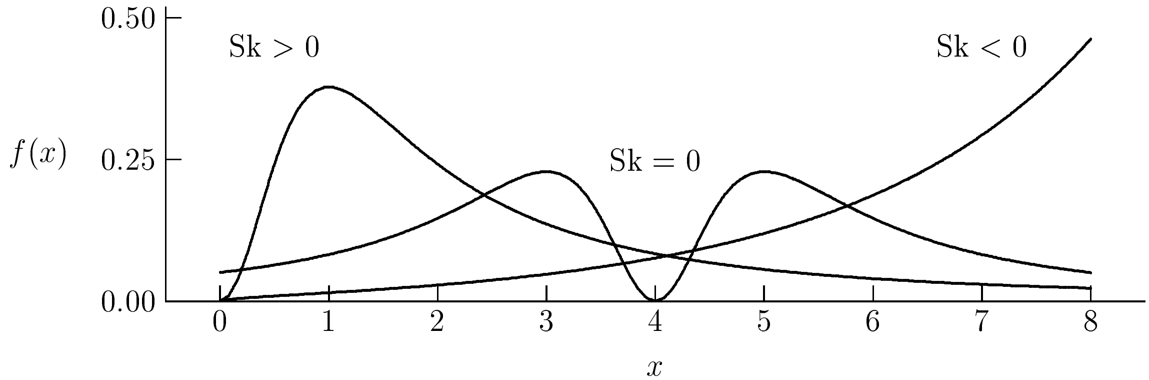


Рисунок 3.11 — Асиметрії розподілу

відношення дорівнює трьом. Таким чином, для нормального закону Ex = 0; криві, більш гостроверхі у порівнянні з нормальними, володіють позитивним ексцесом; криві, більш плосковерхі, — від'ємним ексцесом.

Крім перелічених числових характеристик, на практиці ймовірносних і статистичних розрахунків використовують квантилі.

Для заданої ймовірності p, $p \in (0,1)$ *квантилем* ξ_p випадкової величини X називається точка, в якій функція розподілу ймовірностей $F(x)$ переходить від значень, менших, ніж p, до значень, більших, ніж p:

$$F(\xi_p) \le p, \qquad F(\xi_p + 0) \ge p. \tag{3.65}$$

Квантиль $\xi_{1/2}$ є медіаною.

На відміну від моментів, у будь-якої дійсної скалярної випадкової величини існують всі квантилі. Разом з цим у деяких випадкових величинах квантилі можуть бути визначені неоднозначно. Якщо, наприклад, у випадкової величини X існує інтервал $[x_1,\, x_2]$, на якому $F(x) = 1/2$, то будь-яка точка цього інтервалу може служити значенням медіани, тобто квантиля.

Квантилі $\xi_{1/4}$ та $\xi_{3/4}$ називаються *квартилями.*

Величина $W = \xi_{3/4} - \xi_{1/4}$ при цьому часто приймається за характеристику розкиду значень випадкової величини й називається *серединним* або *ймовірнісним відхиленням.* Іноді величину W називають *семіквартильною широтою* розподілу випадкової величини. В практиці статистичних розрахунків також користуються квантилями $\xi_{0{,}1}$, $\xi_{0{,}2}$, $\ldots$, $\xi_{0{,}9}$, які називаються *децилями.*

В теорії оцінювання та прийняття рішень задаються *рівнем значущості* α. При заданому значенні рівня значущості $\alpha = 1 - p$ квантиль ξ_p визначається як розв'язок рівняння

$$\int\limits_{\xi_p}^{\infty} f(x)\,dx \;=\; 1 - p \;=\; \alpha, \tag{3.66}$$

і, таким чином, знайдений з (3.66) розв'язок ξ_p визначає область (ξ_p, ∞) значень випадкової величини X, для якої ймовірність влучити в неї дорівнює α. Знайдена величина ξ_p називається *критичним значенням* або *порогом* $t_\alpha = \xi_{1-p}$ прийняття рішення за рівнем значущості $\alpha = 1 - p$.

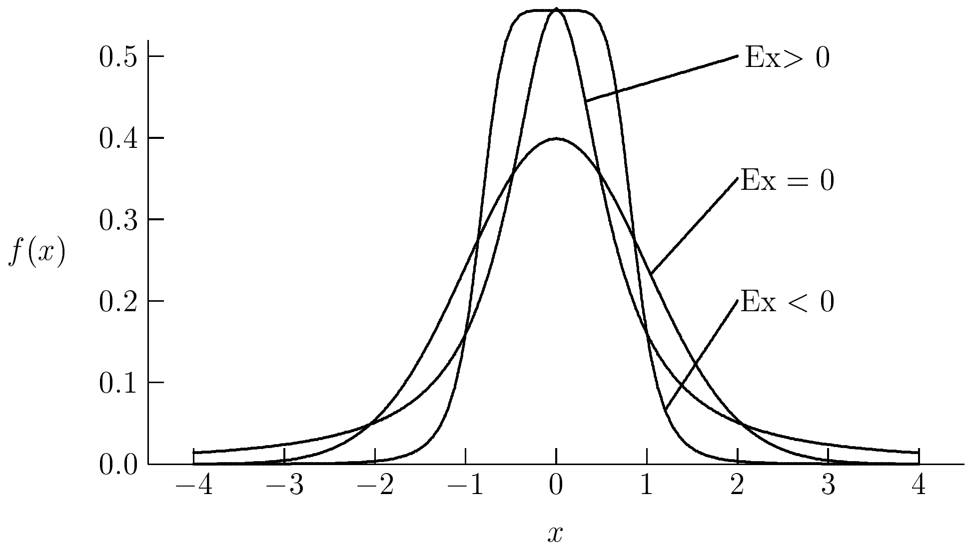


Рисунок 3.12 — Ексцес розподілу. Крива з рівним нулю ексцесом, Ex = 0, є щільністю нормального розподілу

Якщо ймовірність будь-якої події A залежить від того, якого значення набула неперервна випадкова величина X з густиною $f(x)$, то повна ймовірність події A обчислюється за *інтегральною формулою повної ймовірності*

$$\mathrm{P(A)} = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{P(A}|x)\, f(x)\, dx, \tag{3.67}$$

де $\mathrm{P(A}|x) = \mathrm{P}\{\mathrm{A}|\mathrm{X} = x\}$ — умовна ймовірність події A при гіпотезі $\{\mathrm{X} = x\}$.

Відповідний аналог у ймовірносній схемі неперервних випадкових величин має *формула Байєса.* Якщо в результаті досліду траплялася подія A, ймовірність якої залежить від того, якого значення набула неперервна випадкова величина X, то умовна густина цієї випадкової величини з урахуванням появи події A

$$f_{\mathrm{A}}(x) = f(x)\, \mathrm{P(A}|x) \,/\, \mathrm{P(A)} \tag{3.68}$$

або з урахуванням (3.67)

$$f_{\mathrm{A}}(x) = f(x)\, \mathrm{P(A}|x) \left(\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{P(A}|x)\, f(x)\, dx, \right)^{-1}. \tag{3.69}$$

Формула (3.67) називається *інтегральною формулою Байєса.*

У схемі неперервних випадкових величин застосовується також *інтегральна формула повного математичного сподівання*

$$\mathrm{M[X]} = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{M[X}|y]\, f(y)\, dy, \tag{3.70}$$

де X — будь-яка випадкова величина; Y — неперервна випадкова величина з густиною $f(y)$; $\mathrm{M[X}|y]$ — умовне математичне сподівання випадкової величини X за умови, що випадкова величина Y набула значення y.

Розглянемо деякі розподіли неперервних випадкових величин та опишемо їхні властивості.

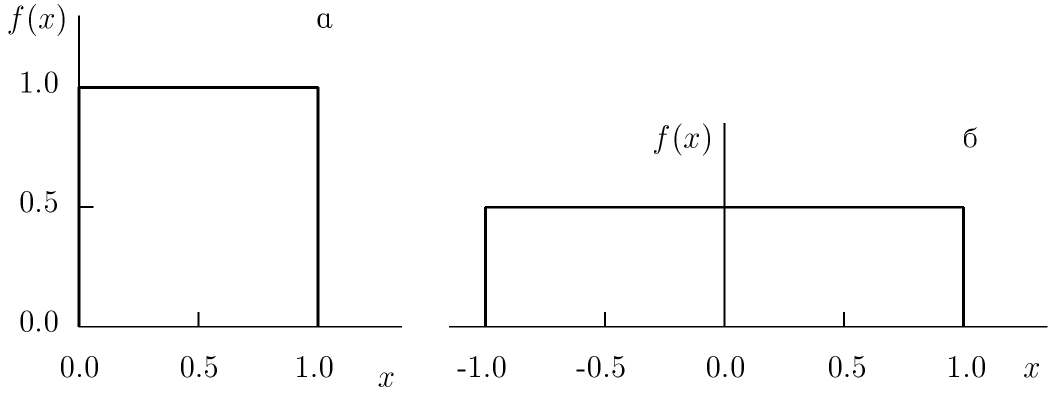


Рисунок 3.13 — Густина розподілу ймовірностей $f(x)$ рівномірного неперервного закону: а – на інтервалі $[0;\,1]$; б – на інтервалі $[-1;\,1]$

3.12. Рівномірний розподіл

Випадкова величина X має *рівномірний розподіл* на ділянці від a до b, якщо її густина на цій ділянці стала (рис. 3.13):

$$f(x) \;=\; \begin{cases} 1/(b-a) & \text{при} \;\; x \in (a,b), \\ 0 & \text{при} \;\; x \notin (a,b). \end{cases} \tag{3.71}$$

Значення $f(x)$ в точках a та b ніяк не визначені; це й несуттєво, бо ймовірність влучення в будь-яку з них дорівнює нулю, і, тобто, ймовірність будь-якої події, пов'язаної з випадковою величиною X, не залежить від того, яке значення має густина $f(x)$ в точках a та b. (В подальшому, задаючи густину $f(x)$ різними формулами на різних ділянках осі 0x, також не будемо вказувати значення $f(x)$ на межах ділянок).

Математичне сподівання, дисперсія й середнє квадратичне відхилення для випадкової величини X, що має густину (3.71), відповідно

$$\mathrm{M[X]} \;=\; (a+b)/2, \qquad \mathrm{D[X]} \;=\; (b-a)^2/12, \tag{3.72}$$

тому $\sigma_{\mathrm{x}} \;=\; (b-a)/\sqrt{12}$.

Рівномірний розподіл мають, наприклад, помилки грубих вимірювань за допомогою інструмента з великими поділками, коли зміряне значення округлюється до найближчого цілого (або до найближчого меншого, або до найближчого більшого). Так, помилка (в сантиметрах) виміру довжини олівця за допомогою лінійки з сантиметровими поділками має рівномірний розподіл на ділянці $[-1/2;\,1/2]$, якщо округлення здійснюється до найближчого цілого, та на ділянці $[0;\,1]$, якщо до найближчого меншого. Рівномірний розподіл на ділянці $[0,\,2\pi]$ має кут повороту φ добре зрівноваженого колеса, якщо воно приводиться в обертання і зупиняється у результаті тертя.

У задачі Бюффона кут, що визначає напрямок голки, також має рівномірний розподіл у силу того, що голка кидається наугад – так, що жодному із значень φ не віддається переваги відносно іншого.

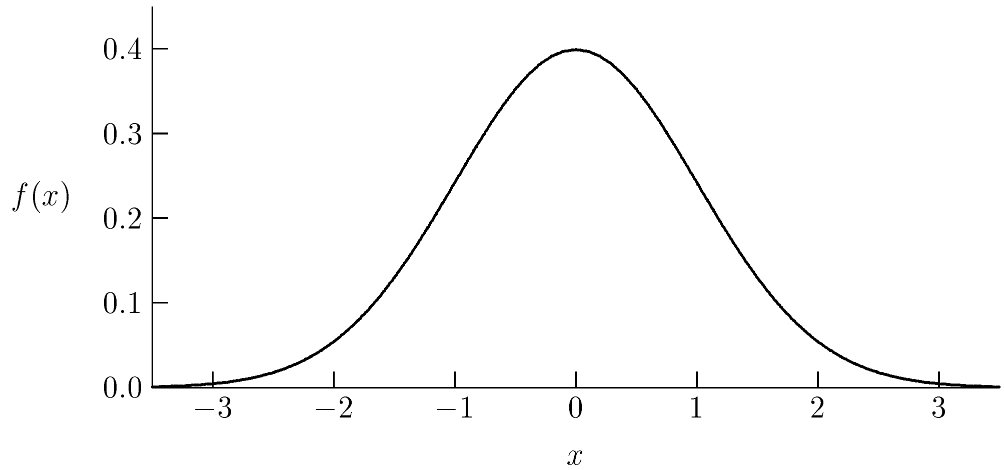


Рисунок 3.14 — Густина розподілу $f(x)$ нормального закону; параметри закону: $m = 0{,}0$; $\sigma = 1{,}0$

Типові умови виникнення рівномірного розподілу полягають ось в чому: точка M випадковим чином кинута на вісь Ox, поділену на рівні інтервали довжини L. Кожний з випадкових відрізків X та Y, на які ділить точка M той інтервал, в який вона влучила, має рівномірний розподіл на ділянці $[0,\ L]$.

3.13. Нормальний розподіл

Випадкова величина X має *нормальний розподіл* [або розподілена за нормальним законом (*законом Гаусса*)], якщо її густина

$$f(x) \;=\; \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\,\exp\left(-\,\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right), \qquad -\infty < x < \infty. \tag{3.73}$$

Математичне сподівання випадкової величини, що має розподіл (3.73), дорівнює m, дисперсія σ^2, середнє квадратичне відхилення σ. (рис. 3.14).

Ймовірність влучення випадкової величини X, що має нормальний розподіл з параметрами m та σ, на ділянку від α до β, виражається формулою

$$\Pr\{\alpha < \mathrm{X} < \beta\} \;=\; \Phi\left(\frac{\beta - m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - m}{\sigma}\right), \tag{3.74}$$

де $\Phi(x)$ – функція Лапласа:

$$\Phi(x) \;=\; \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^x \exp(-t^2/2)\,dt. \tag{3.75}$$

Функція Лапласа має такі властивості:

1) $\Phi(0) \;=\; 0$;
2) $\Phi(-x) \;=\; -\Phi(x)$ (непарна функція);
3) $\Phi(\infty) \;=\; 0{,}5$.

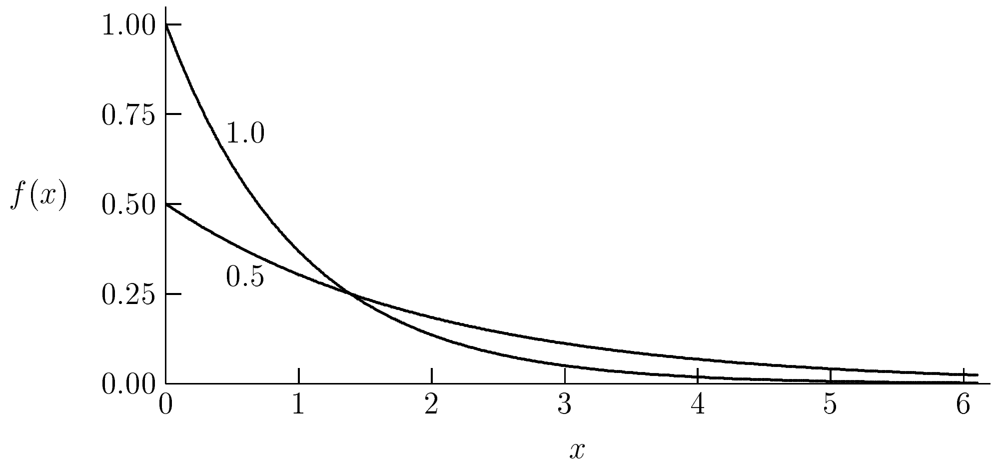


Рисунок 3.15 — Густина розподілу $f(x) = \lambda \exp(-\lambda x)$ показникового закону; $\lambda = 0{,}5$ та $\lambda = 1{,}0$

Якщо ділянка $[\alpha, \beta]$ симетрична відносно точки $x = m$, то ймовірність влучення до неї

$$\Pr\{|\mathrm{X} - m| < L\} = 2\Phi(L/\sigma), \tag{3.76}$$

де $L = (\beta - \alpha)/2$ – половина довжини ділянки.

Нормальний розподіл виникає тоді, коли випадкова величина X утворюється в результаті додавання великого числа незалежних (або слабо залежних) випадкових додатків, порівняних щодо свого впливу на цю величину.

3.14. Показниковий (експоненціальний) розподіл

Випадкова величина X має *показниковий (експоненціальний) розподіл*, якщо її густина виражається формулою (рис. 3.15)

$$f(x) = \begin{cases} \lambda \exp(-\lambda x) & \text{при } x \geq 0, \\ 0 & \text{при } x < 0, \end{cases} \tag{3.77}$$

де λ – параметр показникового розподілу.

Показниковому розподілу надається велике значення у теорії марковських випадкових процесів та теорії масового обслуговування.

Якщо на вісі часу $0t$ існує найпростіший пуассонівський потік подій з інтенсивністю λ, то інтервал часу T між двома сусідніми подіями має показниковий розподіл з параметром λ.

Математичне сподівання, дисперсія та середнє квадратичне відхилення величини X, що має показниковий розподіл, відповідно

$$\mathrm{M}[\mathrm{X}] = \lambda^{-1}; \tag{3.78}$$

$$\mathrm{D}[\mathrm{X}] = \lambda^{-2}; \qquad \sigma_{\mathrm{x}} = \lambda^{-1}. \tag{3.79}$$

Коефіцієнт варіації показникового розподілу дорівнює одиниці:

$$\mathrm{Var}_{\mathrm{x}} = \sigma_{\mathrm{x}} / m_{\mathrm{x}} = 1. \tag{3.80}$$

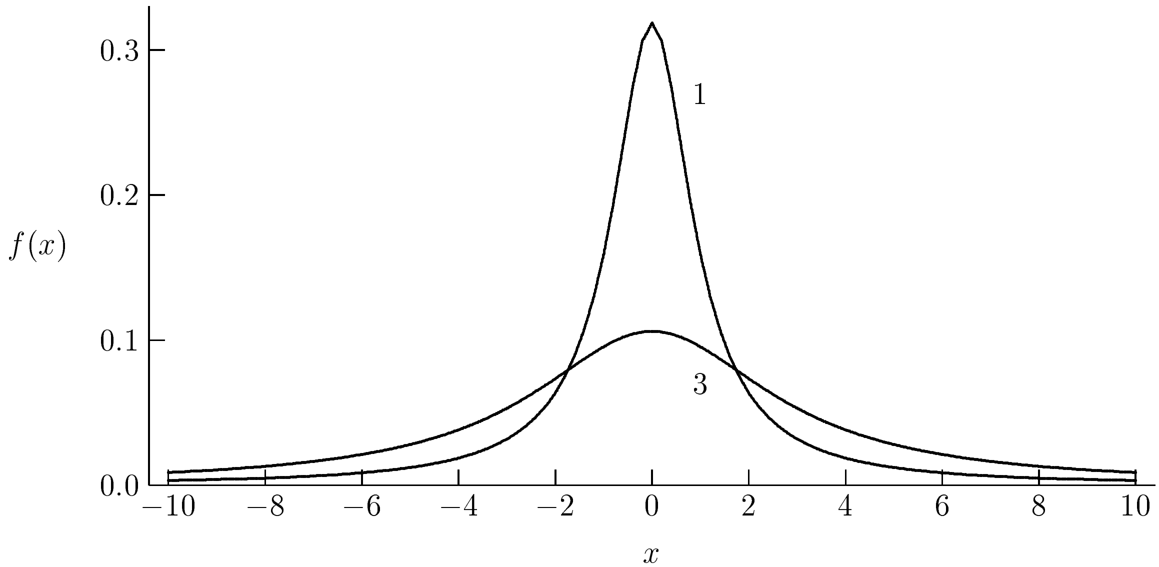


Рисунок 3.16 — Густина розподілу $f(x)$ закону Коші; $\alpha = 1$ й $\alpha = 3$; $\beta = 0$

3.15. Розподіл Коші

Випадкова величина має *розподіл Коші* з параметрами $\alpha > 0$ та $\beta 0$, якщо її густина виражається формулою (рис. 3.16)

$$f(x) \;=\; \frac{\alpha/\pi}{\alpha^2 + (x-\beta)^2}, \qquad -\infty < x < \infty. \tag{3.81}$$

Розподілу Коші підкоряється відношення двох незалежних нормальних випадкових величин з рівним нулю математичним сподіванням кожне. За інший приклад можна взяти розподіл тангенса випадкового кута, якщо значення кута рівноймовірно в інтервалі $[-\pi/2, \pi/2]$. Математичне сподівання випадкової величини, що має розподіл Коші, не існує, другий початковий момент нескінченний. Параметр β є і модою, і медіаною.

3.16. Гамма-розподіл

Випадкова величина має *гамма-розподіл* з параметрами $\lambda > 0$ і $\alpha > 0$, якщо її густина виражається формулою

$$f(x) \;=\; \frac{\lambda^\alpha x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\exp(-\lambda x), \qquad x > 0, \tag{3.82}$$

де $\Gamma(\alpha)$ – *гамма-функція Ейлера*

$$\Gamma(\alpha) = \int\limits_0^\infty t^{\alpha-1}\exp(-t)\,dt.$$

3.17. Характеристична та твірна функції

В ряді прикладних задач теорії ймовірностей часто користуються характеристичними й твірними функціями, наприклад, при вивченні властивостей додатків випадкових величин.

Якщо випадкова величина X набуває тільки цілих невід'ємних значень, то *твірною функцією* $\Phi_X(t)$ розподілу випадкової величини X називається функція змінної t:

$$\Phi_X(t) = \mathrm{M}[t^X] = \sum_{k=0}^{\infty} t^k \Pr\{X = k\}, \qquad |t| \le 1; \tag{3.83}$$

твірну функцію можна розглядати і в випадку, коли X набуває невід'ємних значень, якщо область збіжності ряду в правій частині останньої рівності відмінна від кола $|t| = 1$.

Якщо випадкова величина X набуває дійсних значень, то *характеристичною функцією* $q_X(t)$ розподілу X називається функція дійсного аргументу t:

$$q_X(t) = \mathrm{M}[\exp(itX)], \qquad -\infty < t < \infty. \tag{3.84}$$

Зокрема, якщо розподіл X абсолютно неперервний і має густину $f_X(x)$, то

$$q_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(itx)\, f_X(x)\, dx. \tag{3.85}$$

Отже, перерахуємо найважливіші властивості твірних і характеристичних функцій:

1) Якщо має місце $\Pr\{|X| < \infty\} = 1$, то обидві функції $q_X(t) = \mathrm{M}[\exp(itX)]$ й $\Phi_X(z) = \mathrm{M}[X^z]$ неперервні і $q_X(0) = \Phi_X(1) = 1$.

2) Якщо має місце $\mathrm{M}[|X|^k] < \infty$ для деякого цілого $k \ge 1$, то

$$\frac{d^k}{dt^k} q_X(t)\Big|_{t=0} = i^k \mathrm{M}[X^k], \qquad \frac{d^k}{dt^k} \Phi_X(t)\Big|_{t=0} = \mathrm{M}[X^k]. \tag{3.86}$$

3) Якщо випадкові величини $X_1, X_2, \ldots, X_n$ незалежні, то

$$q_{X_1+X_2+\ldots+X_n}(t) = q_{X_1}(t) \cdot q_{X_2}(t) \cdot \ldots \cdot q_{X_n}(t). \tag{3.87}$$

4) Якщо твірні (або характеристичні) функції розподілів випадкових величин X_1 і X_2 збігаються, то збігаються і функції розподілу величин X_1 і X_2.

5) *Теорема неперервності.*

Послідовність $F_n(x) = \Pr\{X_n \le x\}$ функцій розподілу $(n = 1, 2, \ldots)$ слабко збігається з функцією розподілу $F(x) = \Pr\{X \le x\}$ тоді і тільки тоді, коли існує неперервна функція

$$q(t) = \lim_{n\to\infty} q_n(t), \tag{3.88}$$

де $q_n(t) = \mathrm{M}[\exp(itX_n)]$. В цьому випадку $q(t) = \mathrm{M}[\exp(itX)]$, та збіжність $q_n(t) \to q(t)$ рівномірна на кожному скінченному інтервалі значень t.

6) *Формули обернення.*

Якщо розглядувана характеристична функція $q(t) = \mathrm{M}[\exp(it\mathrm{X})]$ абсолютно інтегрується, то й розподіл випадкової величини X має обмежену неперервну густину $f(x)$ і

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp(-itx)\, q(t)\, dt. \qquad (3.89)$$

Якщо x та $x+h$ – дві точки неперервності функції розподілу ймовірностей $F(x) = \mathrm{P}\{\mathrm{X} \le x\}$, то

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{1}{2\pi} \lim_{a\to\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp(-a^2t^2/2)\, \frac{1 - \mathrm{e}^{ith}}{ith}\, \exp(-itx)\, dt. \qquad (3.90)$$

3.18. Приклади

Приклад 3.1

Випадкова величина X задана рядом розподілу

X	3	5	2
p	0,1	0,6	0,3

Знайти математичне сподівання випадкової величини X.

Розв'язання

Використовуючи формулу

$$\mathrm{M}[\mathrm{X}] = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i,$$

знаходимо це математичне сподівання:

$$\mathrm{M}[\mathrm{X}] = 3 \cdot 0,1 + 5 \cdot 0,6 + 2 \cdot 0,3 = 3.9.$$

Приклад 3.2

Знайти середнє квадратичне відхилення $\sigma[\mathrm{X}]$ випадкової величини X, якщо відомий ряд її розподілу

X	2	3	10
p	0, 1	0, 4	0, 5

Розв'язання

Знайдемо математичне сподівання $\mathrm{M}[\mathrm{X}]$:

$$\mathrm{M}[\mathrm{X}] = \sum_{i=1}^{3} x_i p_i = 2 \cdot 0,1 + 3 \cdot 0,4 + 10 \cdot 0,5 = 6,4.$$

Знайдемо математичне сподівання $M[X^2]$:

$$M[X^2] \;=\; \sum_{i=1}^{3} x_i^2 p_i \;=\; 2^2 \cdot 0,1 + 3^2 \cdot 0,4 + 10^2 \cdot 0,5 \;=\; 54.$$

Знайдемо дисперсію

$$D[X] \;=\; M[X^2] - (M[X])^2 \;=\; 54 - 6,4^2 \;=\; 13,04.$$

Для середнього квадратичного відхилення $\sigma[X]$ отримаємо

$$\sigma[X] \;=\; \sqrt{D[X]} \;=\; \sqrt{13,04} \;\approx\; 3,61.$$

Приклад 3.3

Монета кинута 4 рази.

Скласти закон розподілу ймовірностей випадкової величини X — числа випадань герба, знайти функцію розподілу $F(x)$.

Розв'язання

Імовірність появи герба у кожній спробі $p = 0{,}5$; отже, імовірність непояв герба $1 - 0{,}5 = 0{,}5 = q$.

При чотирьох киданнях монети герб може або зовсім не з'явитися, або з'явитися 1, 2, 3, 4 рази. Таким чином, можливі значення величини X такі: $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$, $x_4 = 4$. Знайдемо ймовірності цих можливих значень за формулою Бернуллі $P \;=\; P_{m,n} \;=\; C_n^m p^m q^{n-m}$:

$$P_0(4) = C_4^0 p^0 q^4 = \left(\frac{1}{2}\right)^0 \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16};$$

$$P_1(4) = C_4^1 p^1 q^3 = 4\left(\frac{1}{2}\right)^1 \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{4};$$

$$P_2(4) = C_4^2 p^2 q^2 = 6\left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{8};$$

$$P_3(4) = C_4^3 p^3 q^1 = 4\left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{1}{4};$$

$$P_4(4) = C_4^4 p^4 q^0 = \left(\frac{1}{2}\right)^4 \left(\frac{1}{2}\right)^0 = \frac{1}{16}.$$

Напишемо шуканий закон біноміального розподілу у вигляді ряду розподілу

X	0	1	2	3	4
P_i	1/16	1/4	3/8	1/4	1/16

З метою контролю обчислень складемо ймовірності всіх можливих значень і отримаємо

$$\sum_{i=0}^{4} P_i \;=\; \frac{1}{16} + \frac{1}{4} + \frac{3}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} \;=\; 1,$$

як і слід було сподіватися.

Тепер складемо функцію розподілу $F(x)$:

1. $-\infty < x < 0, \qquad F(x) = 0;$
2. $-\infty < x < 1, \qquad F(x) = \sum\limits_{i=0}^{0} \mathrm{P}(\mathrm{X} = x_i) = \mathrm{P}_0 = \frac{1}{16};$
3. $-\infty < x < 2, \qquad F(x) = \sum\limits_{i=0}^{1} \mathrm{P}(\mathrm{X} = x_i) = \mathrm{P}_0 + \mathrm{P}_1 = \frac{1}{16} + \frac{1}{4} = \frac{5}{16};$
4. $-\infty < x < 3, \qquad F(x) = \sum\limits_{i=0}^{2} \mathrm{P}(\mathrm{X} = x_i) = \mathrm{P}_0 + \mathrm{P}_1 + \mathrm{P}_2 = \\ = \frac{1}{16} + \frac{1}{4} + \frac{3}{8} = \frac{11}{16};$
5. $-\infty < x < 4, \qquad F(x) = \sum\limits_{i=0}^{3} \mathrm{P}(\mathrm{X} = x_i) = \mathrm{P}_0 + \mathrm{P}_1 + \mathrm{P}_2 + \mathrm{P}_3 = \\ = \frac{1}{16} + \frac{1}{4} + \frac{3}{8} + \frac{1}{4} = \frac{15}{16};$
6. $-\infty < x \le 4, \qquad F(x) = \sum\limits_{i=0}^{4} \mathrm{P}(\mathrm{X} = x_i) = \mathrm{P}_0 + \mathrm{P}_1 + \mathrm{P}_2 + \mathrm{P}_3 + \mathrm{P}_4 = \\ = \frac{1}{16} + \frac{1}{4} + \frac{3}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} = 1.$

Отже,

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } -\infty < x \le 0, \\ 1/16 & \text{при } 0 < x \le 1, \\ 5/16 & \text{при } 1 < x \le 2, \\ 11/16 & \text{при } 2 < x \le 3, \\ 15/16 & \text{при } 3 < x \le 4, \\ 1 & \text{при } 4 \le x < \infty. \end{cases}$$

Приклад 3.4

Для 3 пострілів ймовірності влучень у ціль такі: $p_1 = 0,4$; $p_2 = 0,3$; $p_3 = 0,6$. Знайти математичне сподівання спільного числа влучень.

Розв'язання

Нехай X_1 – випадкова величина числа влучень при першому пострілі. Тоді її ряд розподілу

X_1	1 (влучення)	0 (промах)
p	0,4	0,6

та $\mathrm{M}[\mathrm{X}_1] = 1 \cdot 0,4 + 0 \cdot 0,6 = 0,4.$

Нехай X_2 – випадкова величина числа влучень при другому пострілі. Тоді її ряд розподілу

X_2	1 (влучення)	0 (промах)
p	0,3	0,7

та $\mathrm{M}[\mathrm{X}_2] = 1 \cdot 0,3 + 0 \cdot 0,7 = 0,3.$

Нехай X_3 – випадкова величина числа влучень при третьому пострілі. Тоді її ряд розподілу
та $\mathrm{M}[\mathrm{X}_3] = 1 \cdot 0,6 + 0 \cdot 0,4 = 0,6.$

X_3	1 (влучення)	0 (промах)
p	0,6	0,4

Спільна кількість влучень є також випадковою величиною, складеною з суми влучень в кожному з трьох пострілів: $X = X_1 + X_2 + X_3$.

Її математичне сподівання

$$M[X] = M[X_1] + M[X_2] + M[X_3] = 0,4 + 0,3 + 0,6 = 1,3.$$

Приклад 3.5

З партії, яка складається з 100 виробів, серед яких 10 бракованих, вибрано випадковим чином 5 виробів для перевірки їхньої якості.

Побудувати ряд розподілу випадкового числа X – кількість бракованих виробів, що містяться у вибірці.

Розв'язання

Оскільки у вибірці, яка складається з 5 виробів, кількість бракованих виробів може бути будь-яким цілим числом у межах від 0 до 5 включно, то часткові значення x випадкової величини X такі:

$$x_1 = 0;\ x_2 = 1;\ x_3 = 2;\ x_4 = 3;\ x_5 = 4;\ x_6 = 5.$$

Ймовірність $P(X{=}k)$ того, що у вибірці виявиться рівно k екземплярів ($k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$) бракованих виробів,

$$P(X = k) = C_{10}^{k}\, C_{90}^{5-k} \,/\, C_{100}^{5}.$$

В результаті розрахунків з даної формули з точністю до 0,001 отримаємо

$P_1 = Pr(X{=}0) = 0{,}583;$ $P_2 = Pr(X{=}1) = 0{,}340;$

$P_3 = Pr(X{=}2) = 0{,}070;$ $P_4 = Pr(X{=}3) = 0{,}007;$

$P_5 = Pr(X{=}4) = 0{,}000;$ $P_6 = Pr(X{=}5) = 0{,}000.$

Приклад 3.6

Радіоапаратура складається з 1000 елементів. Імовірність відмови одного елемента протягом одного року роботи дорівнює 0,001 й не залежить від стану інших елементів.

Яка ймовірність відмови двох і не менше двох елементів за рік?

Розв'язання

Вважаючи випадкову величину – кількість X елементів, які відмовили – величиною, що підкоряється закону Пуассона

$$Pr\{X = m\} = P_m = \frac{a^m}{m!} \exp(-a),$$

де $a = np = 1000 \times 0,001 = 1$, отримаємо:

1) імовірність відмови рівно двох елементів

$$Pr\{X = 2\} = P_2 = \frac{a^2}{2!} \exp(-a) = 0,184.$$

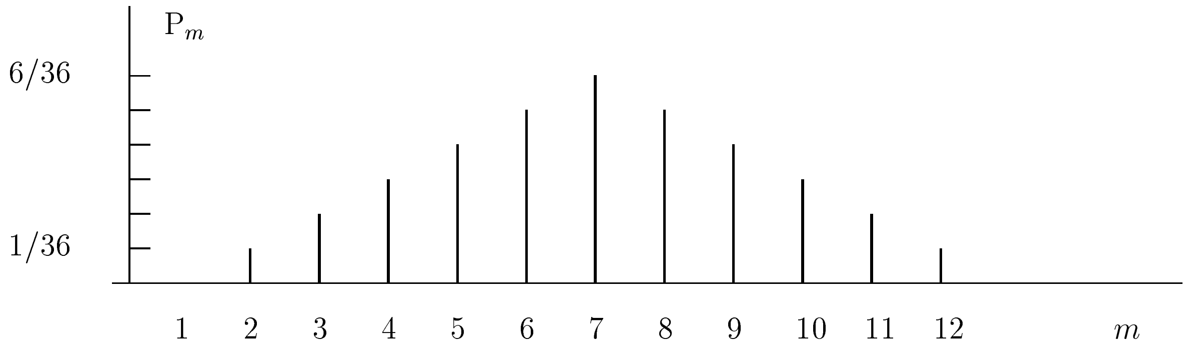


Рисунок 3.17 — Ймовірність $P_m = \Pr\{X=m\}$ випадення m очок

2) імовірність відмови не менше двох елементів

$$\Pr\{X \geq 2\} = \sum_{m=2}^{\infty} P_m = 1 - \sum_{m=0}^{1} P_m = 1 - P_0 - P_1 =$$

$$= 1 - (1 + a)\exp(-a) = 1 - 2e^{-1} = 0,264.$$

Приклад 3.7

Існує дві шестигранні гральні кості. Випадкова величина X – сума очок, що випали за один кидок.

Описати властивості випадкової величини X.

Розв'язання

На кожній з кості вказані очки: 1, 2, 3, 4, 5, 6. Таким чином, область можливих значень випадкової величини X – від 2 до 12.

Ряд розподілу такий:

$X=m$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
P_m	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36

Розподіл ймовірностей $\{P_m\}$, де $m = 1, 2, \ldots, 12$, показано на рис. 3.17.

Приклад 3.8

Прядильниця обслуговує 1000 веретен. Імовірність розриву нитки на одному веретені протягом однієї хвилини дорівнює 0,004.

Знайти імовірність того, що впродовж однієї хвилини розрив відбудеться в п'яти веретенах.

Розв'язання

За умов, що загальна кількість веретен $n = 1000$, імовірність розриву на одному веретені протягом однієї хвилини p= 0,004, кількість веретен $m = 5$, маємо

$$\lambda = np = 1000 \cdot 0,004 = 4.$$

З формули Пуассона ймовірність $P_{5,1000}$ обчислюється наближено за формулою

$P_{5,1000} \approx \lambda^m \exp(-\lambda)/m!$, тобто

$$P_{5,1000} \approx \frac{\lambda^m}{m!} \exp(-\lambda) = \frac{4^5}{5!} \exp(-4) \approx 0,1562.$$

Приклад 3.9

Вироби підлягяють випробуванню при перевантажених режимах. Імовірності для кожного виробу витримати випробування дорівнюють $4/5$. Випробування закінчуються після першого ж виробу, що не витримав перевантаження.

Вивести формулу для ряду розподілів числа випробувань.

Розв'язання

Випробування закінчується на k-му виробі ($k = 1, 2, 3, \ldots$), якщо перші $k-1$ виробів уникнуть випробування, а k-й виріб не витримає перевантаження. Якщо X – випадкова кількість випробувань, то

$$P(X = k) = \frac{1}{5}(1 - 1/5)^{k-1} = \frac{1}{5}(4/5)^{k-1}, \qquad k = 1, 2, 3, \ldots$$

Приклад 3.10

Подано графік густини розподілу $f(x)$ випадкової величини X.

Як зміниться цей графік, якщо: а) додати до випадкової величини одиницю; б) зменшити випадкову величину на 2; в) помножити випадкову величину на 2; г) змінити знак випадкової величини на протилежний?

Розв'язання

а) зсунеться ліворуч на одиницю; б) зсунеться праворуч на 2; в) масштаб уздовж осі абсцис подвоїться, а вздовж осі ординат зменшиться вдвічі; г) графік пересунеться на своє дзеркальне відбиття відносно осі ординат.

Приклад 3.11

Подано графік густини розподілу $F(x)$ випадкової величини X.

Як зміниться цей графік, якщо: а) додати до випадкової величини одиницю; б) зменшити випадкову величину на 2; в) помножити випадкову величину на 2; г) змінити знак випадкової величини на протилежний?

Розв'язання

а) зсунеться ліворуч на одиницю; б) зсунеться праворуч на 2; в) масштаб уздовж осі абсцис подвоїться; г) графік пересунеться на своє дзеркальне відбиття відносно осі ординат й після чого кожну ординату відняти з одиниці.

Приклад 3.12

Випадкова величина X задана інтегральною функцією розподілу:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } -\infty < x < 0, \\ 0,5\,[1 - \cos(x)] & \text{при } 0 \le x \le \pi, \\ 1 & \text{при } \pi < x < \infty. \end{cases}$$

Знайти: а) імовірність того, що в результаті досліду випадкова величина X виявиться у межах проміжку $[\pi/3; \pi/2]$; б) густину імовірності $f(x)$ випадкової величини X; в) моду і медіану розподілу; г) математичне сподівання M[X], дисперсію D[X] і середнє квадратичне відхилення σ[X].

Розв'язання

а) Користуючись формулою $\Pr\{a < \mathrm{X} < b\} = F(b) - F(a)$, отримаємо

$$\Pr\{\pi/3 < \mathrm{X} < \pi/2\} = F(\pi/2) - F(\pi/3) = 1/2 - 1/4 = 1/4.$$

б) За формулою $f(x) = F'(x)$ знаходимо:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } -\infty < x < 0, \\ 0,5\,\sin(x) & \text{при } 0 \le x \le \pi, \\ 0 & \text{при } \pi < x < \infty. \end{cases}$$

в) Значення $\max\limits_{x}[f(x)] = \max[\,0,5\,\sin(x)]$ досягається при $x = \pi/2$, отже, мода $\mathrm{M} = \pi/2$.

Медіана $x_{0,5}$ – це значення x, при якому $F(x_{0,5}) = 0,5$. Розв'язуючи рівняння $\frac{1}{2}\,(1 - \cos x_{0,5}) = 0,5$, отримаємо $x_{0,5} = \pi/2$.

г) За формулою для математичного сподівання $\mathrm{M[X]} = \int\limits_0^{\pi} x f(x)\,dx$ знаходимо: $\mathrm{M[X]} = \pi/2$.

Маємо для дисперсії: $\mathrm{D[X]} = \mathrm{M[X^2]} - (\mathrm{M[X]})^2$.

Обчислимо спочатку $\mathrm{M[X^2]}$ – другий початковий момент:

$$\mathrm{M[X^2]} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,dx = \pi^2/2.$$

Це дає

$$\mathrm{D[X]} = \pi^2/2 - 2 - \pi^2/4 = (\pi^2 - 8)/4.$$

Середнє квадратичне відхилення величини X дорівнює $\sigma[\mathrm{X}] = \sqrt{\mathrm{D[X]}}$, що дає

$$\sigma[\mathrm{X}] = \sqrt{(\pi^2 - 8)/4}.$$

Приклад 3.13

На шляху руху автомашини є чотири світлофори. Кожний з них або дозволяє, або забороняє подальший рух з імовірністю 0,5.

Визначити ймовірності P_k того, що автомашина проїде k світлофорів ($k = 0, 1, 2, 3, 4$). Побудувати многокутник розподілу пройдених автомашиною світлофорів.

Розв'язання

Нехай X – випадкова кількість світлофорів, пройдених автомашиною. Ця величина може набувати таких значень:

$$x_0 = 0; \quad x_1 = 1; \quad x_2 = 2; \quad x_3 = 3; \quad x_4 = 4.$$

Імовірності $\mathrm{P}_k = \Pr(\mathrm{X} = x_k)$ того, що кількість пройдених світлофорів X буде дорівнювати даному частковому значенню x_k, обчислюються таким чином:

$$\mathrm{P}_k = \Pr(\mathrm{X} = x_k) = C_4^k p^k (1-p)^{4-k} \qquad \text{для } k = 1, 2, 3, 4,$$

де p – імовірність затримки автомашини світлофорами ($p = 0,5$).

В результаті обчислень отримаємо

$$\mathrm{P}_0 = \frac{1}{16}; \quad \mathrm{P}_1 = \frac{4}{16}; \quad \mathrm{P}_2 = \frac{6}{16}; \quad \mathrm{P}_3 = \frac{4}{16}; \quad \mathrm{P}_4 = \frac{1}{16}.$$

Ці дані й утворять многокутник розподілу ймовірностей.

Приклад 3.14

Знайти характеристичну функцію випадкової величини X, що задана на $(-\infty, \infty)$ та має густину розподілу ймовірностей $f(x) = \frac{1}{2}\exp(-|x|)$.

Розв'язання

Оскільки характеристична функція

$$q(u) \ = \ \mathrm{M}[\exp(iu\mathrm{X})],$$

то

$$q(u) \ = \ \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp(-|x| + \mathrm{i}ux)\,dx \ = \ \int\limits_{0}^{\infty} \cos(ux)\exp(-x)\,dx,$$

оскільки $\exp(iux) = \cos(ux) + i\,\sin(ux)$ та $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \sin(ux)\exp(-|x|)\,dx \ = \ 0.$

Інтегруючи по частинах, отримаємо

$$\int\limits_{0}^{\infty} \exp(-x)\cos(ux)\,dx \ = \ (1 + u^2)^{-1}.$$

Тому $q(u) \ = \ (1 + u^2)^{-1}$.

Приклад 3.15

Густина імовірності випадкової величини

$$f(x) \ = \ Ax^2\exp(-kx), \qquad k > 0, \ x \geq 0.$$

Треба: а) знайти коефіцієнт A; б) обчислити імовірність влучення випадкової величини X в інтервал $[0,\,1/k]$; в) знайти функцію розподілу $F(x)$ випадкової величини X.

Розв'язання

а) Коефіцієнт A визначимо за допомогою формули про ймовірність повної групи подій

$$A\int\limits_{0}^{\infty} x^2\exp(-kx)\,dx \ = \ 1,$$

отже, $A = 0,5k^3$, і густина імовірності має вигляд

$$f(x) \ = \ \frac{1}{2}k^3x^2\exp(-kx).$$

б) Імовірність влучення випадкової величини X в заданий проміжок $[0,\,1/k]$ обчислюємо за формулою

$$\Pr\{0 < \mathrm{X} < 1/k\} \;=\; \int\limits_0^{1/k} \frac{1}{2} k^3 x^2 \exp(-kx)\,dx \;=\; 1 - \frac{5}{2\mathrm{e}} \approx 0,0803.$$

в) Функція розподілу $F(x)$ випадкової величини X така:

$$F(x) \;=\; \int\limits_0^{x} \frac{1}{2} k^3 x^2 \exp(-kx)\,dx \;=\; 1 - \frac{1}{2}\left(k^2x^2 + 2kx + 2\right)\exp(-kx).$$

Приклад 3.16

Випадкова величина X задана діференціальною функцією розподілу

$$f(x) \;=\; \begin{cases} 0 & \text{при } -\infty < x < -\pi/2, \\ 0,5\,\cos(x) & \text{при } -\pi/2 \le x \le \pi/2, \\ 0 & \text{при } \pi/2 < x < \infty. \end{cases}$$

Знайти інтегральну функцію розподілу $F(x)$.

Розв'язання

Інтегральну функцію розподілу $F(x)$ знайдемо, користуючись формулою

$$F(x) \;=\; \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)\,dt.$$

1) У випадку, коли $-\infty < x < -\pi/2$,

$$F(x) \;=\; \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)\,dt \;=\; \int\limits_{-\infty}^{x} 0\,dt \;=\; 0.$$

2) У випадку, коли $-\pi/2 < x < \pi/2$,

$$F(x) \;=\; \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)\,dt \;=\; \int\limits_{-\infty}^{-\pi/2} 0\,dt + \int\limits_{-\pi/2}^{x} f(t)\,dt \;=\; \frac{1}{2}\int\limits_{-\pi/2}^{x} \cos(t)\,dt \;=\; \frac{1}{2}(\sin(x)+1).$$

3) У випадку, коли $\pi/2 < x < \infty$,

$$F(x) \;=\; \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)\,dt \;=\; \int\limits_{-\infty}^{-\pi/2} 0\,dt + \frac{1}{2}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(t)\,dt + \int\limits_{\pi/2}^{x} 0\,dt \;=\; \frac{1}{2}\sin(x)\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} \;=\; 1.$$

Отже,

$$F(x) \;=\; \begin{cases} 0 & \text{при } -\infty < x < -\pi/2, \\ 0,5\,[\sin(x)+1] & \text{при } -\pi/2 \le x \le \pi/2, \\ 1 & \text{при } \pi/2 < x < \infty. \end{cases}$$

Приклад 3.17

Густина імовірності випадкової величини X має вигляд

$$f(x) = \alpha \exp(-\beta\,|x|\,), \qquad -\infty < x < \infty,$$

де α і β – сталі.

Треба: а) знайти співвідношення, яке має задовольняти α і β; б) обчислити функцію розподілу $F(x)$ випадкової величини X.

Розв'язання

а) Щоб знайти співвідношення між сталими α і β, скористаємось умовою нормування для густини ймовірності. При цьому врахуємо, що густина імовірності має різні аналітичні вирази при $x < 0$ і $x > 0$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \alpha \int_{-\infty}^{0} \exp(\beta x)\,dx + \alpha \int_{0}^{\infty} \exp(-\beta x)\,dx = 2\alpha/\beta = 1.$$

Отже, $\beta = 2\alpha$.

б) За визначенням функція розподілу $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x')\,dx'$.

При $x < 0$

$$F(x) = \alpha \int_{-\infty}^{x} \exp(\beta x')\,dx' = (\alpha/\beta)\exp(\beta x) = \frac{1}{2}\exp(\beta x).$$

При $x \geq 0$

$$F(x) = \frac{1}{2} + \alpha \int_{0}^{x} \exp(-\beta x')\,dx' = 1 - \frac{1}{2}\exp(-\beta x).$$

Приклад 3.18

У теорії надійності приладів як закон розподілу терміну безвідмовної роботи застосовується *закон Вейбулла* з функцією розподілу

$$F_{\text{т}}(t) = 1 - \exp(-\alpha t^n), \qquad t \geq 0,$$

де α – деяка стала, n – натуральне число.

Знайти: густину $f_{\text{т}}(t)$ та математичне сподівання випадкової величини T.

Розв'язання

Для густині $f_{\text{т}}(t)$ маємо

$$f_{\text{т}}(t) = dF_{\text{т}}(t)/dt = n\,\alpha\,t^{n-1}\exp(-\alpha t^n);$$

$$\mathrm{M}[\mathrm{T}] = \int_{0}^{\infty} t\,n\,\alpha\,t^{n-1}\exp(-\alpha t^n)\,dt.$$

Використаємо заміну змінної інтегрування $t = \alpha^{-1/n} y^{1/n}$, тоді

$$\mathrm{M[T]} \;=\; \alpha^{-1/n} \int\limits_0^\infty y^{1/n} \exp(-y)\, dy \;=\; \Gamma(1+1/n)\alpha^{-1/n},$$

де $\Gamma(z)$ – гамма-функція Ейлера.

Приклад 3.19

Випадкова величина X має рівномірну густину імовірності в інтервалі від $-\beta/2$ до $\beta/2$. Визначити характеристичну функцію $q(t)$ випадкової величини X.

Розв'язання

За умови нормування маємо

$$\int\limits_{-\beta/2}^{\beta/2} f(x)\, dx \;=\; 1.$$

Отже, $f(x) = 1/\beta$. Тоді

$$q(t) \;=\; \int\limits_{-\beta/2}^{\beta/2} \mathrm{e}^{itx} f(x)\, dx \;=\; \frac{\sin(\beta t/2)}{(\beta t/2)}.$$

Приклад 3.20

Знайти густину імовірності $f(x)$ випадкової величини X, характеристична функція якої має вигляд $q(t) = 1/(1+t^2)$.

Розв'язання

Користуючись визначенням характеристичної функції, отримаємо

$$f(x) \;=\; \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} q(t)\mathrm{e}^{-itx}\, dt \;=\; \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} (1+t^2)^{-1} \mathrm{e}^{-itx}\, dt \;=$$

$$=\; \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(tx) - i\sin(tx)}{1+t^2}\, dt \;=\; \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(tx)}{1+t^2}\, dt \;=\; \frac{1}{2} \exp(-|x|\,),$$

оскільки уявна частина виразу тотожно дорівнює нулю.

Приклад 3.21 (Теорема про повторення дослідів)

Нехай в незмінних умовах виконується n незалежних дослідів, в кожному з яких реєструється деяка подія A.

Нехай також відомо, що ймовірність появи події A в кожному з дослідів дорівнює Pr(A)= p, відповідно ймовірність непояви події A, тобто події $\overline{\mathrm{A}}$, дорівнює $\Pr(\overline{\mathrm{A}}) = \Pr(\mathrm{A}) = 1 - p \equiv q$.

Розглянемо тепер складну подію {B : *з n незалежних дослідів подія* A *відбудеться рівно m разів*}. Треба знайти ймовірність $\mathrm{P}_{m,n} = \Pr(\mathrm{B})$.

Для обчислення ймовірності $\mathrm{P}_{m,n}$ розглянемо докладніше подію B. Ця подія є, очевидно, сумою добутків n подій, кожна з яких є або A, або $\overline{\mathrm{A}}$. В реалізації послідовності n подій на k-му місці може опинитися подія A або подія $\overline{\mathrm{A}}$, що зручно помічати індексом (A_k або $\overline{\mathrm{A}}_k$). Такого роду реалізації відрізняються лише порядком прямування вказаних подій. При цьому може статися, що подій A виявилось рівно m штук, а подій $\overline{\mathrm{A}}$ – відповідно $n-m$ штук.

Таким чином, складна подія B має вигляд

$$\mathrm{B} = \mathrm{A}_1 \cdot \mathrm{A}_2 \cdot \ldots \cdot \mathrm{A}_m \cdot \overline{\mathrm{A}}_{m+1} \cdot \ldots \cdot \overline{\mathrm{A}}_n + \ldots + \overline{\mathrm{A}}_1 \cdot \overline{\mathrm{A}}_2 \cdot \ldots \cdot \overline{\mathrm{A}}_{n-m} \cdot \mathrm{A}_{n-m+1} \cdot \ldots \cdot \mathrm{A}_n. \quad (1)$$

Позначимо будь-який з доданків в (1) через B_l. Через несумісність подій $\{\mathrm{B}_l\}$ маємо

$$\mathrm{P}_{m,n} = \Pr(\mathrm{B}) = \Pr\left(\sum_{l=1}^{L} \mathrm{B}_l\right) = \sum_{l=1}^{L} \Pr(\mathrm{B}_l), \quad (2)$$

де L – кількість доданків в (1), тобто загальна кількість комбінацій C_n^m, якими з n дослідів можна вибрати m, в яких відбулася подія A. Таким чином, тут C_n^m – число сполучень з n по m. Імовірність будь-якої з таких комбінацій

$$\Pr(\mathrm{B}_l) = \prod_{k=1}^{m} \Pr(\mathrm{A}_k) \prod_{l=m+1}^{n} \Pr(\overline{\mathrm{A}}_l) = (\Pr(\mathrm{A}))^m \left(\Pr(\overline{\mathrm{A}})\right)^{n-m} = p^m q^{n-m}. \quad (3)$$

З (2) та (3) отримуємо для ймовірності складної події, що досліджується,

$$\mathrm{P}_{m,n} = \Pr(\mathrm{B}) = C_n^m p^m q^{n-m}. \quad (4)$$

Це – формула Бернуллі.

Закон вигляду (4) називають *біноміальним розподілом.* Цей закон визначається двома параметрами : кількістю n незалежних дослідів та заданою ймовірністю p появи події A.

Приклад 3.22 (Гіпергеометричний розподіл)

Випадкова величина, яка підпорядковується гіпергеометричному розподілу, виникає в задачах двох типів, які відрізняються заданням вхідних даних. Ці типи продемонструємо на прикладах з двох варіантів.

Варіант 1

Є урна, в якій міститься N білих та M чорних кульок. З урни виймається n кульок. Випадкова величина X – кількість білих кульок m серед вийнятих. Тут $m = 0, 1, 2, \ldots, n$, при цьому $m \le N$.

Ймовірність випадкової події $\{\mathrm{A}_m : \mathrm{X} = m\}$

$$\Pr(\mathrm{A}_m) = \mathrm{P}_m = \frac{C_N^m \, C_M^{n-m}}{C_{N+M}^n}, \qquad m = 0, 1, 2, \ldots, n. \quad (1)$$

Числові характеристики випадкової величини X :

$$\begin{gathered} \mathrm{M}[\mathrm{X}] = \frac{nN}{N+M}, \\ \mathrm{D}[\mathrm{X}] = \frac{nNM}{(N+M)^2} - n(n-1)\left[\frac{N(N-1)}{(N+M)(N+M-1)} - \left(\frac{N}{N+M}\right)^2\right]. \end{gathered} \quad (2)$$

Варіант 2

Розглянемо відому гру "Спортлото". Нехай хтось купив картку "Спортлото 6 з 36" та відмітив у ній 6 з 36 номерів. Розрахуємо ймовірності $\mathrm{P}_m = \Pr(\mathrm{A}_m)$ випадкової події $\{\mathrm{A}_m: \ \textit{вірно вгадано } m \textit{ з } 6\}$.

Ця задача формулюється в термінах схеми випадків таким чином. Є урна, в якій N білих та чорних кульок, *з них* M чорних кульок. З урни виймається n кульок. Випадкова величина X – кількість білих кульок m серед вийнятих. Тут $m = 0, 1, 2, \ldots, n$, при цьому $m \leq N$.

Ймовірність випадкової події $\{\mathrm{A}_m : \mathrm{X} = m\}$

$$\Pr(\mathrm{A}_m) \ = \ \mathrm{P}_m \ = \ \frac{C_M^m \, C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}, \qquad m = 0, 1, 2, \ldots, n. \tag{3}$$

Числові характеристики випадкової величини X:

$$\mathrm{M}[\mathrm{X}] \ = \ \frac{nM}{N}, \qquad \mathrm{D}[\mathrm{X}] \ = \ \frac{nM}{N}\left(1 - \frac{M}{N}\right)\frac{N-n}{N-1}. \tag{4}$$

Для випадку першої лотереї "Спортлото 6 з 36" маємо таке: $N = 36$, $M = 6$, $n = 6$ та $m = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

Наведемо значення ймовірностей, розрахованих згідно з (3):

$$\begin{array}{llll} \mathrm{P}_0 = \dfrac{28275}{92752}, & \mathrm{P}_1 = \dfrac{10179}{23188}, & \mathrm{P}_2 = \dfrac{19575}{92752}, & \mathrm{P}_3 = \dfrac{725}{17391}, \\ \mathrm{P}_4 = \dfrac{2175}{649264}, & \mathrm{P}_5 = \dfrac{15}{162316}, & \mathrm{P}_6 = \dfrac{1}{1947792}. & \end{array} \tag{5}$$

Математичне сподівання

$$\mathrm{M}[\mathrm{X}] \ = \ \sum_{m=0}^{6} m \, \mathrm{P}_m \ = \ 1. \tag{6}$$

Таблиця 3.1 — Ймовірності при грі у "Спортлото"

"Спортлото 6 з 36"			"Спортлото 7 з 49"	
m	P_m		m	P_m
0	0,3048451785		0	0,3140645470
1	0,4389770571		1	0,4274767445
2	0,2110466621		2	0,2079616595
3	0,0416882295		3	0,04560562708
4	0,0033499470		4	0,004677500214
5	0,0000924123		5	0,0002104875096
6	0,0000005134		6	$0{,}3422561132 \cdot 10^{-5}$
			7	$0{,}1164136439 \cdot 10^{-7}$

Для випадку другої лотереї "Спортлото 7 з 49" маємо: $N = 49$, $M = 7$, $n = 7$ та $m = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$. Випадкова подія A_m тут така: $\{\mathrm{A}_m : \ \textit{вірно вгадано } m \textit{ з } 7\}$. Розрахуємо ймовірності $\mathrm{P}_m = \Pr(\mathrm{A}_m)$ цієї події.

Наведемо значення ймовірностей, що розраховані згідно з (3):

$$\mathrm{P}_0 = \frac{1124097}{3579191}, \quad \mathrm{P}_1 = \frac{2622893}{6135756}, \quad \mathrm{P}_2 = \frac{212667}{1022626}, \quad \mathrm{P}_3 = \frac{93275}{2045252},$$
$$\mathrm{P}_4 = \frac{7175}{1533939}, \quad \mathrm{P}_5 = \frac{861}{4090504}, \quad \mathrm{P}_6 = \frac{7}{2045252}, \quad \mathrm{P}_7 = \frac{1}{85900584}. \tag{7}$$

Математичне сподівання

$$\mathrm{M[X]} = \sum_{m=0}^{7} m\,\mathrm{P}_m = 1, \tag{8}$$

тобто в середньому можна, як і вище, вгадати *одне* число.

В табл. 3.1 наведено відповідні ймовірності для обох лотерей. Як можна бачити, зі зростанням m ймовірності виграти швидко зменшуються.

Приклад 3.23 (Закон Пуассона)

При виведенні формули розподілу Пуассона спираються на формулу розподілу Бернуллі. Розповсюдженим прикладом випадкової величини, що підпорядковується розподілу Пуассона, є потік випадкових подій, які реєструються в порядку їх появи. Це може бути, наприклад, кількість телефонних викликів за деякий фіксований часовий інтервал, кількість відвідувачів в установу за робочий тиждень, кількість родзінок в булочці з родзінками и так далі.

Будемо говорити про такого роду події як про точки, що розміщені на осі $0x$. Приймемо, що потік подій на осі $0x$ підпорядковується таким припущенням:

1. Точки розміщені на осі $0x$ з деякою сталою густиною λ, тобто на одиницю довжини припадає *в середньому* однакова кількість точок.

2. Точки розміщуються на осі $0x$ *незалежно одна від іншої*, тобто події, які трапляються в відрізках осі, що не перекриваються, незалежні.

Цих вказаних двох припущень достатньо для того, щоб знайти розподіл ймовірностей P_m $(m = 0, 1, 2, \ldots)$ випадкової події $\{\mathrm{G}$ *: на заданий відрізок довжини* L *влучить рівно* m *точок*$\}$.

Для розв'язання задачі розділимо відрізок на n однакових малих ділянок (інтервалів) і розглянемо на осі $0x$ деякий інтервал довжиною $\Delta x = L/n$. Середня кількість точок, що припадає на цей інтервал,

$$\mathrm{M[X]} = \lambda\Delta x = \lambda L/n. \tag{1}$$

Розглянемо події:

$\{\mathrm{A}:$ *відрізок довжиною* Δx – *зайнятий*$\}$,

$\{\mathrm{B}:$ *відрізок довжиною* Δx – *пустий*$\}$.

Для цих подій маємо

$$\Pr(\mathrm{A}) = \lambda\cdot\Delta x = \lambda L/n; \tag{2}$$

$$\Pr(\mathrm{B}) = \Pr(\overline{\mathrm{A}}) = 1 - \Pr(\mathrm{A}) = 1 - \lambda\cdot\Delta x = 1 - \lambda L/n. \tag{3}$$

Позначимо ймовірності $\Pr(\mathrm{A}) = p$ та $\Pr(\mathrm{B}) = 1 - p = q$. Усього на ділянці L є n відрізків, а влучення точок у відрізки, що не перекриваються, незалежні. Знайдемо ймовірність P_m того, що серед n відрізків буде m зайнятих. За теоремою Бернуллі

$$\mathrm{P}_{m,n} \;=\; C_n^m p^m q^{n-m}. \tag{4}$$

При необмеженому збільшенні кількості інтервалів, $n \to \infty$, імовірність $\mathrm{P}_{m,n}$ прямує до ймовірності влучення m точок на відрізок L:

$$\mathrm{P}_m \;=\; \lim_{n\to\infty} \mathrm{P}_{m,n} \;=\; \lim_{n\to\infty} C_n^m p^m q^{n-m}. \tag{5}$$

Таблиця 3.2 — Розподіл Бернуллі та розподіл Пуассона

m	Біноміальні ймовірності P_m					Ймовірність P_m закона Пуассона
	$p = 0,50$ $n = 8$	$p = 0,25$ $n = 16$	$p = 0,10$ $n = 40$	$p = 0,04$ $n = 100$	$p = 0,004$ $n = 1000$	
0	0,0039	0,0100	0,0148	0,0169	0,0182	0,0183
1	0,0313	0,0535	0,0657	0,0703	0,0730	0,0733
2	0,1094	0,1336	0,1423	0,1450	0,1464	0,1465
3	0,2188	0,2079	0,2003	0,1973	0,1956	0,1954
4	0,2734	0,2252	0,2059	0,1994	0,1958	0,1954
5	0,2188	0,1802	0,1647	0,1595	0,1566	0,1563
6	0,1094	0,1101	0,1068	0,1052	0,1043	0,1042
7	0,0313	0,0524	0,0576	0,0589	0,0595	0,0595
8	0,0039	0,0197	0,0264	0,0285	0,0297	0,0298
9		0,0058	0,0104	0,0121	0,0131	0,0132
10		0,0014	0,0036	0,0046	0,0052	0,0053
11		0,0002	0,0011	0,0016	0,0019	0,0019
12		0,0000	0,0003	0,0005	0,0006	0,0006
13		0,0000	0,0001	0,0001	0,0002	0,0002
14		0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0001
15		0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
16		0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
17			0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
18			0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
19			0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
20			0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

Запишемо явно вираз (5):

$$\mathrm{P}_m \;=\; \lim_{n\to\infty} \frac{n(n-1)\dots(n-m+1)}{m!} \left(\frac{\lambda L}{n}\right)^m \left(1 - \frac{\lambda L}{n}\right)^{n-m}. \tag{6}$$

Для обчислення границі скомпонуємо співмножники:

$$\mathrm{P}_m \;=\; \frac{(\lambda L)^m}{m!} \times \lim_{n\to\infty} \frac{n(n-1)\dots(n-m+1)}{n^m} \times \left(1 - \frac{\lambda L}{n}\right)^{-m} \times \left(1 - \frac{\lambda L}{n}\right)^{n}. \tag{7}$$

Під знаком границі в (7) є три співмножники. З них при фіксованому m та $n \to \infty$ перші два в границі дорівнюють 1. Останній співмножник в границі дорівнює $\exp(-\lambda L)$. Таким чином, отримуємо

$$\mathrm{P}_m \ = \ \Pr(\mathrm{X} = m) \ = \ \frac{(\lambda L)^m}{m!} \exp(-\lambda L). \tag{8}$$

Якщо позначити середню кількість точок на усьому інтервалі L через $a = \lambda L$, то можна записати остаточно

$$\mathrm{P}_m \ = \ \frac{a^m}{m!} \exp(-a). \tag{9}$$

Це – закон Пуассона.

В табл. 3.2 наведено приклад розрахунку ймовірностей $\Pr(\mathrm{X} = m)$ в розподілі Бернуллі та в розподілі Пуассона. Параметри прикладу підібрані так, щоб середні в обох законах збігалися, тобто $a = np = 4$. З таблиці можна бачити асимптотичну властивість закону Пуассона відносно розподілу Бернуллі за великих значень n.

Приклад 3.24 (Закон арксинуса)

Функція розподілу випадкової величини X має вигляд

$$F(x) \ = \ \begin{cases} 0 & \text{при} \ \ x < -a, \\ A + B \arcsin(x/a) & \text{при} \ \ -a \le x \le a, \\ 1 & \text{при} \ \ x > a. \end{cases}$$

Визначити: а) за яких значень параметрів A та B функція розподілу є неперервною в точках $x = a$ та $x = -a$; б) імовірність того, що випадкова величина X виявиться у межах проміжку $[-a/2;\ a/2]$; в) густину розподілу ймовірностей $f(x)$ випадкової величини X.

Розв'язання

а) Для того, щоб функція $F(x)$ була неперервною, необхідне виконання умов $F(-a) = 0$ та $F(a) = 1$. З цих умов одержуються два рівняння для знаходження невідомих A і B:

$$\begin{aligned} A + B \arcsin(-a\,/\,a) &= A - B\pi/2 = 0; \\ A + B \arcsin(a\,/\,a) \ &= \ A + B\pi/2 = 1. \end{aligned}$$

Звідси $A = 1/2$ і $B = \pi^{-1}$.

Отже, функція розподілу випадкової величини X

$$F(x) \ = \ \begin{cases} 0 & \text{при} \ \ x < -a, \\ 1/2 + \pi^{-1} \arcsin(x/a) & \text{при} \ \ -a \le x \le a, \\ 1 & \text{при} \ \ x > a. \end{cases}$$

б) Імовірність $\mathrm{P} = \Pr\{-a/2 < \mathrm{X} < a/2\}$ того, що випадкова величина X виявиться у межах проміжку $(-a/2; a/2)$

$$\mathrm{P} \ = \ F(a/2) - F(-a/2) \ = \ 1/3.$$

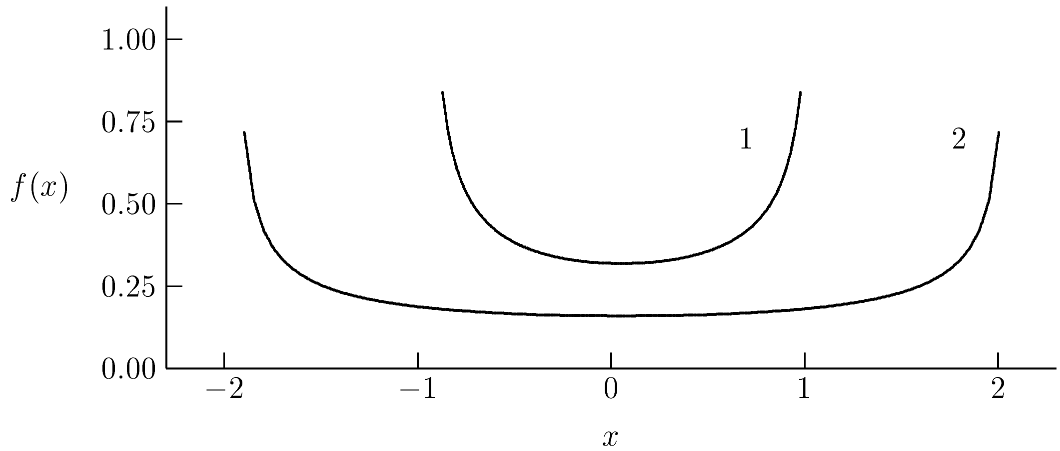


Рисунок 3.18 — Закон арксинуса; $a = 1;\, 2$

в) Густина розподілу ймовірностей $f(x)$ значень випадкової величини X дорівнює:

1) для всіх x, що належать проміжку $(-a, a)$:

$$f(x) \;=\; \frac{dF(x)}{dx} \;=\; \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arcsin(x/a)\right) \;=\; \pi^{-1}(a^2 - x^2)^{-1/2};$$

2) нулю для всіх інших значень x.

Знайдена густина імовірності

$$f(x) \;=\; \frac{1}{\pi\,(a^2 - x^2)^{1/2}}, \qquad |x| \le a,$$

називається *законом арксинуса* (рис. 3.18).

Приклад 3.25 (Експоненціальний розподіл)

Розглянемо однорідний пуассонівський потік точок зі сталою густиною λ. На заданому інтервалі L кількість точок m є випадковою величиною X. Ймовірність P_m випадкової події $\{\mathrm{A}_m : \mathrm{X} = m\}$

$$\mathrm{P}_m \;=\; \Pr(\mathrm{A}_m) \;=\; \frac{(\lambda L)^m}{m!}\exp(-\lambda L). \tag{1}$$

Виберемо тепер деяку точку (наприклад, першу) та розглянемо випадкову подію $\{$B: *після першої точки на інтервалі* l *інших точок немає*$\}$. Для цієї події з (1) отримуємо

$$\Pr(\mathrm{B}) \;=\; \exp(-\lambda l). \tag{2}$$

Тепер розглянемо протилежну подію $\overline{\mathrm{B}}$. Сформулюємо її так: $\{\overline{\mathrm{B}}$: *після першої точки на інтервалі* l *є хоча б одна точка*$\}$. Для цієї події справедливо

$$\Pr(\overline{\mathrm{B}}) \;=\; 1 - \exp(-\lambda l). \tag{3}$$

Отриманий вираз можна інтерпретувати як імовірність випадкової події $\{$C: *випадковий інтервал* T *проміж першою точкою та найближчої до неї точки не перевищує заданого значення* $t\}$, тобто

$$F_{\mathrm{T}}(t) \;=\; \Pr(\mathrm{T} \le t) \;=\; 1 - \exp(-\lambda t). \tag{4}$$

Диференціюючи (4), отримуємо

$$f_{\text{т}}(t) \;=\; \lambda \exp(-\lambda t). \tag{5}$$

Це – густина розподілу ймовірностей експоненціального закону.

3.19. Задачі для розв'язання

Задача 3.1

В досліді монета 2 рази підкидається.

Написати біноміальний закон розподілу дискретної випадкової величини X – кількості появ герба при двох киданнях монети.

Відповідь:

X :

0	1	2
1/4	1/2	1/4

Задача 3.2

Випадкова величина X розподілена за законом Коші: $f_{\text{X}}(x) \;=\; B/(1+x^2)$, $-\infty < x < \infty$.

Знайти: а) значення коефіцієнта B; б) функцію розподілу $F_{\text{X}}(x)$; в) імовірність влучення випадкової величини на проміжок $[-1;\, 1]$.

Відповідь:

а) $B = \frac{1}{\pi}$; б) $F_{\text{X}}(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\text{arctg}(x)$; в) $\Pr\{-1 < \text{X} < 1\} = \frac{1}{2}$.

Задача 3.3

Кидають N гральних костей.

Знайти математичне сподівання суми числа очок, що випадуть на усіх гранях.

Відповідь: $\text{M}[\text{X}] \;=\; 7N/2$.

Задача 3.4

З досліду відомо, що тривалість X безвідмовної роботи деякого приладу є величиною випадковою, а її інтегральна функція розподілу ймовірностей задається виразом

$$F_{\text{X}}(x) \;=\; 1 - \exp(-x/T), \qquad (x \geq 0, \quad T > 0).$$

Знайти ймовірність безвідмовної роботи приладу за термін $\text{X} \geq T$.

Відповідь: $\Pr\{\text{X} \geq T\} \;=\; 1 - \Pr\{\text{X} < T\} \;=\; 1/\text{e}$.

Задача 3.5

Підручник виданий накладом 100000 примірників. Імовірність того, що підручник зброшурований невірно, дорівнює 0,0001.

Знайти ймовірність того, що наклад містить рівно 5 бракованих книг.

Відповідь: Ця ймовірність

$$\text{P}_{100000}(5) \;=\; \frac{1}{5\,!}\, 10^5\, \text{e}^{-10} \;=\; 0,0378.$$

Задача 3.6

Верстат-автомат штампує деталі. Імовірність того, що виготовлена деталь виявиться бракованою, дорівнює 0,01.

Знайти ймовірність того, що серед 200 деталей буде рівно 4 бракованих.

Відповідь: $\mathrm{P}_{200}(4) \;=\; 0{,}09$.

Задача 3.7

Неперервна випадкова величина задана в інтервалі $(-c, c)$ густиною розподілу

$$f_{\mathrm{X}}(x) \;=\; \frac{c}{\pi\sqrt{c^2 - x^2}};$$

поза цим інтервалом $f_{\mathrm{X}}(x) = 0$.

Знайти математичне сподівання випадкової величини X.

Відповідь: $\mathrm{M[X]} \;=\; 0$.

Задача 3.8

Неперервна випадкова величина X в інтервалі $(0, \infty)$ задана густиною розподілу ймовірностей

$$f_{\mathrm{X}}(x) \;=\; \alpha \exp(-\alpha x), \qquad \alpha > 0;$$

поза цим інтервалом $f_{\mathrm{X}}(x) \;=\; 0$.

Знайти ймовірність того, що X набуде значення в інтервалі $[1,\, 2]$.

Відповідь:

$$\Pr\{1 < \mathrm{X} < 2\} \;=\; [\exp(\alpha) - 1] \exp(-2\alpha).$$

Задача 3.9

Випадкова величина X в інтервалі $(-3, 3)$ задана густиною розподілу ймовірностей $f(x) \;=\; \pi^{-1}(9 - x^2)^{-1/2}$.

Треба: а) знайти дисперсію $\mathrm{D[X]}$; б) визначити, що є більш вірогідним: в результаті досліду виявиться $\mathrm{X}< 1$ або $\mathrm{X}> 1$?

Відповідь: а) $\mathrm{D[X]} \;=\; 9$;

б) $\Pr\{-3 < \mathrm{X} < 1\} \;=\; 0,5 + \pi^{-1}\arcsin(1/3)$,

$\Pr\{1 < \mathrm{X} < 3\} \;=\; 0,5 - \pi^{-1}\arcsin(1/3)$.

Задача 3.10

Визначити характеристичну функцію $q_{\mathrm{X}}(\lambda)$ випадкової величини X, якщо вона набуває: а) одного значення, рівного C; б) з однаковою ймовірністю двох значень, рівних $\pm C$.

Відповідь: а) $q_{\mathrm{X}}(\lambda) \;=\; \exp(i\lambda C)$, б) $q_{\mathrm{X}}(\lambda) \;=\; \cos(\lambda C)$.

Задача 3.11

Неперервна випадкова величина X позначена в інтервалі $[0,\, \pi/3]$ та має густину розподілу ймовірностей $f_{\mathrm{X}}(x) \;=\; (3/2)\sin(3x)$.

Знайти ймовірність того, що X набуде значення, яке належить інтервалу $[\pi/6,\, \pi/4]$.

Відповідь: $\Pr\{\pi/6 < \mathrm{X} < \pi/4\} \;=\; 2^{-3/2}$.

Задача 3.12

Відомо, що випадкова величина X підпорядкована гамма-розподілу

$$f_{\mathrm{X}}(x) \;=\; \frac{x^{\alpha}}{\beta^{\alpha+1}\Gamma(\alpha+1)}\,\exp(-x/\beta), \qquad x>0, \quad \alpha>-1, \quad \beta>0.$$

Довести, що характеристична функція величини X має вигляд

$$q_{\mathrm{X}}(\lambda) \;=\; (1-i\beta\lambda)^{-(\alpha+1)},$$

а початкові моменти k-го порядку обчислюються за формулою

$$\alpha_k \;=\; \beta^k\,\Gamma(k+\alpha+1)\,/\,\Gamma(\alpha+1).$$

Задача 3.13

В досліді монета підкидається n разів. Розглядається випадкова величина X – кількість гербів, що випали.

Побудувати ряд розподілу цієї випадкової величини та знайти її характеристики: m_{X}, D_{X}, σ_{X}.

Відповідь:

X :

0	1	$\cdots$	m	$\cdots\ quad$	n
$(1/2)^n$	$C_n^1(1/2)^n$	$\cdots$	$C_n^m(1/2)^n$	$\cdots$	$C_n^n(1/2)^n$

$$m_{\mathrm{X}} = n/2; \quad \mathrm{D}_{\mathrm{X}} = n/4; \quad \sigma_{\mathrm{X}} = \sqrt{n}/2.$$

Задача 3.14

Ймовірність появи події в кожному випробуванні дорівнює 0,2.

Знайти ймовірність того, що ця подія A настане рівно 80 разів в 400 випробуваннях.

Відповідь: Ймовірність $\mathrm{P}_{80,400}$ дорівнює 0,04986.

Задача 3.15

Густина розподілу ймовірностей неперервної випадкової величини X задана на всій осі $0x$ виразом $f_{\mathrm{X}}(x) \;=\; A/\mathrm{ch}(x)$.

Знайти сталий параметр A.

Відповідь: $A \;=\; \pi^{-1}$.

Задача 3.16

Неперервна випадкова величина X характеризується густиною розподілу $f(x) = x + 0,5$ в інтервалі $[0,\,1]$; поза цим інтервалом $f(x) = 0$.

Знайти математичне сподівання $\mathrm{Y} = \mathrm{X}^3$.

Відповідь: $\mathrm{M}[\mathrm{X}^3] \;=\; 5/12$.

Задача 3.17

Випадкова величина X задана густиною розподілу ймовірностей:

$$f(x) \;=\; \frac{1}{n\,!}\,x^n\exp(-x) \;\text{ при } x \ge 0, \quad f(x) \;=\; 0 \;\text{ при } x<0.$$

Знайти : а) математичне сподівання M[X]; б) дисперсію D[X].

Відповідь : а) $\mathrm{M}[\mathrm{X}] = n+1$; б) $\mathrm{D}[\mathrm{X}] = n+1$.

Задача 3.18

Випадкова величина X задана на всій числовій осі $0x$ інтегральною функцією

$$F_{\mathrm{X}}(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\,\mathrm{arctg}(x/2).$$

Знайти можливе значення b, що задовольняє умові: з імовірністю $1/4$ випадкова величина X в результаті випробування набуде значення, яке більше, ніж b.

Відповідь : $b = 2$.

3.20. Завдання для перевірки

1. Сформулюйте основні закони розподілу випадкових величин.
2. Поясніть зміст ряду розподілу.
3. Поясніть зміст функції розподілу.
4. Розкрийте зміст імовірності попадання випадкової величини на заданий проміжок.
5. Розкрийте зміст густини розподілу випадкової величини.
6. Розкрийте зміст моментів розподілу ймовірностей.
7. Перелічте властивості основних числових характеристик розподілу випадкових величин.
8. Дайте інтерпретацію дисперсії, моди, медіани, середньоквадратичного відхилення.
9. Розкрийте зміст характеристичної та твірної функцій розподілу ймовірностей випадкової величини.
10. Сформулюйте поняття та перелічте властивості закону рівномірної густини на проміжку.
11. Сформулюйте поняття та перелічте властивості закону Пуассона.
12. Сформулюйте поняття та перелічте основні властивості експоненціального розподілу.
13. Сформулюйте поняття та побудуйте приклади застосування відомих законів розподілу на практиці.
14. В якому співвідношенні пов'язані закон Пуассона та експоненціальний розподіл?

4. Нормальний розподіл

4.1. Властивості нормального розподілу

Нормальний розподіл – один з найважливіших розподілів імовірностей. Випадкові величини, які мають нормальний розподіл, розглядаються і використовуються у математичній статистиці, теорії ймовірностей, імітаційному моделюванні, у численних задачах та застосуваннях науки і техніки.

Випадкова величина X має *нормальний розподіл* [або розподілена згідно з нормальним законом (законом Гаусса)], якщо її густина така:

$$f_{\mathrm{X}}(x) \;=\; \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\,\sigma^2}\right), \qquad -\infty < x < \infty. \tag{4.1}$$

Ряд нормальних розподілів залежить від двох параметрів: m (рис. 4.1) та $\sigma > 0$ (рис. 4.2).

Математичне сподівання нормальної випадкової величини

$$\mathrm{M[X]} \;=\; \int\limits_{-\infty}^{\infty} x\,f(x)\,dx \;\equiv\; m \tag{4.2}$$

(часто ще вживають позначення m_{X}, а також $\overline{x}$).

Дисперсія випадкової нормальної величини X

$$\mathrm{D[X]} \;=\; \mathrm{M}[(\mathrm{X}-m)^2] \;=\; \int\limits_{-\infty}^{\infty} (x-m)^2\,f(x)\,dx \;\equiv\; \sigma^2 \tag{4.3}$$

(середньоквадратичне відхилення σ часто позначають σ_{X}).

Математичне сподівання випадкової величини, яка має розподіл (4.1), *дорівнює* m, *її середнє квадратичне відхилення є* σ, *а дисперсія дорівнює* σ^2.

Для нормального розподілу випадкової величини X, яка має математичне сподівання m та дисперсію σ^2, прийняте позначення $\mathcal{N}_{\mathrm{X}}(m;\sigma)$.

Крива $y = f(x)$ симетрична відносно ординати, яка проходить через точку $x = m$, та має у цій точці єдиний максимум, який дорівнює $1/\sqrt{2\pi} \approx 0,3989$ (при $\sigma = 1$).

Із зменшенням σ крива нормального розподілу стає все більш гостроверхою.

Змінення m при сталій σ не змінює форму кривої, а викликає лише її зсовування відносно осі абсцис.

Площа фігури, яка міститься між кривою $y = f(x)$ та віссю абсцис $y = 0$, завжди дорівнює одиниці.

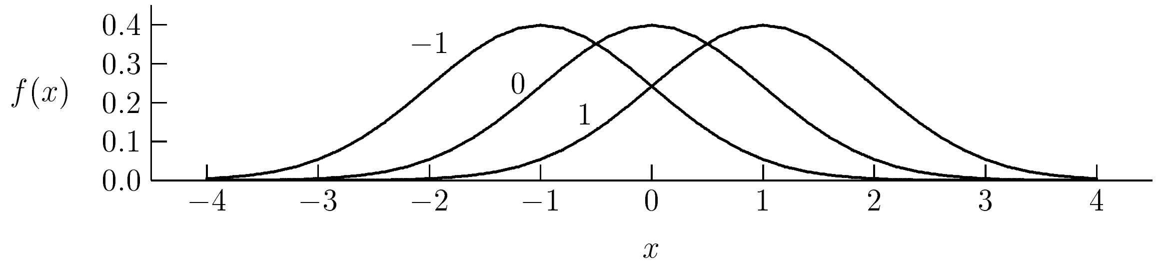


Рисунок 4.1 — Густина розподілу нормальної випадкової величини; $m = -1$; 0; 1; $\sigma = 1{,}0$

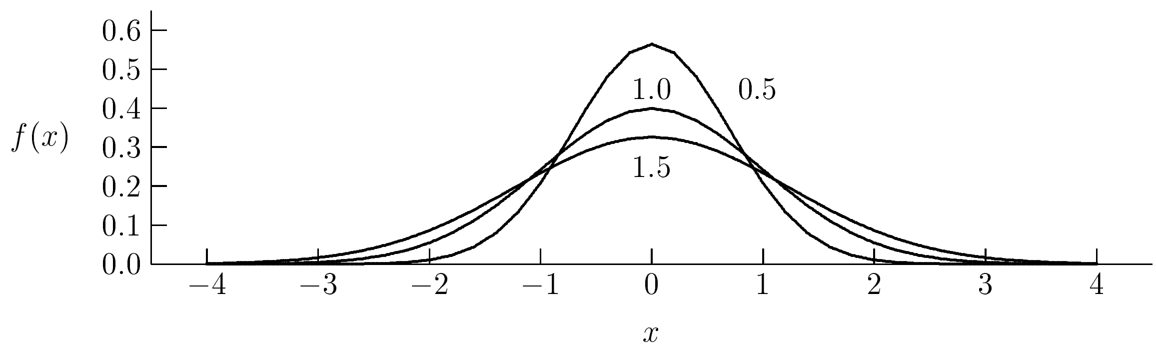


Рисунок 4.2 — Густина розподілу нормальної випадкової величини; $m = 0$; $\sigma = 0{,}5$; 1,0; 1,5

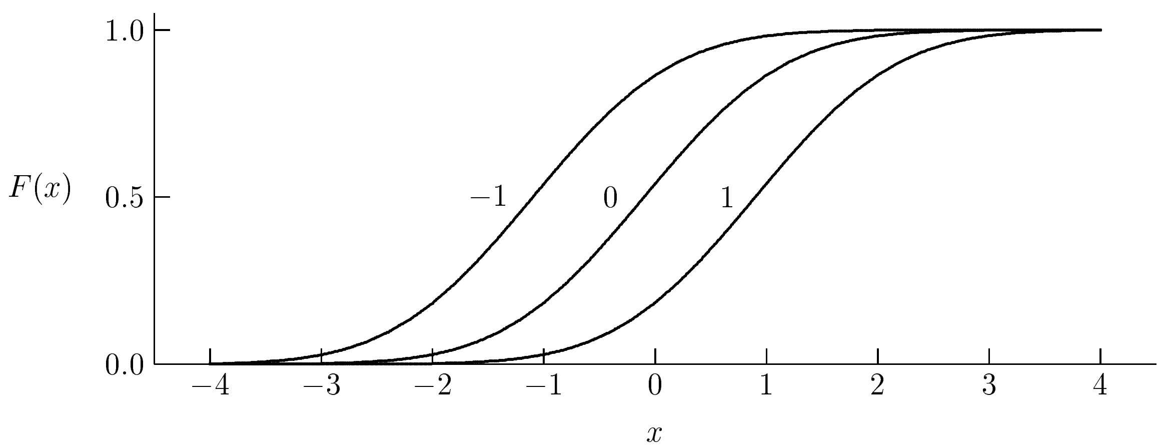


Рисунок 4.3 — Інтегральна ймовірність нормальної випадкової величини; $m = -1$; 0; 1; $\sigma = 1{,}0$

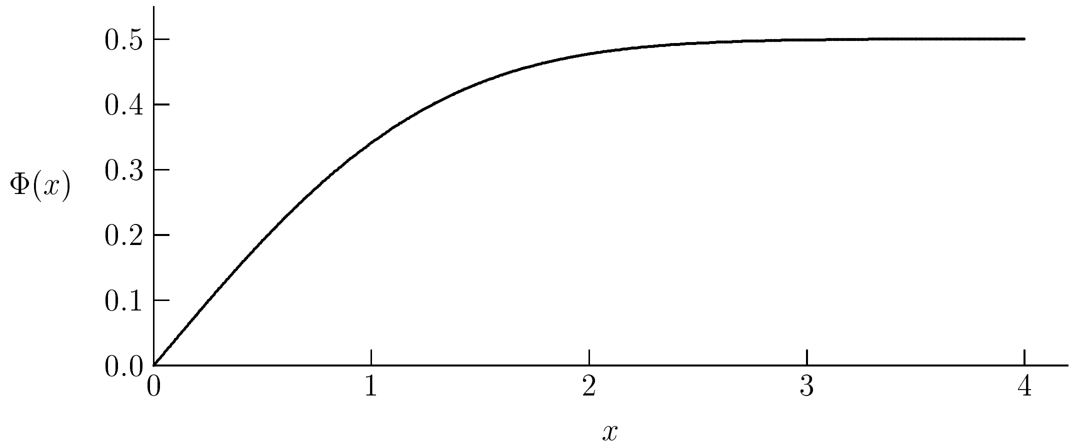


Рисунок 4.4 — Функція Лапласа $\Phi(x)$

Інтегральна ймовірність (рис. 4.3)

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx. \tag{4.4}$$

Характеристична функція нормального розподілу

$$q(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\mathrm{i}x\lambda)\, f(x)\,dx \tag{4.5}$$

така:

$$q(\lambda) = \exp\Big(\mathrm{i}m\lambda - \frac{1}{2}\sigma^2\lambda^2\Big). \tag{4.6}$$

4.2. Функція Лапласа

Ймовірність попадання випадкової величини X, яка має нормальний розподіл з параметрами m та σ, на ділянку від α до β виражається формулою

$$\Pr\{\alpha < \mathrm{X} < \beta\} = \Phi\left(\frac{\beta - m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - m}{\sigma}\right), \tag{4.7}$$

де $\Phi(x)$ – *функція Лапласа* (*інтеграл імовірностей*):

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{x} \exp(-t^2/2)\,dt. \tag{4.8}$$

Функція Лапласа має такі властивості (рис. 4.4):

1) $\Phi(0) = 0$;
2) $\Phi(-x) = -\Phi(x)$ (непарна функція);
3) $\Phi(\infty) = 0,5$.

Якщо ділянка $[\alpha,\, \beta]$, що розглядується, симетрична відносно точки m, тобто справедливо $m-\alpha=\beta-m$, то ймовірність попадання у неї така:

$$\Pr\{|\mathrm{X}-m|<(\beta-\alpha)/2\} \;=\; 2\,\Phi\left(\frac{\beta-\alpha}{2\sigma}\right). \tag{4.9}$$

Для функції $\Phi(x)$, а також декількох її похідних складено численні таблиці (табл. 4.1 та табл. 4.2 в кінці розділу).

Ймовірність виконання нерівності $\{|\mathrm{X}-m| \;\geq\; k\sigma\}$ для заданої величини k складає (рис. 4.5)

$$\Pr\{|\mathrm{X}-m|\geq k\sigma\} \;=\; 1-\,\Phi(k\sigma)\,+\,\Phi(-k\sigma) \;\equiv\; \varphi(k). \tag{4.10}$$

Ця величина для цілих k наведена в табл. 4.1, у якій також вказано значення додаткової ймовірності

$$\Pr\{|\mathrm{X}-m|\leq k\sigma\} \;=\; 1\,-\,\varphi(k). \tag{4.11}$$

Таблиця 4.1 — До ймовірності $\varphi(k) = \Pr\{|\mathrm{X}-m|\geq k\sigma\}$

k	$\varphi(k)$	$1-\varphi(k)$
1	0,31731	0,68269
2	0,04550	0,95450
3	0,00270	0,99730
4	0,00006	0,99994

У практичній діяльності при розгляданні випадкової величини, розподіленої за нормальним законом (4.1), нехтують можливістю відхилення її від $\mathrm{M}[\mathrm{X}]=m$ більше, ніж на 3σ, оскільки (при $k=3$)

$$\Pr\{|\mathrm{X}-m|\geq 3\sigma\} \;=\; 0,00270. \tag{4.12}$$

Це так зване *правило "трьох сигм"*.

Нормальний розподіл виникає тоді, коли величина X утворюється в результаті підсумовування значного числа незалежних (або слабо залежних) випадкових доданків, порівняних за своїм внеском.

На практиці ймовірнісних розрахунків крім функції Лапласа (4.8) часто використовується ще одна спеціальна функція (рис. 4.6)

$$\mathrm{erf}(x) \;=\; \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^x \exp(-t^2)\,dt, \tag{4.13}$$

яку називають *функцією помилок.* З (4.8) та (4.13) випливає, що

$$\Phi(x) \;=\; \frac{1}{2}\,\mathrm{erf}(x/\sqrt{2}), \qquad \mathrm{erf}(x) \;=\; 2\,\Phi(\sqrt{2}\,x). \tag{4.14}$$

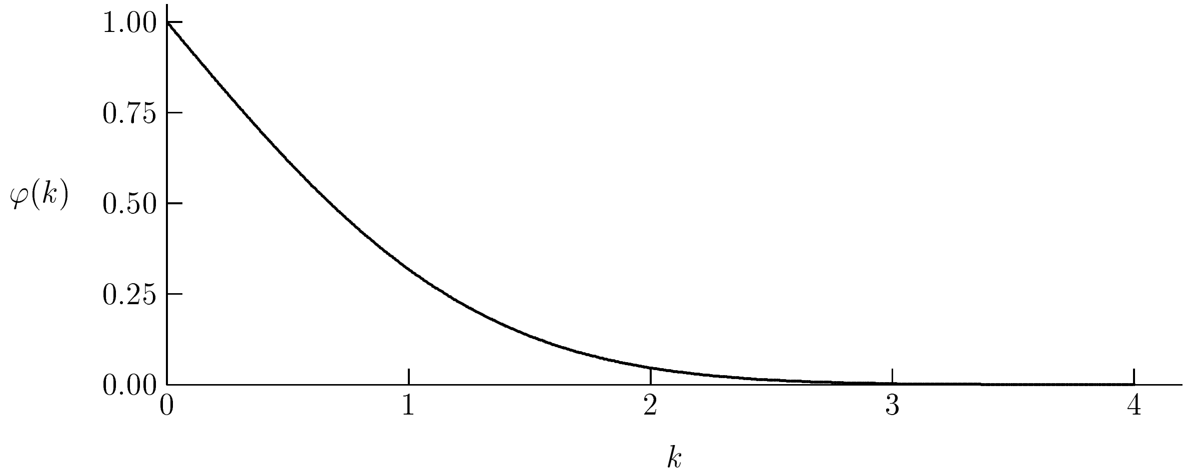


Рисунок 4.5 — Функція $\varphi(k) = 1 - \Phi(k\sigma) + \Phi(-k\sigma)$ у правилі трьох сигм; $\sigma = 1$

У табл. 4.2 зведені значення гауссівської функції $\exp(-x^2)$, функції помилок $\operatorname{erf}(x)$ та додаткової до неї функції $\operatorname{erfc}(x)$, яку називають *доповнюючою функцією помилок*,

$$\operatorname{erfc}(x) = 1 - \operatorname{erf}(x). \tag{4.15}$$

Функція $\operatorname{erf}(x)$ має такі властивості:

$$\operatorname{erf}(-x) = -\operatorname{erf}(x), \qquad \operatorname{erf}(0) = 0, \qquad \operatorname{erf}(\infty) = 1. \tag{4.16}$$

Для $x > 0$ ця функція підлягає нерівності

$$\frac{2x}{\sqrt{\pi}\,(2x^2+1)} \exp(-x^2) < \operatorname{erfc}(\mathrm{x}) < \frac{1}{\sqrt{\pi}\,x} \exp(-x^2), \tag{4.17}$$

яку зручно використовувати для наближеного знаходження її значень.

З (4.17) випливає, що при $x \gg 1$ має місце така асимптотика для функції помилок:

$$\operatorname{erf}(x) \cong \frac{1}{\sqrt{\pi}\,x} \exp(-x^2). \tag{4.18}$$

Це дає при $x \gg 1$ для функції Лапласа

$$\Phi(x) \cong \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,x} \exp(-x^2/2). \tag{4.19}$$

У табл. 4.3 наведені значення функції Лапласа $\Phi(x)$ (4.8) та пов'язаних з нею функцій.

Нормальний закон широко розповсюджений у випадкових явищах природи. Відповідні умови, що підходять для цього, виникають у тих випадках, коли складається багато незалежних (або слабозалежних) випадкових величин $\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2, \ldots, \mathrm{X}_n$ (причому вони мають один порядок свого впливу на розсіювання суми):

$$\mathrm{X} = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{X}_i. \tag{4.20}$$

Тоді *якими б не були закони розподілу окремих величин* $\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2, \ldots, \mathrm{X}_n$, *закон розподілу їх суми* $\mathrm{X} = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{X}_i$ *буде наближений до нормального тим краще, чим більше кількість доданків.*

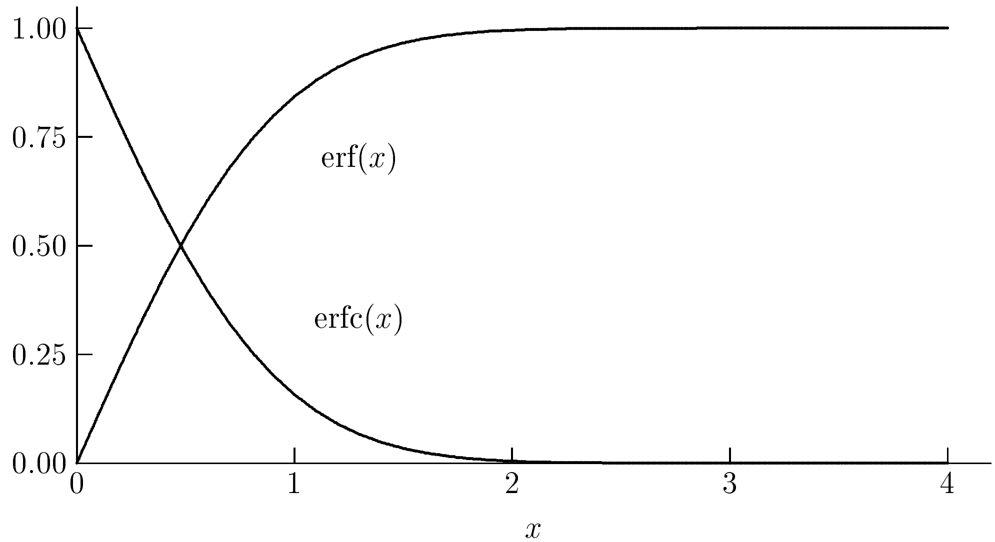


Рисунок 4.6 — Функція помилок erf(x) та доповнююча функція помилок erfc(x)

4.3. Приклади

Приклад 4.1

Від математичного сподівання m нормальної величини послідовно відкладаються відрізки довжиною σ.

Визначити ймовірності попадання випадкової величини X на ці відрізки.

Розв'язання

Згідно з формулою (4.7) знаходимо, користуючись табл. 4.3:

$$\Pr\{m < \mathrm{X} < (m+\sigma)\} = \Phi\left(\frac{\sigma}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{m-m}{\sigma}\right) = \Phi(1) - \Phi(0) = 0,341;$$

$$\Pr\{(m+\sigma) < \mathrm{X} < (m+2\sigma)\} = \Phi\left(\frac{2\sigma}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\sigma}{\sigma}\right) = \Phi(2) - \Phi(1) = 0,136;$$

$$\Pr\{(m+2\sigma) < \mathrm{X} < (m+3\sigma)\} = \Phi\left(\frac{3\sigma}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{2\sigma}{\sigma}\right) = \Phi(3) - \Phi(2) = 0,021.$$

Приклад 4.2

Випадкові помилки вимірювання дальності до нерухомої цілі підлягають гауссівському закону розподілу з математичним сподіванням $m = 5\,м$ і середнім квадратичним відхиленням $\sigma = 10\,м$.

Визначити ймовірність: а) того, що виміряне значення дальності відхилиться від дійсного не більше, ніж на $15\,м$; б) при трьох незалежних вимірюваннях помилка хоча б одного вимірювання не перевищує за абсолютною величиною $15\,м$.

Розв'язання

а) Визначення ймовірності P_1 того, що виміряне значення дальності відхилиться від дійсного не більше, ніж на $15\,м$, зводиться до обчислення ймовірності влучення випадкової величини X (помилки вимірювання) з параметрами $m = 5\,м$ й $\sigma = 10\,м$ на інтервал від $-10\,м$ до $20\,м$.

Використовуючи значення функції $\Phi(x)$, отримаємо

$$P_1 = P(|X - m| < 15) = P(-10 < X < 20) = \Phi\left(\frac{15-5}{10}\right) - \Phi\left(\frac{-15-5}{10}\right) =$$

$$= \Phi(1) - \Phi(-2) = \Phi(1) + \Phi(2) = 0,3413 + 0,4772 \cong 0,82.$$

б) Ймовірність P_2 того, що при трьох незалежних вимірюваннях помилка хоча б одного вимірювання не перевищує за абсолютною величиною $15\,м$, визначається формулою

$$P_2 = 1 - (1 - P_1)^3 = 1 - (1 - 0,82)^3 \cong 0,994.$$

Приклад 4.3

Знайти ймовірність того, що випадкова величина X, яка підлягає нормальному закону розподілу, виявиться вміщеною в інтервал $(5; 10)$, якщо $m = 20$ та $\sigma = 5$.

Розв'язання

$$P(5 < X < 10) = \Phi\left(\frac{10-20}{5}\right) - \Phi\left(\frac{5-20}{5}\right) =$$

$$= \Phi(-2) - \Phi(-3) = \Phi(3) - \Phi(2) = 0,4987 - 0,4772 = 0,0215.$$

Приклад 4.4 (Моменти нормального закону)

Випадкова величина X розподілена за нормальним законом з параметрами m та σ.

Знайти вираз для величини $\alpha_k[X]$ – початкового моменту k-го порядку.

Розв'язання

Визначаємо початкові моменти $\alpha_k[X] = M[X^k]$ через центральні моменти $\mu_k[X] = M[(X-m)^k]$:

$$\alpha_k[X] = M[(X - m + m)^k] = \sum_{j=0}^{k} C_k^j \mu_j[X] m^{k-j}; \qquad \mu_0[X] = 1.$$

Для центральних моментів при непарному $k = 2n + 1$

$$\mu_k[X] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} (x - m)^k \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right) dx = 0.$$

При парному $k = 2n$ маємо

$$\mu_{2n}[X] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} y^{2n} \exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma^2}\right) dy = \sigma^{2n}(2n+1)\,!!\,,$$

де символ $(2n + 1)\,!!$ позначає множення

$$(2n+1)\,!! = (2n+1)\cdot(2n-1)\cdot\ldots\cdot 5\cdot 3\cdot 1.$$

Наприклад:

$$\begin{aligned}
\mu_1[\mathrm{X}] &= 0; & \alpha_1[\mathrm{X}] &= m;\\
\mu_2[\mathrm{X}] &= \sigma^2; & \alpha_2[\mathrm{X}] &= m^2+\sigma^2;\\
\mu_3[\mathrm{X}] &= 0; & \alpha_3[\mathrm{X}] &= m^3+3\sigma^2 m;\\
\mu_4[\mathrm{X}] &= 3\sigma^4; & \alpha_4[\mathrm{X}] &= m^4+6\sigma^2 m^2+3\sigma^4;\\
\mu_5[\mathrm{X}] &= 0; & \alpha_5[\mathrm{X}] &= m^5+10\sigma^2 m^3+75\sigma^4 m;\\
\mu_6[\mathrm{X}] &= 15\sigma^6; & \alpha_6[\mathrm{X}] &= m^6+15\sigma^2 m^4+45\sigma^4 m^2+15\sigma^6.
\end{aligned}$$

Приклад 4.5

Кульки для підшипників бракуються таким чином: якщо кулька не проходить через отвір діаметром d_1, але проходить через отвір діаметром d_2, де $d_2 > d_1$, то її розмір вважається допустимим. Якщо яка-небудь з цих умов не виконується, кулька бракується. Відомо, що діаметр кульки D є нормально розподіленою випадковою величиною D з характеристиками $m_{\mathrm{D}} = (d_1+d_2)/2$, $\sigma_{\mathrm{D}} = (d_2-d_1)/4$.

Визначити ймовірність P того, що кулька не буде забракована.

Розв'язання

Ділянка (d_1, d_2) є симетричною відносно m_{D}. Згідно з формулою (4.9), вважаючи $\alpha = d_1$ та $\beta = d_2$, знаходимо ймовірність того, що кулька не буде забракована:

$$\mathrm{P} = \Pr\{|\mathrm{X}-m_{\mathrm{D}}| < (d_2-d_1)/2\} = 2\Phi\left(\frac{d_2-d_1}{2\,\sigma_{\mathrm{D}}}\right) = 2\,\Phi(2) = 0,9544.$$

Приклад 4.6

В умовах попередньої задачі знайти середнє квадратичне відхилення σ_{D} діаметра кульки, якщо відомо, що брак складає 10 % усієї продукції.

Розв'язання

Ймовірність браку

$$\mathrm{P} = 1-2\,\Phi\left(\frac{d_2-d_1}{2\,\sigma_{\mathrm{D}}}\right) = 0,1,$$

що дає $\Phi\left[(d_2-d_1)\,(2\,\sigma_{\mathrm{D}})^{-1}\right] = 0,45$.

За таблицями функції Лапласа знаходимо аргумент, за якого функція Лапласа дорівнює 0,45: $(d_2-d_1)/(2\sigma_{\mathrm{D}}) \cong 1,65$.

Тому

$$\sigma_{\mathrm{D}} \cong (d_2-d_1)/3,3.$$

Приклад 4.7

Ймовірність відмови радіолампи у момент її вмикання залежить від напруги U у схемі та дорівнює $q_{\mathrm{U}}(u)$. Напруга U є випадковою та має нормальний розподіл з параметрами $m_{\mathrm{U}} = u_0$ та σ_{U}.

Знайти повну ймовірність P відмови радіолампи у момент її вмикання.

Розв'язання

Згідно з інтегральною формулою повної ймовірності

$$\mathrm{P} \;=\; \int\limits_{-\infty}^{\infty} q_{\mathrm{U}}(u) f(u)\, du \;=\; \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_{\mathrm{U}}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} q_{\mathrm{U}}(u) \exp\left(-\frac{(u-u_0)^2}{2\sigma_{\mathrm{U}}^2}\right)\, du.$$

Приклад 4.8

Розмір діаметра циліндрів, які виготовляються, вважається нормально розподіленою випадковою величиною з математичним сподіванням $a = 25\,мм$ та дисперсією $\sigma^2 = 0{,}01\,мм^2$.

У яких межах можна практично гарантувати розмір діаметра циліндра, якщо за ймовірність практичної вірогідності приймається 0,997 (правило трьох сигм) ?

Розв'язання

При вказаних значеннях параметрів густини розподілу ймовірностей

$$f(x) \;=\; \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,0,1} \exp\left(-\frac{(x-25)^2}{2\cdot 0,01}\right).$$

Ймовірність $\Pr(|\xi - a| \le \alpha)$ того, що випадкова величина ξ (розмір діаметра) відхилиться від a не більше, ніж на α, дорівнює 0,997, тобто

$$\int\limits_{a-\alpha}^{a+\alpha} f(x)\, dx \;\le\; 0,997.$$

Тому

$$0,997 \;\ge\; \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \int\limits_{a-\alpha}^{a+\alpha} \exp\left(-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right)\, dx.$$

Нехай $t = (x-a)/\sigma$, тоді

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\alpha/\sigma}^{\alpha/\sigma} \exp(-t^2/2)\, dt \;\le\; 0,997.$$

Ця нерівність має місце, якщо $\alpha = 3\sigma$, тобто $\alpha = 0,3$.

Отже, розмір діаметра циліндрів з імовірністю 0,997 гарантований в межах від $a - 3\sigma = 24{,}7\,мм$ до $a + 3\sigma = 25{,}3\,мм$.

Приклад 4.9

Густина імовірності випадкових амплітуд бічної хитавиці корабля має вигляд

$$f(x) \;=\; \frac{x}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right), \qquad x \ge 0.$$

Визначити: а) математичне сподівання M[X]; б) дисперсію D[X] та середнє квадратичне відхилення σ; в) центральні моменти третього та четвертого порядків μ_3 та μ_4.

Розв'язання

При розв'язанні цієї задачі виникає необхідність у обчисленні інтегралів вигляду ($n \geq 0$ та ціле)

$$J_n \;=\; \int\limits_0^\infty t^n \exp(-t^2)\, dt,$$

які за допомогою підстановки $t^2 = u$ зводяться до відомого інтеграла Ейлера

$$\Gamma(p) \;=\; \int\limits_0^\infty u^{p-1} \exp(-u)\, du, \qquad p > 0,$$

який визначає гамма-функцію, тобто

$$J_n \;=\; 0,5\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right).$$

На основі властивості гамма-функції $\Gamma(p+1) = p\,\Gamma(p)$, при p цілому $\Gamma(p+1) = p\,!$, а при $p = 1/2$ маємо

$$\Gamma(1/2) \;=\; \int\limits_0^\infty u^{-1/2} \exp(-u)\, du \;=\; 2\int\limits_0^\infty \exp(-t^2)\, dt \;=\; \sqrt{\pi}.$$

Отже, при цілому k

$$J_{2k} \;=\; 0,5 \cdot \Gamma(k+1/2) \;=\; \frac{(2k-1)\,!!}{2^{k+1}}\sqrt{\pi},$$

де позначено $(2k-1)\,!! = (2k-1)\cdot(2k-3)\cdot(2k-5)\cdot\ldots\cdot 7\cdot 5\cdot 3\cdot 1$;

$$J_{2k+1} \;=\; \frac{1}{2}\,\Gamma(k+1) \;=\; \frac{1}{2}\,k\,!$$

Останні дві формули можуть бути отримані і безпосередньо повторним інтегруванням за частинами вихідної формули для J_n без використання властивостей гамма–функції.

а) Математичне сподівання випадкової амплітуди бічної хитавиці

$$\alpha_1 \;=\; \mathrm{M}[\mathrm{X}] \;=\; \int\limits_0^\infty x\, f(x)\, dx \;=\; \int\limits_0^\infty \frac{x^2}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)\, dx.$$

Здійснивши заміну змінних інтегрування, підставивши $t = x/\sqrt{2}\,\sigma$, отримаємо $m = \mathrm{M}[\mathrm{X}] = \sigma\sqrt{\pi/2}$.

б) Оскільки для дисперсії маємо $\mathrm{D}[\mathrm{X}] = \mathrm{M}[\mathrm{X}^2] - \alpha_1^2$, то достатньо обчислити другий початковий момент

$$\alpha_2 \;=\; \mathrm{M}[\mathrm{X}^2] \;=\; \int\limits_0^\infty \frac{x^3}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)\, dx.$$

Здійснивши ту ж заміну змінних, отримаємо $\alpha_2 = 2\sigma^2$, тому

$$\mathrm{D[X]} \;=\; 2\sigma^2 - \frac{\pi\sigma^2}{2} \;=\; \sigma^2(2 - \pi/2).$$

Середнє квадратичне відхилення σ_{x} випадкової величини X

$$\sigma_{\mathrm{x}} \;=\; \sigma\sqrt{2 - \pi/2}.$$

в) При обчисленні центрального моменту третього порядку його зручніше виразити через початковий момент

$$\mu_3 \;=\; \mathrm{M}[\mathrm{X} - \alpha_1)^3] \;=\; \int\limits_0^\infty (x - \alpha_1)^3 \frac{x}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) dx \;=\; \alpha_3 - 3\alpha_1\alpha_2 + 2\alpha_1^3.$$

Величини $\alpha_1 = \sigma\sqrt{\pi/2}$, $m_2 = 2\sigma^2$ — відомі; залишається обчислити α_3. Маємо

$$\alpha_3 \;=\; 4\sqrt{2}\sigma^3 \int\limits_0^\infty t^4 \exp(-t^2)\, dt \;=\; 4\sqrt{2}\sigma^3 J_4 \;=\; 3\sigma^3\sqrt{\pi/2}.$$

Підставляючи значення α_1, α_2 і α_3 у формулу для μ_3, отримаємо

$$\mu_3 \;=\; \sigma^3\,(\pi - 3)\sqrt{\pi/2}.$$

Аналогічно для центрального моменту четвертого порядку

$$\mu_4 \;=\; \mathrm{M}[(\mathrm{X} - m_1)^4] \;=\; \int\limits_0^\infty (x - m_1)^4 \frac{x}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) dx \;=$$

$$=\; \alpha_4 - 4\alpha_1\alpha_3 + 6\alpha_1^2\alpha_2 - 3\alpha_1^4.$$

Початковий момент четвертого порядку

$$\alpha_4 \;=\; \int\limits_0^\infty x^4 \frac{x}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) dx \;=\; 8\sigma^4 \int\limits_0^\infty t^5 \exp(-t^2)\, dt \;=\; 8\sigma^4 J_5 \;=\; 8\sigma^4.$$

Підставляючи α_1, α_2, α_3 і α_4 у формулу для μ_4, отримаємо

$$\mu_4 \;=\; \sigma^4(8 - 3\pi^2/4).$$

Приклад 4.10

Вимірювання дальності L до об'єкта супроводжується систематичними й випадковими помилками. Систематична помилка дорівнює 50 *м* у бік заниження дальності. Випадкові помилки підкоряються нормальному закону з середнім квадратичним відхиленням $\sigma = 100$ *м*.

Визначити: а) ймовірність вимірювання дальності L з помилкою, яка не перевищує за абсолютною величиною 150 *м*; б) ймовірність того, що вимірювана дальність не перевищить справжню.

Розв'язання

Позначимо через X сумарну помилку вимірювання дальності. Її систематична складова $\overline{x} = -50\,м$. Отже, густина розподілу ймовірностей сумарних помилок має вигляд

$$f(x) \;=\; \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,100}\exp\left(-\,\frac{(x+50)^2}{20000}\right).$$

а) Ймовірність вимірювання дальності з помилкою, яка не перевищує за абсолютною величиною $150\,м$, обчислюється за допомогою таблиць функції Лапласа $\Phi(x)$ (інтеграл імовірності) за формулою

$$\Pr\{|\mathrm{X}| < 150\} \;=\; \Pr\{-150 < \mathrm{X} < 150\} \;=$$

$$=\; \Phi\left(\frac{150+50}{100}\right) - \Phi\left(\frac{-150+50}{100}\right) \;=\; \Phi(2) - \Phi(-1).$$

Оскільки $\Phi(x)$ є функцією непарною, тобто $\Phi(-x) = -\Phi(x)$, то $\Phi(-1) = -\Phi(1)$, тому

$$\Pr\{|\mathrm{X}| < 150\} \;=\; \Phi(2) + \Phi(1).$$

З табл. 4.3 знаходимо: $\Phi(2) \;=\; 0,4772$, $\Phi(1) \;=\; 0,3413$. Звідси маємо $\Pr\{|\mathrm{X}| < 150\} = 0{,}8186$.

б) Ймовірність того, що вимірювана дальність L не перевищує дійсної, обчислюється за формулою

$$\Pr\{-\infty < \mathrm{X} < 0\} \;=\; \Phi\left(\frac{0+50}{100}\right) - \Phi(-\infty) \;=\; \Phi(0,5) + \Phi(\infty).$$

Оскільки $\Phi(\infty) = 0,5$ та $\Phi(0,5) = 0,1915$, то отримаємо остаточно

$$\Pr\{-\infty < \mathrm{X} < 0\} \;=\; 0,1915 + 0,5000 \;=\; 0,6915.$$

Приклад 4.11

Випадкова величина X розподілена згідно з нормальним законом з математичним сподіванням m та середнім квадратичним відхиленням σ.

Визначити абсциси x_1, x_2 та ординату y точок перегину кривої розподілу $y = f(x)$.

Розв'язання

Для неперервної та двічі диференційованої функції координати її точок перегину визначаються як розв'язок рівняння

$$\frac{d^2}{dx^2}f(x) \;=\; 0, \qquad\qquad -\infty < x < \infty.$$

У нашому випадку

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\,\sigma^2}\right).$$

Двічі диференціюючи по x, отримаємо рівняння

$$f(x)\left(\frac{(x-m)^2}{\sigma^4}-\frac{1}{\sigma^2}\right) \;=\; 0.$$

Оскільки $f(x)$ не дорівнює нулю, корені рівняння визначаються другим множником. Це дає для точок перегину, які вишукуються, $x = m - \sigma$, $x = m + \sigma$. У цих точках ордината $y \;=\; \mathrm{e}/(\sqrt{2\pi}\,\sigma) \;\cong\; 1,084/\sigma$.

Приклад 4.12

При фіксованому значенні параметра b випадкова величина X має нормальний розподіл

$$f(x|b) \;=\; \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_{\mathrm{X}}}\exp\left(-\,\frac{(x-b)^2}{2\sigma_{\mathrm{X}}^2}\right).$$

Параметр b також випадковий, його густина розподілу

$$\varphi(b) \;=\; \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_b}\exp\left(-\,\frac{(b-m)^2}{2\sigma_b^2}\right).$$

Знайти безумовну густину розподілу випадкової величини X.

Розв'язання

Безумовна густина

$$f(x) \;=\; \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x|b)\,\varphi(b)\,db \;=\; \int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\pi\,\sigma_{\mathrm{X}}\sigma_b}\exp\left(-\,\frac{(x-b)^2}{2\sigma_{\mathrm{X}}^2}-\frac{(b-m)^2}{2\sigma_b^2}\right)\,db.$$

Після обчислення цього інтеграла отримаємо

$$f(x) \;=\; \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\exp\left(-\,\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right), \qquad \sigma^2 \;=\; \sigma_{\mathrm{X}}^2+\sigma_b^2.$$

Приклад 4.13 (Теорема Муавра-Лапласа)

В цьому прикладі розглянемо асимптотичний перехід біноміального розподілу в нормальний розподіл.

Нехай є серія з n незалежних дослідів, виконаних в однорідних умовах. Нехай в кожному з них деяка подія A реалізується зі сталою та відомою ймовірністю p, а випадкова величина X – кількість реалізацій події A. Тоді зі зростанням *об'єму вибірки* n закон розподілу випадкової величини X асимптотично наближується до нормального закону з параметрами

$$m_{\mathrm{X}} \;=\; np, \qquad \sigma_{\mathrm{X}}^2 \;=\; np(1-p). \tag{1}$$

Іншими словами, для величин α та β, що задані, маємо

$$\Pr(\alpha < \mathrm{X} < \beta) \;\approx\; \Phi\left(\frac{\beta-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right). \tag{2}$$

Доказ формули (2) проведемо, спираючись на формулу Бернуллі

$$\mathrm{P}(\mathrm{X}=m) \;\equiv\; \mathrm{P}_m \;=\; C_n^m p^m q^{n-m}, \qquad q \;=\; 1-p. \tag{3}$$

З вигляду твірної функції випадкової величини X

$$Q_{\mathrm{X}}(\lambda) \;=\; \sum_{m=0}^{n} \lambda^m \mathrm{P}_m \;=\; \sum_{m=0}^{n} C_n^m \lambda^m p^m q^{n-m} \;=\; (q+p\lambda)^n \tag{4}$$

випливає допоміжний вираз для амплітуди ймовірностей

$$\mathrm{P}_m \;=\; \frac{1}{m!}\left(\frac{d}{d\lambda}\right)^m Q_{\mathrm{X}}(\lambda)\bigg|_{\lambda=0}. \tag{5}$$

Користуючись інтегральною формулою Коші, отримуємо

$$\mathrm{P}_m \;=\; \frac{1}{2\pi i\, m!}\oint dz\left(\frac{d}{d\lambda}\right)^m \frac{1}{z-\lambda}\,(q+zp)^n\bigg|_{\lambda=0} \;=\; \frac{1}{2\pi i}\oint dz\frac{(q+zp)^n}{z^{m+1}}. \tag{6}$$

Введемо тепер у розгляд неперервну випадкову величину Y, яка відцентрована та віднормована,

$$\mathrm{Y} \;=\; \frac{\mathrm{X}-m_{\mathrm{X}}}{\sigma_{\mathrm{X}}} \;=\; \frac{\mathrm{X}-np}{\sqrt{npq}}, \tag{7}$$

після чого запишемо її закон розподілу

$$f_{\mathrm{Y}}(y) \;=\; \mathrm{M}\left[\delta\left(y-\frac{\mathrm{X}-np}{\sqrt{npq}}\right)\right], \tag{8}$$

де $\delta(\,.\,)$ – дельта-функція Дірака, яка характеризується фільтруючими властивостями. Користуючись цими властивостями, послідовно запишемо

$$f_{\mathrm{Y}}(y) \;=\; \sqrt{npq}\,\mathrm{M}\left[\delta\left(\mathrm{X}-np-y\sqrt{npq}\right)\right] \;=\; \sqrt{npq}\sum_{m=0}^{n}\mathrm{P}_m\delta\left(m-np-y\sqrt{npq}\right). \tag{9}$$

Оскільки $n \gg 1$, в сумі (9) перейдемо від дискретної змінної m до неперервної x, тобто до інтегрування. Замінимо в (9) набір амплітуд $\{\mathrm{P}_m\}$, де $m=0,1,\ldots,$ на густину $f_{\mathrm{X}}(x)$, тоді

$$f_{\mathrm{Y}}(y) \;=\; \sqrt{npq}\int dx\delta\left(x-np-y\sqrt{npq}\right)f_{\mathrm{X}}(x) \;=$$

$$=\; \frac{\sqrt{npq}}{2\pi i}\int dx\delta\left(x-np-y\sqrt{npq}\right)\oint dz\frac{(q+zp)^n}{z^{x+1}}, \tag{10}$$

що дає, з урахуванням властивостей дельта–функції,

$$f_{\mathrm{Y}}(y) \;=\; \frac{\sqrt{npq}}{2\pi i}\oint dz\exp\{\Psi(z)\}, \tag{11}$$

де

$$\Psi(z) \;=\; n\ln(q+zp)-(np+y\sqrt{npq})\ln z. \tag{12}$$

Значення інтеграла (11) на комплексній z-площині будемо шукати, користуючись методом перевалу. Згідно з цим методом необхідно знайти точку z_*, яка доставляє функції $\Psi(z)$ максимум, тобто розв'язати рівняння

$$\frac{d}{dz}\Psi(z) \;=\; \frac{np}{q+zp} - \frac{np + y\sqrt{npq}}{z} \;=\; 0, \tag{13}$$

що дає

$$z_* \;=\; \frac{1 + yq/\sqrt{npq}}{1 - yp/\sqrt{npq}}. \tag{14}$$

Оскільки $p+q=1$ та розглядається асимптотичний випадок $n \gg 1$, то запишемо

$$z_* \;=\; 1 + \frac{y}{\sqrt{npq}} + O(n^{-1}). \tag{15}$$

Контур інтегрування в (11) проведемо через точку z_*. Припускаючи, що головний внесок в (11) дає окіл цієї точки, запишемо

$$f_{\mathrm{Y}}(y) \;=\; \frac{\sqrt{npq}}{2\pi i}\oint dz \exp\{\Psi(z_*) + (z-z_*)\Psi'(z_*) + \frac{1}{2}(z-z_*)^2\Psi''(z_*) + \ldots\}. \tag{16}$$

В інтегралі (16): а) обмежимося доданками до другої похідної включно; б) перейдемо до нової змінної інтегрування η за правилом: $z - z_* = i\eta,\quad dz = i\,d\eta$. Тоді отримаємо

$$f_{\mathrm{Y}}(y) \;=\; \frac{\sqrt{npq}}{2\pi}\oint d\eta \exp\{\Psi_* - \frac{1}{2}\eta^2\Psi''_*\}, \tag{17}$$

де $\Psi_* = \Psi(z_*)$, $\Psi''_* = \Psi''(z_*)$. Обираючи контур інтегрування по η вздовж дійсної осі, одержимо

$$f_{\mathrm{Y}}(y) \;=\; \frac{\sqrt{npq}}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\eta\, \exp\{\Psi_* - \frac{1}{2}\eta^2\Psi''_*\} \;=\; \sqrt{\frac{npq}{2\pi\Psi''_*}}\,\exp(\Psi_*). \tag{18}$$

Таким чином, необхідно визначити значення Ψ_* та Ψ''_*. Оскільки для $\varepsilon \ll 1$ справедливо $\ln(1+\varepsilon) = \varepsilon - \varepsilon^2/2 + \ldots$, то маємо при $n \gg 1$:

$$\Psi_* \;=\; n\ln(q + z_*p) - (np + y\sqrt{npq})\ln z_* \;\approx\; -\frac{y^2}{2}, \tag{19a}$$

$$\Psi''_* \;=\; -\frac{np^2}{\left(1 + yp/\sqrt{npq}\right)^2} + \frac{np + y\sqrt{npq}}{\left(1 + y/\sqrt{npq}\right)^2} \;\approx\; -np^2 + np \;=\; npq. \tag{19b}$$

Нарешті, отримаємо

$$f_{\mathrm{Y}}(y) \;=\; \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{y^2}{2}\right). \tag{20}$$

Повертаючись до випадкової величини X, можна записати

$$f_{\mathrm{X}}(x) \;=\; \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}}\exp\left(-\frac{(x-np)^2}{2npq}\right). \tag{21}$$

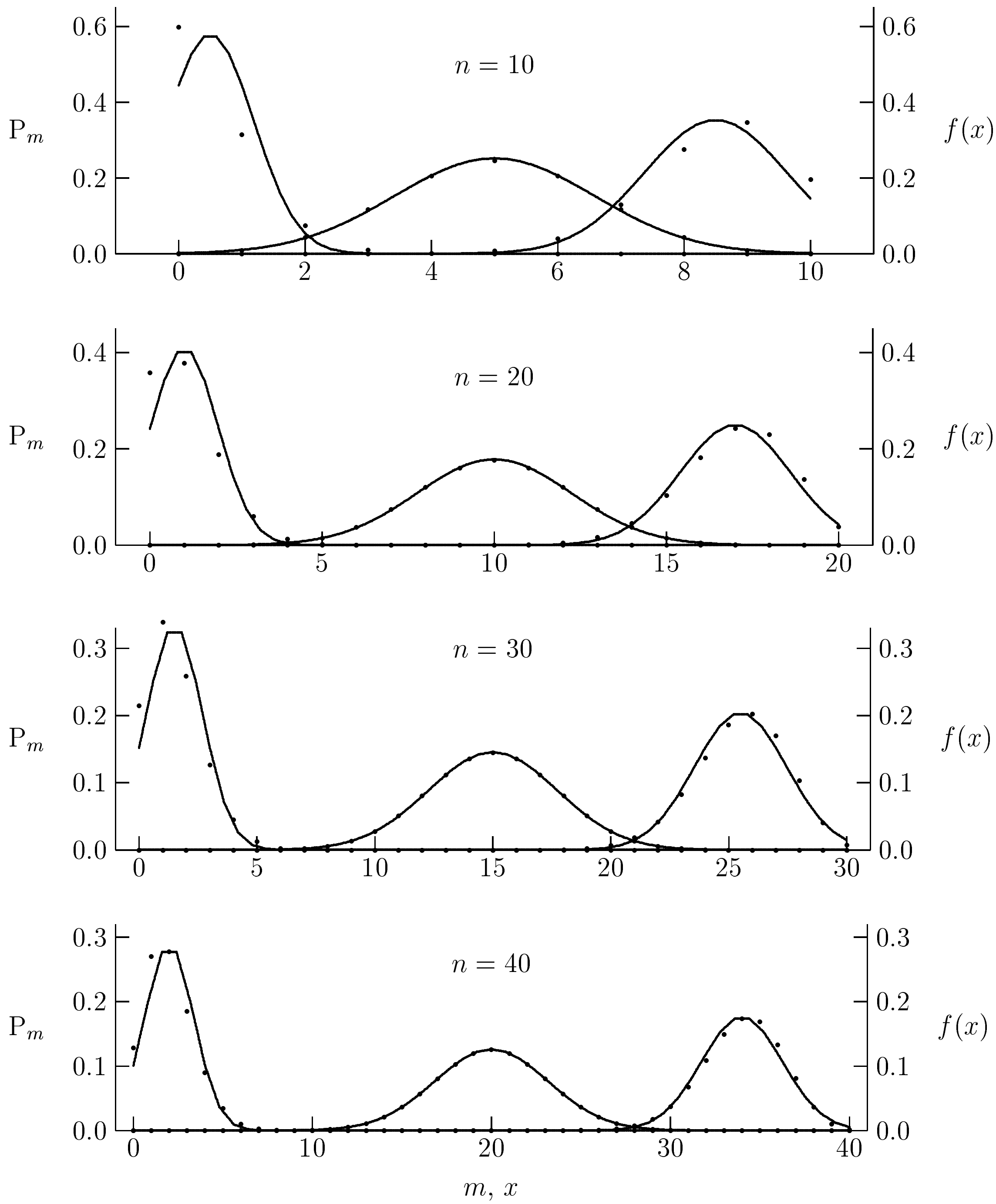


Рисунок 4.7 — Еволюція біноміального розподілу P_m (показано кульками) з параметрами n та p в нормальний розподіл $f(x)$ (показано суцільною лінією) з параметрами $m_x = np$, $\sigma_x^2 = npq$ для обсязів вибірки $n = 20, 40, 60, 80$; зліва $p = 0{,}05$; посередині $p = 0{,}50$; справа $p = 0{,}85$

Таким чином, для інтервалу $[\alpha,\ \beta]$, що заданий, та за умови $n \gg 1$ ймовірность випадкової події $\{\mathrm{B}:\ \alpha < \mathrm{X} < \beta\}$ така:

$$\Pr(\mathrm{B}) \ = \ \Pr(\alpha < \mathrm{X} < \beta) \ = \ \Phi\left(\frac{\beta - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - np}{\sqrt{npq}}\right). \qquad (22)$$

Це – формула Муавра-Лапласа.

На рис. 4.7 показано приклади еволюції біноміального розподілу з параметрами (n, p) в нормальний розподіл з параметрами $m_{\mathrm{X}} = np$ та $\sigma^2_{\mathrm{X}} = npq$ для об'ємів вибірки $n = 20,\ 40,\ 60,\ 80$ та значень параметра $p = 0,05,\ p = 0,50,\ p = 0,85$. Можна бачити, що для значень об'єму $n \approx 40$ та середніх значень імовірності $p \approx 0,5$ нормальний закон асимптотично відповідає біноміальному розподілу; водночас при периферійних значеннях $p \gtrsim 0,0$ або $p \lesssim 1,0$ ця відповідність має місце при значно більших значеннях об'єму вибірки n.

4.4. Задачі для розв'язання

Задача 4.1

Випадкова величина X підлягає нормальному закону з параметрами $m_{\mathrm{X}} = 3$ і $\sigma_{\mathrm{X}} = 2$.

Як зміниться густина розподілу ймовірностей $f(x)$, якщо параметри набудуть значень $m_{\mathrm{X}} = -3$, і $\sigma_{\mathrm{X}} = 2$?

Задача 4.2

Випадкова величина X підлягає нормальному закону з параметрами $m_{\mathrm{X}} = 3$ і $\sigma_{\mathrm{X}} = 2$.

Як зміниться густина розподілу ймовірностей $f(x)$, якщо параметри набудуть значень $m_{\mathrm{X}} = 3$, $\sigma_{\mathrm{X}} = 4$?

Задача 4.3

Миттєві значення амплітуди X сигналу, що приймається, описуються розподілом Релея

$$f_{\mathrm{X}}(x) \ = \ \frac{x}{\sigma^2}\exp\left(-\frac{x^2}{2\,\sigma^2}\right), \qquad x \ge 0.$$

Обчислити середнє значення та дисперсію випадкової величини X.

Відповідь: $m_{\mathrm{X}} = \sigma\sqrt{\pi/2}$, $\ \mathrm{D}[\mathrm{X}] = \sigma^2(2 - \pi/2)$.

Задача 4.4

Випадкова величина X з імовірністю 0,4 має нормальний розподіл з параметрами $m = 0$ та $\sigma = 2$, а з імовірністю 0,6 — нормальний розподіл з параметрами $m = 2$ та $\sigma = 1$.

Знайти густину розподілу випадкової величини X.

Відповідь:

$$f_{\mathrm{X}}(x) \ = \frac{0,2}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{x^2}{8}\right) + \frac{0,6}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{(x-2)^2}{2}\right).$$

Задача 4.5

Подано графік густини $f_{\mathrm{X}}(x)$ нормальної випадкової величини X.

Написати вираз для густини $f_{\mathrm{X}}(x)$. Побудувати на тому ж графіку густину $f_{\mathrm{Y}}(y)$ випадкової величини $\mathrm{Y} = \mathrm{X} + q$, де q – невипадкова.

Відповідь: $f_{\mathrm{Y}}(y) = f_{\mathrm{X}}(y - q - m_{\mathrm{X}})$.

Задача 4.6

Випадкова величина X підлягає нормальному закону з математичним сподіванням $m = 0$. Задано інтервал $(\alpha;\beta)$, що не включає початок координат.

Обчислити значення середнього квадратичного відхилення σ, при якому ймовірність попадання випадкової величини X у інтервал $[\alpha;\,\beta]$ досягає максимуму.

Відповідь: $\sigma \;=\; \left(\dfrac{\beta+\alpha}{2}\,\dfrac{\beta-\alpha}{\ln(\beta)-\ln(\alpha)}\right)^{1/2}.$

Задача 4.7

Випадкова величина X підлягає нормальному закону з математичним сподіванням m та середнім квадратичним відхиленням σ.

Потрібно приблизно замінити нормальний закон рівномірним у інтервалі $[\alpha,\,\beta]$; межі α, β підібрати таким чином, щоб зберегти незмінними головні характеристики випадкової величини X: математичне сподівання та дисперсію.

Відповідь: $\alpha \;=\; m - \sigma\sqrt{3}$; $\beta \;=\; m + \sqrt{3}$.

4.5. Завдання для перевірки

1. Сформулюйте нормальний закон розподілу випадкової величини.

2. Назвіть основні властивості нормальної випадкової величини.

3. Перелічте параметри нормального закону.

4. Наведіть вирази для моментів нормального розподілу.

5. В чому суть імовірності попадання нормальної випадкової величини на заданий проміжок?

6. В чому суть правила ”трьох сигм”?

7. Перелічте основні властивості функції Лапласа.

8. Побудуйте приклад практичного застосування нормального закону.

9. Перелічте основні властивості функції помилок $\mathrm{erf}(x)$, доповнюючої функції помилок $\mathrm{erfc}(x)$.

Таблиця 4.2 — Гауссіана $\exp(-x^2)$ та пов'язані з нею функції

x	$\exp(-x^2)$	$(2\pi)^{-1/2}\exp(-x^2/2)$	$\mathrm{erf}(x)$	$\mathrm{erfc}(x)$
0,00	1,00000	0,39894	0,00000	1,00000
0,10	0,99005	0,39695	0,11246	0,88754
0,20	0,96079	0,39104	0,22270	0,77730
0,30	0,91393	0,38139	0,32863	0,67137
0,40	0,85214	0,36827	0,42839	0,57161
0,50	0,77880	0,35207	0,52050	0,47950
0,60	0,69768	0,33322	0,60386	0,39614
0,70	0,61263	0,31225	0,67780	0,32220
0,80	0,52729	0,28969	0,74210	0,25790
0,90	0,44486	0,26609	0,79691	0,20309
1,00	0,36788	0,24197	0,84270	0,15730
1,10	0,29820	0,21785	0,88021	0,11979
1,20	0,23693	0,19419	0,91031	0,08969
1,30	0,18452	0,17137	0,93401	0,06599
1,40	0,14086	0,14973	0,95229	0,04771
1,50	0,10540	0,12952	0,96611	0,03389
1,60	0,07730	0,11092	0,97635	0,02365
1,70	0,05558	0,09405	0,98379	0,01621
1,80	0,03916	0,07895	0,98909	0,01091
1,90	0,02705	0,06562	0,99279	0,00721
2,00	0,01832	0,05399	0,99532	0,00468
2,10	0,01216	0,04398	0,99702	0,00298
2,20	0,00791	0,03547	0,99814	0,00186
2,30	0,00504	0,02833	0,99886	0,00114
2,40	0,00315	0,02239	0,99931	0,00069
2,50	0,00193	0,01753	0,99959	0,00041
2,60	0,00116	0,01358	0,99976	0,00024
2,70	0,00068	0,01042	0,99987	0,00013
2,80	0,00039	0,00792	0,99992	0,00008
2,90	0,00022	0,00595	0,99996	0,00004
3,00	0,00012	0,00443	0,99998	0,00002

Таблиця 4.3 — Функція Лапласа $\Phi(x)$ та пов'язані з нею функції

x	$d\Phi(x)/dx$	$\Phi(x)$	$2\,\Phi(x)$	$1-\Phi(x)$
0,00	0,39894	0,00000	0,00000	1,00000
0,10	0,39695	0,03983	0,07966	0,96017
0,20	0,39104	0,07926	0,15852	0,92074
0,30	0,38139	0,11791	0,23582	0,88209
0,40	0,36827	0,15542	0,31084	0,84458
0,50	0,35207	0,19146	0,38292	0,80854
0,60	0,33322	0,22575	0,45149	0,77425
0,70	0,31225	0,25804	0,51607	0,74196
0,80	0,28969	0,28814	0,57629	0,71186
0,90	0,26609	0,31594	0,63188	0,68406
1,00	0,24197	0,34134	0,68269	0,65866
1,10	0,21785	0,36433	0,72867	0,63567
1,20	0,19419	0,38493	0,76986	0,61507
1,30	0,17137	0,40320	0,80640	0,59680
1,40	0,14973	0,41924	0,83849	0,58076
1,50	0,12952	0,43319	0,86639	0,56681
1,60	0,11092	0,44520	0,89040	0,55480
1,70	0,09405	0,45543	0,91087	0,54457
1,80	0,07895	0,46407	0,92814	0,53593
1,90	0,06562	0,47128	0,94257	0,52872
2,00	0,05399	0,47725	0,95450	0,52275
2,10	0,04398	0,48214	0,96427	0,51786
2,20	0,03547	0,48610	0,97219	0,51390
2,30	0,02833	0,48928	0,97855	0,51072
2,40	0,02239	0,49180	0,98360	0,50820
2,50	0,01753	0,49379	0,98758	0,50621
2,60	0,01358	0,49534	0,99068	0,50466
2,70	0,01042	0,49653	0,99307	0,50347
2,80	0,00792	0,49744	0,99489	0,50256
2,90	0,00595	0,49813	0,99627	0,50187
3,00	0,00443	0,49865	0,99730	0,50135

5. Системи випадкових величин (випадкові вектори)

5.1. Властивості систем випадкових величин

Система двох випадкових величин (X, Y) геометрично інтерпретується як *випадкова точка* з координатами (X, Y) на площині $x0y$ або як випадковий вектор, спрямований з початку координат в точку (X, Y), складові якого є випадковими величинами X та Y.

Система трьох випадкових величин $(\mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z})$ зображується *випадковою точкою* або *випадковим вектором у тривимірному просторі*, а система n випадкових величин $(\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2, \mathrm{X}_3, \ldots, \mathrm{X}_n)$ — *випадковою точкою* або *випадковим вектором у просторі n вимірювань*.

5.2. Закони розподілу системи випадкових величин

Спільною функцією розподілу двох випадкових величин (X, Y) (або функцією розподілу системи двох випадкових величин) називається ймовірність спільного виконання двох нерівностей: $\mathrm{X} < x$ та $\mathrm{Y} < y$

$$F(x, y) = \Pr\{\mathrm{X} < x,\ \mathrm{Y} < y\}. \tag{5.1}$$

Геометрично функція $F(x, y)$ інтерпретується як імовірність влучення випадкової точки з координатами (X, Y) у квадрант з вершиною $(x,\ y)$. Цей квадрант заштрихований на рис. 5.1.

Ймовірність влучення (рис. 5.2) випадкової точки з координатами (X, Y) у прямокутник R зі сторонами, паралельними осям координат, що включає свої нижню γ та ліву α межі, але не включає верхню δ та праву β, виражається через функцію розподілу формулою

$$\Pr\{(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) \in R\} = \Pr\{\alpha < \mathrm{X} < \beta,\ \gamma < \mathrm{Y} < \delta\}. \tag{5.2}$$

Функція розподілу $F(x, y)$ має такі властивості:

1) $F(-\infty, -\infty) = F(-\infty, y) = F(x, -\infty) = 0$;

2) $F(\infty, \infty) = 1$;

3) $F(x, \infty) = F_{\mathrm{X}}(x)$, $F(\infty, y) = F_{\mathrm{Y}}(y)$, де $F_{\mathrm{X}}(x), F_{\mathrm{Y}}(y)$ – функції розподілу випадкових величин X та Y;

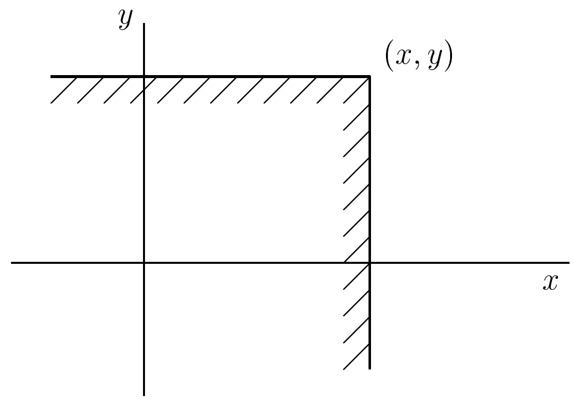


Рисунок 5.1 — До ймовірності влучення у квадрант з вершиною (x, y)

4) $F(x, y)$ – функція аргументів x та y, що не спадає;
5) $F(x, y)$ неперервна ліворуч по кожній координаті;
6) для будь-яких α, β та γ, δ, таких що $\alpha < x < \beta$ та $\gamma < y < \delta$, виконується

$$F(\beta, \delta) - F(\alpha, \delta) - F(\beta, \gamma) + F(\alpha, \gamma) \;\geq\; 0$$

(остання властивість свідчить про те, що ймовірність влучення у прямокутник R є невід'ємною).

Спільною густиною двох неперервних випадкових величин (або густиною розподілу системи) називається границя відношення ймовірності влучення випадкової точки в елементарну ділянку площини $\Delta x\, \Delta y$, що примикає до точки $(x,\, y)$ площі цієї ділянки, коли її розміри Δx, Δy прямують до нуля.

Спільна густина виражається через спільну функцію розподілу

$$f(x, y) \;=\; \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y} \;=\; F''_{xy}(x, y), \tag{5.3}$$

тобто є другою змішаною частинною похідною функції розподілу за обома аргументами.

Поверхня, що зображує функцію $f(x, y)$, називається *поверхнею розподілу.*

Елементом імовірності для системи з двох випадкових величин X та Y називається величина $f(x, y)\, dx\, dy$, що наближено виражає ймовірність влучення випадкової точки (X, Y) в елементарний прямокутник зі сторонами dx та dy, що прилягає до точки (x, y).

Імовірність влучення випадкової точки (X, Y) у довільну область (D)

$$\Pr\{(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) \in D\} \;=\; \iint\limits_{(D)} f(x, y)\, dx\, dy. \tag{5.4}$$

Властивості спільної густини :

1) густина $f(x, y)$ – величина невід'ємна :

$$f(x, y) \;\geq\; 0; \tag{5.5}$$

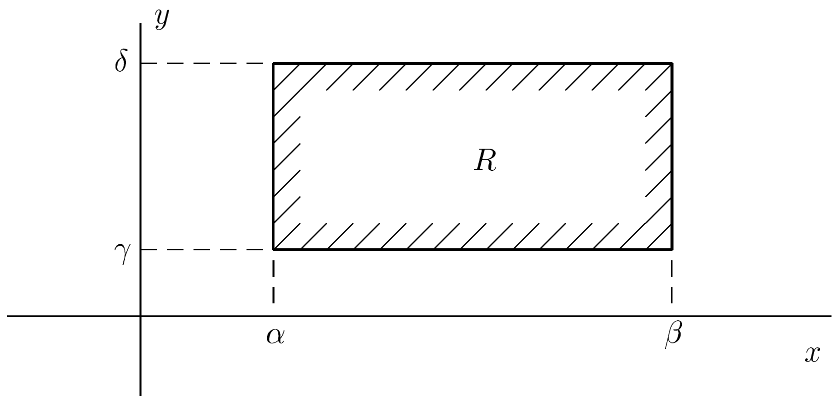


Рисунок 5.2 — До ймовірності влучення в прямокутник R

2) інтеграл від густини $f(x, y)$ по всіх можливих значеннях (тобто повна ймовірність) дорівнює одиниці :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dx\, dy \;=\; 1. \tag{5.6}$$

Спільна функція розподілу виражається через спільну густину :

$$F(x, y) \;=\; \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f(x, y)\, dx\, dy. \tag{5.7}$$

Густини окремих величин, що входять у систему, виражаються через спільну густину :

$$f_1(x) \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dy \qquad \text{або} \qquad f_2(y) \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dx. \tag{5.8}$$

Умовним законом розподілу ймовірності випадкової величини, що входить в систему, називається закон розподілу, обчислений за умови, що інша випадкова величина набула певного значення.

Умовні функції розподілу випадкових величин X та Y, що входять в систему, позначаються $F_1(x|y)$, $F_2(y|x)$, а умовні густини розподілу – $f_1(x|y)$, $f_2(y|x)$.

Теорема множення густин:

$$f(x, y) \;=\; f_1(x)\, f_2(y|x) \qquad \text{або} \qquad f(x, y) \;=\; f_2(y)\, f_1(x|y). \tag{5.9}$$

Вираз для умовних густин через безумовні :

$$f_2(y|x) \;=\; f(x, y) \,/\, f_1(x), \qquad \text{якщо} \;\; f_1(x) \neq 0; \tag{5.10a}$$

$$f_1(x|y) \;=\; f(x, y) \,/\, f_2(y), \qquad \text{якщо} \;\; f_2(y) \neq 0. \tag{5.10b}$$

Випадкові величини X, Y називаються *незалежними*, якщо умовний закон розподілу однієї з них не залежить від того, якого значення набуде інша :

$$f_1(x|y) \;=\; f_1(x) \qquad \text{або} \qquad f_2(y|x) \;=\; f_2(y). \tag{5.11}$$

Для незалежних випадкових величин X, Y теорема множення густин набуває вигляду

$$f(x,y) \ = \ f_1(x)\, f_2(y). \tag{5.12}$$

5.3. Числові характеристики системи випадкових величин

Для характеризації властивостей системи випадкових величин користуються початковими й центральними моментами.

Початковим моментом порядку $(k+s)$ системи (X,Y) називається величина

$$\alpha_{ks}[\mathrm{X},\mathrm{Y}] \ = \ \mathrm{M}[\mathrm{X}^k \mathrm{Y}^s]. \tag{5.13}$$

Центральним моментом порядку $(k+s)$ системи (X,Y) називається величина

$$\mu_{ks}[\mathrm{X},\mathrm{Y}] \ = \ \mathrm{M}[(\mathrm{X}-m_{\mathrm{X}})^k\,(\mathrm{Y}-m_{\mathrm{Y}})^s]. \tag{5.14}$$

Розрахункові формули для визначення моментів:

а) для дискретних випадкових величин:

$$\alpha_{ks}[\mathrm{X},\mathrm{Y}] \ = \ \sum_i \sum_j x_i^k y_j^s\, p_{ij}, \tag{5.15}$$

$$\mu_{ks}[\mathrm{X},\mathrm{Y}] \ = \ \sum_i \sum_j (x_i - m_{\mathrm{X}})^k (y_j - m_{\mathrm{Y}})^s\, p_{ij}; \tag{5.16}$$

б) для неперервних випадкових величин:

$$\alpha_{ks}[\mathrm{X},\mathrm{Y}] \ = \ \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} x^k y^s\, f(x,y)\, dx\, dy, \tag{5.17a}$$

$$\mu_{ks}[\mathrm{X},\mathrm{Y}] \ = \ \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} (x-m_{\mathrm{X}})^k (y-m_{\mathrm{Y}})^s\, f(x,y)\, dx\, dy, \tag{5.17b}$$

де $f(x,y)$ — спільна густина.

Спільною функцією розподілу системи з n випадкових величин (X_1, X_2, X_3, …, X_n) називається ймовірність виконання події, яка полягає в реалізації n нерівностей вигляду $\mathrm{X} < x$:

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) \ = \ \Pr\{\mathrm{X}_1 < x_1, \mathrm{X}_2 < x_2, \ldots, \mathrm{X}_n < x_n\}. \tag{5.18}$$

Спільною густиною розподілу системи з n випадкових величин (X_1, X_2, …, X_n) називається n-а змішана частинна похідна функції розподілу:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \ = \ \frac{\partial^n}{\partial x_1\, \partial x_2 \ldots \partial x_n}\, F(x_1, x_2, \ldots, x_n). \tag{5.19}$$

Функція розподілу ймовірностей $F_i(x_i)$ однієї з величин X_i, яка входить в систему, отримується з $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, якщо взяти в ній всі аргументи, крім x_i, рівними ∞:

$$F_i(x_i) \;=\; F(\infty, \infty, \ldots, \infty, x_i, \infty, \ldots, \infty). \tag{5.20}$$

Густина розподілу кожної окремої величини X_i, що входить в систему (X_1, X_2, ..., X_n), виражається через спільну густину формулою — інтегралом кратності $(n-1)$ в області визначення:

$$f_1(x_i) \;=\; \int \overset{(n-1)}{\cdots} \int f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots\, dx_{i-1}\, dx_{i+1} \ldots\, dx_n. \tag{5.21}$$

Якщо випадкові величини (X_1, X_2, ..., X_n) незалежні, то

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \;=\; f_1(x_1)\, f_2(x_2) \ldots\, f_n(x_n). \tag{5.22}$$

Імовірність влучення випадкової точки $(\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2, \ldots, \mathrm{X}_n)$ в межі n-вимірної області D виражається через n-кратний інтеграл з цієї області:

$$\Pr\{(\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n) \in D\} \;=\; \int \overset{(n)}{\cdots} \int f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots\, dx_n. \tag{5.23}$$

5.4. Кореляція випадкових величин

Кореляційним моментом (або коваріацією) двох випадкових величин X, Y називається змішаний центральний момент другого порядку

$$K_{\mathrm{XY}} \;=\; \mu_{11}[\mathrm{X}, \mathrm{Y}]. \tag{5.24}$$

Величину K_{XY} зручно обчислювати через другий змішаний початковий момент

$$K_{\mathrm{XY}} \;=\; \alpha_{11}[\mathrm{X}, \mathrm{Y}] - \alpha_{\mathrm{X}} \alpha_{\mathrm{Y}}, \tag{5.25}$$

або, в інших позначеннях,

$$K_{\mathrm{XY}} \;=\; \mathrm{M}[\mathrm{XY}] - \mathrm{M}[\mathrm{X}]\, \mathrm{M}[\mathrm{Y}]. \tag{5.26}$$

Для незалежних випадкових величин кореляційний момент дорівнює нулю.

Коефіцієнтом кореляції (або нормованим кореляційним моментом) r_{XY} двох випадкових величин X та Y називається безрозмірна величина

$$r_{\mathrm{XY}} \;=\; K_{\mathrm{XY}} \,/\, (\sigma_{\mathrm{X}} \sigma_{\mathrm{Y}}). \tag{5.27}$$

Коефіцієнт кореляції характеризує ступінь тісноти лінійної залежності між двома випадковими величинами.

Система випадкових величин (X, Y) називається *некорельованою*, якщо їхній кореляційний момент (або коефіцієнт кореляції) дорівнює нулю.

З незалежності випадкових величин випливає їх некорельованість.

Навпаки, з некорельованості випадкових величин ще не випливає їх незалежність.

Якщо випадкові величини X, Y зв'язані лінійною функціональною залежністю вигляду $\mathrm{Y} = a\mathrm{X} + b$, де параметри a, b невипадкові, то їхній коефіцієнт кореляції r_{XY} дорівнює ± 1, залежно від знаку коефіцієнта a.

Для будь-яких двох випадкових величин $|r_{\mathrm{XY}}| < 1$.

5.5. Кореляції системи випадкових величин

Кореляційною матрицею системи n випадкових величин $(\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2, \ldots, \mathrm{X}_n)$ називається таблиця розміром $n \times n$, складена з кореляційних моментів усіх цих величин, узятих попарно:

$$K_{ij} = \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & \ldots & K_{1n} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & \ldots & K_{2n} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & \ldots & K_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{n1} & K_{n2} & K_{n3} & \ldots & K_{nn} \end{pmatrix}, \tag{5.28}$$

де

$$K_{ij} = K_{\mathrm{X}_i\mathrm{X}_j} = \mathrm{M}[(\mathrm{X}_i - m_{\mathrm{X}_i})(\mathrm{X}_j - m_{\mathrm{X}_j})] \tag{5.29}$$

– кореляційний момент випадкових величин X_i, X_j.

Кореляційна матриця симетрична $(K_{ij} = K_{ji})$, тому звичайно заповнюється лише половина таблиці:

$$K_{ij} = \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & \ldots & K_{1n} \\ & K_{22} & K_{23} & \ldots & K_{2n} \\ & & K_{33} & \ldots & K_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ & \ldots & \ldots & \ldots & K_{nn} \end{pmatrix}. \tag{5.30}$$

По головній діагоналі кореляційної матриці розміщують дисперсії випадкових величин $\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2, \ldots, \mathrm{X}_n$:

$$K_{ii} = \mathrm{D}[\mathrm{X}_{ii}], \qquad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{5.31}$$

Нормованою кореляційною матрицею системи n випадкових величин називається таблиця, складена з коефіцієнтів кореляції всіх цих величин, узятих попарно:

$$K_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & r_{12} & r_{13} & \ldots & r_{1n} \\ & 1 & r_{23} & \ldots & r_{2n} \\ & & 1 & \ldots & r_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ & \ldots & \ldots & \ldots & 1 \end{pmatrix}, \tag{5.32}$$

де $r_{ij} = K_{ij} \,/\, (\sigma_i \sigma_j)$ — коефіцієнт кореляції величин X_i, X_j.

5.6. Системи нормальних випадкових величин

Нормальний закон розподілу для системи з двох випадкових величин X, Y (нормальний закон на площині) має густину вигляду (рис. 5.3 та рис. 5.4)

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\, \sigma_{\mathrm{X}}\, \sigma_{\mathrm{Y}} \sqrt{1 - r^2_{\mathrm{XY}}}} \exp\left\{ -\frac{1}{2(1 - r^2_{\mathrm{XY}})}\, Q(x, y) \right\}, \tag{5.33}$$

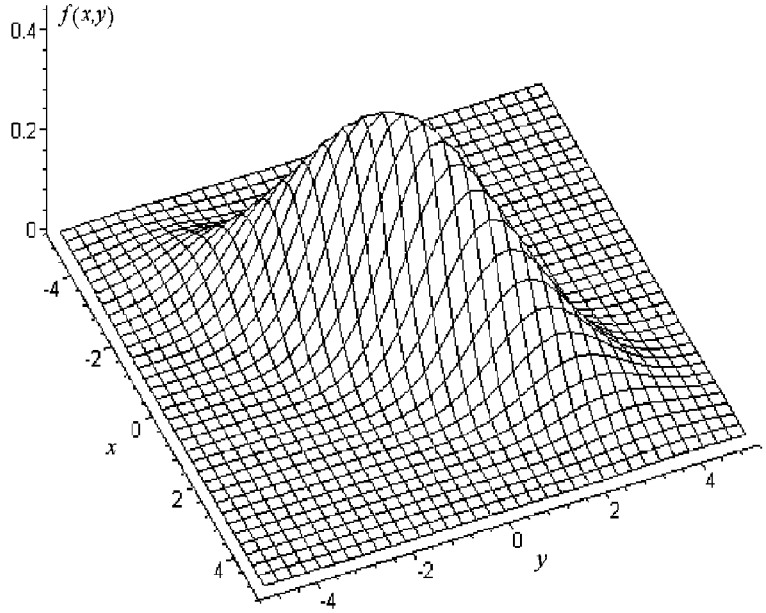


Рисунок 5.3 — Густина розподілу ймовірностей $f(x,y)$ системи з двох випадкових величин X, Y з параметрами $m_{\mathrm{X}} = m_{\mathrm{Y}} = 0$; $\sigma_{\mathrm{X}} = \sigma_{\mathrm{Y}} = 1$; коефіцієнт кореляції $r_{\mathrm{XY}} = 0{,}9$

де

$$Q(x,y) \;=\; \frac{(x-m_{\mathrm{X}})^2}{\sigma_{\mathrm{X}}^2} - 2r_{\mathrm{XY}}\frac{(x-m_{\mathrm{X}})(y-m_{\mathrm{Y}})}{\sigma_{\mathrm{X}}\,\sigma_{\mathrm{Y}}} + \frac{(y-m_{\mathrm{Y}})^2}{\sigma_{\mathrm{Y}}^2},$$

$m_{\mathrm{X}}, m_{\mathrm{Y}}$ – математичні сподівання випадкових величин X, Y;
$\sigma_{\mathrm{X}}, \sigma_{\mathrm{Y}}$ – їхні середньоквадратичні відхилення;
r_{XY} – коефіцієнт кореляції.

Для випадкових величин, розподілених за нормальним законом, некорельованість рівнозначна незалежності. Якщо випадкові величини X, Y некорельовані (незалежні), то $r_{\mathrm{XY}} = 0$ і

$$f(x,y) \;=\; \frac{1}{2\pi\,\sigma_{\mathrm{X}}\,\sigma_{\mathrm{Y}}}\exp\left\{-\,\frac{1}{2}\left(\frac{(x-m_{\mathrm{X}})^2}{\sigma_{\mathrm{X}}^2} + \frac{(y-m_{\mathrm{Y}})^2}{\sigma_{\mathrm{Y}}^2}\right)\right\}. \qquad (5.34)$$

В цьому випадку дві осі Ox, Oy називаються *головними осями розсіювання.* Якщо при цьому $m_{\mathrm{X}} = m_{\mathrm{Y}} = 0$, то нормальний закон розподілу набуває *канонічного вигляду*:

$$f(x,y) \;=\; \frac{1}{2\pi\,\sigma_{\mathrm{X}}\,\sigma_{\mathrm{Y}}}\exp\left\{-\,\frac{x^2}{2\,\sigma_{\mathrm{X}}^2} - \frac{y^2}{2\,\sigma_{\mathrm{Y}}^2}\right\}. \qquad (5.35)$$

Імовірність влучення випадкової точки (X,Y), розподіленої за нормальним законом, в прямокутник R зі сторонами, паралельними головним осям розсіювання, виражається формулою

$$\Pr\{(\mathrm{X},\mathrm{Y}) \in R\} \;=\; \left[\Phi\left(\frac{\beta - m_{\mathrm{X}}}{\sigma_{\mathrm{X}}}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - m_{\mathrm{X}}}{\sigma_{\mathrm{X}}}\right)\right]\left[\Phi\left(\frac{\delta - m_{\mathrm{Y}}}{\sigma_{\mathrm{Y}}}\right) - \Phi\left(\frac{\gamma - m_{\mathrm{Y}}}{\sigma_{\mathrm{Y}}}\right)\right], \qquad (5.36)$$

де $x \in [\alpha,\,\beta)$, $y \in [\gamma,\,\delta)$.

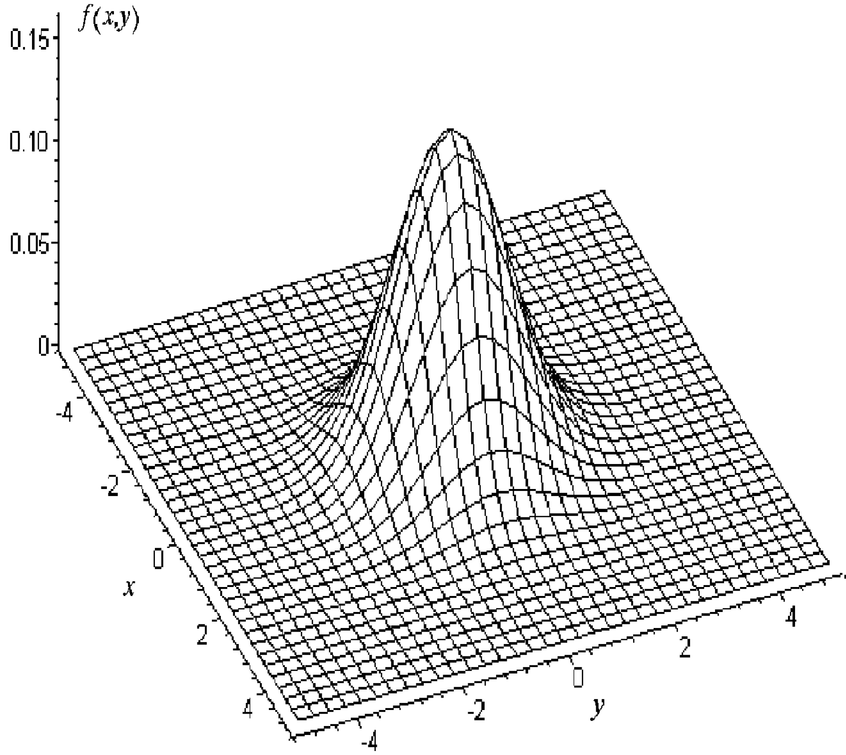


Рисунок 5.4 — Густина розподілу ймовірностей $f(x, y)$ системи з двох випадкових величин X, Y з параметрами $m_{\mathrm{X}} = m_{\mathrm{Y}} = 0$; $\sigma_{\mathrm{X}} = \sigma_{\mathrm{Y}} = 1$; коефіцієнт кореляції $r_{\mathrm{XY}} = 0{,}0$

Еліпсом рівної густини (еліпсом розсіювання) називається еліпс, в усіх точках якого має місце спільна густина нормального закону: $f(x, y) = const.$ Півосі еліпса пропорційні σ_{X}, σ_{Y} : $a = k\sigma_{\mathrm{X}}$, $b = k\sigma_{\mathrm{Y}}$.

Імовірність влучення випадкової точки, розподіленої за нормальним законом, в область E_k, обмежену еліпсом розсіювання з півосями a та b,

$$\Pr\{(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) \in E_k\} \;=\; 1 - \exp(-k^2/2), \tag{5.37}$$

де параметр k – розміри півосі еліпса у середніх квадратичних відхиленнях: $k = a/\sigma_{\mathrm{X}} = b/\sigma_{\mathrm{Y}}$.

Якщо $\sigma_{\mathrm{X}} = \sigma_{\mathrm{Y}} = \sigma$, розсіювання за нормальним законом називається *круговим*. При круговому нормальному розсіюванні з $m_{\mathrm{X}} = m_{\mathrm{Y}} = 0$ відстань R від точки (X, Y) до початку координат (центра розсіювання) розподілена *за законом Релея*

$$f_{\mathrm{R}}(r) \;=\; (r/\sigma^2)\exp(-r^2/2\sigma^2), \qquad r \geq 0. \tag{5.38}$$

Розподілу Релея підкоряється модуль вектора на площині, якщо його ортогональні складові (проекції на координатні осі) незалежні і розподілені нормально з нульовими математичними сподіваннями та рівними дисперсіями. Узагальненням закону Релея є *розподіл Релея–Райса.* При заданій сталій s густина цього закону така :

$$f_{\mathrm{R}}(r) \;=\; \left(r/\sigma^2\right)\exp\left(-r^2/2\sigma^2\right)\, I_0\left(rs/\sigma^2\right), \qquad r \geq 0, \tag{5.39}$$

де

$$I_0(x) \;=\; (2\pi)^{-1} \int\limits_0^{2\pi} \exp[x\cos(\varphi)]\, d\varphi$$

– *модифікована функція Бесселя нульового індексу.*

Нормальний закон у просторі трьох вимірів для незалежних випадкових величин X, Y, Z:

$$f(x,y,z) \;== \; \frac{1}{(2\,\pi)^{3/2}\,\sigma_{\mathrm{X}}\,\sigma_{\mathrm{Y}}\,\sigma_{\mathrm{Z}}} \exp\left(-\frac{(x-m_{\mathrm{X}})^2}{2\,\sigma_{\mathrm{X}}^2} - \frac{(y-m_{\mathrm{Y}})^2}{2\,\sigma_{\mathrm{Y}}^2} - \frac{(z-m_{\mathrm{Z}})^2}{2\,\sigma_{\mathrm{Z}}^2}\right). \quad (5.40)$$

Імовірність $\Pr\{(\mathrm{X},\mathrm{Y},\mathrm{Z}) \in E_k\}$ влучення випадкової точки $(\mathrm{X},\mathrm{Y},\mathrm{Z})$ в область E_k, обмежену еліпсоїдом рівної густини з півосями $a = k\sigma_{\mathrm{X}}$, $b = k\sigma_{\mathrm{Y}}$, $c = k\sigma_{\mathrm{Z}}$,

$$\Pr\{(\mathrm{X},\,\mathrm{Y},\,\mathrm{Z}) \in E_k\} \;=\; 2\Phi(k) - 1 - \sqrt{2/\pi}k\exp(-k^2/2). \quad (5.41)$$

5.7. Дельта-функція Дірака $\delta(x)$

У практиці розв'язання багатьох ймовірнісних задач зручно застосовувати дельта-функцію Дірака $\delta(x)$.

Дельта-функція визначається своїм інтегральним виразом

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\delta\,(x-\alpha)\,dx \;=\; f(\alpha). \quad (5.42)$$

Говорять, що δ-функція має фільтруючу властивість (з усіх можливих аргументів вибирається один, а саме $x = \alpha$).

З визначення випливає властивість нормування

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \delta(x-\alpha)\,dx \;=\; 1. \quad (5.43)$$

Одне з можливих зображень δ-функції таке:

$$\delta(x-\alpha) \;=\; \lim_{\sigma\to 0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\, \exp\left(-\frac{(x\;-\alpha)^2}{2\sigma^2}\right), \quad (5.44)$$

що дозволяє, розглядаючи (5.43) як густину розподілу ймовірностей деякої нормальної випадкової величини X з середнім α та дисперсією σ, у границі $\sigma \to 0$ отримати детерміновану величину з єдиним значенням $x = \alpha$.

Фур'є-зображення δ-функції таке:

$$\delta(x) \;=\; \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp(i\lambda x)\,d\lambda, \quad (5.45)$$

звідки випливає парність дельта-функції, $\delta(-x) = \delta(x)$.

Нехай на інтервалі $[a,\, b]$ неперервна функція $\varphi(x)$ має простий нуль у точці $x = \alpha$. Тоді

$$\int\limits_a^b \delta(\varphi(x))\, dx \;=\; \frac{1}{|\varphi'(\alpha)|}\, \varphi(\alpha). \tag{5.46}$$

Якщо простих нулів декілька, тобто $\varphi(\alpha_k) = 0$, $k = 1, 2, \ldots, n$, то

$$\int\limits_a^b \delta(\varphi(x))\, dx \;=\; \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{|\varphi'(\alpha_k)|}\, \varphi(\alpha_k). \tag{5.47}$$

Ці властивості δ-функції разом з співвідношеннями (5.42), (5.45) часто використовують на практиці.

5.8. Приклади

Приклад 5.1

Визначити математичне сподівання квадрата відстані між двома точками, вибраними наугад на будь-якій з сторін прямокутника.

Розв'язання

Нехай дві сторони прямокутника мають довжину a, дві інші – довжину b. При виборі двох точок на будь-якій із сторін прямокутника можливі такі несумісні події (гіпотези):

H_1 – обидві точки вибрані на одній і тій ж стороні a;

H_2 – обидві точки вибрані на одній і тій ж стороні b;

H_3 – точки вибрані на суміжних сторонах прямокутника;

H_4 – точки вибрані на протилежних сторонах a;

H_5 – точки вибрані на протилежних сторонах b.

Імовірності цих гіпотез визначаються за формулами

$$\mathrm{P}(\mathrm{H}_1) \;=\; 2\,\frac{a}{2p}\,\frac{a}{2p} \;=\; a^2 \,/\, 2p^2; \qquad \mathrm{P}(\mathrm{H}_2) \;=\; 2\,\frac{b}{2p}\,\frac{b}{2p} \;=\; b^2 \,/\, 2p^2;$$

$$\mathrm{P}(\mathrm{H}_3) \;=\; 2\,\frac{a}{2p}\,\frac{b}{2p} \;=\; ab \,/\, 2p^2; \qquad \mathrm{P}(\mathrm{H}_4) \;=\; 2\,\frac{a}{2p}\,\frac{a}{2p} \;=\; a^2 \,/\, 2p^2;$$

$$\mathrm{P}(\mathrm{H}_5) \;=\; 2\,\frac{b}{2p}\,\frac{b}{2p} \;=\; b^2 \,/\, 2p^2,$$

де $2p$ – периметр прямокутника.

Визначимо умовне математичне сподівання квадрата відстані:

$$\mathrm{M}[\mathrm{Z}^2|\mathrm{H}_1] \;=\; \int\limits_0^a\int\limits_0^a f(x,y)(x-y)^2\, dx\, dy \;=\; \frac{1}{a^2}\int\limits_0^a\int\limits_0^a (x-y)^2\, dx\, dy \;=\; \frac{a^2}{6};$$

$$\mathrm{M}[\mathrm{Z}^2|\mathrm{H}_2] \;=\; \frac{1}{b^2}\int\limits_0^b\int\limits_0^b (x-y)^2\,dx\,dy \;=\; \frac{b^2}{6};$$

$$\mathrm{M}[\mathrm{Z}^2|\mathrm{H}_3] \;=\; \frac{1}{ab}\int\limits_0^a\int\limits_0^b (x^2+y^2)\,dx\,dy \;=\; \frac{a^2+b^2}{3};$$

$$\mathrm{M}[\mathrm{Z}^2|\mathrm{H}_4] \;=\; \mathrm{M}[b^2+\mathrm{X}^2+\mathrm{Y}^2] \;=\; b^2+\frac{1}{a^2}\int\limits_0^a\int\limits_0^a (x-y)^2\,dx\,dy \;=\; b^2+\frac{a^2}{6};$$

$$\mathrm{M}[\mathrm{Z}^2|\mathrm{H}_4] \;=\; \mathrm{M}[a^2+\mathrm{X}^2+\mathrm{Y}^2] \;=\; a^2+\frac{1}{b^2}\int\limits_0^b\int\limits_0^b (x-y)^2\,dx\,dy \;=\; a^2+\frac{b^2}{6}.$$

Повне математичне сподівання випадкової величини Z визначається за формулою

$$\mathrm{M}[\mathrm{Z}^2] \;=\; \sum_{i=1}^{5}\mathrm{P}(\mathrm{H}_i)\mathrm{M}[\mathrm{Z}|\mathrm{H}_i] \;=\; (a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4)\,/\,(6p^2) \;=\; p^2\,/\,6.$$

Приклад 5.2

Спільна густина імовірності $f(x,y)$ двовимірної випадкової величини (X,Y) має вигляд

$$f(x,y) \;=\; \begin{cases} 4xy\exp(-x^2-y^2) & \text{при } \; x\ge 0,\; y\ge 0,\\ 0 & \text{при } \; x<0 \;\text{ або }\; y<0. \end{cases}$$

Визначити: математичні сподівання m_{X} та m_{Y} величин X та Y; дисперсії D[X] та D[Y].

Розв'язання

Заздалегідь знайдемо густину ймовірності величин X та Y:
для $x \ge 0$

$$f_1(x) \;=\; \int\limits_0^\infty f_2(x,y)\,dy \;=\; 4x\exp(-x^2)\int\limits_0^\infty y\exp(-y^2)\,dy \;=\; 2x\exp(-x^2),$$

для $y \ge 0$

$$f_2(y) \;=\; \int\limits_0^\infty f_2(x,y)\,dx \;=\; 2y\exp(-y^2).$$

Розглянемо тепер математичне сподівання випадкової величини X

$$m_{\mathrm{X}} \;=\; \int\limits_0^\infty x f_1(x)\,dx \;=\; 2\int\limits_0^\infty x^2\exp(-x^2)\,dx \;=\; \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

та аналогічно для математичного сподівання випадкової величини Y

$$m_{\mathrm{Y}} \;=\; 2\int\limits_0^\infty y^2\exp(-y^2)\,dy \;=\; \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Дисперсія випадкової величини X така:

$$\mathrm{D[X]} \;=\; \int\limits_0^\infty (x - m_{\mathrm{x}})^2 f_1(x)\, dx \;=\; \int\limits_0^\infty x^2 f_1(x)\, dx - m_{\mathrm{x}}^2 \;=\; 1 - \frac{\pi}{4},$$

дисперсія випадкової величини Y є аналогічною.

Тому $\mathrm{D[X]} \;=\; \mathrm{D[Y]} \;=\; 1 - \pi/4$.

Приклад 5.3

Задано густину розподілу імовірностей $f(x, y)$ системи (X,Y) з двох випадкових величин:

$$f(x, y) \;=\; \frac{20}{\pi^2(16 + x^2)(25 + y^2)}, \qquad -\infty < x, y < \infty.$$

Знайти інтегральну функцію розподілу ймовірностей системи.

Розв'язання

Скористаємося формулою

$$F(x, y) \;=\; \int\limits_{-\infty}^{x} \int\limits_{-\infty}^{y} f(x', y')\, dx'\, dy'.$$

Після інтегрування отримаємо

$$F(x, y) \;=\; \left(\frac{1}{4\pi}\mathrm{arctg}(x/4) + \frac{1}{8}\right)\left(\frac{1}{5\pi}\mathrm{arctg}(y/5) + \frac{1}{10}\right).$$

Приклад 5.4

Індикатор кругового огляду навігаційної станції має вигляд круга радіусом R. Сигнал, відбитий від орієнтира, з рівною ймовірністю може з'явитися в вигляді плями в будь-якій точці цього круга.

Визначити математичне сподівання та дисперсію відстані центра плями від центра круга.

Розв'язання

Випадкова відстань від центра екрана до плями може бути виражена через прямокутні координати X та Y:

$$\mathrm{U} \;=\; \varphi(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) \;=\; \left(\mathrm{X}^2 + \mathrm{Y}^2\right)^{1/2}.$$

Густина розподілу ймовірностей системи випадкових величин (X, Y) задана та визначається формулою

$$f(x) \;=\; \begin{cases} 1/(\pi R^2) & \text{при } \; (x^2 + y^2) \le R^2, \\ \quad 0 & \text{при } \; (x^2 + y^2) > R^2. \end{cases}$$

Розглянемо область H на площині $x0y$, яка задовольняє умові $x^2 + y^2 \le R^2$. Маємо

$$\mathrm{M[U]} \;=\; \mathrm{M}[\varphi(\mathrm{X},\, \mathrm{Y})] \;=\; \int\!\!\int \varphi(x, y) f(x, y)\, dx\, dy \;=$$

$$= \int\int (x^2+y^2)^{1/2} f(x,y)\,dx\,dy \;=\; \frac{1}{\pi R^2}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R r^2\,dr \;=\; \frac{2}{3}\,R;$$

$$\mathrm{D[U]} = \mathrm{M[U^2]} - (\mathrm{M[U]})^2 = \frac{1}{\pi R^2}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R r^3\,dr - \left(\frac{2}{3}R\right)^2 \;=\; \frac{R^2}{18}.$$

Приклад 5.5

Маємо систему випадкових величин X та Y. Випадкова величина X розподілена за показниковим законом з параметром λ:

$$f_1(x) \;=\; \begin{cases} \lambda\exp(-\lambda x) & \text{при } \; x \ge 0, \\ 0 & \text{при } \; x < 0. \end{cases}$$

Випадкова величина Y при заданому значенні X$= x > 0$ розподілена також за показниковим законом, але з параметром x:

$$f_2(y|x) \;=\; \begin{cases} x\exp(-xy) & \text{при } \; y \ge 0, \\ 0 & \text{при } \; y < 0. \end{cases}$$

Написати густину розподілу $f(x,y)$ системи (X,Y), знайти густину розподілу $f_2(y)$ випадкової величини Y та умовну густину $f_1(x|y)$.

Розв'язання

Густина розподілу системи (X,Y) така:

$$f(x,y) \;=\; f_1(x)f_2(y|x) \;=\; \begin{cases} \lambda x\exp(-\lambda x - xy) & \text{при } \; x \ge 0 \;\text{ та }\; y \ge 0, \\ 0 & \text{при } \; x < 0 \;\text{ або }\; y < 0. \end{cases}$$

Для густини розподілу $f_2(y)$ отримаємо

$$f_2(y) \;=\; \int_0^\infty f(x,y)\,dx \;=\; \begin{cases} \lambda(\lambda+y)^{-2} & \text{при } \; y \ge 0, \\ 0 & \text{при } \; y < 0. \end{cases}$$

Далі при $x > 0$ та $y > 0$ маємо

$$f_1(x|y) \;=\; f(x,y)/f_2(y) \;=\; x(\lambda+y)^2\exp(-\lambda x - xy),$$

а при $x < 0$ та $y > 0$ маємо $f_1(x|y) = 0$.

Приклад 5.6

Двокомпонентна система випадкових величин (X,Y) задана в квадраті $\{(0,\pi/2);\,(0,\pi/2)\}$ та має густину розподілу $f(x,y) = 0,5\sin(x+y)$.

Визначити: а) функцію розподілу системи; б) математичні сподівання X та Y; в) кореляційну матрицю.

Розв'язання

Знаходимо функцію розподілу

$$F_{\mathrm{XY}}(x,y) \;=\; \int_0^x\int_0^y 0,5\sin(x+y)\,dx\,dy \;=\; 0,5[\sin(x)+\sin(y)-\sin(x+y)].$$

Математичне сподівання випадкової величини X

$$\mathrm{M[X]} \;=\; 0,5 \int\limits_0^{\pi/2} \int\limits_0^{\pi/2} x \sin(x+y)\,dx\,dy \;=\; \pi/4 \;\approx\; 0,785.$$

Дисперсія випадкової величини

$$\mathrm{D[X]} \;=\; 0,5 \int\limits_0^{\pi/2} \int\limits_0^{\pi/2} x^2 \sin(x+y)\,dx\,dy - (\pi/4)^2 \;=\; \pi^2/16 + \pi/2 - 2 \;=\; 0,187.$$

З симетрії густини розподілу ймовірностей відносно величин X та Y випливає, що $\mathrm{M[Y]} = \mathrm{M[X]}$ та $\mathrm{D[Y]} = \mathrm{D[X]}$.

Знайдемо тепер кореляційний момент

$$K_{\mathrm{XY}} \;=\; \mathrm{M[XY]} - \mathrm{M[X]}\,\mathrm{M[Y]} \;=\; 0,5 \int\limits_0^{\pi/2} \int\limits_0^{\pi/2} xy \sin(x+y)\,dx\,dy - (\pi/4)^2 \;=$$

$$=\; (\pi-2)/2 - (\pi/4)^2 \;\approx\; -0,045.$$

Таким чином, кореляційна матриця має вигляд

$$K \;=\; \begin{pmatrix} 0,187 & -0,045 \\ -0,045 & 0,187 \end{pmatrix}.$$

Приклад 5.7

Задано функцію розподілу ймовірностей двовимірної випадкової величини

$$F(x,y) \;=\; \begin{cases} \sin x \sin y & \text{при } \; 0 \le x \le \pi/2 \; \text{ та } \; 0 \le y \le \pi/2, \\ 0 & \text{при } \; x < 0,\, x > \pi/2 \; \text{ або } \; y < 0,\, y > \pi/2. \end{cases}$$

Знайти імовірність P влучення випадкової точки (X,Y) в прямокутник, обмежений прямими $x = 0$, $x = \pi/4$, $y = \pi/6$, $y = \pi/3$.

Розв'язання

Скористаємося формулою

$$\mathrm{P} = \Pr\{\alpha < \mathrm{X} < \beta,\ \gamma < \mathrm{Y} < \delta\} \;=\; F(\beta,\delta) - F(\alpha,\delta) - F(\beta,\gamma) + F(\alpha,\gamma).$$

Припустивши $\alpha = 0$, $\beta = \pi/4$ $\gamma = \pi/6$, $\delta = \pi/3$, отримаємо

$$\mathrm{P} \;=\; \sin(\pi/4)\sin(\pi/3) - \sin(0)\sin(\pi/3) - \sin(\pi/4)\sin(\pi/6) + \sin(0)\sin(\pi/6) =$$

$$=\; (\sqrt{6} - \sqrt{2})/4 \;\approx\; 0,26.$$

Приклад 5.8

Тіло зважується на аналітичних терезах. Істинне (невідоме нам) значення маси тіла дорівнює a. Внаслідок наявності помилок результат кожного зважування випадковий і розподілений за нормальним законом з параметрами a і σ. Для зменшення помилок тіло незалежно зважують n разів, і за наближене значення маси беруть середнє арифметичне (*вибіркове середнє*) результатів n зважувань:

$$\mathrm{Y}(n) \;=\; \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{X}_i.$$

Знайти характеристики випадкової величини $\mathrm{Y}(n)$: математичне сподівання та середнє квадратичне відхилення. Визначити, скільки потрібно зробити зважувань для того, щоб зменшити в десять разів середню квадратичну помилку маси.

Розв'язання

а) Маємо

$$\mathrm{M}[\mathrm{Y}(n)] \;=\; \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{M}[\mathrm{X}_i].$$

Оскільки всі зважування робляться в однакових умовах, то маємо $\mathrm{M}[\mathrm{X}_i] = a$ за будь-якого i; тоді

$$\mathrm{M}[\mathrm{Y}(n)] \;=\; \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a \;=\; a.$$

Вважаючи помилки окремих зважувань незалежними, знаходимо дисперсію $\mathrm{Y}(n)$:

$$\mathrm{D}[\mathrm{Y}(n)] \;=\; \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{D}[\mathrm{X}_i] \;=\; \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sigma_i^2 \;=\; \sigma^2/n.$$

б) Число зважувань n знаходимо з умови

$$\sigma[\mathrm{Y}(n)] \;=\; \sqrt{\sigma^2/n} \;=\; \sigma/\sqrt{n} \;=\; \sigma/10,$$

звідки $n = 100$.

Приклад 5.9

Межа області описується рівнянням $x^2+y^2 = R^2$. У області з цією межею густина розподілу ймовірностей системи випадкових величин (X,Y) має наступний вигляд $f(x,y) = A[R-(x^2+y^2)^{1/2}]$, поза неї $f(x,y) = 0$.

Знайти: а) сталу A; б) імовірність P влучення випадкової точки (X,Y) у область радіусом r з центром у початку координат.

Розв'язання

а) Якщо всі можливі значення системи (X,Y) належать до області D, то

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy \;=\; 1.$$

У нашому випадку область D – це круг радіусом R з центром у початку координат. Після інтегрування одержуємо $A\pi R^2 = 1$, що дає

$$A \;=\; 1/(\pi R^2),$$

і тому

$$f(x,y) \;=\; [R-(x^2+y^2)^{1/2}]/(\pi R^2).$$

б) Нехай область G — це круг радіусом r з центром у початку координат. Тоді шукана ймовірність

$$\mathrm{P} \;=\; \iint\limits_G f(x,y)\,dx\,dy.$$

Після обчислення інтеграла отримаємо

$$\mathrm{P} \;=\; (r/R)^2(3-2r/R).$$

Приклад 5.10

Випадкова точка (X,Y) розподілена за нормальним законом на площині:

$$f(x,y) \;=\; \frac{1}{2\pi}\exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2}\right).$$

Знайти ймовірність P влучення точки (X,Y) у квадрат з вершинами $(\sqrt{2};0)$, $(0;\sqrt{2})$, $(-\sqrt{2};0)$, $(0;-\sqrt{2})$.

Розв'язання

Оскільки за умовою задачі розсіювання кругове ($\sigma_{\mathrm{X}}=\sigma_{\mathrm{Y}}=1$), то розв'язок задачі не зміниться при будь-якому повороті координатних осей. Тому при поверненні їх на 45° отримаємо

$$\mathrm{P} \;=\; \int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1} f(x,y)\,dx\,dy \;=\; \left\{2\int\limits_{-1}^{1}\exp(-x^2/2)\,dx\right\}^2 \;=\; [2\,\Phi(1)]^2.$$

Користуючись таблицею функції Лапласа, маємо

$$\mathrm{P} \;=\; 0,6827^2 \;=\; 0,466.$$

Приклад 5.11

Дві випадкові величини ξ та η незалежні та нормально розподілені з параметрами $\mathrm{M}[\xi]=\mathrm{M}[\eta]=a$ та $\mathrm{D}[\xi]=\mathrm{D}[\eta]=\sigma^2$.

Знайти коефіцієнт кореляції r величин $\mathrm{X}=\alpha\xi+\beta\eta$ та $\mathrm{Y}=\alpha\xi-\beta\eta$, а також їхній спільний розподіл.

Розв'язання

З вигляду густини розподілу

$$f(\xi,\eta) \;=\; \frac{1}{2\pi\,\sigma^2}\exp\left(-\frac{(\xi-a)^2}{2\sigma^2}-\frac{(\eta-a)^2}{2\sigma^2}\right)$$

випливає

$$\mathrm{M}[\mathrm{X}] \;=\; a(\alpha+\beta), \quad \mathrm{M}[\mathrm{Y}] \;=\; a(\alpha-\beta),$$
$$\mathrm{M}[\mathrm{XY}] \;=\; (\alpha^2-\beta^2)(a^2+\sigma^2), \quad \mathrm{D}[\mathrm{X}] \;=\; \mathrm{D}[\mathrm{Y}] \;=\; (\alpha^2+\beta^2)\sigma^2.$$

Тому коефіцієнт кореляції

$$r \;=\; \frac{\mathrm{M}[\mathrm{XY}]-\mathrm{M}[\mathrm{X}]\,\mathrm{M}[\mathrm{Y}]}{\sqrt{\mathrm{D}[\mathrm{X}]\,\mathrm{D}[\mathrm{Y}]}} \;=\; \frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}.$$

Для знаходження спільної густини розподілу $g(x,y)$ використовуємо закон збереження диференціальної імовірності

$$g(x,y)\,dx\,dy \;=\; f(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta,$$

що дає

$$g(x,y) \;=\; f(\xi(x,y),\,\eta(x,y))\frac{|D(\xi,\eta)|}{|D(x,y)|}.$$

Виразимо вихідну пару величин (ξ,η) через дві нові: $\xi \;=\; (x+y)/2\alpha$, $\eta \;=\; (x-y)/2\beta$, тому для якобіана перетворення маємо

$$|D(\xi,\eta)/D(x,y)| \;=\; (2\alpha\beta)^{-1}.$$

Таким чином, спільний розподіл випадкових величин X та Y такий:

$$g(x,y) \;=\; \frac{1}{4\pi\,\alpha\,\beta\,\sigma^2}\exp\left(-\frac{(x+y-2a\alpha)^2}{8\,\alpha^2\,\sigma^2}-\frac{(x-y-2a\beta)^2}{8\,\beta^2\,\sigma^2}\right).$$

Приклад 5.12

Випадковий двокомпонентний вектор (X,Y) нормально розподілений з параметрами $\mathrm{M}[\mathrm{X}]=a$, $\mathrm{M}[\mathrm{Y}]=b$, $\mathrm{D}[\mathrm{X}]=\sigma^2_{\mathrm{X}}$, $\mathrm{D}[\mathrm{Y}]=\sigma^2_{\mathrm{Y}}$, r – коефіцієнт кореляції між X та Y.

Довести, що $r=\cos(\pi\mu)$, де $\mu=\Pr\{(\mathrm{X}-a)(\mathrm{Y}-b)>0\}$.

Розв'язання

Обчислимо означену ймовірність

$$\mu \;=\; \iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy \qquad (*)$$

для густини

$$f(x,y) \;=\; \frac{1}{2\pi\,\sigma_{\mathrm{X}}\,\sigma_{\mathrm{Y}}\,R}\exp\left\{-\;\frac{1}{2R^2}\left(\frac{(x-a)^2}{\sigma^2_{\mathrm{X}}}+\frac{2r\,(x-a)(y-b)}{\sigma_{\mathrm{X}}\,\sigma_{\mathrm{Y}}}+\frac{(y-b)^2}{\sigma^2_{\mathrm{Y}}}\right)\right\},$$

де D – область, яка задовольняє умові $(x-a)(y-b)>0$, та $R^2=1-r^2$.

Перейдемо тепер в подвійному інтегралі (*) до нових змінних інтегрування $\xi \;=\; (x-a)/(\sqrt{2}\sigma_{\mathrm{X}})$, $\eta \;=\; (y-b)/(\sqrt{2}\sigma_{\mathrm{Y}})$, тоді

$$\mu \;=\; \frac{1}{\pi R}\iint\limits_H \exp\left(-\frac{\xi^2+2r\xi\eta+\eta^2}{1-r^2}\right)\,d\xi\,d\eta,$$

де H – область, яка задовольняє умові $\xi\eta>0$.

Ця умова дійсна лише для першого та третього квадрантів, тому далі будемо інтегрувати тільки в першому квадранті, а результат подвоїмо. Перейдемо до полярних координат $\xi=\rho\cos\varphi$, $\eta=\rho\sin\varphi$, тоді

$$\mu \;=\; \frac{2}{\pi R}\int\limits_0^{\infty}\int\limits_0^{\pi/2}\exp\left(-\frac{\rho^2}{2}[1+2r\sin\varphi\cos\varphi]\right)\rho\,d\rho\,d\varphi \;=\; \frac{R}{\pi}\int\limits_0^{\pi/2}\frac{d\varphi}{1+r\sin(2\varphi)}.$$

Після інтегрування отримаємо $\pi\mu = \pi/2 - \mathrm{arctg}(r/R)$.
Тому остаточно $r = \cos(\pi\mu)$.

Приклад 5.13

Система випадкових величин (X, Y) розподілена за законом

$$f(x,y) \ = \ \frac{A}{1 + x^2y^2 + x^2 + y^2} \qquad -\infty < x < \infty, \ -\infty < y < \infty.$$

Визначити: а) коефіцієнт A; б) чи є величини X та Y залежними.

Розв'язання

а) Умова нормування на повну ймовірність

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx\,dy \ = \ 1$$

дає $A = 1/\pi^2$.

б) Для випадкових величин X та Y маємо

$$f_1(x) \ = \ \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy \ = \ \frac{1}{\pi(1+x^2)}, \qquad f_2(y) \ = \ \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx \ = \ \frac{1}{\pi(1+y^2)}.$$

Оскільки $f(x,y) = f_1(x) \cdot f_2(y)$, то випадкові величини X та Y незалежні.

Приклад 5.14

Випадковий вектор $(\xi, \, \eta)$ підпорядковується нормальному розподілу. Відомо, що $\mathrm{M}[\xi] = \mathrm{M}[\eta] = 0$, $\mathrm{D}[\xi] = \mathrm{D}[\eta] = 1$, $\mathrm{M}[\xi\eta] = r$.

Знайти середнє максимуму $\mathrm{M}[\max(\xi, \, \eta)]$.

Розв'язання

Нехай $\Theta = \max(\xi, \, \eta)$. Тоді інтегральна ймовірність $F(\theta)$ випадкової величини Θ така

$$F_\Theta(\theta) \ = \ \Pr\{\xi < \theta, \eta < \theta\} \ = \ \frac{1}{2\pi R}\int\limits_{-\infty}^{\theta} d\xi \int\limits_{-\infty}^{\theta} \exp\left(-\,\frac{\xi^2 - 2r\xi\eta + \eta^2}{2R^2}\right)\,d\eta,$$

де $R = (1 - r^2)^{1/2}$. Звідси випливає, що густина розподілу випадкової величини Θ

$$f_\Theta(\theta) \ = \ \frac{1}{\pi R}\int\limits_{-\infty}^{\theta} \exp\left(-\,\frac{\xi^2 - 2r\xi\theta + \theta^2}{2R^2}\right)\,d\xi,$$

тоді

$$\mathrm{M}[\Theta] \ = \ \frac{1}{\pi R}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \theta\,d\theta \int\limits_{-\infty}^{\theta} \exp\left(-\,\frac{\xi^2 - 2r\xi\theta + \theta^2}{2R^2}\right)\,d\xi.$$

Для обчислення цього повторного інтеграла зробимо заміну змінної за правилом $z = \xi - r\theta$, що дає

$$\mathrm{M}[\Theta] \;=\; \frac{1}{\pi R}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\theta\,d\theta\int\limits_{-\infty}^{A}\exp\left(-\,\frac{\theta^2}{2}-\frac{z^2}{2R^2}\right)\,dz,$$

де $A = \theta(1-r)$. Тепер візьмемо зовнішній інтеграл по частинах:

$$\mathrm{M}[\Theta] \;=\; \frac{R}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\,\frac{\theta^2}{2}-\frac{\theta^2}{2R^2}\right)\,d\theta.$$

Після інтегрування отримаємо

$$\mathrm{M}[\Theta] \;=\; \mathrm{M}[\max(\xi,\eta)] \;=\; \sqrt{(1-r)/\pi}.$$

Приклад 5.15 (Рівняння регресії)

Спільна густина імовірності $f(x,y)$ гауссівського розподілу двовимірної випадкової величини (X,Y) має вигляд

$$f_2(x,y) \;=\; \frac{1}{2\pi\,\sigma_{\mathrm{X}}\,\sigma_{\mathrm{Y}}\sqrt{1-r_{\mathrm{XY}}^2}}\exp\left\{-\,\frac{1}{2(1-r_{\mathrm{XY}}^2)}\,Q(x,y)\right\},$$

де

$$Q(x,y) \;=\; \frac{(x-m_{\mathrm{X}})^2}{\sigma_{\mathrm{X}}^2}-\,2r_{\mathrm{XY}}\frac{(x-m_{\mathrm{X}})(y-m_{\mathrm{Y}})}{\sigma_{\mathrm{X}}\,\sigma_{\mathrm{Y}}}+\frac{(y-m_{\mathrm{Y}})^2}{\sigma_{\mathrm{Y}}^2},$$

а також $m_{\mathrm{X}}, m_{\mathrm{Y}}$ $\sigma_{\mathrm{X}}, \sigma_{\mathrm{Y}}$, r_{XY} – параметри розподілу.

Визначити: а) густини імовірностей $f_1(x)$ і $f_2(y)$ випадкових величин X та Y; б) умовні густини ймовірностей $f(y|x)$ і $f(x|y)$ випадкових величин X та Y.

Розв'язання

а) Маємо

$$f_1(x) \;=\; \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy.$$

Якщо виконати заміну змінних за правилом

$$u = (x-m_{\mathrm{X}})/(\sqrt{2}\sigma_{\mathrm{X}}), \qquad v = (y-m_{\mathrm{Y}})/(\sqrt{2}\sigma_{\mathrm{Y}}),$$

тоді отримаємо

$$f_1(x) \;=\; \frac{1}{\sqrt{2\pi(1-r_{\mathrm{XY}}^2)}\sigma_{\mathrm{X}}}\exp\left(-\,\frac{u^2}{1-r_{\mathrm{XY}}^2}\right)\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\,\frac{v^2}{1-r_{\mathrm{XY}}^2}+\frac{2vr_{\mathrm{XY}}}{1-r_{\mathrm{XY}}^2}\right)\,dv.$$

Відомо, що

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-p^2x^2 \pm qx\right)\,dx \;=\; \frac{\sqrt{\pi}}{p}\exp\left(\frac{q^2}{4p^2}\right).$$

Скориставшись цим інтегралом, отримаємо

$$f_1(x) \;=\; \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{\rm X}}\exp(-u^2),$$

або

$$f_1(x) \;=\; \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{\rm X}}\exp\left(-\frac{(x-m_{\rm X})^2}{2\sigma_{\rm X}^2}\right).$$

Таким чином, величина X підпорядкована нормальному закону з параметрами $m_{\rm X}$, $\sigma_{\rm X}$.

Зробивши аналогічні обчислення, отримаємо

$$f_2(y) \;=\; \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{\rm Y}}\exp\left(-\frac{(y-m_{\rm Y})^2}{2\sigma_{\rm Y}^2}\right).$$

б) Знаходимо умовні густини ймовірностей

$$f_2(y|x) \;=\; \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{\rm Y}(1-r_{\rm XY}^2)}\exp\left(-\frac{[y-m_{\rm Y}-r_{\rm XY}(x-m_{\rm X})\sigma_{\rm Y}/\sigma_{\rm X}]^2}{(1-r_{\rm XY}^2)\sigma_{\rm Y}}\right).$$

Аналогічно

$$f_1(x|y) \;=\; \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{\rm X}(1-r_{\rm XY}^2)}\exp\left(-\frac{[x-m_{\rm X}-r_{\rm XY}(y-m_{\rm Y})\sigma_{\rm X}/\sigma_{\rm Y}]^2}{(1-r_{\rm XY}^2)\sigma_{\rm X}}\right).$$

З цих виразів випливає, що $f_2(y|x)$ та $f_1(x|y)$ є нормальними густинами ймовірності з параметрами

$$m_{\rm Y|X} \;=\; m_{\rm Y}+r_{\rm XY}(x-m_{\rm X})\,\frac{\sigma_{\rm Y}}{\sigma_{\rm X}}, \qquad \sigma_{\rm Y|X} \;=\; \sigma_{\rm Y}\sqrt{1-r_{\rm XY}^2},$$

$$m_{\rm X|Y} \;=\; m_{\rm X}+r_{\rm XY}(y-m_{\rm Y})\,\frac{\sigma_{\rm X}}{\sigma_{\rm Y}}, \qquad \sigma_{\rm X|Y} \;=\; \sigma_{\rm X}\sqrt{1-r_{\rm XY}^2}.$$

Знайдені залежності називаються *рівняннями регресії.* За допомогою рівнянь регресії оцінюють залежність однієї випадкової величини від іншої.

Приклад 5.16 (Закон Релея)

Випадкові величини X та Y мають однакові нормальні розподіли з нульовим математичним сподіванням та дисперсією σ^2.

Визначити закон розподілу модуля R вектора (X, Y).

Розв'язання

Цю густину розподілу ймовірностей $f_{\rm R}(r)$ можна записати у вигляді

$$f_{\rm R}(r) \;=\; {\rm M}\left[\delta\left(r-\sqrt{{\rm X}^2+{\rm Y}^2}\right)\right]_{\rm XY} \;=\; \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\delta\left(r-\sqrt{x^2+y^2}\right)\,f_{\rm XY}(x,y)\,dx\,dy,$$

де дужками ${\rm M}[\cdots]_{\rm XY}$ позначено усереднення з усіх можливих значень випадкових величин X та Y.

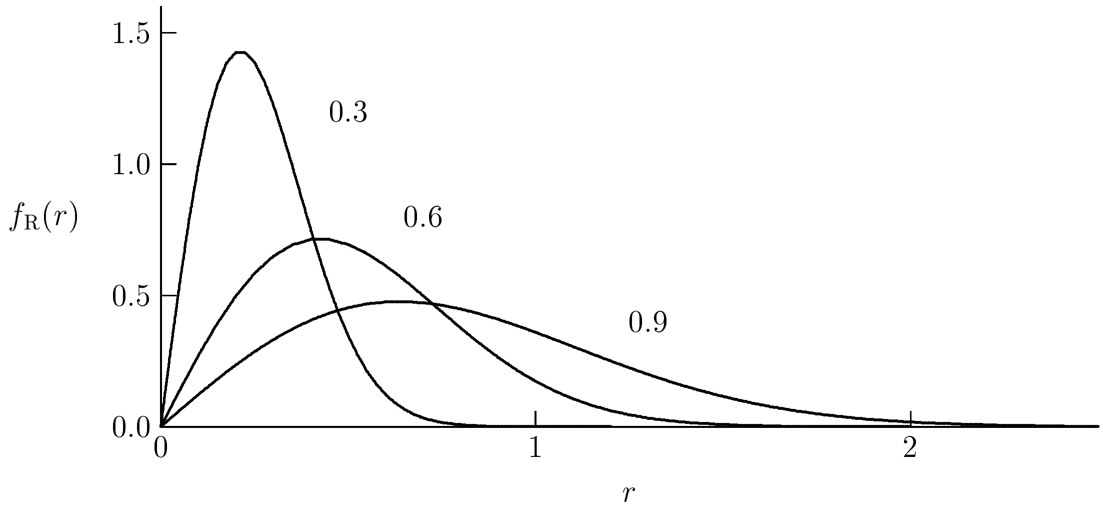


Рисунок 5.5 — Густина розподілу $f_R(r)$ закону Релея; $\sigma = 0{,}3;\ 0{,}6;\ 0{,}9$

З визначення δ-функції випливає, що $\delta(ax) = |a|^{-1}\delta(x)$ для будь-якого a. Тому, з урахуванням її парності,

$$f_R(r) \;=\; 2r\mathrm{M}\left[\delta\left(r^2 - \mathrm{X}^2 - \mathrm{Y}^2\right)\right]_{\mathrm{XY}} \;=\; 2r\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\delta\left(x^2+y^2-r^2\right)\,f_{\mathrm{XY}}(x,y)\,dx\,dy \;=$$

$$=\; \frac{2r}{2\pi\sigma^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\delta\left(x^2+y^2-r^2\right)\exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}\right)\,dx\,dy.$$

В отриманому інтегралі перейдемо від декартових змінних інтегрування x та y до полярних $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, що дає

$$f_R(r) \;=\; \frac{r}{\pi\sigma^2}\int\limits_{0}^{2\pi}\int\limits_{0}^{\infty}\delta\left(\rho^2-r^2\right)\exp\left(-\frac{\rho^2}{2\sigma^2}\right)\,\rho\,d\rho\,d\varphi.$$

Після інтегрування по полярному куту φ та зміни $t = \rho^2$ отримаємо

$$f_R(r) \;=\; \frac{r}{2\sigma^2}\int\limits_{0}^{\infty}\delta(t-r^2)\exp\left(-\frac{t}{2\sigma^2}\right)\,dt,$$

що дає остаточно для шуканої густини розподілу

$$f_R(r) \;=\; \frac{r}{2\sigma^2}\exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right), \qquad r \ge 0.$$

Отриманий вираз називається *законом Релея.*

Приклад 5.17 (Закон Релея-Райса)

Дві незалежні випадкові величини X та Y мають однакові нормальні розподіли з нульовим математичним сподіванням та дисперсією σ^2. До кожної з компонент додана детермінована величина, що дорівнює $s/\sqrt{2}$, де s – задана константа (сигнал).

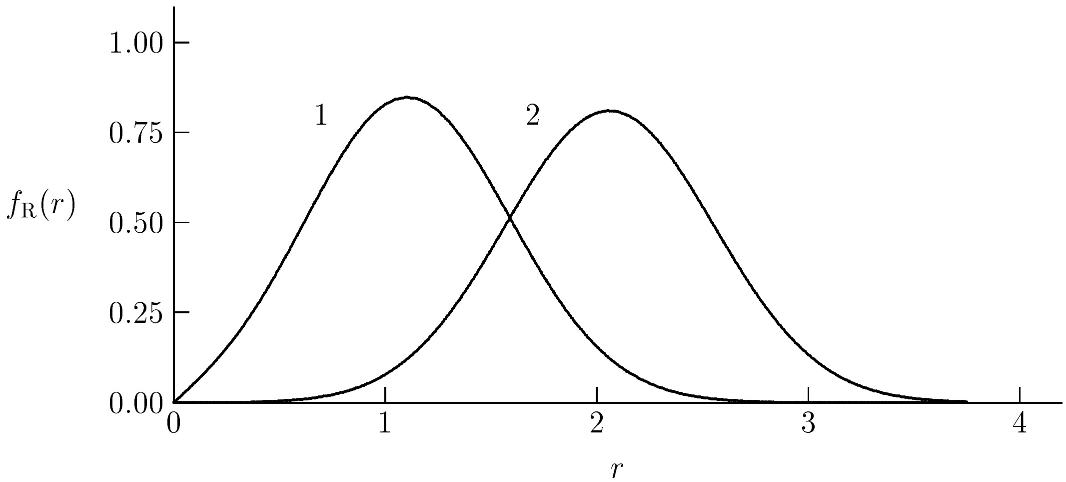


Рисунок 5.6 — Густина розподілу ймовірностей $f_{\mathrm{R}}(r)$ закону Релея-Райса; $s = 1,\,2$; $\sigma = 0{,}5$

Визначити закон розподілу модуля R вектора $(\mathrm{X} - s/\sqrt{2},\, \mathrm{Y} - s/\sqrt{2})$ на площині.

Розв'язання

При $s = 0$ задача була розглянута вище (розподіл Релея).

При $s \neq 0$ аналогічно запишемо

$$f_{\mathrm{R}}(r) \;=\; \mathrm{M}\left[\delta\left(r - \sqrt{(\mathrm{X} - s/\sqrt{2})^2 + (\mathrm{Y} - s/\sqrt{2})^2}\right)\right]_{\mathrm{XY}} \;=$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \delta\left(r - \sqrt{(x - s/\sqrt{2})^2 + (y - s/\sqrt{2})^2}\right)\, f_{\mathrm{XY}}(x, y)\, dx\, dy,$$

де дужками $\mathrm{M}[\cdots]_{\mathrm{XY}}$ позначено усереднення з усіх можливих значень випадкових величин X та Y.

Це дає

$$f_{\mathrm{R}}(r) \;=\; \frac{2r}{2\pi\sigma^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \delta(x^2 + y^2 - r^2)\exp\left(-\frac{(x - s/\sqrt{2})^2 + (y - s/\sqrt{2})^2}{2\sigma^2}\right)\, dx\, dy.$$

В отриманому інтегралі перейдемо від декартових змінних інтегрування x та y до полярних $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$:

$$f_{\mathrm{R}}(r) = \frac{r}{\pi\sigma^2}\int\limits_{0}^{\infty}\int\limits_{0}^{2\pi} \delta(\rho^2 - r^2)\exp\left(-\,\frac{\rho^2 - \sqrt{2}\rho s(\cos\varphi + \sin\varphi) + s^2}{2\sigma^2}\right)\,\rho\, d\rho\, d\varphi.$$

В цьому інтегралі зробимо поворот кутової змінної на $5\pi/4$:

$$f_{\mathrm{R}}(r) \;=\; \frac{r}{\pi\sigma^2}\int\limits_{0}^{\infty}\int\limits_{0}^{2\pi} \delta(\rho^2 - r^2)\exp\left(-\,\frac{\rho^2 + 2\rho s\cos\varphi + s^2}{2\sigma^2}\right)\,\rho\, d\rho\, d\varphi.$$

Отриманий інтеграл за φ не береться в елементарних функціях. Тому використовуємо зображення для *модифікованої функції Бесселя нульового індексу*

$$I_0(z) \;=\; \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \exp[z\cos(\varphi)]\, d\varphi.$$

Тоді

$$f_{\mathrm{R}}(r) \;=\; \frac{2r}{\sigma^2}\int\limits_0^{\infty} \delta(\rho^2 - r^2)\exp\left(-\frac{\rho^2+s^2}{2\sigma^2}\right) I_0(\rho s/\sigma^2)\,\rho\, d\rho.$$

Після заміни $t \;=\; \rho^2$ та наступного інтегрування знайдемо остаточно для шуканої густини розподілу

$$f_{\mathrm{R}}(r) \;=\; \frac{r}{\sigma^2}\exp\left(-\frac{r^2+s^2}{2\sigma^2}\right) I_0(rs/\sigma^2), \qquad r \geq 0.$$

Отриманий вираз називається *законом Релея-Райса.*

Приклад 5.18 (Квадратичні форми та нормальний закон)

Розглянемо нормальний закон (5.33) на площі. Виконаємо заміну змінних за правилом $u = x - m_{\mathrm{X}}$, $v = y - m_{\mathrm{Y}}$, тобто сумістимо початок координат з точкою $(m_{\mathrm{X}}, m_{\mathrm{Y}})$. Тоді для густини розподілу системи (U,V) отримаємо

$$f(u,v) \;=\; \frac{1}{2\pi\,\sigma_{\mathrm{X}}\,\sigma_{\mathrm{Y}}\sqrt{1-r_{\mathrm{XY}}^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2(1-r_{\mathrm{XY}}^2)}\left(\frac{u^2}{\sigma_{\mathrm{X}}^2} - 2r_{\mathrm{XY}}\frac{uv}{\sigma_{\mathrm{X}}\,\sigma_{\mathrm{Y}}} + \frac{v^2}{\sigma_{\mathrm{Y}}^2}\right)\right\}. \qquad (1)$$

Вираз в показнику експоненти зручно записувати в термінах *квадратичної форми* $Q(u,v)$ такого вигляду:

$$Q(u,v) \;=\; \frac{1}{1-r_{\mathrm{XY}}^2}\left(\frac{u^2}{\sigma_{\mathrm{X}}^2} - 2r_{\mathrm{XY}}\frac{uv}{\sigma_{\mathrm{X}}\,\sigma_{\mathrm{Y}}} + \frac{v^2}{\sigma_{\mathrm{Y}}^2}\right) \;=\; (u,v)K^{-1}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \qquad (2)$$

де K — кореляційна матриця двокомпонентної нормальної величини

$$K \;=\; \begin{pmatrix} \sigma_{\mathrm{X}}^2 & r_{\mathrm{XY}}\sigma_{\mathrm{X}}\sigma_{\mathrm{Y}} \\ r_{\mathrm{XY}}\sigma_{\mathrm{X}}\sigma_{\mathrm{Y}} & \sigma_{\mathrm{Y}}^2 \end{pmatrix}. \qquad (3)$$

В нових позначеннях густина $f(u,v)$ системи (U,V) така:

$$f(u,v) \;=\; \frac{1}{2\pi\sqrt{\det K}}\exp\left\{-\frac{1}{2}(u,v)K^{-1}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}\right\}. \qquad (4)$$

Векторно-матричні позначення типу (4) припускають просте узагальнення на багатокомпонентний випадок.

Розглянемо тепер задачу про зведення густини (4) до *канонічного вигляду*, в якому квадратична форма діагональна, тобто складається лише з квадратів змінних. Використовуючи унітарну матрицю T обертання на площі, виконаємо перетворення повороту

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \;=\; T\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \qquad (5)$$

з кутом повороту φ від старих осей $(u,\, v)$ до нових $(x',\, y')$.

В змінних $(x',\, y')$ густина f записується у вигляді

$$f(x',\, y') \;=\; \frac{1}{2\pi\,\sqrt{\det K}}\exp\left\{-\,\frac{1}{2}\,(x',y')\,TK^{-1}T^{-1}\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}\right\}. \tag{6}$$

Знайдемо такий кут обернення φ, для якого матриця $TK^{-1}T^{-1}$ стане діагональною матрицею D^{-1}, тобто

$$TK^{-1}T^{-1} \;=\; D^{-1} \;\equiv\; \begin{pmatrix}\lambda_1^{-1} & 0\\ 0 & \lambda_2^{-1}\end{pmatrix} \tag{7}$$

з власними числами λ_1 та λ_2.

З виразів (3) та (7) випливає, що спектр (λ_1, λ_2) кореляційної матриці K визначається характеристичним рівнянням

$$\det(K-\lambda E) \;=\; \lambda^2 - (\sigma_{\mathrm{X}}^2+\sigma_{\mathrm{Y}}^2)\lambda + (1-r_{\mathrm{XY}}^2)\sigma_{\mathrm{X}}^2\sigma_{\mathrm{Y}}^2 \;=\; 0, \tag{8}$$

що дає

$$\begin{aligned}\lambda_1 \;&=\; \frac{1}{2}\left[(\sigma_{\mathrm{X}}^2+\sigma_{\mathrm{Y}}^2)+\sqrt{(\sigma_{\mathrm{X}}^2-\sigma_{\mathrm{Y}}^2)^2+4r_{\mathrm{XY}}^2\sigma_{\mathrm{X}}^2\sigma_{\mathrm{Y}}^2}\,\right],\\ \lambda_2 \;&=\; \frac{1}{2}\left[(\sigma_{\mathrm{X}}^2+\sigma_{\mathrm{Y}}^2)-\sqrt{(\sigma_{\mathrm{X}}^2-\sigma_{\mathrm{Y}}^2)^2+4r_{\mathrm{XY}}^2\sigma_{\mathrm{X}}^2\sigma_{\mathrm{Y}}^2}\,\right].\end{aligned} \tag{9}$$

Якщо тепер у співвідношенні (7) розглянути, наприклад, лівий верхній матричний елемент, то можна отримати

$$\sigma_{\mathrm{X}}^2\cos\varphi + r_{\mathrm{XY}}\sigma_{\mathrm{X}}\sigma_{\mathrm{Y}}\sin\varphi \;=\; \lambda_1\cos\varphi. \tag{10}$$

Тому для кута φ зведення до діагональної (канонічної) форми маємо

$$\mathrm{tg}\,\varphi \;=\; -\,\frac{\sigma_{\mathrm{X}}^2-\sigma_{\mathrm{Y}}^2+\sqrt{(\sigma_{\mathrm{X}}^2-\sigma_{\mathrm{Y}}^2)^2+4r_{\mathrm{XY}}^2\sigma_{\mathrm{X}}^2\sigma_{\mathrm{Y}}^2}}{2r_{\mathrm{XY}}\sigma_{\mathrm{X}}\sigma_{\mathrm{Y}}}. \tag{11}$$

Тоді густина $f(x',\, y')$ набуде вигляду

$$f(x',\, y') \;=\; \frac{1}{2\pi\sqrt{\lambda_1\lambda_2}}\exp\left\{-\,\frac{1}{2}\left(\frac{(x')^2}{\lambda_1}+\frac{(y')^2}{\lambda_2}\right)\right\} \tag{12}$$

з дисперсіями

$$\begin{aligned}\mathrm{M}[\mathrm{X}'^2] \;&=\; \lambda_1 \;=\; \frac{1}{2}\left[(\sigma_{\mathrm{X}}^2+\sigma_{\mathrm{Y}}^2)+\sqrt{(\sigma_{\mathrm{X}}^2-\sigma_{\mathrm{Y}}^2)^2+4r_{\mathrm{XY}}^2\sigma_{\mathrm{X}}^2\sigma_{\mathrm{Y}}^2}\,\right],\\ \mathrm{M}[\mathrm{Y}'^2] \;&=\; \lambda_2 \;=\; \frac{1}{2}\left[(\sigma_{\mathrm{X}}^2+\sigma_{\mathrm{Y}}^2)-\sqrt{(\sigma_{\mathrm{X}}^2-\sigma_{\mathrm{Y}}^2)^2+4r_{\mathrm{XY}}^2\sigma_{\mathrm{X}}^2\sigma_{\mathrm{Y}}^2}\,\right].\end{aligned} \tag{13}$$

При виконанні умови $r_{\mathrm{XY}}=0$ маємо круговий розподіл у термінах віднормованих змінних $\mathrm{X}'/\sigma_{\mathrm{X}}$ та $\mathrm{Y}'/\sigma_{\mathrm{Y}}$. Якщо ж $r_{\mathrm{XY}}\to 1$, то дисперсія $\mathrm{M}[\mathrm{Y}'^2]$ прямує до нуля. В цьому граничному випадку густина розподілу $f(x',\, y')$ фактично залежить лише від одного аргументу, оскільки має вигляд

$$f(x',\, y') \;=\; \frac{1}{\sqrt{2\pi\left(\sigma_{\mathrm{X}}^2+\sigma_{\mathrm{Y}}^2\right)}}\exp\left\{-\,\frac{1}{2}\,\frac{(x')^2}{\sigma_{\mathrm{X}}^2+\sigma_{\mathrm{Y}}^2}\right\}\delta(y'). \tag{14}$$

Приклад 5.19

Вектор X утворений з набору з n компонентів та розподілений за багатовимірним нормальним законом з кореляційною матрицею K та вектором математичних сподівань $X_c = (X_{c1},\, X_{c2},\, \ldots,\, X_{cn})$.

Знайти дисперсію D[X] випадкового вектора X.

Розв'язання

Випишемо вирази для дисперсії випадкового вектора

$$\mathrm{D[X]} \;=\; \mathrm{M}[(\mathrm{X} - X_c)^{\scriptscriptstyle\mathrm{T}}(\mathrm{X} - X_c)], \tag{1}$$

де 'т' – символ транспонування.

За допомогою виразу для густини розподілу ймовірностей випадкового вектора X запишемо цю дисперсію у вигляді багатократного інтеграла

$$\mathrm{D[X]} \;=\; \int\overset{(n)}{\cdots}\int (X - X_c)^{\scriptscriptstyle\mathrm{T}}(X - X_c)\, f(X)\, d^nX, \tag{2}$$

де індексом n у диференціалі d^nX вказана кратність інтегрування.

Згідно з умовою густина розподілу $f(X)$ має вигляд

$$f(X) \;=\; \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n\,\det(K)}}\exp\left(-\frac{1}{2}(X - X_c)^{\scriptscriptstyle\mathrm{T}}K^{-1}(X - X_c)\right). \tag{3}$$

Виконаємо в інтегральному зображенні для дисперсії зрушення змінних інтегрування згідно з правилом $x_i \to x_i - x_{c,i}$ для всіх $i = 1, 2, \ldots, n$. Тоді

$$\mathrm{D[X]} \;=\; \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n\,\det(K)}}\int\overset{(n)}{\cdots}\int (X^{\scriptscriptstyle\mathrm{T}}X)\,\exp\left(-\frac{1}{2}X^{\scriptscriptstyle\mathrm{T}}K^{-1}X\right)\,d^nX. \tag{4}$$

Дисперсія є скалярною величиною, в той час як єдиний вільний параметр праворуч в отриманому виразі – це кореляційна матриця K. Тому відповідь має бути виражена в термінах скалярних інваріантів цієї матриці.

В інтегралі, що отримали, виконаємо ще одну заміну змінних інтегрування згідно з правилом $X = K^{1/2}Y$. Таку заміну тут можна зробити, оскільки матриця K – симетрична. Тоді

$$(X^{\scriptscriptstyle\mathrm{T}}X) \;=\; (Y^{\scriptscriptstyle\mathrm{T}}K\,Y), \tag{5}$$

$$d^nX \;=\; \sqrt{\det(K)}\,d^nY. \tag{6}$$

Маємо

$$\mathrm{D[X]} \;=\; \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n}}\int\overset{(n)}{\cdots}\int (Y^{\mathrm{m}}K\,Y)\,\exp\left(-\frac{1}{2}(Y^{\scriptscriptstyle\mathrm{T}}Y)\right)\,d^nY \;= \tag{7}$$

$$=\; \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n}}\int\overset{(n)}{\cdots}\int \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} y_i y_j K_{ij}\exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{n} y_m^2\right)\,dy_1\,dy_2\ldots\,dy_n.$$

У цьому виразі дадуть внесок у суму лише ті доданки, у яких змінні наведені в квадраті, а інші доданки тотожно дорівнюють нулю внаслідок непарності підінтегральної функції. Тому

$$\mathrm{D}[\mathrm{X}] \;=\; \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n}} \int\overset{(n)}{\cdots}\int \sum_{i=1}^{n} y_i^2 K_{ii} \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{n} y_m^2\right) dy_1\, dy_2 \ldots dy_n. \tag{8}$$

Тепер виконаємо у кожному i-му доданку суми інтегрування з усіх змінних, які відмінні від y_i,

$$\mathrm{D}[\mathrm{X}] \;=\; \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{i=1}^{n} K_{ii} \int\limits_{-\infty}^{\infty} y_i^2 \exp\left(-\frac{1}{2} y_i^2\right) dy_i, \tag{9}$$

що після інтегрування за y_i дає остаточно

$$\mathrm{D}[\mathrm{X}] \;=\; \sum_{i=1}^{n} K_{ii} \;=\; \mathrm{Sp}(K). \tag{10}$$

Таким чином, дисперсія випадкової векторної величини X дорівнює сумі діагональних елементів $\mathrm{Sp}(K)$ кореляційної матриці K.

Приклад 5.20

В цьому прикладі розглянемо техніку застосування δ-функції Дірака при обчисленні твірних функцій розподілу та пов'язаних з ними законів розподілу випадкових величин.

1. Розглянемо випадкову величину X, підпорядковану закону Пуассона з параметром a. Оскільки можливі значення X такі, що $\mathrm{X} \geq 0$, розподілу цієї випадкової величини відповідає *твірна функція*

$$q(\lambda) \;=\; \mathrm{M}[\exp(-\lambda \mathrm{X})] \;=\; \sum_{m=0}^{\infty} \exp(-\lambda m)\, \mathrm{P}_m.$$

Цей вираз має форму стандартного перетворення Лапласа відносно закона розподілу ймовірностей випадкової величини X.

Використовуючи відомі вирази для амплітуд імовірностей пуассонівської випадкової величини $\{\mathrm{P}_m\}$, де $m = 0,\, 1,\, 2\, \ldots,$ запишемо для твірної функції

$$q(\lambda) \;=\; \sum_{m=0}^{\infty} \exp(-\lambda m)\, \frac{a^m}{m!} \exp(-a).$$

Отже, знайдемо після підсумовування

$$q(\lambda) \;=\; \exp\left(-a + a\, \mathrm{e}^{-\lambda}\right).$$

2. На підставі отриманого виразу для твірної функції $q(\lambda)$ знайдемо тепер закон розподілу $f_{\mathrm{X}}(x)$ випадкової величини X, тобто розглянемо обернену задачу. При цьому будемо мати на увазі загальний випадок та будемо користуватися виразами,

дійсними для випадкових величин як неперервного, так і дискретного типу. А саме, для знаходження густини $f_{\mathrm{X}}(x)$ використаємо обернене перетворення Лапласа:

$$f_{\mathrm{X}}(x) \;=\; \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C} \exp(\lambda x)\, q(\lambda)\, d\lambda,$$

де C – контур Бромвича.

Вибір контура інтегрування C необхідно виконати таким чином, щоб на комплексній λ-площині залишити *зліва* від нього всі можливі особливості підінтегрального виразу (полюса та ін.).

З вигляду твірної функції $q(\lambda)$ випливає, що як контур інтегрування C можливо обрати уявну вісь. Отже,

$$f_{\mathrm{X}}(x) \;=\; \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-i\infty}^{i\infty} \exp(\lambda x)\, q(\lambda)\, d\lambda,$$

що після заміни $\lambda = iy$ дає

$$f_{\mathrm{X}}(x) \;=\; \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp(iyx) \exp\left(-a + a\,\mathrm{e}^{-iy}\right)\, dy.$$

Виразимо тепер експоненту, користуючись рядом Тейлора,

$$f_{\mathrm{X}}(x) \;=\; \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp(iyx) \exp(-a) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a^m}{m!}\,\mathrm{e}^{-iym}\, dy$$

і переставимо порядок інтегрування та підсумовування

$$f_{\mathrm{X}}(x) \;=\; \exp(-a) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a^m}{m!}\,\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp(iyx - iym)\, dy.$$

Скористаємось інтегральним зображенням для δ-функції Дірака

$$\delta(z) \;=\; \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp(iyz)\, dy.$$

Це дає

$$f_{\mathrm{X}}(x) \;=\; \exp(-a) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a^m}{m!}\delta(x - m).$$

Отже, отримуємо

$$f_{\mathrm{X}}(x) \;=\; \sum_{m=0}^{\infty} \delta(x-m)\,\mathrm{P}_m, \qquad \mathrm{P}_m \;=\; \frac{a^m}{m!}\exp(-a), \qquad m = 0, 1, 2, \ldots .$$

Знайдений вираз показує, що випадкова величина пуассонівського типу підпорядковується закону розподілу $f_{\mathrm{X}}(x)$, який відрізняється від нуля тільки для цілих значень m свого аргументу x. При цьому ймовірність події $\{\mathrm{X} = m\}$ дорівнює P_m.

Приклад 5.21

При побудові законів χ^2 та Стьюдента було прийнято припущення, що випадкові величини $\{X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_n\}$ є некорельованими. На практиці може статися, що величини $\{X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_n\}$ є частково некорельованими або може бути відсутня інформація про ступінь їх корельованості. В наступному прикладі розглянемо вплив взаємної корельованості величин $\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ на стандартні статистичні закони типу χ^2 та Стьюдента.

Розгляд буде проведено за таких припущень:

а) Послідовність випадкових величин $\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$, що використовується, є стаціонарною із середнім

$$\mathrm{M}[X_k^2] \;=\; \sigma^2, \qquad k = 1, 2, \ldots, n, \tag{1}$$

і скорельованою з коефіцієнтом кореляції ρ:

$$\mathrm{M}[X_k X_{k+1}] \;=\; \rho\sigma^2, \qquad k = 1, 2, \ldots, n-1. \tag{2}$$

б) Послідовність величин $\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ статистично описується за допомогою рівноважної $(k = 0)$

$$f(x_0) \;=\; \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\,\exp\left(-\,\frac{x_0^2}{2\sigma^2}\right) \tag{3}$$

і набору перехідних $(k = 1, 2, \ldots, n)$

$$f(x_k, k\tau;\, x_{k+1}, k\tau + \tau) \;=\; \frac{1}{\sqrt{2\pi(1-\rho^2)}\,\sigma}\,\exp\left(-\,\frac{(x_{k+1} - \rho x_k)^2}{2(1-\rho^2)\,\sigma^2}\right) \tag{4}$$

густин розподілу ймовірностей.

в) Випадкова величина Y, яка використовується далі в розподілі Стьюдента, є нормальною, незалежною від сукупності $\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ та також має дисперсію σ^2.

Теорема 1

В прийнятих припущеннях адитивний функціонал

$$\mathrm{J} \;=\; \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k^2 \tag{5}$$

має рівноважну твірну функцію

$$Q_{\mathrm{J}}(\lambda; \rho, n) \;\equiv\; \mathrm{M}[\exp(-\lambda \mathrm{J})]_{\mathrm{J}} \tag{6}$$

такого вигляду:

$$Q_{\mathrm{J}}(\lambda; \rho, n) \;=\; \sqrt{\,(1-\rho^2)\,R\,\left[(a_+ - \rho^2)^2\, a_+^{n-1} - (a_- - \rho^2)^2\, a_-^{n-1}\right]^{-1}}, \tag{7}$$

де

$$a_\pm \;=\; \frac{1}{2}\left(1 + \rho^2 + \frac{\lambda\sigma^2(1-\rho^2)}{n} \pm R\right), \quad R \;=\; \left[\left(1 + \rho^2 + \frac{\lambda\sigma^2(1-\rho^2)}{n}\right)^2 - 4\rho^2\right]^{1/2}. \tag{8}$$

Доведення

Після обчислення $(n+1)$-кратного інтеграла гауссівського типу

$$Q_{\mathrm{J}}(\lambda;\rho,n) \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx_0}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx_1}{\sqrt{2\pi(1-\rho^2)}\,\sigma} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx_n}{\sqrt{2\pi(1-\rho^2)}\,\sigma} \;\times$$

$$\times\;\exp\biggl(-\frac{x_0^2}{2\sigma^2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{\left(x_k-\rho x_{k-1}\right)^2}{2(1-\rho^2)\,\sigma^2} - \frac{\lambda}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k^2\biggr),$$

що виникає, приходимо до (7).

Густина розподілу ймовірностей $g_{\mathrm{J}}(J)$ випадкової величини J пов'язана з твірною функцією $Q_{\mathrm{J}}(\lambda;\rho,n)$ оберненим перетворенням Лапласа.

Теорема 2

Для припустимих значень коефіцієнта кореляції ρ випадкова величина – стандартизоване відношення Стьюдента T$=$ Y$/\sqrt{\mathrm{J}}$ має функцію розподілу $F_{\mathrm{T}}(t)$ такого вигляду:

$$F_{\mathrm{T}}(t) \;=\; 1 - \frac{\operatorname{sgn}(t)}{\pi} \int_{0}^{\infty} Q_{\mathrm{J}}\left(\frac{1+t^2}{2}\,\theta^2;\rho,n\right) \frac{d\theta}{1+\theta^2}. \tag{9}$$

Доведення

Для рівноважної характеристичної функції $\Psi_{\mathrm{T}}(\xi)$ випадкової величини T маємо (далі величину σ^2 вказувати не будемо)

$$\Psi_{\mathrm{T}}(\xi) \;=\; \mathrm{M}\left[\exp\left(i\,\xi \mathrm{Y}/\sqrt{\mathrm{J}}\right)\right]_{\mathrm{Y,J}}. \tag{10}$$

З двох випадкових величин, користуючись (3), виконаємо усереднення за Y:

$$\Psi_{\mathrm{T}}(\xi) \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\,y^2/2\right) \mathrm{M}\left[\exp\left(i\xi y/\sqrt{\mathrm{J}}\right)\right]_{\mathrm{J}} \;=\; \mathrm{M}\left[\exp\left(-\,\xi^2/2\mathrm{J}\right)\right]_{\mathrm{J}}. \tag{11}$$

Звідси для густини розподілу $f_{\mathrm{T}}(t)$ випадкової величини T маємо

$$f_{\mathrm{T}}(t) \;=\; \mathrm{M}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\mathrm{J}}\,\exp\left(-t^2\mathrm{J}/2\right)\right]_{\mathrm{J}} \;=\; \int_{0}^{\infty} \frac{dJ}{\sqrt{2\pi}}\, g_{\mathrm{J}}(J)\sqrt{J}\,\exp\left(-t^2 J/2\right), \tag{12}$$

де $g_{\mathrm{J}}(J)$ – густина розподілу ймовірностей випадкової величини J, яка відповідає твірній функції $Q_{\mathrm{J}}(\lambda;\rho,n)$ (7). Тому і на підставі (3) для закону розподілу $F_{\mathrm{T}}(t)$ випадкової величини T отримуємо, після інтегрування за контуром Бромвича C,

$$F_{\mathrm{T}}(t) \;=\; \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathrm{C}} d\lambda\, Q_{\mathrm{J}}(\lambda;q,n) \int_{-\infty}^{t} d\varphi \left(\varphi^2 - 2\lambda\right)^{-3/2}. \tag{13}$$

Після інтегрування за φ та обходу особливої точки $\lambda_0 = t^2/2$ на комплексній λ-площині приходимо до (9).

Отримані вирази (7) та (13) мають місце для будь-яких значень коефіцієнта кореляції ρ. При $\rho = 0$ формули (7) та (12) переходять у відомі вирази для розподілу χ^2 та розподілу Стьюдента.

5.9. Задачі для розв'язання

Задача 5.1

Випадкові величини X та Y зв'язані співвідношенням $p\mathrm{X} + q\mathrm{Y} = c$, де p, q і c – невипадкові величини, причому $p \neq 0$ та $q \neq 0$.

Знайти: а) коефіцієнт кореляції r_{XY}; б) відношення середньоквадратичних відхилень $\sigma_{\mathrm{X}} \,/\, \sigma_{\mathrm{Y}}$.

Відповідь:

а) $r_{\mathrm{XY}} = 1$, якщо $(p/q) < 0$; $r_{\mathrm{XY}} = -1$, якщо $(p/q) > 0$;

б) $\sigma_{\mathrm{X}} \,/\, \sigma_{\mathrm{Y}} = p/q$.

Задача 5.2

Однотипові деталі залежно від точності виготовлення розрізняються за формою як круглі та овальні, а за вагою – як легкі та важкі. Ймовірності того, що взята наугад деталь виявиться круглою та легкою, овальною та легкою, круглою та важкою, овальною та важкою, відповідно дорівнюються α, β, γ та $\delta = 1 - \alpha - \beta - \gamma$.

Потрібно знайти математичні сподівання M[X], M[Y] та дисперсії D[X], D[Y]: а) кількості круглих деталей X; б) кількості легких деталей Y; в) коефіцієнт кореляції K_{XY} між кількістю круглих та кількістю легких деталей, якщо $\alpha = 0,40$; $\beta = 0,05$; $\gamma = 0,10$.

Відповідь:

а) $\mathrm{M[X]} = \alpha + \gamma = 0,50$; $\mathrm{D[X]} = (\alpha + \gamma)(\beta + \gamma) = 0,075$;

б) $\mathrm{M[Y]} = \alpha + \beta = 0,45$; $\mathrm{D[Y]} = (\alpha + \beta)(\gamma + \delta) = 0,2475$;

в) $K_{\mathrm{XY}} = \mathrm{M[XY]} - \mathrm{M[X]}\,\mathrm{M[Y]} = \alpha - (\alpha + \gamma)(\alpha + \beta) = 0,175$.

Задача 5.3

Густина імовірностей $f(x, y)$ системи двох випадкових величин (X, Y) задана виразом $f(x, y) = (A/\pi) \exp(-x^2 + 6x - y^2 - 2y - 12)$.

Визначити: а) коефіцієнт A; б) густину ймовірностей $f_1(x)$ та $f_2(y)$ відповідно величин X та Y; в) чи є випадкові величини X та Y залежними.

Відповідь:

а) $A = \mathrm{e}^2$;

б) $f_1(x) = \pi^{-1/2} \exp(-(x - 3)^2)$; $f_2(y) = \pi^{-1/2} \exp(-(y + 1)^2)$;

в) випадкові величини X та Y незалежні.

Задача 5.4

Густина імовірностей $f(x, y)$ системи двох випадкових величин (X, Y) задана виразом $f(x, y) = A/(1 + x^2 + y^2 + x^2y^2)$.

Визначити: а) коефіцієнт A; б) імовірність P попадання величини (X, Y) до квадрата: $\{-1 \leq x \leq 1;\ -1 \leq y \leq 1\}$; в) функції розподілу $F(x, y)$, $F_1(x), F_2(y)$; г) густини розподілу ймовірностей $f_1(x)$ та $f_2(y)$ та залежність випадкових величин X та Y.

Відповідь:

а) $A = 1/\pi^2$;

б) P = 0,25;

в) $F(x, y) = \pi^{-2}(\mathrm{arctg}(x) + \pi/2)(\mathrm{arctg}(y) + \pi/2)$;

$F_1(x) = \pi^{-1}(\mathrm{arctg}(x) + \pi/2)$, $F_2(y) = \pi^{-1}(\mathrm{arctg}(y) + \pi/2)$;

г) $f_1(x) = \pi^{-1}(1 + x^2)^{-1}$, $f_2(y) = \pi^{-1}(1 + y^2)^{-1}$. Випадкові величини X та Y незалежні.

Задача 5.5

Густина імовірності двовимірної випадкової величини (X, Y) визначається формулою $f_2(x, y) = 0,5 \sin(x + y)$ при $0 \le x \le \pi/2$, $0 \le y \le \pi/2$.

Визначити: а) математичні сподівання m_{X} та m_{Y}, дисперсії D[X] і D[Y] випадкових величин X та Y; б) кореляційну та нормовану кореляційну матриці.

Відповідь:

а) $m_{\mathrm{X}} = m_{\mathrm{Y}} = 0{,}785$, $\mathrm{D[X]} = \mathrm{D[Y]} = 0{,}188$;

б) кореляційна та нормована кореляційна матриці мають вигляд

$$K = \begin{pmatrix} 0,188 & -0,046 \\ -0,046 & 0,188 \end{pmatrix}, \qquad R = \begin{pmatrix} 1,000 & -0,245 \\ -0,245 & 1,000 \end{pmatrix}.$$

Задача 5.6

На коло радіусом R з центром у початку координат наугад кинута точка.

Знайти математичне сподівання M[S] площі S квадрата зі стороною, що дорівнює абсцисі цієї точки.

Відповідь: $\mathrm{M[S]} = R^2/4$.

Задача 5.7

Дві точки вибрані наугад на суміжних сторонах прямокутника зі сторонами a та b. Знайти математичне сподівання відстані L між цими точками.

Відповідь:

$$\mathrm{M[L]} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{3} + \frac{a^2}{6b}\left[\ln(b + \sqrt{a^2 + b^2}) - \ln(a)\right] + \frac{b^2}{6a}\left[\ln(a + \sqrt{a^2 + b^2}) - \ln(b)\right].$$

Задача 5.8

Задана інтегральна ймовірність двовимірної випадкової величини

$$F(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0 \text{ або } y < 0; \\ 1 - 3^{-x} - 3^{-y} + 3^{-x-y} & \text{при } x \ge 0 \text{ та } y \ge 0. \end{cases}$$

Знайти густину розподілу ймовірностей $f(x, y)$ системи (X, Y).

Відповідь: густина розподілу:

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0 \text{ або } y < 0; \\ (\ln 3)^4 \cdot 3^{-x-y}; & \text{при } x \ge 0,\ y \ge 0. \end{cases}$$

Задача 5.9

Випадковий вектор (ξ, η) нормально розподілений, причому відомо, що $\mathrm{M}[\xi] = \mathrm{M}[\eta] = 0$, $\mathrm{D}[\xi] = \mathrm{D}[\eta] = 1$, $\mathrm{M}[\xi\eta] = r$.

Знайти середнє мінімуму $\mathrm{M}[\min(\xi, \eta)]$.

Відповідь: $\mathrm{M}[\min(\xi, \eta)] = -\sqrt{(1 - r)/\pi}$.

Задача 5.10

Незалежні випадкові величини X та Y розподілені за законом Гаусса з параметрами $m_{\mathrm{X}} = 1$, $m_{\mathrm{Y}} = -3$, $\sigma_{\mathrm{X}}^2 = 9$, $\sigma_{\mathrm{Y}}^2 = 16$.

Написати вирази для густини ймовірностей $f(x, y)$ системи випадкових величин (X, Y).

Відповідь:

$$f(x,y) \;=\; \frac{1}{24\pi}\exp\left(-\frac{(x-1)^2}{18}-\frac{(y+3)^2}{32}\right).$$

Задача 5.11

Задано неперервну двовимірну випадкову величину (X, Y), яка розподілена рівномірно в середині прямокутника з центром симетрії в початку координат та сторонами, довжини яких $2a$ та $2b$, паралельними координатним осям.

Написати вирази для густини розподілу ймовірностей: а) системи величин (X, Y); б) випадкової величини X; в) випадкової величини Y.

Відповідь:

а) $f(x, y) = 1/(4ab)$ – в середині заданого прямокутника,
$f(x, y) = 0$ – поза заданим прямокутником;

б) $f_1(x) = 1/2a$ – при $x < a$, $f_1(x) = 0$ – при $x > a$;

в) $f_2(y) = 1/2b$ – при $y < b$, $f_2(y) = 0$ – при $y > b$.

Задача 5.12

Дана густина розподілу системи невід'ємних випадкових величин

$$f(x,y) \;=\; Axy\,\exp(-x^2-y^2), \quad x \ge 0, \quad y \ge 0.$$

Визначити: A, $f_1(x)$, $f_2(y)$, $f_1(x|y)$, $f_2(y|x)$, перші та другі моменти розподілу.

Відповідь:

$A = 4$;
$f_1(x) = 2x\,\exp(-x^2)$; $f_2(y) = 2y\,\exp(-y^2)$;
$f_1(x|y) = f_1(x)$; $f_2(y|x) = f_2(y)$;
$\mathrm{M[X]} = \sqrt{\pi}\,/\,2$; $\mathrm{M[Y]} = \sqrt{\pi}\,/\,2$;
$\mathrm{D[X]} = 1 - \pi\,/\,4$; $\mathrm{D[Y]} = 1 - \pi\,/\,4$;
$K_{\mathrm{XY}} = 0$.

Задача 5.13

Є дві незалежні випадкові величини X та Y. Величина Y розподілена рівномірно в інтервалі [0; 2]. Величина X розподілена щодо нормального закону з густиною

$$f_1(x) \;=\; \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{(x-1)^2}{8}\right).$$

Визначити: M[X+Y]; M[XY]; $\mathrm{M[X^2]}$; $\mathrm{M[Y^2]}$; D[X+Y]; D[X–Y].

Відповідь:

$\mathrm{M[X+Y]} \;=\; \mathrm{M[X]} + \mathrm{M[Y]} \;=\; 2$;
$\mathrm{M[XY]} \;=\; \mathrm{M[X]}\cdot\mathrm{M[Y]} \;=\; 1$;
$\mathrm{M[X^2]} \;=\; \mathrm{D[X]} + (\mathrm{M[X]})^2 \;=\; 5$;

$$M[Y^2] = D[Y] + (M[Y])^2 = 4/3;$$
$$D[X+Y] = D[X] + D[Y] = 13/3;$$
$$D[X-Y] = D[X] + (-1)^2 D[Y] = 13/3.$$

Задача 5.14

На відрізок довжиною L наугад кинуті дві точки.

Знайти математичне сподівання та дисперсію відстані X проміж ними.

Відповідь: $M[X] = L/3$; $D[X] = L^2/18$.

Задача 5.15

Про дві незалежні випадкові величини X та Y відомо, що вони підлеглі кожна показниковому закону:

$$f_1(x) = \lambda \exp(-\lambda x), \qquad (x \geq 0);$$
$$f_2(y) = \mu \exp(-\mu y), \qquad (y \geq 0).$$

Написати вирази: а) спільної густини; б) функції розподілу системи (X, Y).

Відповідь:

$$\text{а) } f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0 \text{ або } y < 0; \\ \lambda\mu \exp(-\lambda x - \mu y) & \text{при } x \geq 0 \text{ та } y \geq 0; \end{cases}$$

$$\text{б) } F(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0 \text{ або } y < 0; \\ (1 - e^{-\lambda x})(1 - e^{-\mu y}) & \text{при } x \geq 0 \text{ та } y \geq 0. \end{cases}$$

5.10. Завдання для перевірки

1. Розкрийте зміст поняття системи випадкових величин.
2. Розкрийте зміст функції розподілу та густини розподілу для системи з двох випадкових величин.
3. Розкрийте зміст залежних законів розподілу.
4. Розкрийте зміст залежних і незалежних випадкових величин.
5. Перелічте числові характеристики системи випадкових величин.
6. Розкрийте зміст коефіцієнта кореляції.
7. Сформулюйте нормальний закон розподілу для системи незалежних випадкових величин.
8. Порівняйте нормальний закон на площині та нормальний закон в просторі.
9. Розкрийте зміст еліпса розсіювання двовимірної нормальної величини.
10. Сформулюйте багатовимірний нормальний закон розподілу для системи випадкових величин.
11. Сформулюйте закон Релея.
12. Сформулюйте закон Релея-Райса.
13. Сформулюйте закон арксинуса.

6. Закони розподілу функцій випадкових величин

У ряді завдань виникає необхідність визначати не тільки числові характеристики випадкової величини X, пов'язані з її цілими степенями. На практиці часто треба пов'язати властивості випадкової величини X зі властивостями іншої випадкової величини, наприклад Y, між якими існує залежність вигляду Y= φ(X). У загальному випадку ставлять завдання про закон розподілу функції випадкового аргументу.

6.1. Закон розподілу монотонної функції випадкового аргументу

Нехай X – певна неперервна випадкова величина з густиною $f(x)$, а випадкова величина Y пов'язана з нею функціональною залежністю

$$\mathrm{Y} \;=\; \varphi(\mathrm{X}), \tag{6.1}$$

де $\varphi(x)$ – певна функція, що диференціюється, *монотонна на усій ділянці можливих значень аргументу* X (рис. 6.1). Тоді густина $g(y)$ розподілу випадкової величини Y виражається формулою

$$g(y) \;=\; f(\psi(y))\,|\psi'(y)|, \tag{6.2}$$

де ψ – функція, обернена відносно φ.

Події $\{\mathrm{A} : \mathrm{X} < x\}$ відповідає імовірність $\Pr\{\mathrm{X} < x\}$. Цій же події $\{\mathrm{A} : \mathrm{Y} < y\}$ можна у монотонному випадку поставити у відповідність імовірність $\Pr\{\mathrm{Y} < y\}$. Іншими словами,

$$\Pr(\mathrm{X} < x) \;=\; \Pr(\mathrm{Y} < y).$$

Інакше,

$$\int\limits_{-\infty}^{x} f(x)\,dx \;=\; \int\limits_{-\infty}^{y} g(y)\,dy \tag{6.3a}$$

або

$$F(x) \;=\; G(y), \tag{6.3b}$$

де $G(y)$ – функція розподілу випадкової величини Y.

Вираз (6.3) називається *законом збереження інтегральної ймовірності.*

Оскільки Y= φ(X), де $\varphi(x)$ — монотонна функція, то після диференціювання (6.3) отримаємо

$$g(y)\,dy \;=\; f(x)\,dx, \qquad\quad y \;=\; \varphi(x). \tag{6.4}$$

Це – *закон збереження диференціальної ймовірності.*

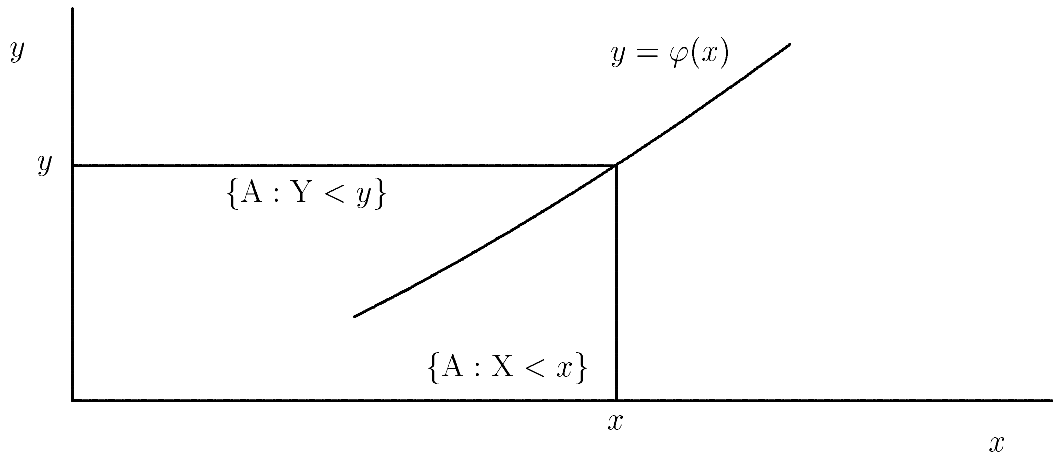


Рисунок 6.1 — До закону розподілу функції випадкового аргументу (монотонний випадок)

Приклад

Випадкова величина X рівномірно розподілена на інтервалі $[0;\ 1]$. Треба знайти густину розподілу випадкової величини $\mathrm{Y} = \mathrm{X}^2$. У цьому випадку $y = \varphi(x) = x^2$, тому $x = \psi(y) = \sqrt{y}$ (беремо лише позитивне значення) і $dx/dy = 1/(2\sqrt{y})$.

Тоді з закону про збереження диференціальної ймовірності випливає, що $g(y) = f(\sqrt{y})/(2\sqrt{y})$. Функція $f(x)$ з умови дорівнює одиниці для будь-яких припустимих значень свого аргументу.

Тому $g(y) = 1/(2\sqrt{y}),\ \ 0 < y \leq 1$.

Отримана густина має особливість у нулі, однак

$$\int\limits_0^1 g(y)\,dy = 1.$$

6.2. Закон розподілу немонотонної функції випадкового аргументу

Якщо $y = \varphi(x)$ – функція, що є немонотонною в області можливих значень випадкової величини X, тоді обернена функція неоднозначна.

Нехай, наприклад, функція $y = \varphi(x)$ має дві ділянки монотонності: зменшення й зростання (рис. 6.2). Тоді події $\{\mathrm{A} : \mathrm{Y} < y\}$ можна поставити у відповідність імовірність $G(y)$. Оскільки при даному значенні y рівняння $\varphi(x) = y$ має два розв'язки $x_1 = \psi_1(y)$ й $x_2 = \psi_2(y)$, то цій же події у термінах випадкової величини X відповідають дві (за кількістю ділянок монотонності) події: $\{\mathrm{X} > x_1\}$ й $\{\mathrm{X} < x_2\}$, яким у сукупності відповідає ймовірність $\Pr\{\mathrm{X} > x_1 \text{ й } \mathrm{X} < x_2\}$. Іншими словами,

$$\int\limits^{x_2} f(x)\,dx + \int\limits_{x_1} f(x)\,dx \;=\; \int\limits^{\psi_2(y)} g(y)\,dy + \int\limits_{\psi_1(y)} g(y)\,dy \qquad (6.5)$$

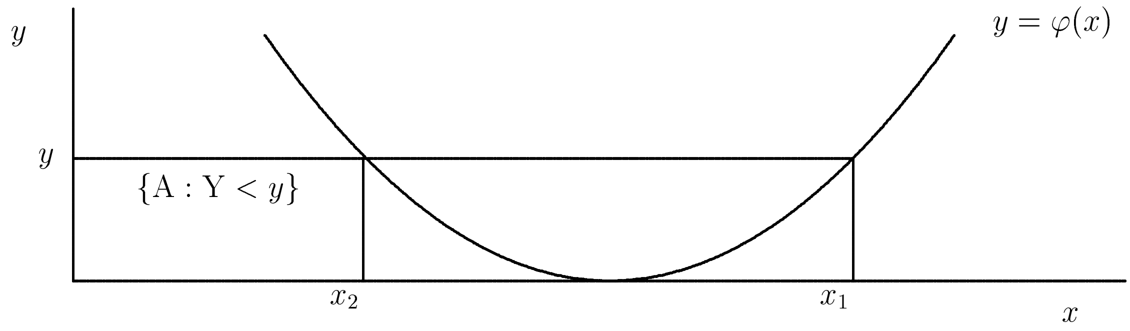


Рисунок 6.2 — До закону розподілу функції випадкового аргументу (немонотонний випадок)

відповідно до закону про збереження інтегральної ймовірності.

Диференціюючи (6.5) щодо змінної x й *складаючи* отримані при цьому диференціальні ймовірністі, одержимо

$$g(y) \;=\; f(\psi_1(y))\,|\psi_1'(y)| + f(\psi_2(y))\,|\psi_2'(y)|. \tag{6.6}$$

У загальному випадку функції $y = \varphi(x)$, що має декілька ділянок монотонності в області припустимих значень, густина випадкової величини Y визначається у вигляді суми такої кількості доданків, скільки значень (при даному y) має обернена функція

$$g(y) \;=\; \sum_{i=1}^{k} f(\psi_i(y))\,|\psi_i'(y)|, \tag{6.7}$$

де $\psi_1(y), \psi_2(y), \cdots, \psi_k(y)$ – значення оберненої функції для даного y.

Таким чином, необхідно кожен раз досліджувати властивості функції прямого перетворення $y = \varphi(x)$.

Приклад

Випадкова величина X має нормальний розподіл з густиною

$$f(x) \;=\; (2\pi)^{-1/2}\exp(-x^2/2), \qquad -\infty < x < \infty.$$

Потрібно знайти густину розподілу $g(y)$ випадкової величини $\mathrm{Y} = \mathrm{X}^2$.

У цьому випадку $y = \varphi(x) = x^2$, тобто $x = \psi(y) = \pm\sqrt{y}$, що дає $dx/dy = \pm 1/(2\sqrt{y})$. Тому $\psi_1'(y) = 1/(2\sqrt{y})$ й $\psi_2'(y) = -1/(2\sqrt{y})$.

Тоді з закону про збереження диференціальної ймовірності випливає, що

$$g(y) \;=\; f(\sqrt{y})/(2\sqrt{y}) + f(-\sqrt{y})/(2\sqrt{y}).$$

Після перетворень знаходимо:

$$g(y) \;=\; (\sqrt{2\pi y})^{-1}\exp(-y/2), \qquad 0 < y < \infty.$$

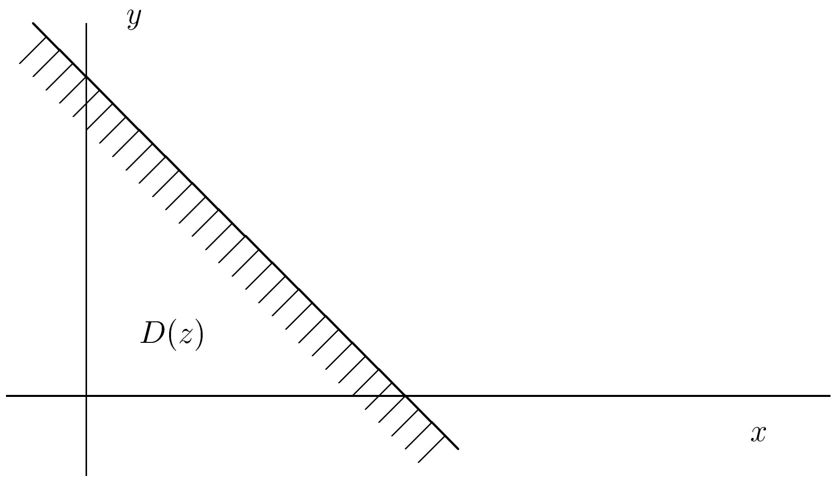


Рисунок 6.3 — До ймовірності влучення на ділянку $D(z)$

6.3. Закон розподілу немонотонної функції декількох випадкових аргументів

Для функції декількох випадкових величин зручніше знаходити не густину розподілу, а їх інтегральну функцію розподілу. Зокрема, для функції двох аргументів $\mathrm{Z} = \varphi(\mathrm{X,Y})$ функція розподілу

$$G(z) \;=\; \iint\limits_{D(z)} f(x,y)\,dx\,dy, \tag{6.8}$$

де $f(x,y)$ – спільна густина системи (X,Y); $D(z)$ – область на площині $x0y$, для якої $\varphi(x,y) \le z$ (рис. 6.3).

Густина $g(z)$ визначається диференціюванням $G(z)$:

$$g(z) \;=\; \frac{d}{dz}\,G(z). \tag{6.9}$$

Густина розподілу ймовірностей суми двох випадкових величин $\mathrm{Z} = \mathrm{X} + \mathrm{Y}$ виражається будь-якою з формул:

$$g(z) \;=\; \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x, z-x)\,dx \tag{6.10a}$$

або

$$g(z) \;=\; \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(z-y, y)\,dy, \tag{6.10b}$$

де $f(x,y)$ – спільна густина розподілу величин X та Y.

Зокрема, коли випадкові величини X та Y є незалежними, тобто $f(x,y) = f_1(x)\cdot f_2(y)$, маємо

$$g(z) \;=\; \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_1(x) f_2(z-x)\,dx \tag{6.11a}$$

або

$$g(z) \;=\; \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_1(z-y) f_2(y)\, dy. \tag{6.11b}$$

У цьому випадку закон розподілу суми $g(z)$ називається *композицією законів* розподілу доданків $f_1(x)$ й $f_2(y)$.

Характеристична функція $\Phi_{\mathrm{Z}}(t)$ композиції $\mathrm{Z} = \mathrm{X} + \mathrm{Y}$ незалежних випадкових величин є добутком парціальних характеристичних функцій

$$\Phi_{\mathrm{Z}}(t) \;=\; \mathrm{M}[\exp(it\mathrm{Z})] \;=\; \mathrm{M}[\exp(it\mathrm{X} + it\mathrm{Y})] \;=\; \Phi_{\mathrm{X}}(t) \cdot \Phi_{\mathrm{Y}}(t). \tag{6.12}$$

6.4. Композиція нормальних випадкових величин

Якщо випадкові величини, підлеглі нормальному закону, піддавати будь-якому лінійному перетворенню, тоді будуть знову одержуватися випадкові нормальні величини.

Зокрема, якщо випадкова величина X розподілена нормально з параметрами m_{X}, σ_{X}, то випадкова величина $\mathrm{Y} = a\mathrm{X} + b$ (де a, b невипадкові) розподілена нормально з параметрами $m_{\mathrm{Y}} = am_{\mathrm{X}} + b$, $\sigma_{\mathrm{Y}} = |a|\sigma_{\mathrm{X}}$.

При композиції двох нормальних законів: $f_1(x)$ *з параметрами* $m_{\mathrm{X}}, \sigma_{\mathrm{X}}$ й $f_2(y)$ *з параметрами* $m_{\mathrm{Y}}, \sigma_{\mathrm{Y}}$ *знову одержується нормальний закон* з параметрами

$$m_{\mathrm{Z}} \;=\; m_{\mathrm{X}} + m_{\mathrm{Y}}; \qquad \sigma^2_{\mathrm{Z}} \;=\; \sigma^2_{\mathrm{X}} + \sigma^2_{\mathrm{Y}}. \tag{6.13}$$

При додаванні двох нормально розподілених випадкових величин X, Y з параметрами $m_{\mathrm{X}}, \sigma_{\mathrm{X}}$, $m_{\mathrm{Y}}, \sigma_{\mathrm{Y}}$ й коефіцієнтом кореляції r_{XY} одержується випадкова величина Z, яка *також розподілена нормально* з параметрами

$$m_{\mathrm{Z}} \;=\; m_{\mathrm{X}} + m_{\mathrm{Y}}; \qquad \sigma^2_{\mathrm{Z}} \;=\; \sigma^2_{\mathrm{X}} + \sigma^2_{\mathrm{Y}} + 2\sigma_{\mathrm{X}}\sigma_{\mathrm{Y}} r_{\mathrm{XY}}. \tag{6.14}$$

Лінійна функція від кількох незалежних нормально розподілених випадкових величин $\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2, \ldots, \mathrm{X}_n$

$$\mathrm{Z} \;=\; \sum_{k=1}^{n} a_k \mathrm{X}_k + b,$$

де $a_1, \ldots, a_n$ та b – невипадкові коефіцієнти, також має нормальний закон розподілу з параметрами

$$m_{\mathrm{Z}} \;=\; \sum_{k=1}^{n} a_k m_{\mathrm{X}_k} + b, \tag{6.15a}$$

$$\sigma^2_{\mathrm{Z}} \;=\; \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \sigma^2_{\mathrm{X}_k}, \tag{6.15b}$$

де $m_{\mathrm{X}_k}, \sigma_{\mathrm{X}_k}$ — параметри випадкової величини X_k $(k = 1, \ldots, n)$.

Характеристична функція $\Phi_{\mathrm{Z}}(t)$ випадкової величини Z така:

$$\Phi_{\mathrm{Z}}(t) \;=\; \mathrm{M}\left[\exp\left(it\sum_{k=1}^{n}\mathrm{X}_k\right)\right] \;=\; \exp\left(it\sum_{k=1}^{n} m_{\mathrm{X}_k} - \frac{1}{2}t^2 \sum_{k=1}^{n} \sigma_{\mathrm{X}_k}\right). \tag{6.16}$$

Якщо доданки X_1, X_2, ..., X_n корельовані, закон розподілу лінійної функції залишається нормальним, але з параметрами

$$m_Z = \sum_{i=1}^{n} a_i m_{X_i} + b, \tag{6.17a}$$

$$\sigma_Z^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sigma_{X_i}^2 + 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n} a_i a_j r_{X_i X_j} \sigma_{X_i} \sigma_{X_j}, \tag{6.17b}$$

де $r_{X_i X_j}$ – коефіцієнт кореляції величин X_i, X_j $(i, j = 1, \ldots, n;\ j \neq i)$.

Композицією двох нормальних законів на площині називають закон розподілу випадкового вектора з двома складовими $X = X_1 + X_2$ та $Y = Y_1 + Y_2$, де (X_1, Y_1), (X_2, Y_2) є двома випадковими векторами, не корельованими між собою, тобто $r_{X_1 X_2} = r_{X_1 Y_2} = r_{Y_1 X_2} = r_{Y_1 Y_2} = 0$.

При композиції двох нормальних законів на площині одержують знову нормальний закон з параметрами

$$m_X = m_{X_1} + m_{X_2}, \qquad \sigma_X^2 = \sigma_{X_1}^2 + \sigma_{X_2}^2, \tag{6.18a}$$

$$m_Y = m_{Y_1} + m_{Y_2}, \qquad \sigma_Y^2 = \sigma_{Y_1}^2 + \sigma_{Y_2}^2. \tag{6.18b}$$

Тому

$$K_{XY} = K_{X_1 Y_1} + K_{X_2 Y_2}, \tag{6.19a}$$

$$r_{XY} = \left(r_{X_1 Y_1}\sigma_{X_1}\sigma_{Y_1} + r_{X_2 Y_2}\sigma_{X_2}\sigma_{Y_2}\right)\left[\left(\sigma_{X_1}^2 + \sigma_{X_2}^2\right)\left(\sigma_{Y_1}^2 + \sigma_{Y_2}^2\right)\right]^{-1/2}. \tag{6.19b}$$

При проектуванні випадкової точки (X,Y), розподіленої на площині щодо нормального закону, на вісь Oz, що проходить крізь центр розсіювання і має кут α з віссю $0x$, одержують випадкову точку Z, розподілену щодо нормального закону з параметрами

$$m_Z = m_X \cos(\alpha) + m_Y \sin(\alpha); \tag{6.20a}$$

$$\sigma_Z^2 = \sigma_X^2 \cos^2(\alpha) + \sigma_Y^2 \sin^2(\alpha) + r_{XY}\sigma_X\sigma_Y \sin(2\alpha). \tag{6.20b}$$

6.5. Композиція двох рівномірно розподілених випадкових величин

Якщо задані дві незалежні випадкові величини X_1 й X_2 з рівномірною густиною розподілу ймовірностей на інтервалі (0,1) кожна, то випадкова величина $X = X_1 + X_2$ має *трикутний розподіл* або *розподіл Сімпсона* (рис. 6.4).

Густина трикутного розподілу

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ x & \text{при } 0 \le x < 1, \\ 2 - x & \text{при } 1 \le x < 2, \\ 0 & \text{при } x \ge 2. \end{cases} \tag{6.21}$$

Така її назва пов'язана з виглядом функції $f_X(x)$.

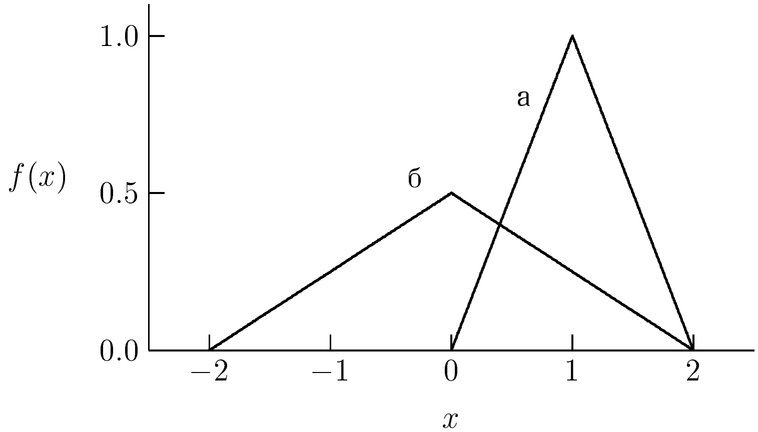


Рисунок 6.4 — Густина $f(x)$ розподілу Сімпсона (трикутний розподіл); а) випадкові величини X_1 та X_2, що визначені на інтервалі [0; 1]; б) – на інтервалі [−1; 1]

Якщо припустити, що при здійсненні обчислень на ЕОМ похибки округлення випадкові й розподілені рівномірно в останньому (відкинутому) розряді, то при підсумовуванні похибка результату має трикутний розподіл.

Якщо незалежні величини X_1 й X_2 рівномірно розподілені на довільному інтервалі $[\alpha, \beta]$ кожна, то композиція $X = X_1 + X_2$ також має трикутний розподіл з густиною

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 2\alpha, \\ (x - 2\alpha)/(\beta - \alpha)^2 & \text{при } 2\alpha \le x < (\alpha + \beta), \\ (2\beta - x)/(\beta - \alpha)^2 & \text{при } (\alpha + \beta) \le x < 2\beta, \\ 0 & \text{при } x \ge 2\beta. \end{cases} \tag{6.22}$$

Зокрема, якщо $\alpha = -1$ й $\beta = 1$, тоді

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < -2, \\ (x + 2)/4 & \text{при } -2 \le x < 0, \\ (2 - x)/4 & \text{при } 0 \le x < 2, \\ 0 & \text{при } x \ge 2. \end{cases} \tag{6.23}$$

6.6. Розподіл χ^2

Нехай $Y_1, Y_2, Y_3, \ldots, Y_n$ – деякі незалежні випадкові величини, що мають нормальний розподіл з параметрами (0,1) кожна. Випадкова величина

$$X = \sum_{k=1}^{n} Y_k^2 \tag{6.24}$$

має *розподіл* χ^2 *із n ступенями вільності.*

Її густина розподілу ймовірностей (рис. 6.5)

$$f(x) = \frac{1}{2^{n/2}\,\Gamma(n/2)}\, x^{n/2-1} \exp(-x/2), \qquad x \ge 0, \tag{6.25}$$

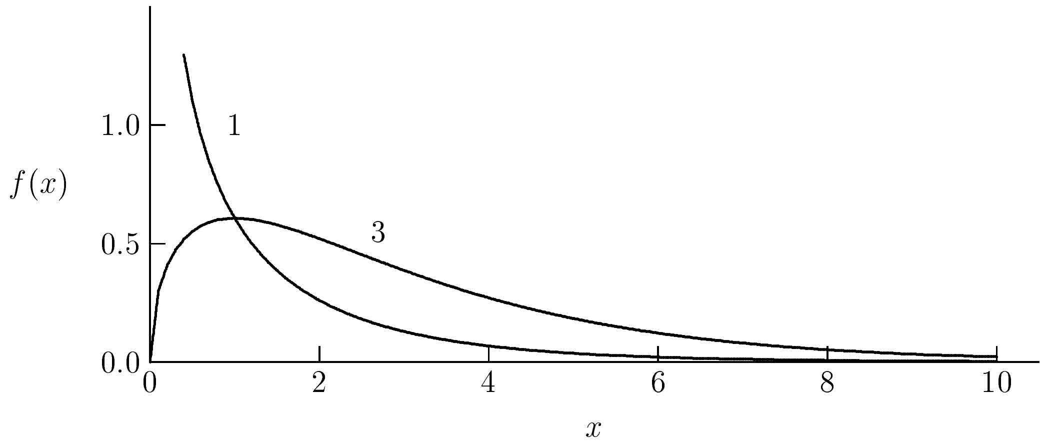


Рисунок 6.5 — Густина розподілу $f(x)$ закону χ^2; $n = 1, 3$

тому

$$\mathrm{M[X]} = n, \qquad \mathrm{D[X]} = 2n. \tag{6.26}$$

Характеристична функція має вигляд

$$q(\lambda) = \mathrm{M}[\exp(i\lambda \mathrm{X})] = (1 - 2i\lambda)^{-n/2}, \tag{6.27}$$

звідки випливає, що композиція $\mathrm{X} = \mathrm{X}_1 + \mathrm{X}_2$ двох випадкових величин, що мають розподіл χ^2 з параметрами n_1 та n_2 відповідно, також розподілена за законом χ^2, але з параметром $n = n_1 + n_2$.

У практиці статистичної обробки експериментальних результатів χ^2-розподіл має численні застосування.

З виразу (6.25) випливає, що розподіл χ^2 являє собою окремий випадок так званого *гамма-розподілу*, густина якого виражається формулою

$$f(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} \exp(-\beta x), \qquad x \geq 0, \tag{6.28}$$

де α та β – позитивні параметри.

6.7. Розподіл Стьюдента

Випадкова величина X має *розподіл Стьюдента* (рис. 6.6) (або t–розподіл) із n ступенямі вільності, якщо

$$f(x) = \frac{\Gamma((n+1)/2)}{\sqrt{\pi n}\,\Gamma(n/2)} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-(n+1)/2}, \qquad -\infty < x < \infty. \tag{6.29}$$

Її математичне сподівання $\mathrm{M[X]} = 0$. Дисперсія $\mathrm{D[X]} = n/(n-2)$, якщо $n > 2$, та $\mathrm{D[X]} = \infty$ для $n \leq 2$.

При $n = 1$ розподіл Стьюдента збігається з розподілом Коші. Розподіл Стьюдента з'являється при перевірці гіпотез про відповідність статистичних властивостей спостережуваних даних обраному ймовірнісному закону.

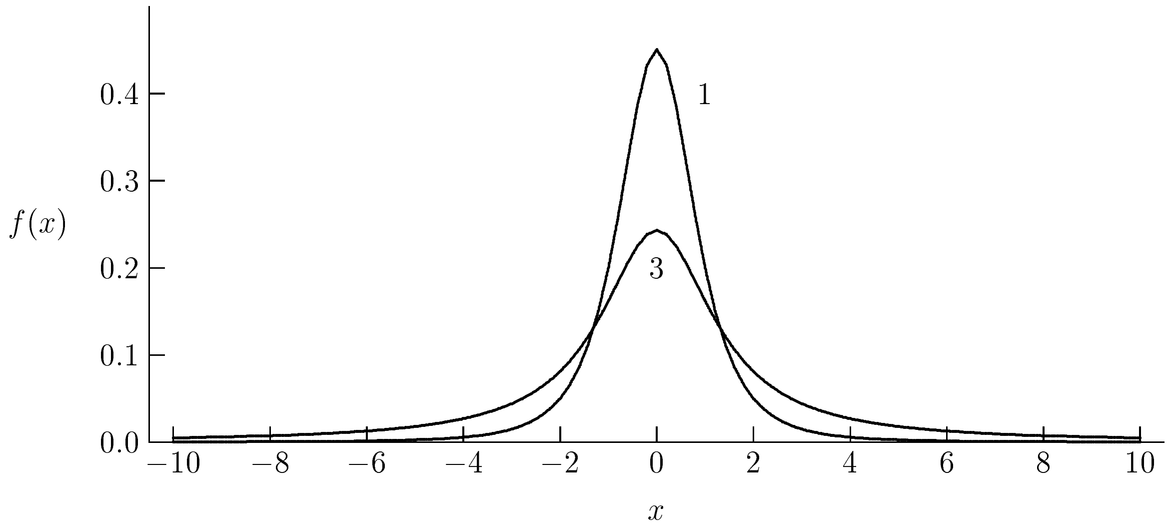


Рисунок 6.6 — Густина $f(x)$ розподілу Стьюдента; $n = 1,\, 3$

6.8. Приклади

Приклад 6.1

Відомо, що випадкова величина Y є лінійною функцією іншої випадкової величини X: $\mathrm{Y} = g(\mathrm{X}) = a\mathrm{X} + b$, де a й b – сталі величини.

Знайти густину ймовірності $f_{\mathrm{Y}}(y)$ величини Y при відомій густині ймовірності $f_{\mathrm{X}}(x)$ випадкової величини X.

Розв'язання

Оскільки обернена функція $x = h(y) = (y - b)/a$ однозначна, то одержуємо

$$f_{\mathrm{Y}}(y) \;=\; \frac{1}{|a|}\, f_{\mathrm{X}}\left(\frac{y-b}{a}\right).$$

Якщо, наприклад, величина X має рівномірну густину ймовірностей в інтервалі $[x_1,\, x_2]$, тоді випадкова величина Y буде розподілена рівномірно в інтервалі $[ax_1 + b,\, ax_2 + b]$.

Якщо величина X має нормальну густину ймовірності

$$f_{\mathrm{X}}(x) \;=\; \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_{\mathrm{X}}} \exp\left(-\frac{(x - m_{\mathrm{X}})^2}{2\sigma_{\mathrm{X}}^2}\right),$$

її лінійна функція також розподілена щодо нормального закону

$$f_{\mathrm{Y}}(x) \;=\; \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_{\mathrm{Y}}} \exp\left(-\frac{(y - m_{\mathrm{Y}})^2}{2\sigma_{\mathrm{Y}}^2}\right),$$

де $m_{\mathrm{Y}} = am_{\mathrm{X}} + b$, $\sigma_{\mathrm{Y}}^2 = a^2\sigma_{\mathrm{X}}^2$.

Таким чином, при лінійному перетворенні випадкової величини її густина ймовірності зсувається на величину b, а масштаби уздовж координатних осей змінюються у a разів.

Приклад 6.2

Випадкова величина X з рівномірною густиною ймовірності

$$f_{\mathrm{X}}(x) \;=\; 1/(b+a), \qquad\qquad -a < x \leq b,$$

підлягає квадратичному перетворенню $\mathrm{Y} = \mathrm{X}^2$.

Визначити: а) функцію розподілу ймовірності $F_{\mathrm{X}}(x)$ випадкової величини X; б) функцію розподілу $F_{\mathrm{Y}}(y)$ й густину ймовірності $f_{\mathrm{Y}}(y)$ випадкової величини Y.

Розв'язання

а) За визначенням

$$F_{\mathrm{X}}(x) \;=\; \Pr(\mathrm{X} < x) \;=\; \int\limits_{-\infty}^{x} f_{\mathrm{X}}(z)\, dz.$$

При $x \leq -a$ маємо $F_{\mathrm{X}}(x) = \Pr\{\mathrm{X} \leq -a\} = 0$.

При $-a < x \leq b$

$$F_{\mathrm{X}}(x) \;=\; \int\limits_{-a}^{x} f_{\mathrm{X}}(z)\, dz \;=\; \frac{1}{b+a} z\Big|_{-a}^{x} \;=\; \frac{x+a}{b+a}.$$

При $x > b$ маємо $F_{\mathrm{X}}(x) = 1$.

б) При квадратичному перетворенні $\mathrm{Y} = \mathrm{X}^2$ функція $y = \varphi(x) = x^2$ ніколи не набуває негативних значень.

Тому $F_{\mathrm{Y}}(y) = \Pr\{\mathrm{Y}< y\} = 0$ при $y \leq 0$.

На інтервалі $[-a,\, a]$ обернена функція $x = \psi(y)$ – двозначна, тобто $x_1 \;=\; \sqrt{y}$, $x_2{=}{-}\sqrt{y}$.

Подія Y< y рівносильна попаданню випадкової величини X у інтервал $[-\sqrt{y},\, \sqrt{y}]$, тобто

$$\Pr\{\mathrm{Y} < y\} \;=\; \Pr\{x_2 < \mathrm{X} < x_1\} \;=$$
$$=\; \Pr\{-\sqrt{y} < \mathrm{X} < \sqrt{y}\} \;=\; \Pr\{\mathrm{X} < \sqrt{y}\} - \Pr\{\mathrm{X} < -\sqrt{y}\}.$$

Отже, при $0 < y \leq a^2$

$$F_{\mathrm{Y}}(y) \;=\; \int\limits_{-a}^{\sqrt{y}} f_{\mathrm{X}}(x)\, dx - \int\limits_{-a}^{-\sqrt{y}} f_{\mathrm{X}}(x)\, dx \;=\; \frac{1}{b+a}\, x\Big|_{-a}^{\sqrt{y}} - \frac{1}{b+a}\, x\Big|_{-a}^{-\sqrt{y}} \;=\; \frac{2\sqrt{y}}{b+a}.$$

На інтервалі $[a,\, b]$ обернена функція $x_2 = \sqrt{y}$ однозначна. Тому

$$F_{\mathrm{Y}}(y) \;=\; \Pr\{\mathrm{Y} < y\} \;=\; \Pr\{-a < \mathrm{X} < a\} + \Pr\{a < \mathrm{X} \leq \sqrt{y}\} \;=$$

$$=\; \frac{2a}{b+a} + \int\limits_{a}^{\sqrt{y}} f_1(x)\, dx \;=\; \frac{2a}{b+a} + \frac{1}{b+a} x\Big|_{a}^{\sqrt{y}} \;=\; \frac{\sqrt{y}+a}{b+a}.$$

Таким чином,

$$F_{\mathrm{Y}}(y) \;=\; \begin{cases} \quad 0 & \text{при } \; y \leq 0, \\ 2\sqrt{y}/(b+a) & \text{при } \; 0 < y \leq a^2, \\ (\sqrt{y}+a)/(b+a) & \text{при } \; a^2 < y \leq b^2, \\ \quad 1 & \text{при } \; y > b^2. \end{cases}$$

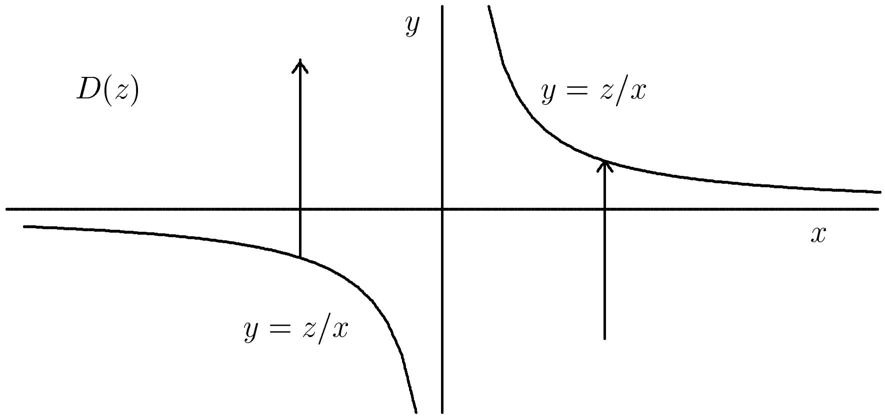


Рисунок 6.7 — Область $D(z)$, яка обмежена на площині $x0y$ гіперболою $y = z/x$; стрілками вказані шляхи інтегрування за y

Тому отримаємо

$$f_{\mathrm{Y}}(y) \;=\; \begin{cases} \quad 0 & \text{при} \quad y \le 0, \\ 1/(\sqrt{y}(b+a)) & \text{при} \quad 0 < y \le a^2, \\ 1/(2\sqrt{y}(b+a)) & \text{при} \quad a^2 < y \le b^2, \\ \quad 0 & \text{при} \quad y > b^2. \end{cases}$$

Приклад 6.3

Випадкові величини X та Y мають густину розподілу $f(x, y)$.

Знайти закон розподілу ймовірностей добутку Z = XY випадкових величин X та Y.

Розв'язання

Скористуємось виразом для інтегральної функції розподілу випадкової величини Z

$$G(z) \;=\; \iint\limits_{D(z)} f(x, y)\, dx\, dy.$$

У цьому виразі $D(z)$ – область на площині $x0y$, для якої виконується умова $xy \le z$ (рис. 6.7).

Для даного фіксованого аргументу z межею області $D(z)$ є гіпербола $y = z/x$, а область, таким чином, локалізована поміж її двома гілками. Зручно розбити площину $x0y$ на дві частини: $x < 0$ та $x > 0$ й розглянути формування області $D(z)$ у кожній з частин. При $x < 0$ змінна інтегрування y змінюється від $y = z/x$ до ∞, відповідно при $x > 0$ маємо $-\infty < y \le z/x$. Тому

$$G(z) \;=\; \int\limits_{-\infty}^{0} \int\limits_{z/x}^{\infty} f(x, y)\, dx\, dy + \int\limits_{0}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{z/x} f(x, y)\, dx\, dy.$$

Густина $g(z)$ визначається диференціюванням $G(z)$:

$$g(z) \;=\; -\int\limits_{-\infty}^{0} x^{-1} f(x, z/x)\, dx + \int\limits_{0}^{\infty} x^{-1} f(x, z/x)\, dx.$$

Хоча в цьому результаті підінтегральні вирази мають особливості при $x = 0$, густина $g(z)$ нормована на одиницю.

Приклад 6.4

Радіус кола R – випадкова величина, розподілена за законом Релея

$$f_{\mathrm{R}}(r) = \frac{r}{\sigma^2}\exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right), \qquad r \ge 0.$$

Знайти закон розподілу $f_{\mathrm{S}}(s)$ площі S кола.

Розв'язання

Функція $\mathrm{S} = \pi \mathrm{R}^2$ на ділянці можливих значень R $(0, \infty)$ монотонна, отже

$$f_{\mathrm{S}}(s) = \frac{1}{2\pi\sigma^2}\exp\left(-\frac{s}{2\pi\sigma^2}\right), \qquad s \ge 0.$$

Тому закон розподілу площі кола є показниковим законом з параметром $(2\pi\sigma^2)^{-1}$.

Приклад 6.5

Нехай U та V – незалежні випадкові величини, рівномірно розподілені на інтервалі [0; 1].

Знайти пару перетворень $\mathrm{X} = \varphi(\mathrm{U}, \mathrm{V})$ та $\mathrm{Y} = \psi(\mathrm{U},\mathrm{V})$, за допомогою яких можна отримати дві нові випадкові величини, розподіл яких нормальний з нульовим математичним сподіванням та з дисперсією σ^2.

Розв'язання

Розглянемо таке перетворення:

$$\mathrm{X} = \varphi(\mathrm{U},\mathrm{V}) = \sigma\sqrt{-2\,\ln(\mathrm{V})}\cos(2\pi\mathrm{U}),$$

$$\mathrm{Y} = \psi(\mathrm{U},\mathrm{V}) = \sigma\sqrt{-2\,\ln(\mathrm{V})}\sin(2\pi\mathrm{U}).$$

Нехай $f_{\mathrm{UV}}(u,v)$ та $f_{\mathrm{XY}}(x,y)$ — спільні густини розподілу пар випадкових величин (U,V) й (X,Y). Оскільки

$$f_{\mathrm{UV}}(u,v)\,du\,dv = f_{\mathrm{XY}}(x,y)\,dx\,dy$$

та згідно з умовою $f_{\mathrm{UV}}(u,v) = 1$, то $f_{\mathrm{XY}}(x,y) = |D(u,v)/D(x,y)|$.

Для обчислення якобіана $|D(u,v)/D(x,y)|$, що виник, величин $\mathrm{U} = \mathrm{U}\ (\mathrm{X},\ \mathrm{Y})$ й $\mathrm{V} = \mathrm{V}\ (\mathrm{X},\ \mathrm{Y})$ знайдемо їх вираз явно:

$$\mathrm{U} = (2\pi)^{-1}\mathrm{arctg}(\mathrm{Y}/\mathrm{X}), \qquad \mathrm{V} = \exp\left(-\frac{\mathrm{X}^2+\mathrm{Y}^2}{2\sigma^2}\right).$$

Обчислюючи якобіан, отримаємо

$$f_{\mathrm{XY}}(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2}\exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}\right) = \rho_{\mathrm{X}}(x)\,\rho_{\mathrm{Y}}(y),$$

де густина $\rho_{\mathrm{X}}(x)$ розподілу ймовірностей випадкової величини X

$$\rho_{\mathrm{X}}(x) \;=\; \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\,\exp\left(-\,\frac{x^2}{2\sigma^2}\right),$$

й аналогічно для випадкової величини Y

$$\rho_{\mathrm{Y}}(y) \;=\; \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\,\exp\left(-\,\frac{y^2}{2\sigma^2}\right).$$

Приклад 6.6

Випадкова величина X розподілена рівномірно в інтервалі [0; 1]. Відомо, що випадкова величина Y пов'язана з X монотонно зростаючою функціональною залежністю $\mathrm{Y} = \varphi(\mathrm{X})$.

Знайти функцію розподілу $G(y)$ та густину $g(y)$ величини Y.

Розв'язання

Маємо $f(x) = 1$ при $x \in (0;\,1)$. Визначимо через $\psi(y)$ функцію, обернену до функції $y = \varphi(x)$. Оскільки, згідно з умовою, $f(x) = 1$ та $\varphi(x)$ монотонно зростає, то $g(y) = f[\psi(y)]\psi'(y) = \psi'(y)$, звідки $G(y) = \psi(y)$, тобто шукана функція розподілу є оберненою у відношенні до функції φ (в області можливих значень величини Y).

Приклад 6.7

На одиничному відрізку наугад вибираються дві точки A та B, після чого будується квадрат зі стороною, рівною довжині відрізка AB.

Визначити закон розподілу $f_{\mathrm{S}}(s)$ площі квадрата.

Розв'язання

Нехай X та Y – координати наугад вибраних точок, тоді випадкова величина $\mathrm{S} = (\mathrm{X} - \mathrm{Y})^2$ – площа квадрата. Будемо шукати її густину розподілу за допомогою формули

$$f_{\mathrm{S}}(s) \;=\; \mathrm{M}[\delta(s - (\mathrm{X}-\mathrm{Y})^2)] \;=\; \int\limits_0^1\!\int\limits_0^1 \delta[s - (x-y)^2\,]\,dx\,dy.$$

Враховуючи симетрію цього виразу відносно x та y, запишемо

$$f_{\mathrm{S}}(s) \;=\; 2\int\limits_0^1 dy \int\limits_0^y \delta\left([\sqrt{s} - (y-x)]\,[\sqrt{s} + (y-x)]\right)\,dx.$$

Другий співмножник під δ-функцією ні для яких y та x не дорівнює нулю, тому замінимо у ньому $(y - x)$ на $\sqrt{s}$:

$$f_{\mathrm{S}}(s) \;=\; 2\int\limits_0^1 dy \int\limits_0^y \delta\left([\sqrt{s} - (y-x)]\,2\sqrt{s}\right)\,dx \;=\; s^{-1/2}\int\limits_0^1 dy \int\limits_0^y \delta[\sqrt{s} - (y-x)]\,dx.$$

Внутрішній інтеграл щодо x дорівнює одиниці, якщо $y \ge \sqrt{s}$, й нулю якщо $y < \sqrt{s}$. Враховуючи фільтруючі властивості δ-функції, отримаємо

$$f_{\mathrm{S}}(s) \;=\; s^{-1/2}\int\limits_{\sqrt{s}}^1 dy \;=\; s^{-1/2} - 1, \qquad 0 < s \le 1.$$

Приклад 6.8

Відома спільна густина імовірностей $f_2(x_1, x_2)$ випадкових величин X_1 та X_2.

Знайти двовимірну густину розподілу ймовірностей $f_2(y_1, y_2)$ випадкових величин Y_1 та Y_2, якщо $\mathrm{Y}_1 = a\mathrm{X}_1 + b\mathrm{X}_2$, $\mathrm{Y}_2 = c\mathrm{X}_1 + d\mathrm{X}_2$, де a, b, c, d – сталі коефіцієнти.

Розв'язання

Якщо визначник системи, складений з коефіцієнтів a, b, c, d, відмінний від нуля, тоді система з двох лінійних алгебраїчних рівнянь

$$y_1 = ax_1 + bx_2, \qquad y_2 = cx_1 + dx_2$$

має однозначний розв'язок: $x_1 = a_1y_1 + b_1y_2$, $x_2 = c_1y_1 + d_1y_2$, де коефіцієнти a_1, b_1, c_1, d_1 виражаються через a, b, c, d.

У даному випадку якобіан перетворення

$$\frac{D(x_1, x_2)}{D(y_1, y_2)} = \frac{1}{\left|\partial y_1/\partial x_1\, \partial y_2/\partial x_2 - \partial y_1/\partial x_2\, \partial y_2/\partial x_1\right|} = \frac{1}{|ad - bc|}.$$

Отже, отримаємо

$$f_2(y_1, y_2) = \frac{1}{|ad - bc|}\, f_2(a_1y_1 + b_1y_2, c_1y_1 + d_1y_2).$$

Приклад 6.9

Випадкові величини X та Y є незалежними та мають густину розподілу ймовірностей

$$f_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_{\mathrm{X}}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_{\mathrm{X}}^2}\right), \qquad f_2(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_{\mathrm{Y}}} \exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma_{\mathrm{Y}}^2}\right).$$

Знайти закон розподілу відношення $\mathrm{Z} = \mathrm{Y}/\mathrm{X}$.

Розв'язання

Функція розподілу $F_{\mathrm{Z}}(z)$ випадкової величини Z

$$F_{\mathrm{Z}}(z) = \iint\limits_D f_1(x)\, f_2(y)\, dx\, dy,$$

де (D) – область на площині $x0y$, що визначається умовою $(y/x) < z$. Якщо $x > 0$, тоді цій умові відповідає $-\infty < y \le (zx)$. Якщо ж $x < 0$, тоді $(zx) \le y < \infty$. Тому

$$F_{\mathrm{Z}}(z) = \int\limits_{-\infty}^{0} dx \int\limits_{zx}^{\infty} f_1(x) f_2(y)\, dy + \int\limits_{0}^{\infty} dx \int\limits_{-\infty}^{zx} f_1(x) f_2(y)\, dy.$$

Отже, густина розподілу ймовірностей $f_{\mathrm{Z}}(z)$ випадкового відношення

$$f_{\mathrm{Z}}(z) = -\int\limits_{-\infty}^{0} x f_1(x) f_2(zx)\, dx + \int\limits_{0}^{\infty} x f_1(x) f_2(zx)\, dx =$$

$$= \int_0^\infty [xf_1(zx)f_2(x) + xf_1(-x)f_2(zx)]\ dx.$$

Підставляючи густини $f_1(x)$ та $f_2(y)$, одержимо після інтегрування:

$$f_{\mathrm{Z}}(z) \ = \ \frac{1}{\pi} \frac{(\sigma_{\mathrm{Y}}/\sigma_{\mathrm{X}})}{z^2 + (\sigma_{\mathrm{Y}}/\sigma_{\mathrm{X}})^2},$$

тобто випадкова величина $\mathrm{Z} = \mathrm{Y}/\mathrm{X}$ розподілена за законом Коші.

Приклад 6.10

Випадкова величина X розподілена за законом Коші з густиною розподілу ймовірностей

$$f_{\mathrm{X}}(x) \ = \ \frac{1}{\pi\,(1 + x^2)}, \qquad\qquad -\infty < x < \infty.$$

Знайти густину $g_{\mathrm{Y}}(y)$ оберненої величини $\mathrm{Y} = 1/\mathrm{X}$.

Розв'язання

Враховуючи, що обернена функція $x = 1/y$ однозначна, та вирішуючи завдання щодо правил для монотонної функції, одержимо

$$g_{\mathrm{Y}}(y) \ = \ \frac{1}{\pi(1 + y^{-2})} \frac{1}{y^2},$$

або

$$g_{\mathrm{Y}}(y) \ = \ \pi^{-1}(1 + y^2)^{-1}.$$

Таким чином, величина, обернена величині, розподіленій за законом Коші, також має розподіл Коші.

Приклад 6.11

Незалежні випадкові величини X_1 та X_2 підпорядковані закону Пуассона з параметрами λ_1 та λ_2 відповідно:

$$\Pr(\mathrm{X}_1 = k) \ = \ \frac{\lambda_1^k}{k\,!} \exp(-\lambda_1), \quad \Pr(\mathrm{X}_2 = k) \ = \ \frac{\lambda_2^k}{k\,!} \exp(-\lambda_2), \quad k = 0, 1, \ldots.$$

Визначити закон розподілу випадкової величини $\mathrm{Y} = \mathrm{X}_1 + \mathrm{X}_2$.

Розв'язання

Вирішимо завдання двома способами: 1) безпосередньо використовуючи закони розподілу випадкових величин; 2) за допомогою апарату характеристичних функцій.

1) Підсумовуючи ймовірності всіх незалежних наслідків, що сприяють здійсненню події $\{\mathrm{Y} = n\}$, можна записати

$$\Pr(\mathrm{Y} = n) \ = \ \sum_{k=0}^{n} \Pr(k) \Pr(n-k) \ = \ \sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda_1^k}{k\,!} \exp(-\lambda_1) \frac{\lambda_2^{(n-k)}}{(n-k)\,!} \exp(-\lambda_2) \ =$$

$$= \ \exp(-\lambda_1 - \lambda_2) \frac{\lambda_2^n}{n\,!} \sum_{k=0}^{n} \frac{n\,!}{k\,!(n-k)\,!} (\lambda_1/\lambda_2)^k \ =$$

$$= \exp(-\lambda_1 - \lambda_2)\,\frac{\lambda_2^n}{n\,!}\,(1 + \lambda_1/\lambda_2)^n \;=\; \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)^n}{n\,!}\,\exp(-\lambda_1 - \lambda_2).$$

2) Визначимо характеристичну функцію випадкової величини X_1:

$$q_{\mathrm{X}_1}(v) \;=\; \mathrm{M}[\mathrm{e}^{ivk}] \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{e}^{ivk}\,\frac{\lambda_1^k}{k\,!}\,\exp(-\lambda_1) \;=\; \exp\Big(-\lambda_1(\mathrm{e}^{iv} - 1)\Big).$$

Аналогічно для випадкової величини X_2: $q_{\mathrm{X}_2}(v) \;=\; \exp\left(-\lambda_2(\mathrm{e}^{iv} - 1)\right)$.

Тоді отримаємо

$$q_{\mathrm{Y}}(v) \;=\; q_{\mathrm{X}_1}(v)\cdot q_{\mathrm{X}_2}(v) \;=\; \exp\Big(-(\lambda_1 + \lambda_2)(\mathrm{e}^{iv} - 1)\Big).$$

Таким чином, з вигляду характеристичної функції випливає, що адитивна випадкова величина $\mathrm{Y} = \mathrm{X}_1 + \mathrm{X}_2$ також підкоряється закону Пуассона з параметром $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$. Цей результат можна узагальнити на суму декількох пуассонівських випадкових величин.

Приклад 6.12

Випадкова величина X підкоряється біноміальному закону розподілу.

Визначити математичне сподівання та дисперсію випадкової величини $\mathrm{Y} = \exp(a\mathrm{X})$, де a – заданий параметр.

Розв'язання

Випадкова величина X може набувати значення 0, 1, 2, ..., m, ..., n. Ймовірність того, що вона набуде певного значення m, визначається формулою $\mathrm{P} = C_n^m p^m q^{n-m}$, де $q = 1 - p$.

Тому

$$\mathrm{M}[\mathrm{Y}] \;=\; \sum_{m=0}^{n} y_m \mathrm{P}_{m,n} \;=\; \sum_{m=0}^{n} \mathrm{e}^{am} C_n^m p^m q^{n-m} \;=\; \sum_{m=0}^{n} C_n^m (p\mathrm{e}^a)^m q^{n-m} \;=\; (q + p\mathrm{e}^a)^n;$$

$$\mathrm{D}[\mathrm{Y}] \;=\; \sum_{m=0}^{n} y_m^2 \mathrm{P}_{m,n} - (\mathrm{M}[\mathrm{Y}])^2 \;=\; \sum_{m=0}^{n} C_n^m \mathrm{e}^{2am} p^m q^{n-m} - (\mathrm{M}[\mathrm{Y}])^2 \;=$$

$$= \sum_{m=0}^{n} C_n^m (p\mathrm{e}^{2a})^m q^{n-m} - (\mathrm{M}[\mathrm{Y}])^2 = \;(q + p\mathrm{e}^{2a})^n - (q + p\mathrm{e}^a)^{2n}.$$

Приклад 6.13 (Закон Сімпсона)

Незалежні дві випадкові величини X та Y рівномірно розподілені на інтервалі $[-1;\,1]$.

Знайти закон розподілу випадкової величини $\mathrm{Z} = \mathrm{X} + \mathrm{Y}$ (рис. 6.8).

Розв'язання

Густина розподілу випадкової величини така:

$$f_{\mathrm{X}}(x) \;=\; \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x < -1, \\ 0,5 & \text{при} \quad -1 \le x \le 1, \\ 0 & \text{при} \quad x > 1, \end{cases}$$

тому для характеристичної функції $q_{\text{x}}(t)$ випадкової величини X маємо

$$q_{\text{x}}(t) \; = \; \mathrm{M}[\mathrm{e}^{it\mathrm{X}}] \; = \; \int\limits_{-1}^{1} \exp(itx)\frac{1}{2}\,dx \; = \; \frac{\exp(it) - \exp(-it)}{2it}.$$

Оскільки

$$\sin(\alpha) \; = \; \frac{1}{2i}\,[\exp(i\alpha) - \exp(-i\alpha)],$$

то

$$q_{\text{x}}(t) \; = \; \sin(t)/t$$

й аналогічно для характеристичної функції $q_{\text{Y}}(t)$ випадкової величини Y.

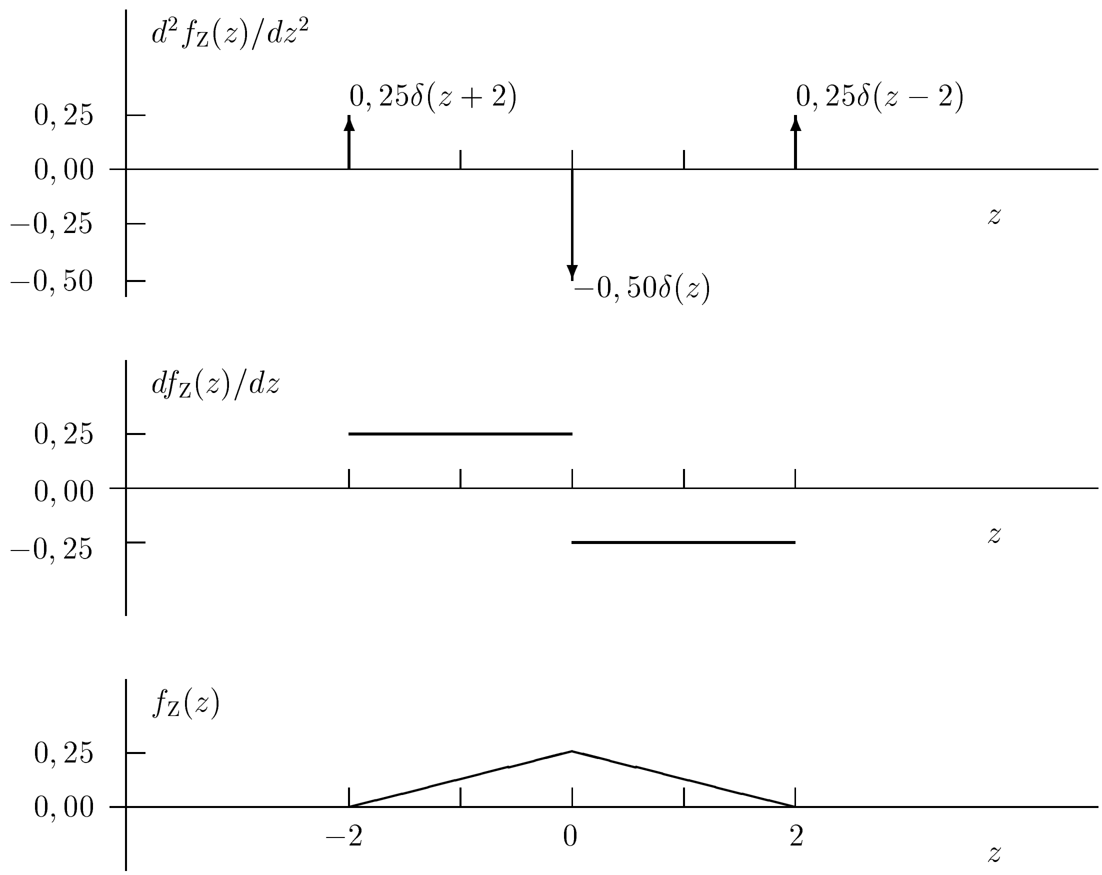


Рисунок 6.8 — До розв'язання задачі про трикутний розподіл

Тому

$$q_{\text{z}}(t) \; = \; \mathrm{M}_{\text{z}}[\mathrm{e}^{it\mathrm{Z}}] \; = \; \mathrm{M}_{\text{XY}}[\mathrm{e}^{it(\mathrm{X}+\mathrm{Y})}] \; = \; \mathrm{M}_{\text{X}}[\mathrm{e}^{it\mathrm{X}}] \cdot \mathrm{M}_{\text{Y}}[\mathrm{e}^{it\mathrm{Y}}] \; = \; \frac{\sin^2(t)}{t^2}.$$

Щодо знайденої характеристичної функції $f_{\text{z}}(t)$ відновимо густину розподілу $f_{\text{z}}(z)$ за формулою

$$f_{\text{z}}(z) \; = \; \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-itz} q_{\text{z}}(t)\,dt \; = \; \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-itz}\,\frac{\sin^2(t)}{t^2}\,dt.$$

Використаємо зображення Фур'є для δ-функції,

$$\delta(\alpha) \;=\; \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{it\alpha}\,dt.$$

Тоді запишемо останній інтеграл у вигляді

$$f_{\mathrm{Z}}(z) \;=\; \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-itz}\,\frac{\exp(2it)-2+\exp(-2it)}{-4t^2}\,dt.$$

Це дає після інтегрування (рис. 6.8)

$$\frac{d^2}{dz^2}\,f_{\mathrm{Z}}(z) \;=\; \frac{1}{4}\,[\delta(z+2)-2\delta(z)+\delta(z-2)].$$

З метою спрощення підінтегрального виразу отримаємо другу похідну

$$\frac{d^2}{dz^2}\,f_{\mathrm{Z}}(z) \;=\; \frac{1}{8\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\mathrm{e}^{it(2-z)}-2\mathrm{e}^{itz}+\mathrm{e}^{-it(2+z)}\right)\,dt.$$

Тепер можна обчислити першу похідну:

$$\frac{d}{dz}\,f_{\mathrm{Z}}\,(z) \;=\; \int\limits_{-\infty}^{z}\frac{d^2}{dz'^2}\,f_{\mathrm{Z}}(z')\,dz' \;=\; \begin{cases} 0 & \text{при} \quad z<-2,\\ 0,5 & \text{при} \quad -2\le z\le 0,\\ -0,5 & \text{при} \quad 0\le z\le 2,\\ 0 & \text{при} \quad z>2.\end{cases}$$

Інтеграл від першої похідної дає такий вираз (трикутний розподіл Сімпсона) для густини розподілу ймовірностей:

$$f_{\mathrm{Z}}(z) \;=\; \int\limits_{-\infty}^{z}\frac{d}{dz'}\,f_{\mathrm{Z}}(z')\,dz' \;=\; \begin{cases} 0 & \text{при} \quad z<-2,\\ 0,25(2+z) & \text{при} \quad -2\le z\le 0,\\ 0,25(2-z) & \text{при} \quad 0\le z\le 2,\\ 0 & \text{при} \quad z>2.\end{cases}$$

Приклад 6.14 (Закон Ерланга)

Знайти закон розподілу композиції двох показникових законів з параметром λ ($\lambda>0$), тобто знайти закон розподілу суми $\mathrm{Z}=\mathrm{X}_1+\mathrm{X}_2$ двох незалежних випадкових величин X_1 та X_2, що мають густину $f_1(x_1) \;=\; \lambda\exp(-\lambda x_1)$ (при $x_1>0$) та $f_2(x_2) \;=\; \lambda\exp(-\lambda x_2)$ (при $x_2>0$).

Розв'язання

З формули (6.11) для композиції розподілу маємо

$$g_{\mathrm{Z}}(z) \;=\; \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_1(x_1)f_2(z-x_1)\,dx_1.$$

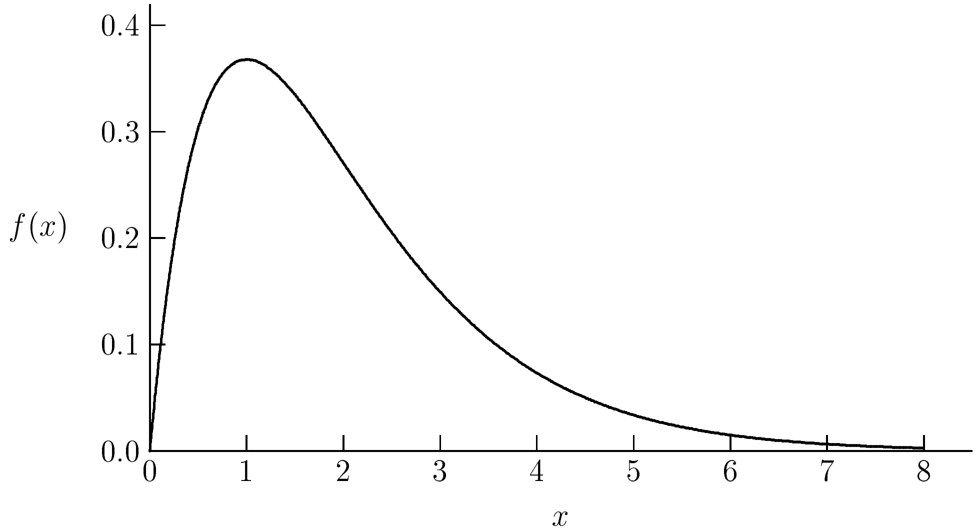


Рисунок 6.9 — Густина розподілу ймовірностей $f(x)$ закону Ерланга 2-го порядку; $\lambda = 1{,}0$

Оскільки функції $f_1(x_1)$ та $f_2(x_2)$ дорівнюють нулю за негативних значень аргументів, інтеграл набуває вигляду

$$g_{\mathrm{Z}}(z) \; = \; \int\limits_0^z f_1(x_1) f_2(z - x_1)\, dx_1.$$

Підставляючи в інтеграл густину $f_1(x_1)$ та $f_2(x_2)$, отримаємо

$$g_{\mathrm{Z}}(z) \; = \; \lambda^2 \int\limits_0^z \exp\left[-\lambda x_1 - \lambda(z - x_1)\right] dx_1 \; = \; \lambda^2 z \exp(-\lambda z), \qquad z > 0.$$

Закон з цією густиною називається *законом Ерланга 2-го порядку* (рис. 6.9). Відповідно, закон з густиною

$$g_{\mathrm{Z}}(z) \; = \; \frac{\lambda^n z^{n-1}}{\Gamma(n)} \exp(-\lambda z), \qquad z > 0, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

називається *законом Ерланга n-го порядку.*

Приклад 6.15 (Логарифмічно нормальний розподіл)

Натуральний логарифм деякої випадкової величини X розподілений за нормальним законом з параметрами m та σ.

Знайти густину розподілу ймовірностей $g(x)$ величини X.

Розв'язання

Визначимо нормально розподілену величину U.

Маємо $\mathrm{U} = \ln(\mathrm{X})$, $\mathrm{X} = \exp(\mathrm{U})$, тому

$$f_{\mathrm{U}}(u) \; = \; \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \exp\left(-\frac{(u - m)^2}{2\sigma^2}\right).$$

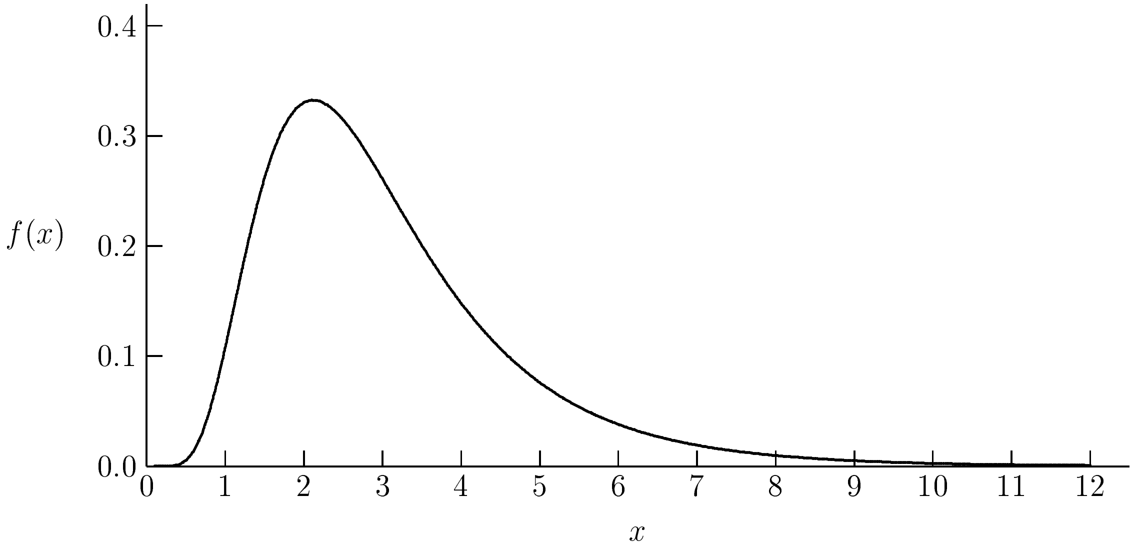


Рисунок 6.10 — Густина розподілу ймовірностей $f(x)$ логнормального закону; $m = 1{,}0$; $\sigma = 0{,}5$

Функція $\exp(u)$ монотонна, тому

$$g_{\mathrm{X}}(x) \;=\; \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma x}\,\exp\left(-\frac{[\ln(x) - m]^2}{2\sigma^2}\right), \qquad x > 0.$$

Такий розподіл величини X називають *логарифмічно нормальним або логнормальним* (рис. 6.10).

Приклад 6.14

Розглянемо дві незалежні випадкові величини X та Y, де $\mathrm{Y} > 0$, з функціями розподілу $F_{\mathrm{X}}(x)$ та $F_{\mathrm{Y}}(y)$, а також густинами розподілу $f_{\mathrm{X}}(x)$ та $f_{\mathrm{Y}}(y)$. Сформуємо на їх основі нову випадкову величину – відношення $\mathrm{T} = \mathrm{X}/\mathrm{Y}$.

Оскільки $\mathrm{Y} \in (0; \infty)$, то густина $f_{\mathrm{Y}}(y)$ зосереджена на осі $(0, \infty)$. Тоді

$$F_{\mathrm{T}}(t) \;=\; \Pr(\mathrm{T} \le t) \;=\; \Pr(\mathrm{X} \le t\mathrm{Y}) \;=\; \int\limits_0^\infty F_{\mathrm{X}}(ty)\, f_{\mathrm{Y}}(y)\, dy.$$

Диференціюючи цю рівність по t, знаходимо, що випадкове відношення $\mathrm{T} = \mathrm{X}/\mathrm{Y}$ має густину

$$f_{\mathrm{T}}(t) \;=\; \int\limits_0^\infty f_{\mathrm{X}}(ty)\, y\, f_{\mathrm{Y}}(y)\, dy.$$

Використовуючи цей результат, наведемо (без доведення) декілька тверджень, які виявляються корисними в теорії оцінювання.

Твердження 1

Нехай X та Y – дві незалежні випадкові величини, підпорядковані експоненціальному закону з параметрами λ та μ відповідно:

$$f_{\mathrm{X}}(x) \;=\; \lambda \exp(-\lambda x), \qquad\qquad x \ge 0,$$

$$f_{\mathrm{Y}}(y) \;=\; \mu \exp(-\mu y), \qquad\qquad y \ge 0.$$

Тоді випадкове відношення $\mathrm{T} = \mathrm{X}/\mathrm{Y}$ має густину

$$f_{\mathrm{T}}(t) \;=\; \frac{\lambda\mu}{(\mu + \lambda\, t)^2}.$$

Твердження 2

Нехай X та Y – дві незалежні випадкові величини, густини розподілу яких відповідають гамма–розподілу з параметрами $(\mu,\, m)$ та $(\lambda,\, n)$ відповідно:

$$f_{\mathrm{X}}(x) \;=\; \frac{\mu^m}{\Gamma(m)}\, x^{m-1} \exp(-\mu x), \qquad\qquad x \ge 0,$$

$$f_{\mathrm{Y}}(y) \;=\; \frac{\lambda^n}{\Gamma(n)}\, y^{n-1} \exp(-\lambda y). \qquad\qquad y \ge 0.$$

Тоді випадкове відношення $\mathrm{T} = \mathrm{X}/\mathrm{Y}$ має густину

$$f_{\mathrm{T}}(t) \;=\; \frac{(\mu/\lambda)^m \Gamma(m+n)}{\Gamma(m)\Gamma(n)}\, t^{m-1}\, \left[1 + (\mu/\lambda)\, t\right]^{-m-n}.$$

Твердження 3

Нехай X – нормальна випадкова величина з нульовим математичним сподіванням і дисперсією σ_{X}^2, а Y – нормальна випадкова величина з нульовим математичним сподіванням та дисперсією σ_{Y}^2.

Тоді випадкове відношення їхніх квадратів $\mathrm{T}^2 = \mathrm{X}^2/\mathrm{Y}^2$ розподілено за законом

$$\Pr(\mathrm{T}^2 \le t) \;=\; \frac{\sigma_{\mathrm{X}}/\sigma_{\mathrm{Y}}}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{\tau}\, \left[1 + \tau\, (\sigma_{\mathrm{X}}/\sigma_{\mathrm{Y}})^2\right]},$$

а густина розподілу випадкової величини T^2 така:

$$f_{\mathrm{T}^2}(t) \;=\; \frac{\sigma_{\mathrm{X}}\sigma_{\mathrm{Y}}}{\sqrt{\pi}}\, \frac{1}{\sqrt{t}\, \left(\sigma_{\mathrm{X}}^2 t + \sigma_{\mathrm{Y}}^2\right)}.$$

Твердження 4

Нехай X – нормальна випадкова величина з математичним сподіванням m_{X} та дисперсією σ_{X}^2, а Y – нормальна випадкова величина з нульовим математичним сподіванням та дисперсією σ_{Y}^2.

Тоді випадкове відношення їхніх квадратів $\mathrm{T}= \mathrm{X}^2/\mathrm{Y}^2$ має густину розподілу:

$$f_{\mathrm{T}}(t) \;=\; \frac{\exp\left(-m_{\mathrm{X}}/2\right)}{\sqrt{\pi\, t}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(m_{\mathrm{X}}/2)^n}{\Gamma(n+1)} (1+t)^{-n-1}.$$

Твердження 5

Нехай $\mathrm{X}_1,\ \mathrm{X}_2,\ \ldots,\ \mathrm{X}_n,\ \mathrm{X}_{n+1}$ – нормальні випадкові величини з нульовим математичним сподіванням та однаковою дисперсією σ^2 кожна.

Тоді випадкове відношення

$$\mathrm{T} \ = \ \mathrm{X}_{n+1}^2 \left(\sum_{m=1}^{n} \mathrm{X}_m^2 \right)^{-1}$$

має таку густину розподілу:

$$f_{\mathrm{T}^2}(t) \ = \ \frac{\exp\left(-m_{\mathrm{X}}/2\right)}{\sqrt{\pi\, t}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(m_{\mathrm{X}}/2)^n}{\Gamma(n+1)} (1+t)^{-n-1}.$$

6.9. Задачі для розв'язання

Задача 6.1

Якому функціональному перетворенню необхідно піддати випадкову величину X, розподілену рівномірно в інтервалі $[0;\,1]$, щоб отримати іншу випадкову величину Y, розподілену за показниковим законом $g(y) = \lambda \exp(-\lambda y)$, $(y > 0,\ \lambda > 0)$?

Відповідь: $\mathrm{Y} = -\lambda^{-1} \ln(1-\mathrm{X})$ або $\mathrm{Y} = -\lambda^{-1} \ln(\mathrm{X})$, $(0< X <1)$.

Задача 6.2

Задано графік густини $f_{\mathrm{X}}(x)$ випадкової величини X.

Побудувати на тому ж графіку густину розподілу ймовірностей $f_{\mathrm{Y}}(y)$ випадкової величини $\mathrm{Y} = \mathrm{X} + q$, а також густину розподілу ймовірностей $f_{\mathrm{Z}}(z)$ випадкової величини $\mathrm{Z} = \mathrm{X} - q$, де q – невипадковий параметр. Написати вираз для $f_{\mathrm{Y}}(x)$ та $f_{\mathrm{Z}}(x)$.

Відповідь: $f_{\mathrm{Y}}(x) \ = \ f_{\mathrm{X}}(x-q)$, $\quad f_{\mathrm{Z}}(x) \ = \ f_{\mathrm{X}}(x+q)$.

Задача 6.3

Задано випадковий вектор (X,Y) з густиною $f_{\mathrm{XY}}(x,y)$.

Знайти густину вектора (U,V), якщо $\mathrm{U} = \mathrm{X} + \mathrm{Y}$, $\mathrm{V} = \mathrm{X} - \mathrm{Y}$.

Відповідь: $f_{\mathrm{UV}}(u,v) = \frac{1}{2} f_{\mathrm{XY}}((u+v)/2, (u-v)/2)$.

Задача 6.4

Довести, що якщо випадкові величини X_1 та X_2 незалежні й $\varphi(x)$ – деяка функція, тоді й випадкові величини $\mathrm{Y}_1 = \varphi(\mathrm{X}_1)$ та $\mathrm{Y}_2 = \varphi(\mathrm{X}_2)$ також незалежні.

Задача 6.5

Випадкова величина X задана густиною розподілу $f(x)$.

Знайти густину випадкових величин $\mathrm{Y} = 2\mathrm{X}$ та $\mathrm{Z} = -2\mathrm{X}$.

Відповідь: $f_{\mathrm{Y}}(y) \ = \ \frac{1}{2}\, f_{\mathrm{X}}(y/2)$; $f_{\mathrm{Z}}(z) \ = \ \frac{1}{2}\, f_{\mathrm{X}}(-z/2)$.

Задача 6.6

Випадкова величина X має густину розподілу $f_{\mathrm{X}}(x)$. Для натурального n знайти густину розподілу випадкової величини $\mathrm{Y} = \mathrm{X}^n$.

Відповідь:
Якщо n непарне, тоді $-\infty < y < \infty$ й

$$f_{\mathrm{Y}}(y) \;=\; n^{-1}\left[f_{\mathrm{X}}(y^{1/n}) + f_{\mathrm{X}}(-y^{1/n})\right]|y|^{-1+1/n}.$$

Якщо n парне, тоді $y \geq 0$ й

$$f_{\mathrm{Y}}(y) \;=\; n^{-1} f_{\mathrm{X}}(y^{1/n})|y|^{-1+1/n}.$$

Задача 6.7
Величини X та Y незалежні й мають характеристичні функції $q_{\mathrm{X}}(t)$ та $q_{\mathrm{Y}}(t)$.
Знайти характеристичну функцію випадкової величини $\mathrm{Z} = \mathrm{X} - \mathrm{Y}$.
Відповідь: $q_{\mathrm{Z}}(t) \;=\; q_{\mathrm{X}}(t) q^{*}_{\mathrm{Y}}(t)$.

Задача 6.8
Довести, що якщо випадкові величини X та Y незалежні й нормально розподілені з параметрами $m_{\mathrm{X}} = m_{\mathrm{Y}} = 0$, $\sigma_{\mathrm{X}} = \sigma_{\mathrm{Y}} = \sigma$, то випадкові величини $\mathrm{U} = \mathrm{X}^2 + \mathrm{Y}^2$ та $\mathrm{V} = \mathrm{X}/\mathrm{Y}$ також незалежні.

Задача 6.9
Випадкова величина X задана густиною розподілу $f(x) = \cos(x)$ в інтервалі $[0, \pi]$; поза цим інтервалом $f(x) = 0$.
Знайти математичне сподівання випадкової величини $\mathrm{Y} = \mathrm{X}^2$.
Відповідь: $\mathrm{M[Y]} \;=\; \mathrm{M[X^2]} \;=\; (\pi^2 - 8)/2$.

Задача 6.10
Двовимірна система випадкових величин (X, Y) має спільну густину розподілу $f(x, y)$.
Знайти густину розподілу ймовірностей $g(z)$ максимальної з цих двох величин: $\mathrm{Z} = \max(\mathrm{X,Y})$.
Відповідь: $g(z) \;=\; \int\limits_{\infty}^{z} f(z, y)\, dy + \int\limits_{\infty}^{z} f(x, z)\, dx.$

Задача 6.11
Два стрільці незалежно один від другого стріляють у тирі. Кожний стріляє по своїй мішені до першого влучення.
Знайти математичне сподівання і дисперсію спільной кількості невлучень, а також функції розподілу кількості невлучень, якщо ймовірність влучення в мішень при кожному пострілі для першого стрільця дорівнює p_1, а для другого p_2.

Задача 6.12
Випадкова величина X рівномірно розподілена на [0, 1].
Довести, що випадкові величини $\mathrm{U} = \sin(2\pi\mathrm{X})$ та $\mathrm{V} = \cos(2\pi\mathrm{X})$ мають однаковий закон розподілу.

Задача 6.13
Випадкова величина X розподілена за показниковим законом з густиною розподілу $f(x) = \lambda \exp(-\lambda x)$.

Яким функціональним перетворенням можна перетворити її у випадкову величину Y, розподілену за законом Коші: $g(y) = [\pi(1+y^2)]^{-1}$?

Відповідь: $\mathrm{Y} = \mathrm{ctg}[\pi \exp(-\lambda \mathrm{X})]$, $(\mathrm{X} > 0)$.

Задача 6.14

Діаметр кола d виміряний наближено. Розглядаючи діаметр d як випадкову величину X, розподілену рівномірно в інтервалі $[a, b]$, знайти математичне сподівання та дисперсію площі круга $\mathrm{S} = \pi \mathrm{X}^2/4$.

Відповідь:

$\mathrm{M[S]} = \pi(b^2 + ab + a^2)/12;$

$\mathrm{D[S]} = \pi^2(b-a)^2(4b^2 + 7ab + 4a^2)/720.$

6.10. Завдання для перевірки

1. Сформулюйте закон розподілу монотонної функції одного випадкового аргументу.
2. Сформулюйте закон розподілу немонотонної функції одного випадкового аргументу.
3. Сформулюйте теорему збереження диференціальної ймовірності.
4. Розкрийте зміст композиції законів розподілу.
5. Сформулюйте закон розподілу суми двох випадкових величин.
6. Сформулюйте закон розподілу різниці двох випадкових величин.
7. Сформулюйте закон розподілу композиції нормальних законів.
8. Покажіть властивості результату лінійного перетворення нормальної випадкової величини.
9. Сформулюйте закон Сімпсона (трикутний розподіл).
10. Вкажіть властивості закону χ^2.
11. Вкажіть властивості розподілу Стьюдента.
12. Вкажіть властивості розподілу Ерланга.

7. Граничні теореми теорії ймовірностей

На практиці важливу роль мають закономірності, які відбуваються з імовірностями, близькими до одиниці. З них особливе значення мають закономірності, що виникають в результаті накладення великої кількості незалежних або слабо залежних випадкових факторів. Накопичений досвід вказує, що явища, які мають імовірність надто близьку до одиниці, майже обов'язково відбуваються. Тому однією з основних задач теорії ймовірностей є встановлення закономірностей, що відбуваються з імовірностями, близькими до одиниці (або до нуля).

Закономірності такого вигляду називають *граничними теоремами теорії ймовірностей*.

Граничні теореми теорії ймовірностей утворюють дві групи:

1) *закон великих чисел* (цей закон звичайно формулюється у формі теорем Я. Бернуллі, Пуассона, Чебишева та Маркова);

2) *центральна гранична теорема* (ця теорема звичайно формулюється у формі теореми Лапласа та теореми Ляпунова).

7.1. Закон великих чисел

Закон великих чисел має декілька форм, кожна з яких встановлює ту чи іншу *стійкість вибіркових середніх* при великій кількості спостережень.

1. Теорема Я. Бернуллі (найпростіша форма закону великих чисел)

При необмеженому збільшенні кількості N незалежних спроб, у кожній з яких подія А з'являється з імовірністю p, частота P_N^* події А збігається за ймовірністю до ймовірності p цієї події:

$$\lim_{N\to\infty} \Pr\left(|P_N^* - p| < \varepsilon \right) \ = \ 1. \tag{7.1}$$

де ε – як завгодно мале позитивне число.

2. Теорема Пуассона

При необмеженому збільшенні кількості N незалежних спроб, в яких подія А з'являється з імовірностями p_1, p_2, …, p_N, частота P_N^* події А збігається за ймовірністю до середньої ймовірності події:

$$\lim_{N\to\infty} \Pr\left(\left| P_N^* - \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} p_n \right| < \varepsilon \right) \ = \ 1. \tag{7.2}$$

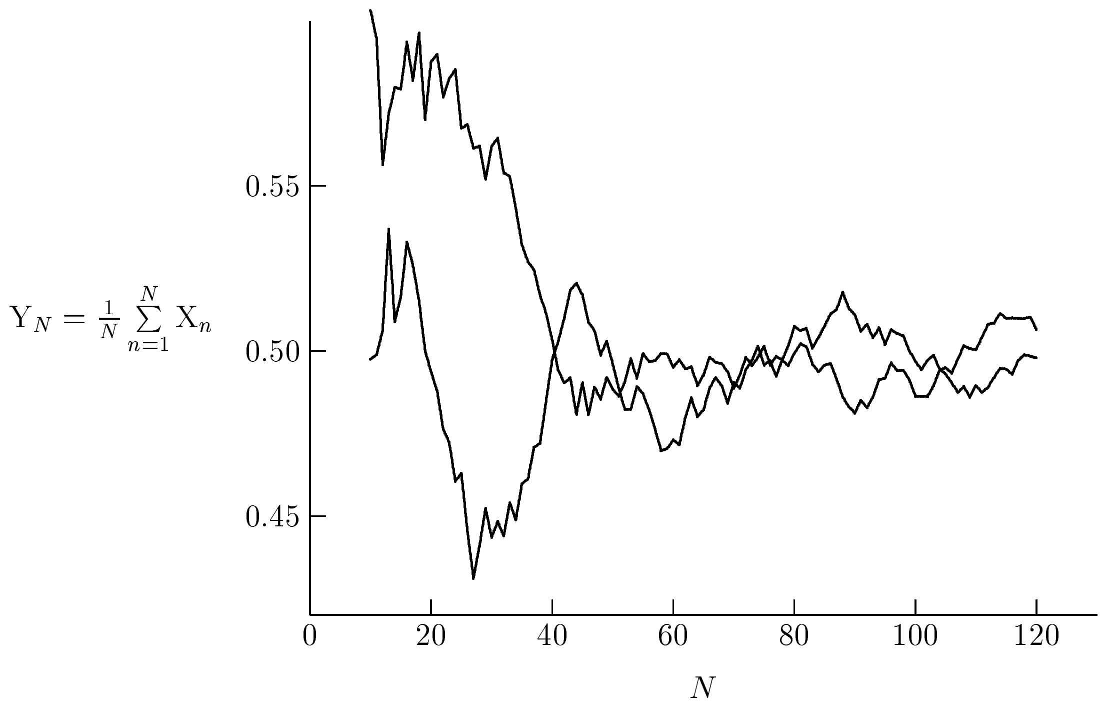


Рисунок 7.1 — Чисельні приклади еволюції вибіркового середнього арифметичного $Y_N = \frac{1}{N}\sum\limits_{n=1}^{N} X_n$ із зростанням кількості випробувань N; незалежні випадкові величини $X_1, X_2, \ldots, X_N$ рівномірно розподілені на $[0;1]$

3. Теорема Чебишева (закон великих чисел)

При необмеженому збільшенні кількості N незалежних спроб, в кожної з яких випадкова величина X з математичним сподіванням m_{X} може набувати якогось значення X_n, де $n = 1, 2, \ldots, N$, середнє арифметичне цих значень збігається за ймовірністю до математичного сподівання випадкової величини X:

$$\lim_{N\to\infty} \Pr\left(\left| \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} X_n - m_{\mathrm{X}} \right| < \varepsilon \right) = 1. \tag{7.3}$$

4. Теорема Маркова (закон великих чисел для різних умов експерименту)

Якщо $X_1, X_2, \ldots, X_N$ – незалежні випадкові величини з математичними сподіваннями $m_{X_1}, m_{X_2}, \ldots, m_{X_N}$ та дисперсіями $D_{X_1}, D_{X_2}, \ldots, D_{X_N}$, причому всі дисперсії обмежені зверху одним й тим же числом L: $D_{X_n} \le L$, де $n = 1, \ldots, N$, то при необмеженому зростанні числа N середнє арифметичне спостережених значень випадкових величин збігається за ймовірністю до середнього арифметичного їх математичних сподівань:

$$\lim_{N\to\infty} \Pr\left(\left| \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} X_n - \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} m_{X_n} \right| < \varepsilon \right) = 1. \tag{7.4}$$

Цю теорему ще часто називають *узагальненою теоремою Чебишова.*

Нехай X – випадкова величина, що рівномірно розподілена на інтервалі [0; 1], а N – кількість незалежних спроб. Розглянемо адитивну випадкову величину

$$\mathrm{Y}_N \;=\; N^{-1} \sum_{n=1}^{N} \mathrm{X}_n$$

та вивчимо тенденцію збіжності із зростанням N.

На рис. 7.1 показано еволюцію вибіркового середнього арифметичного Y_N біля ідеального значення $p = 0{,}5$. З нього видно достатньо повільне наближення вибіркового середнього із зростанням N до свого математичного сподівання p.

7.2. Нерівність Маркова

Якщо у невід'ємної випадкової величини X є математичне сподівання m_{x}, то при певному позитивному ξ має місце нерівність

$$\Pr(\mathrm{X} < \xi) \;\geq\; 1 - \frac{m_{\mathrm{x}}}{\xi}. \tag{7.5}$$

Приклад

Середній термін служби двигуна 4 роки. Оцініть знизу ймовірність того, що цей двигун не прослужить більше 20 років.

Розглянемо випадкову величину X – термін служби двигуна. Із умови задачі випливає, що $m_{\mathrm{x}} = 4$. Потрібно оцінити знизу ймовірність $\Pr(\mathrm{X} < 20)$. Цю ймовірність можна розглядати як ліву частину нерівності Маркова з $\xi = 20$. Тоді

$$\Pr(\mathrm{X} < 20) \;\geq\; 1 - \frac{m_{\mathrm{x}}}{\xi} \;=\; 1 - \frac{4}{20} \;=\; 0,8.$$

Приклад

Сума всіх вкладів у банку дорівнює 2000 \$, а ймовірність того, що випадково взятий вклад не перевищує 100 \$, дорівнює 0,8.

Що можна сказати про кількість вкладників цього банку?

Нехай X – величина випадково обраного вкладу, а N – кількість усіх вкладників. Тоді з умови задачі випливає, що $m_{\mathrm{x}} = 2000/N$.

Оскільки $\Pr(\mathrm{X} < 100) = 0,8$, і за нерівністю Маркова

$$\Pr(\mathrm{X} < 100) \;\geq\; 1 - m_{\mathrm{x}}/100,$$

то

$$0,8 \;\geq\; 1 - \frac{2000}{100\,N}.$$

Звідси

$$\frac{2000}{100\,N} \geq 0,2.$$

Отже, отримаємо

$$N \leq 100.$$

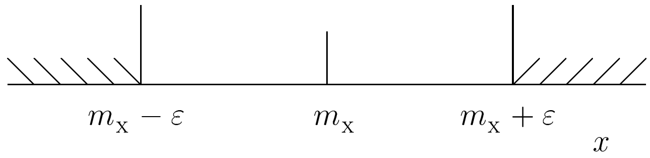


Рисунок 7.2 — До нерівності Чебишова; штрихами вказана ділянка виконання події $|\mathrm{X} - m_\mathrm{X}| \geq \varepsilon$

7.3. Нерівність Чебишева

При оцінці швидкості збіжності за ймовірністю різноманітних середніх до сталих величин можна користуватися нерівністю Чебишова

$$\Pr\left(|\mathrm{X} - m_\mathrm{x}| \geq \varepsilon\right) \;\leq\; \mathrm{D_x}/\varepsilon^2, \tag{7.6}$$

де $\varepsilon > 0$ – деяка задана стала; m_x, $\mathrm{D_x}$ – математичне сподівання та дисперсія випадкової величини X.

На рис. 7.2 показана область, яка відповідає умові $|\mathrm{X} - m_\mathrm{x}| \geq \varepsilon$.

Приклад

Для нормальної випадкової величини X із середнім m_x та дисперсією $\mathrm{D_x} = \sigma^2$ при $\varepsilon = 3\sigma$ з нерівності Чебишева випливає

$$\Pr\left(|\mathrm{X} - m_\mathrm{x}| \geq 3\sigma\right) \;\leq\; \mathrm{D_x}/(3\sigma)^2 \;=\; 1/9.$$

Прямим обчисленням (правило *трьох сигм*) одержуємо

$$\Pr\left(|\mathrm{X} - m_\mathrm{x}| \geq 3\sigma\right) \;\leq\; 0,0027.$$

З цього прикладу можна побачити, що нерівність Чебишова дає відносно приблизну оцінку межі ймовірності. Проте на практиці розв'язання задач, завдяки простоті отримання цієї оцінки, цю нерівність часто застосовують.

7.4. Центральна гранична теорема

Центральна гранична теорема має різноманітні форми, з яких наведемо три.

1. Теорема Лапласа

Якщо робиться N незалежних спроб, у кожній з яких подія A має ймовірність p, то при $N \to \infty$ закон розподілу випадкової величини X — кількість появ події — необмежено наближається до нормального закону з параметрами

$$m \;=\; Np, \qquad \sigma \;=\; \sqrt{Npq}, \qquad (q = 1 - p). \tag{7.7}$$

На підставі цього можна обчислити ймовірність влучення величини X на будь-який інтервал $[\alpha, \beta]$. За достатньо великого N

$$\Pr\left(\mathrm{X} \in (\alpha, \beta)\right) \;\approx\; \Phi\left(\frac{\beta - Np}{\sqrt{Npq}}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - Np}{\sqrt{Npq}}\right), \tag{7.8}$$

де $\Phi(x)$ – функція Лапласа

$$\Phi(x) \;=\; \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^x \exp(-t^2/2)\,dt. \tag{7.9}$$

Замість формули (7.8) часто користуються виразом для ймовірності влучення на інтервал не самої випадкової величини X, а нормованої величини

$$\mathrm{Z} \;=\; (\mathrm{X}-m_{\mathrm{X}})/\sigma \;=\; (\mathrm{X}-Np)/\sqrt{Npq} \tag{7.10}$$

з параметрами $m_{\mathrm{Z}} = 0,\;\; \sigma_{\mathrm{Z}} = 1.$

За достатньо великого N

$$\Pr\{\mathrm{Z}\in(\alpha,\beta)\} \;\approx\; \Phi(\beta)-\Phi(\alpha). \tag{7.11}$$

2. Центральна гранична теорема для однаково розподілених доданків

Якщо $\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2, \ldots, \mathrm{X}_N$ — однаково розподілені незалежні випадкові величини з математичним сподіванням m_{X} й середнім квадратичним відхиленням σ_{X}, то їхня сума $\mathrm{Y}= \sum_{n=1}^{N}\mathrm{X}_n$ за достатньо великого N має наближено нормальний розподіл з параметрами

$$m_{\mathrm{Y}} \;=\; Nm_{\mathrm{X}}, \qquad \sigma_{\mathrm{Y}} \;=\; \sqrt{N}\sigma_{\mathrm{X}}. \tag{7.12}$$

3. Теорема Ляпунова

Якщо $\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2, \ldots, \mathrm{X}_N$ — незалежні випадкові величини, що мають математичні сподівання $m_{\mathrm{X}_1}, m_{\mathrm{X}_2}, \ldots, m_{\mathrm{X}_N}$ та дисперсії $\mathrm{D}_{\mathrm{X}_1}, \mathrm{D}_{\mathrm{X}_2}, \ldots, \mathrm{D}_{\mathrm{X}_N}$, причому виконується обмеження

$$\lim_{N\to\infty}\left[\sum_{n=1}^{N} b_n \left(\sum_{n=1}^{N}\mathrm{D}_{\mathrm{X}_n}\right)^{-3/2}\right] \;=\; 0, \tag{7.13}$$

де $b_n = \mathrm{M}[|\mathrm{X}_n|^3]$, то випадкова величина $\mathrm{Y} = \sum_{n=1}^{N}\mathrm{X}_n$ за достатньо великого N має наближено нормальний розподіл з параметрами

$$m_{\mathrm{Y}} \;=\; \sum_{n=1}^{N} m_{\mathrm{X_n}}, \qquad \sigma_{\mathrm{Y}} \;=\; \left(\sum_{n=1}^{N}\mathrm{D}_{\mathrm{X}_n}\right)^{1/2}. \tag{7.14}$$

Сенс обмеження (7.13) полягає у тому, щоб випадкові величини були порівнянні за порядком.

7.5. Приклади

Приклад 7.1 (Нерівність Чебишева)

Розглянемо випадкову величину X з відомими математичним сподіванням m_{X} та дисперсією D_{X}. Задамо константу ε та розглянемо випадкову подію $\{\mathrm{A}:$ *випадкова величина* X *відрізняється від математичного сподівання* m_{X} *більше, ніж на* $\varepsilon\}$, або $\{\mathrm{A} : |\mathrm{X}-m_{\mathrm{X}}| \geq \varepsilon\}$.

Для ймовірності цієї події маємо

$$\mathrm{Prob(A)} \;=\; \mathrm{Pr}\left(|\mathrm{X} - m_{\mathrm{X}}| \;\geq\; \varepsilon\right) \;=\; \int\limits_{|\mathrm{X}-m_{\mathrm{X}}| \;\geq\; \varepsilon} f_{\mathrm{X}}(x)\, dx,$$

де $f_{\mathrm{X}}(x)$ – густина розподілу випадкової величини X.

В свою чергу для дисперсії $\mathrm{D_X}$ випадкової величини X отримаємо

$$\mathrm{D_X} \;=\; \int\limits_{-\infty}^{\infty} (x - m_{\mathrm{X}})^2 f_{\mathrm{X}}(x)\, dx \;\geq\; \int\limits_{|\mathrm{X}-m_{\mathrm{X}}| \;\geq\; \varepsilon} (x - m_{\mathrm{X}})^2 f_{\mathrm{X}}(x)\, dx.$$

Замінюючи під інтегралом величину $(x - m_{\mathrm{X}})^2$ на ε^2, отримаємо

$$\mathrm{D_X} \;\geq\; \int\limits_{|\mathrm{X}-m_{\mathrm{X}}| \;\geq\; \varepsilon} \varepsilon^2 f_{\mathrm{X}}(x)\, dx \;=\; \varepsilon^2 \;\mathrm{Pr}\left(|\mathrm{X} - m_{\mathrm{X}}| \geq \varepsilon\right).$$

Отже, приходимо до нерівності

$$\mathrm{Pr}\left(|\mathrm{X} - m_{\mathrm{X}}| \geq \varepsilon\right) \;\leq\; \mathrm{D_X}/\varepsilon^2.$$

Приклад 7.2 (Теорема Чебишева)

Розглянемо вибірку обсягом N незалежних випадкових величин X_1, X_2, ..., X_N з одним і тим же законом розподілу, який характеризується параметрами m_{X} та $\mathrm{D_X}$. Нехай Y_N – *арифметичне вибіркове середнє*

$$\mathrm{Y}_N \;=\; \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \mathrm{X}_n.$$

Для випадкової величини Y_N можна записати

$$m_{\mathrm{Y}} \;=\; \mathrm{M}[\mathrm{Y}_N] \;=\; \mathrm{M}\left[\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \mathrm{X}_n\right] \;=\; m_{\mathrm{X}},$$

$$\mathrm{D_Y} \;=\; \mathrm{D}[\mathrm{Y}_N] \;=\; \mathrm{D}\left[\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \mathrm{X}_n\right] \;=\; \frac{1}{N^2}\sum_{n=1}^{N} \mathrm{D}[\mathrm{X}_n] \;=\; \frac{1}{N}\mathrm{D_X}.$$

Задамося деякою позитивною величиною ε. Розглянемо випадкову подію $\{\mathrm{A}:$ *випадкова величина* Y_N *відрізняється від математичного сподівання* m_{Y} *більше, ніж на* $\varepsilon\}$, тобто $\{\mathrm{A} : |\mathrm{Y}_N - m_{\mathrm{Y}}| \geq \varepsilon\}$.

Із нерівності Чебишева, що записана для випадкової величини Y_N, маємо

$$\mathrm{Pr}\left(|\mathrm{Y}_N - m_{\mathrm{Y}}| \geq \varepsilon\right) \;\leq\; \frac{1}{\varepsilon^2}\,\mathrm{D_Y} \;=\; \frac{1}{N\varepsilon^2}\,\mathrm{D_X}.$$

Перейдемо до протилежної події

$$\mathrm{Pr}\left(|\mathrm{Y}_N - m_{\mathrm{Y}}| \leq \varepsilon\right) \;\geq\; \left(1 - \frac{1}{N\varepsilon^2}\,\mathrm{D_X}\right).$$

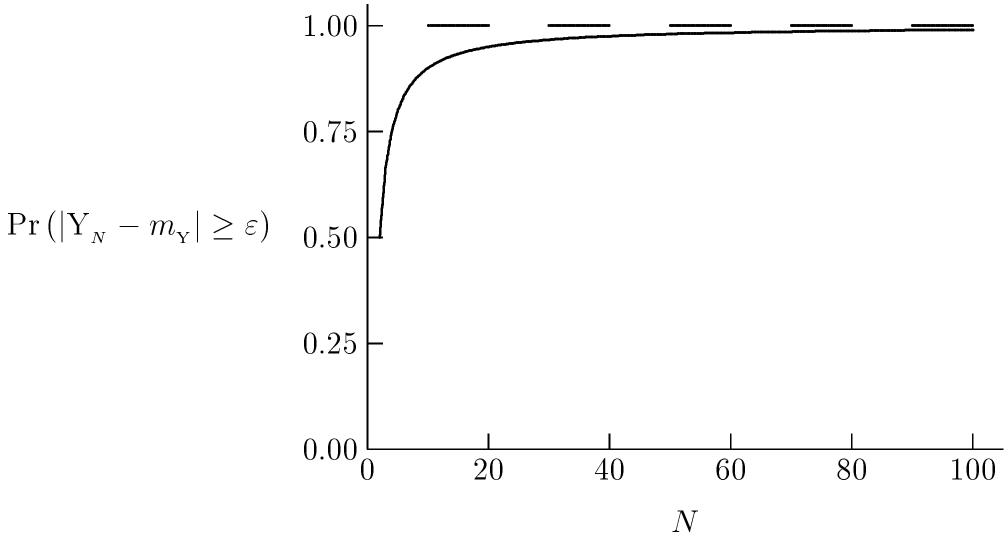


Рисунок 7.3 — До теореми Чебишова

Таким чином, кожному значенню ε можна поставити у відповідність величину δ_N таку, що

$$\delta_N \;=\; \frac{1}{N\varepsilon^2}\,\mathrm{D}_\mathrm{X}.$$

Оскільки завжди виконується

$$\Pr\left(|\mathrm{Y}_N - m_\mathrm{X}| \leq \varepsilon\right) \;\leq\; 1,$$

то можна записати подвійну нерівність (рис. 7.3)

$$1 \;\geq\; \Pr\left(|\mathrm{Y}_N - m_\mathrm{X}| \leq \varepsilon\right) \;\geq\; \left(1 - \frac{1}{N\varepsilon^2}\,\mathrm{D}_\mathrm{X}\right),$$

тобто, для будь-якого значення ε можна поставити у відповідність таку величину N (обсяг вибірки), що ймовірність події, яка розглядається, буде відрізнятися від одиниці не більше, ніж на $\mathrm{D}_\mathrm{X}/(N\varepsilon^2)$.

Тим самим гарантується збіжність за ймовірністю вибіркового середнього Y_N до математичного сподівання m_X величини X, що реєструється.

Приклад 7.3

Імовірність того, що деталь нестандартна, дорівнює $p = 0{,}1$.

Знайти ймовірність того, що серед випадково відібраних 400 деталей відносна частота появи нестандартних деталей відхилиться від імовірності $p = 0{,}1$ за абсолютною величиною не більше, ніж на 0,03.

Розв'язання

З умови прикладу $n = 400$; $p = 0{,}1$; $q = 0{,}9$; $\varepsilon = 0{,}03$.

Нехай m — кількість бракованих виробів. Треба знайти ймовірність події $\{|m/n - p| \leq \varepsilon\}$.

Розглянемо ймовірність цієї події

$$\Pr\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \leq \varepsilon\right) \;=\; \Pr\left(-\varepsilon n < (m - pn) < \varepsilon n\right).$$

Поділимо всі частини другої нерівності на σ. Тоді отримаємо

$$\Pr\left(\left|\frac{m-np}{\sigma}\right| \;\le\; \frac{\varepsilon n}{\sigma}\right) \;\approx\; 2\Phi(\varepsilon n/\sigma).$$

Для даних цього прикладу $\sigma = (npq)^{1/2} = 6$, тому ця ймовірність

$$\Pr\left(\left|\frac{m}{400} - 0,1\right| \le 0,03\right) \;\approx\; 2\,\Phi(2) \;=\; 0,9544.$$

Одержаний результат означає, що якщо взяти достатньо велику кількість проб з 400 деталей у кожній, то приблизно у 95,44 % цих проб відхилення відносної частоти від постійної ймовірності $p = 0{,}1$ за абсолютною величиною не перевищить 0,03.

Приклад 7.4

Випадкова величина ξ має математичне сподівання $\mathrm{M}[\xi] = 1$ та середнє квадратичне відхилення $\sigma = 0{,}2$.

За допомогою нерівності Чебишева оцінити ймовірність випадкової події $\{0,5 \;\le\; \xi \;\le\; 1,5\}$.

Розв'язання

З нерівності Чебишева випливає

$$\Pr\{0,5 \le \xi \le 1,5\} \;=\; \Pr\{|\mathrm{X} - \mathrm{M}[\xi]| \le 0,5\} \;\ge\; 1 - \sigma^2/\,0,5^2 \;=\; 1 - 0,04/0,25 \;=\; 0,84.$$

Приклад 7.5

У випробуванні гральна кость кидається n разів. Нехай m — кількість появ "трійки" у цих киданнях гральної кості. Розглянемо дві протилежні події: $\{\mathrm{A} : |m/n - 1/6| \le 0,01\}$ та $\{\mathrm{B} : |m/n - 1/6| \ge 0,01\}$.

Скільки разів потрібно кидати гральну кость, щоб імовірність $\Pr(\mathrm{A})$ була не меншою імовірності $\Pr(\mathrm{B})$?

Розв'язання

Скористуємось формулою

$$\Pr\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \le \varepsilon\right) \;\approx\; 2\,\Phi\left(\varepsilon\sqrt{n/pq}\right).$$

За умовою $p = 1/6$; $q = 5/6$; $\varepsilon = 0,01$. Імовірність події, протилежній події A, тобто події B,

$$\Pr(\mathrm{B}) \;=\; 1 - \Pr(\mathrm{A}) \;=\; 1 - 2\,\Phi(\varepsilon\sqrt{n/pq}).$$

Згідно з умовою, має виникати нерівність

$$2\,\Phi\left(\varepsilon\sqrt{n/pq}\right) \;\ge\; 1\; - 2\,\Phi\left(\varepsilon\sqrt{n/pq}\right),$$

що дає $\Phi\left(\varepsilon\sqrt{n/pq}\right) \ge 0,25$.

З таблиці для функції Лапласа отримаємо необхіні значення $\Phi(0,67) = 0,2486$ та $\Phi(0,68) = 0,2517$. Виконаємо лінійне інтерполювання, звідки отримаємо

$\Phi(0,6745) = 0,25$. Враховуючи, що функція Лапласа – монотонно зростаюча, знайдемо

$$\varepsilon(n/pq)^{1/2} \geq 0,6745.$$

Звідси отримаємо для кількості кидань гральної кості

$$n \geq pq\left(\frac{0,6745}{\varepsilon}\right)^2 \approx 632.$$

Приклад 7.6

Відомо, що математичне сподівання швидкості повітря на даній висоті дорівнює 25 *км/год*.

Якої швидкості повітря можна очікувати на цій висоті з імовірністю, не меншою ніж 0,9 ?

Розв'язання

Нехай ξ – швидкість повітря. З нерівності Чебишева одержуємо

$$\Pr\{|\xi - 25| \leq \varepsilon\} \geq \left(1 - 4,5^2/\varepsilon^2\right) > 0,9.$$

Звідси випливає, що $\varepsilon > 14{,}2$ *км/год*.

Отже, з імовірністю, більшою ніж 0,9, маємо

$$10,8 \leq \xi \leq 39,2\,\textit{км/год}.$$

Приклад 7.7

У партії $n = 10000$ виробів. Кожний виріб незалежно від інших може бути бракованим з імовірністю $p = 0{,}1$.

Знайти ймовірність того, що випадкова величина – кількість μ бракованих виробів – міститься між $\mu_1 = 970$ й $\mu_2 = 1030$.

Розв'язання

З умови прикладу знайдемо, що значення $npq = 900$.

Скористуємось теоремою Лапласа. Віднімемо $np = 1000$ з трьох частин нерівності $\mu_1 < \mu < \mu_2$, а в нерівності, що виникла, усі члени поділимо на $\sigma = (npq)^{1/2} = 30$:

$$(\mu_1 - np)/\sigma < (\mu - np)/\sigma < (\mu_2 - np)/\sigma.$$

Використовуючи (7.6), одержимо, підставивши дані задачі,

$$\Pr\{(\mu_1 - np)/\sigma < (\mu - np)/\sigma < (\mu_2 - np)/\sigma\} =$$

$$= \Pr\{-1 < (\mu - 1000)/30 < 1\} \approx \Phi(1) - \Phi(-1).$$

Врахуємо зараз, що функція Лапласа непарна, $\Phi(-1) = -\Phi(1)$.

Тому

$$\Pr\{970 < \mu < 1030\} \approx 2\,\Phi(1) = 0,6826.$$

Приклад 7.8

Імовірність появи події у кожному з n незалежних випробувань дорівнює $p = 0,8$.

Скільки потрібно зробити випробувань, щоб з імовірністю 0,9 можна було очікувати, що подія з'явиться не менше 75 разів?

Розв'язання

За умовою $p = 0{,}8$; $q = 0{,}2$; $\alpha = 75$; $\beta = n$, де n – це кількість випробувань.

Скористаємось теоремою Лапласа

$$\Pr\{n \in (\alpha, \beta)\} \approx \Phi\left(\frac{\beta - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - np}{\sqrt{npq}}\right).$$

Підставивши дані прикладу, отримаємо

$$0,9 \approx \Phi\left(\frac{n - 0,8n}{\sqrt{0,16n}}\right) - \Phi\left(\frac{75 - 0,8n}{\sqrt{0,16n}}\right)$$

або

$$0,9 \approx \Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{2}\right) - \Phi\left(\frac{75 - 0,8n}{0,4\sqrt{n}}\right).$$

Очевидно, кількість випробувань $n > 75$, тому $\sqrt{n} > \sqrt{75}/2 \approx 4,33$. Оскільки функція Лапласа – монотонно зростаюча й $\Phi(4) \approx 0,5$, то можна припустити, що $\Phi(0,5\sqrt{n}) = 0{,}5$. Отже,

$$\Phi\left(\frac{75 - 0,8n}{0,4\sqrt{n}}\right) \approx -0,4.$$

З таблиці функцій Лапласа знайдемо, що $\Phi(1,28) = 0{,}4$. Врахуємо тепер, що функція Лапласа непарна. Це дає (замість знака $\approx$ пишемо знак $=$)

$$\frac{75 - 0,8n}{0,4\sqrt{n}} = -1,28.$$

Розв'язуючи отримане рівняння як квадратне відносно $\sqrt{n}$, одержимо, що $\sqrt{n} = 10$.

Отже, кількість випробувань $n = 100$.

Приклад 7.9

Імовірність того, що деталь нестандартна, дорівнює $p = 0{,}1$.

Визначити, яку кількість деталей необхідно відібрати, щоб з імовірністю, що дорівнює 0,9544, можна було стверджувати, що відносна частота появи нестандартних деталей (серед відібраних) відхилиться від постійної ймовірності не більше, ніж на 0,03.

Розв'язання

За умовою $p = 0{,}1$; $q = 0{,}9$; $\varepsilon = 0{,}03$; $\Pr(|m/n - 0,1| \le 0,03) = 0{,}9544$. Треба знайти n. Скористаємось формулою

$$\Pr\left(|m/n - p| \le \varepsilon\right) \approx 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{n/pq}\right).$$

Через умови задачі

$$2\,\Phi\left(0,03\sqrt{\frac{n}{0,1\cdot 0,9}}\right) \;=\; 2\,\Phi(0,1\sqrt{n}) \;=\; 0,9544.$$

Для отримання кількості n отримуємо рівняння $0,1\sqrt{n}=2$, звідки одержуємо кількість деталей $n=400$.

Отриманий результат означає: якщо взяти достатньо велику кількість проб з 400 деталей, то у 95,44% цих проб відносна частота появи нестандартних деталей буде відрізнятися від постійної ймовірності $p=0,1$ за абсолютною величиною не більше, ніж на 0,03; іншими словами, відносна частота буде укладена у межах: від 0,07 (бо $0,1-0,03=0,07$) до 0,13 (бо $0,1+0,03=0,13$). Тобто кількість нестандартних деталей в 95,44% проб буде варіюватися від 28 (7% від 400) до 52 (13% від 400).

Якщо взяти лише одну пробу з 400 деталей, то з великою певністю можна очікувати, що у цій пробі буде нестандартних деталей не менше 28 й не більше 52. Можливо, хоч і малоймовірно, що нестандартних деталей виявиться менше 28 або більше 52.

Приклад 7.10

Відомо, що ймовірність появи події А у кожному з 625 незалежних випробувань дорівнює 0,8.

Знайти ймовірність того, що відносна частота появи події А відхилиться від її ймовірності за абсолютною величиною не більше, ніж на 0,04.

Розв'язання

За умовою прикладу n = 625; p = 0,8; q = 0,2; ε = 0,04. Треба знайти ймовірність $\mathrm{P}=\Pr\{|m/625-0,8|\le 0,04\}$.

Скористуємося формулою

$$\Pr\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|\le\varepsilon\right) \;\approx\; 2\,\Phi\left(\varepsilon\sqrt{n/pq}\right).$$

Підставляючи дані прикладу, отримаємо для шуканої ймовірності значення

$$\mathrm{P} \;=\; 2\,\Phi(2,5) \;\approx\; 0,9876.$$

Приклад 7.11 (Оцінка значення визначенних інтегралів)

Потрібно знайти значення визначенного інтегралу

$$J \;=\; \int\limits_a^b f(x)\,dx. \tag{1}$$

Розв'язання

Нехай вибірка $x_1,x_2,\ldots,x_N$ – послідовність реалізацій випадкової величини X, рівномірно розподіленої на інтервалі $[a,\,b]$. З метою знайти оцінку $\hat{J}_N$ інтегралу (1)

$$\hat{J}_N \;=\; \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(x_n) \tag{2}$$

розглянемо величину, пов'язану з вибіркою обсягом N,

$$Y_N \;=\; \frac{J - \hat{J}_N}{\sqrt{\mathrm{D}[\hat{J}_N]}}.$$

Відповідно з теоремою Лапласа для великих об'ємів вибірки N маємо $Y_N \to \mathrm{Y}$, де Y – нормальна випадкова величина з густиною розподілу ймовірностей

$$f_{\mathrm{Y}}(y) \;=\; \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right).$$

Для дисперсії $\mathrm{D}[\hat{J}_N]$ маємо

$$\mathrm{D}[\hat{J}_N] \;=\; \frac{1}{N}\,\mathrm{D}_1, \tag{3}$$

де D_1 – дисперсія випадкової величини $\hat{J}_1$, тобто вимірювання за один іспит.

Використаємо формулу

$$\Pr(|Y_N| \le \varepsilon) \;=\; 2\,\Phi(\varepsilon),$$

де $\Phi(x)$ – функція Лапласа. Інакше

$$\Pr\left(\frac{\left|J - \hat{J}_N\right|}{\sqrt{\mathrm{D}[\hat{J}_N]}} \;\le\; \varepsilon\right) \;=\; 2\,\Phi(\varepsilon). \tag{4}$$

Введемо *відносну погрішність* δ оцінки інтегралу

$$\delta \;=\; \frac{\left|J - \hat{J}_N\right|}{J}, \tag{5}$$

З виразу (4) маємо

$$\Pr\left(\delta\,\frac{J}{\sqrt{\mathrm{D}[\hat{J}_N]}} \;\le\; \varepsilon\right) \;=\; 2\,\Phi(\varepsilon).$$

Тепер запишемо приблизно

$$\Pr\left(\delta\,\frac{\hat{J}_N}{\sqrt{\mathrm{D}[\hat{J}_N]}} \;\le\; \varepsilon\right) \;\approx\; 2\,\Phi(\varepsilon). \tag{6}$$

Нехай потрібна ймовірність q розглядуваної події дорівнює $q = 0,9$, тоді $2\,\Phi(\varepsilon) = 0,9$ й $\Phi(\varepsilon) = 0,45$. З таблиць функції Лапласа знайдемо, що $\varepsilon = 1,65$, звідки

$$\delta\sqrt{N}\,\frac{\hat{J}_N}{\sqrt{\mathrm{D}[\hat{J}_1]}} \;\approx\; 1,65.$$

Таким чином, для верхньої межі нерівності отримаємо

$$\delta\sqrt{N} \;=\; 1,65\,C, \tag{7}$$

де $C = \sqrt{\mathrm{D}[\hat{J}_1]}/\hat{J}_N$ – стала, що пов'язана з конкретним інтегралом J.

Нехай тепер δ_1 та δ_2 – дві різні відносні погрішності (тобто точності оцінювання), а N_1 та N_2 – пов'язані з ними обсяги вибірок. Тоді

$$\delta_1^2/\delta_1^2 \;=\; N_2/N_1. \tag{8}$$

Якщо, наприклад, $\delta_2 = \delta_1/10$, то

$$N_2 \;=\; N_1\,\frac{\delta_1^2}{\delta_2^2} \;=\; 100N_1.$$

Таким чином, потрібний обсяг вибірки N росте зворотно пропорційно квадрату потрібної точності δ інтегралу, що оцінюється.

7.6. Задачі для розв'язання

Задача 7.1

В математичному приладі сумуються 1000 чисел, кожне з яких округлено з точністю до 0,001. Передбачається, що похибки округлення незалежні та рівномірно розподілені в інтервалі $[-0,005; 0,005]$.

Знайти інтервал, в якому з імовірністю 0,998 міститься сумарна похибка.

Відповідь: (–0,0283; 0,0283).

Задача 7.2

Кількість X сонячних діб за рік для даної місцевості є випадковою величиною з середнім значенням 100 діб і середньоквадратичним відхиленням 20 діб.

Оцінити зверху ймовірність подій $\{$A: X$\geq$ 150$\}$ та $\{$B: X$\geq$ 200$\}$.

Відповідь: P(A) $\leq$ 0,16; P(B) $\leq$ 0,04.

Задача 7.3

Використовуючи нерівність Чебишева, оцінити ймовірність того, що випадкова величина X відхилиться від свого математичного сподівання менше, ніж на три середніх квадратичних відхилення.

Відповідь: $\mathrm{Pr}\{|\mathrm{X} - \mathrm{M}[\mathrm{X}] < \varepsilon\} \;\geq\; 1 - \mathrm{D}[\mathrm{X}]\;/\varepsilon^2$.

Задача 7.4

Оцінити ймовірність того, що відхилення будь-якої випадкової величини від її математичного сподівання буде за абсолютною величиною не більше трьох середніх квадратичних відхилень цієї величини (правило трьох сигм).

Відповідь:

$$\mathrm{Pr}\{|\xi - \mathrm{M}[\xi] \leq 3\sigma\} \;\geq\; 1 - \sigma^2/(9\sigma^2) \;=\; 8/9.$$

Задача 7.5

Електричний прилад складається з 10 незалежно працюючих елементів. Імовірність відмови кожного елемента за час T дорівнює 0,05.

За допомогою нерівності Чебишева оцінити ймовірність того, що абсолютна величина різниці між кількістю елементів, що відмовили, та середньою кількістю (математичним сподіванням) відмов за час T виявиться: а) менше двох; б) не менше двох.

Відповідь:

$\mathrm{M[X]} = 0{,}5$; $\mathrm{D[X]} = 0{,}475$.

а) $\Pr\{|\mathrm{X} - 0,5| < 2\} \geq 1 - 0{,}475\ /\ 4 = 0{,}88$;

б) $\Pr\{|\mathrm{X} - 0,5| > 2\} \leq 1 - 0{,}88 = 0{,}12$.

Задача 7.6

Нехай випадкова величина η розподілена за законом Пуассона з параметром λ. Розглянемо випадкову величину $\xi = (\eta - \lambda)/\sqrt{\lambda}$.

Довести, що при $\lambda \to \infty$ розподіл випадкової величини ξ прямує до нормального закону з параметрами $(0; 1)$.

Задача 7.7

Випадкова величина η є середньою арифметичною 10000 незалежних, однаково розподілених випадкових величин, середнє квадратичне відхилення кожної з яких дорівнює двом.

Яке максимальне відхилення величини η від її математичного сподівання можна очікувати з імовірністю, не меншою 0,9544?

Відповідь:

Нехай α – це максимальне відхилення. Тоді

$$\Pr\left(\left|\frac{1}{10000}\sum_{k=1}^{10000}(\xi_k - \mathrm{M}(\xi_k))\right| \leq \alpha\right) = 0,9544.$$

Тому $\alpha = 0{,}04$.

Задача 7.8

Середнє квадратичне відхилення помилки виміру кута $\sigma = 2°$, математичне сподівання дорівнює нулю.

Оцінити ймовірність P випадкової події {A: помилка при вимірі кута буде понад 5°}.

Відповідь: P = 0,16.

Задача 7.9

У партії з $n = 22500$ виробів кожен виріб незалежно від інших може бути бракованим з імовірністю $p = 1/5$.

Знайти ймовірність того, що кількість μ бракованих виробів знаходиться між 4380 та 4560.

Відповідь:

$$\Pr\{4380 < \mu < 4560\} \approx 0,3413 + 0,4772 = 0,8185.$$

Задача 7.10

Ймовірність появи подій за одне випробування в досліді дорівнює 0,3. З якою ймовірністю можна стверджувати, що частість цієї події при 100 дослідах буде знаходитися в межах від 0,2 до 0,4 ?

Задача 7.12

В експерименті з підкиданням монети виконано n спроб.

Скільки разів потрібно підкидати монету, щоб з імовірністю не менше 0,997 можна було б стверджувати, що кількість m появ герба буде задовольняти нерівності $0,499n \le m \le 0,501n$?

Відповідь : $n = 83300000$.

Задача 7.12

В освітлювальну мережу паралельно включено 20 ламп. Імовірність того, що за час T лампа буде увімкнена, дорівнює 0,8.

Користуючись нерівністю Чебишева, оцінити ймовірність того, що абсолютна величина різниці між кількістю увімкнених ламп X та середньою кількістю (математичним сподіванням) увімкнених ламп за час T виявиться : а) менше трьох; б) не менше трьох.

Відповідь :

а) $\mathrm{Pr}\{|\mathrm{X}-16| < 3\} \ \geq \ 0{,}36$;

б) $\mathrm{Pr}\{|\mathrm{X}-16| \geq 3\} \ \leq \ 0{,}64$.

7.7. Завдання для перевірки

1. Визначіть роль граничних теорем теорії ймовірностей.
2. Сформулюйте закон великих чисел.
3. Сформулюйте центральну граничну теорему теорії ймовірностей.
4. Розкрийте зміст нерівності Маркова.
5. Розкрийте зміст нерівності Чебишева.
6. Розкрийте зміст теореми Ляпунова.
7. Запропонуйте інтерпретацію теореми Я. Бернуллі.
8. Розкрийте зміст теореми Лапласа.
9. Розкрийте зміст теореми Чебишева.
10. Побудуйте приклад практичного застосування центральної граничної теореми теорії ймовірностей.

8. Випадкові процеси

8.1. Випадкові функції

Функція $\mathrm{X}(t)$ називається *випадковою*, якщо її значення при будь-якому аргументі t є випадковою величиною. Приклади випадкових функцій:

$\mathrm{V}(t)$ – напруга електропостачання ЕОМ залежно від часу t;

$\mathrm{T}(h)$ – температура атмосферного повітря у даному пункті у даний момент залежно від висоти h над землею;

$\mathrm{N}(t)$ – число відмов ЕОМ, що траплялися за час від 0 до t.

Поняття випадкової функції є узагальненням поняття випадкової величини. Оскільки випадкову величину X можна розглядати як функцію елементарної події ω: $\mathrm{X}=\varphi(\omega)$ $(\omega \in \Omega)$, де Ω – простір елементарних подій, то випадкову функцію $\mathrm{X}(t)$ можна зобразити у вигляді

$$\mathrm{X}(t) = \varphi(t, \omega), \qquad \omega \in \Omega, \tag{8.1}$$

де t – невипадковий аргумент, T – область визначення функції $\mathrm{X}(t)$.

Реалізацією випадкової функції $\mathrm{X}(t)$ називається конкретний вигляд, якого вона набуває у результаті досліду (коли здійснювалася елементарна подія ω). Наприклад, записуючи за допомогою якогось приладу напругу живлення ЕОМ залежно від часу на дільниці $(0, t)$, одержимо реалізацію $\varphi(t)$ випадкової функції $\mathrm{V}(t)$.

Ряд проведених дослідів, наслідок кожного з яких – випадкова функція $\mathrm{X}(t)$, дасть сукупність реалізацій $x_1(t)$, $x_2(t)$, …, $x_N(t)$ цієї випадкової функції. Реалізації неминуче відрізняються одна від іншої через випадкові причини. Для фіксованого моменту часу t випадкова функція $\mathrm{X}(t)$ перетворюється у звичайну випадкову величину. Ця випадкова величина називається *перетином* випадкової функції.

Якщо розглянути ряд перетинів випадкової функції у тимчасових точках $t_1, t_2, \ldots, t_m$, то буде отриманий m-вимірний випадковий вектор. На практиці, якщо значення випадкової функції реєструються з якимсь інтервалом при значеннях аргументу $t_1, t_2, \ldots, t_N$, ми маємо справу саме з N-вимірним випадковим вектором.

Випадкову функцію $\mathrm{X}(t)$, аргументом якої є час t, звичайно називають *випадковим процесом.* Випадковий процес, що перебігає у фізичній системі S, полягає в тому, що з бігом часу t система S випадковим чином змінює свій стан. Якщо поточний стан системи S у момент t описується однією скалярною випадковою величиною $\mathrm{X}(t)$, то ми маємо справу зі *скалярною випадковою функцією* (скалярним випадковим процесом) $\mathrm{X}(t)$. Якщо поточний стан системи S у момент t описується декількома випадковими величинами $\mathrm{X}_1(t)$, $\mathrm{X}_2(t)$, …, $\mathrm{X}_k(t)$, то ми маємо справу з *векторною випадковою функцією* $\mathrm{V}(t)$ (векторним випадковим процесом) з k складовими: $\mathrm{X}_1(t)$, $\mathrm{X}_2(t)$, $\dots$, $\mathrm{X}_k(t)$.

8.2. Види випадкових процесів

Випадкові процеси діляться на класи за рядом ознак. Випадковий процес, що перебігає у системі S, називається *процесом з дискретним часом*, якщо переходи системи S з одного стану до іншого можливі лише в певні, заздалегідь відомі моменти часу $t_1, t_2, \dots$. Приклади процесу з дискретним часом — ЕОМ, що змінює свої стани у певні моменти часу $t_1, t_2, \dots$, які задаються тактом її роботи; технічний прилад, що оглядається у моменти $t_1, t_2, \dots$ та переводиться у результаті огляду з однієї категорії до іншої.

Випадковий процес з дискретним часом називається також *випадковою послідовністю*. Якщо поточний стан системи S описується однією випадковою величиною X, то випадковий процес є послідовністю випадкових величин $\mathrm{X}(t_1)$, $\mathrm{X}(t_2)$, $\dots$, $\mathrm{X}(t_n), \dots$.

Випадковий процес, що перебігає у системі S, називається *процесом з неперервним часом*, якщо переходи зі стану до стану можуть відбуватися у будь-які випадкові моменти часу, неперервно заповнюючи вісь $0t$ (чи її ділянки). Зразки випадкового процесу з неперервним часом – зміна напруги електропостачання ЕОМ $\mathrm{V}(t)$ чи функціонування технічного приладу, що у випадкові моменти часу виходить з ладу й відбудовується.

Випадковий процес, що перебігає у системі S, називається *процесом з дискретними станами*, якщо число можливих станів системи S скінченне або зчисленне (рис. 8.1 та 8.2).

Приклади:

А) технічний прилад, побудованний з двох вузлів; можливі стани системи: s_1 – обидва вузли пошкоджені; s_2 – пошкоджений перший вузол, непошкоджений другий; s_3 – непошкоджений перший вузол, пошкоджений другий; s_4 – непошкоджені обидва вузли;

Б) передача повідомлень по радіо; випадковий процес $\mathrm{X}(t)$ – кількість невірно переданих символів до моменту t. Цей випадковий процес приймає лише лічильну безліч станів $\{0, 1, \dots, n, \dots\}$ та "підстрибує" на одиницю у момент приймання чергового невірно переданого символу.

Випадковий процес, що перебігає у системі S, називається *процесом з неперервними станами*, якщо безліч можливих станів системи S незліченні (рис. 8.3 та 8.4). Приклади: процес виведення космічного корабля у задане положення відносно Землі; напруга електропостачання ЕОМ $\mathrm{V}(t)$.

За вищезазначеними ознаками випадкові процеси діляться на:

1а) процеси з дискретними станами та дискретним часом;

1б) процеси з дискретними станами та неперервним часом;

2а) процеси з неперервними станами та дискретним часом;

2б) процеси з неперервними станами та неперервним часом.

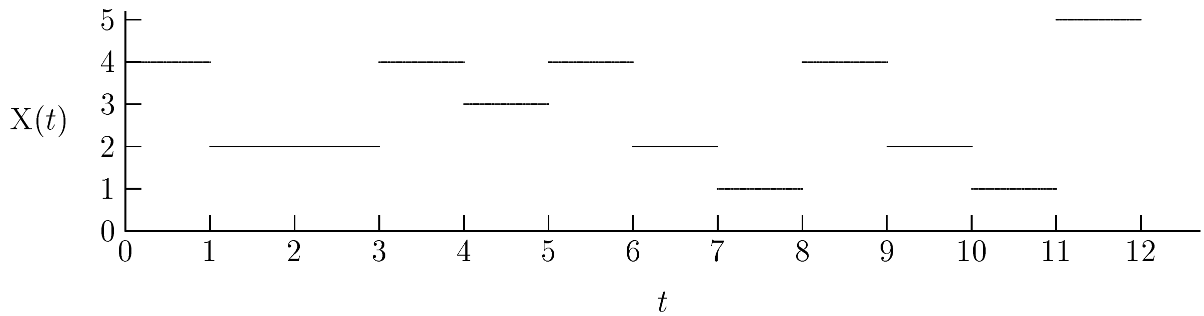


Рисунок 8.1 — Реалізації процесу X(t) типу 1а. П'ять рівноймовірних станів: 1, 2, 3, 4, 5

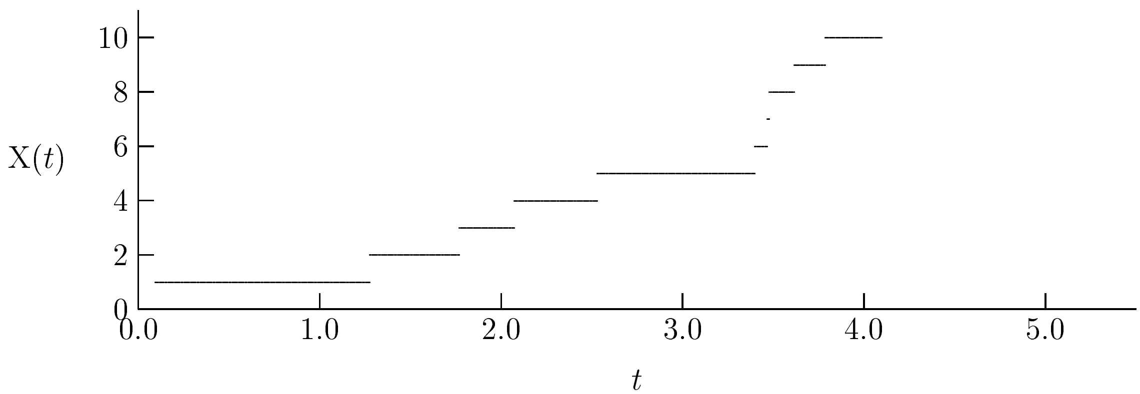


Рисунок 8.2 — Реалізації процесу X(t) типу 1б

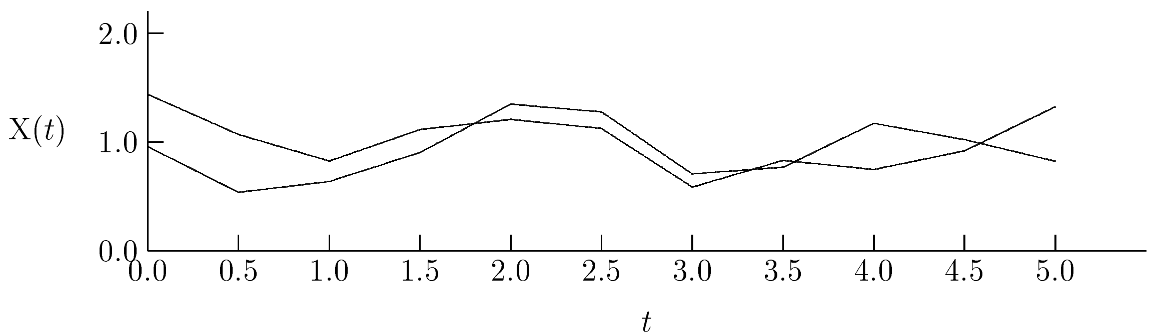


Рисунок 8.3 — Реалізації процесу X(t) типу 2а

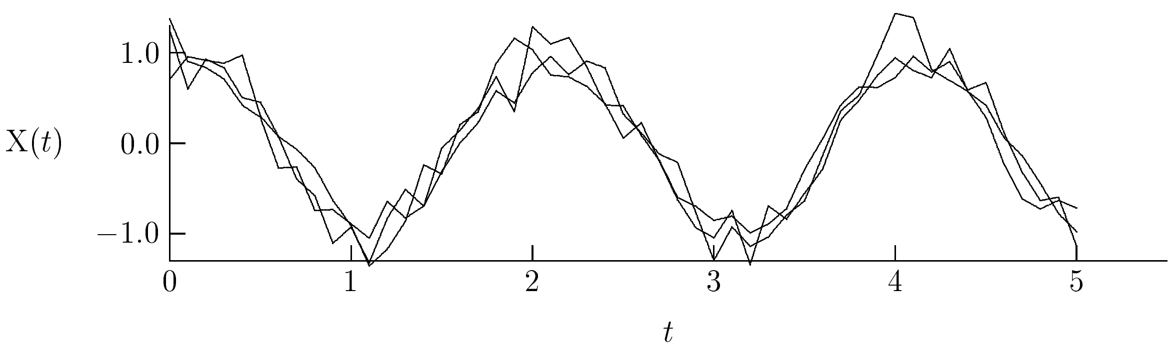


Рисунок 8.4 — Реалізації процесу X(t) типу 2б

Приклади процесу типу 1а. Хтось купив m білетів виграшної позики, що можуть вигравати й погашатися у відомі моменти часу (тиражі) $t_1, t_2, \ldots$; випадковий процес – кількість $\mathrm{X}(t)$ білетів, що виграли до моменту t. Другий приклад: стан оперативної пам'яті ЕОМ; всі можливі стани оперативної пам'яті можуть бути перераховані, та їхні зміни можуть відбуватися у дискретні моменти часу відповідно до такту роботи ЕОМ.

Приклади процесу типу 1б. Прилад може знаходитися у чотирьох станах: s_1 – неввімкнений та непошкоджений; s_2 – ввімкнений та непошкоджений; s_3 – неввімкнений та пошкоджений; s_4 – ввімкнений та пошкоджений.

Приклади процесу типу 2а. У моменти часу $t_1, t_2, \ldots, t_N$ спостерігаються значення $\mathrm{X}(t_1)$, $\mathrm{X}(t_2)$, ..., $\mathrm{X}(t_N)$ неперервної випадкової величини X. Послідовність значень цієї величини – процес $\mathrm{X}(t)$ з неперервними станами та дискретним часом. Наприклад, якщо температура повітря T вимірюється двічі на добу, то послідовність зареєстрованих значень T являє собою випадковий процес з неперервними станами та дискретним часом.

Приклад процесу типу 2б. Процес $\mathrm{V}(t)$ зміни напруги в електромережі живлення ЕОМ в будь-який момент часу t.

8.3. Основні властивості випадкових функцій

Розглянемо ряд характеристик скалярної випадкової функції $\mathrm{X}(t)$.

Одновимірним законом розподілу випадкової функції $\mathrm{X}(t)$ називається закон розподілу перетину $\mathrm{X}(t)$ цієї функції для будь-якого значення аргументу t. Якщо випадкова величина $\mathrm{X}(t)$ неперервна, то цей закон є густиною розподілу перетину $\mathrm{X}(t)$ та позначається $f(x,t)$. Якщо випадкова величина $\mathrm{X}(t)$ дискретна, то одновимірний закон розподілу випадкової функції $\mathrm{X}(t)$ є рядом імовірностей $\Pr(x_i, t)$ того, що у момент t випадкова величина $\mathrm{X}(t)$ набула значення x_i. Для змішаної випадкової величини $\mathrm{X}(t)$ одновимірний закон розподілу задається функцією розподілу $F(x,t) = \Pr\{\mathrm{X}(t) < x\}$. Оскільки функція розподілу є найбільш загальною формою закону розподілу, придатною для будь-яких випадкових величин, можна й для одновимірного закону розподілу користуватися загальним записом $F(x,t)$.

Двовимірним законом розподілу випадкової функції $\mathrm{X}(t)$ називається спільний закон розподілу двох її перетинів $[\,\mathrm{X}(t_1)$ й $\mathrm{X}(t_2)$ для будь-яких значень t_1 і $t_2\,]$. Він є функцією чотирьох аргументів: x_1, x_2, t_1, t_2. Відповідно можна розглянути *n-вимірний закон розподілу*, що залежить від $2n$ аргументів.

Неперервна випадкова функція $\mathrm{X}(t)$ називається *нормальною* функцією, якщо спільний розподіл будь-якого числа n її перетинів, узятих у довільні моменти часу $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$, є n-вимірним нормальним законом.

Математичним сподіванням випадкової функції $\mathrm{X}(t)$ називається невипадкова функція $m_{\mathrm{x}}(t)$, яка при кожному значенні аргументу t являє собою математичне сподівання відповідного перетину випадкової функції

$$m_{\mathrm{x}}(t) \;=\; \mathrm{M}[\mathrm{X}(t)]. \tag{8.2}$$

Кореляційною (або автокореляційною) *функцією* випадкової функції $\mathrm{X}(t)$ називається невипадкова функція двох аргументів $K_{\mathrm{x}}(t,\, t')$, яка при кожній парі значень аргументів t та t' дорівнює кореляційному моменту відповідних перетинів випадкової функції:

$$K_{\mathrm{x}}(t,\, t') \;=\; \mathrm{M}\left[(\mathrm{X}(t) - m_{\mathrm{x}}(t))\,(\mathrm{X}(t') - m_{\mathrm{x}}(t'))\right]. \tag{8.3}$$

При $t' = t$ кореляційна функція перетворюється у дисперсію випадкової функції:

$$K_{\mathrm{x}}(t,\, t) \;=\; \mathrm{D}_{\mathrm{x}}(t) \;=\; \mathrm{D}[\mathrm{X}(t)] \;=\; \sigma^2(t). \tag{8.4}$$

Основні властивості кореляційної функції:

1) $K_{\mathrm{x}}(t,\, t') = K_{\mathrm{x}}(t',\, t)$, тобто функція $K_{\mathrm{x}}(t,\, t')$ не змінюється при заміні t на t' (симетричність);

2) $|K_{\mathrm{x}}(t,\, t')| \le \sigma(t)\sigma(t')$;

3) функція $K_{\mathrm{x}}(t,\, t')$ – позитивно певна,

$$\int\limits_{(B)}\int\limits_{(B)} K_{\mathrm{x}}(t,\, t')\,\varphi(t)\,\varphi(t')\,dt\,dt' \;\ge\; 0, \tag{8.5}$$

де $\varphi(t)$ – будь-яка позитивна функція, (B) – будь-яка область інтегрування, однакова для обох аргументів.

Для нормальної випадкової функції характеристики $m_{\mathrm{x}}(t)$, $K_{\mathrm{x}}(t,\, t')$ є вичерпними і являють собою закон розподілу будь-якого числа перетинів.

Нормованою кореляційною функцією випадкової функції $\mathrm{X}(t)$ називається функція

$$r_{\mathrm{x}}(t,\, t') \;=\; \frac{K_{\mathrm{x}}(t,\, t')}{\sigma_{\mathrm{x}}(t)\,\sigma_{\mathrm{x}}(t')} \;=\; \frac{K_{\mathrm{x}}(t,\, t')}{\sqrt{\mathrm{D}_{\mathrm{x}}(t)\,\mathrm{D}_{\mathrm{x}}(t')}}, \tag{8.6}$$

тобто коефіцієнт кореляції перетинів $\mathrm{X}(t)$ і $\mathrm{X}(t')$.

При $t = t'$ завжди маємо $r_{\mathrm{x}}(t, t') = 1$.

Випадковий процес $\mathrm{X}(t)$ називається *процесом з незалежними прирістами*, якщо для будь-яких значень аргументу $t_1 < t_2 < t_3 < \ldots t_k < t_{k+1}$ випадкові величини приросту функції $\mathrm{X}(t)$

$$\begin{array}{lcl} \mathrm{U}_1 & = & \mathrm{X}(t_2) - \mathrm{X}(t_1), \\ \mathrm{U}_2 & = & \mathrm{X}(t_3) - \mathrm{X}(t_2), \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \mathrm{U}_k & = & \mathrm{X}(t_{k+1}) - \mathrm{X}(t_k) \end{array} \tag{8.7}$$

незалежні.

Нормальний випадковий процес з незалежними прирістами називається *вінеровським випадковим процесом*, якщо його математичне сподівання дорівнює нулю, а дисперсія приросту пропорційна довжині відрізка, на якому вона досягається:

$$m_{\mathrm{x}}(t) \;=\; 0, \qquad \mathrm{D}_{\mathrm{x}}[\mathrm{U}_k] \;=\; a(t_k - t_{k+1}), \tag{8.8}$$

де a – сталий коефіцієнт, $a > 0$.

При доданні до випадкової функції $\mathrm{X}(t)$ невипадкового доданку $\varphi(t)$ до її математичного сподівання додається також невипадковий доданок, а кореляційна функція не змінюється.

При множенні випадкової функції $\mathrm{X}(t)$ на невипадковий множник $\varphi(t)$ її математичне сподівання множиться на той же множник $\varphi(t)$, а кореляційна функція – на $\varphi(t)\,\varphi(t')$.

Якщо випадкову функцію $\mathrm{X}(t)$ піддають деякому перетворенню A_t, то одержується інша випадкова функція $\mathrm{Y}(t) = \mathrm{A}_t\{\mathrm{X}(t)\}$.

Перетворення L_t називається *лінійним однорідним*, якщо

$$L_t\{\sum_{n=1}^{N} \mathrm{X}_n(t)\} \ = \ \sum_{n=1}^{N} L_t\{\mathrm{X}_n(t)\}. \tag{8.9}$$

Таким чином, перетворення суми може виконуватися почленно:

$$L_t\{\beta \mathrm{X}_n(t)\} \ = \ \beta L_t\{\mathrm{X}_n(t)\}, \tag{8.10}$$

тобто множник β не залежить від аргументу t, за яким виконується перетворення, і його можна виносити за знак перетворення.

Якщо випадкова функція $\mathrm{Y}(t)$ пов'язана з випадковою функцією $\mathrm{X}(t)$ лінійним перетворенням $\mathrm{Y}(t) = L_t\{\mathrm{X}(t)\}$, то її математичне сподівання $m_{\mathrm{Y}}(t)$ одержують з $m_{\mathrm{X}}(t)$ *тим же лінійним перетворенням*:

$$m_{\mathrm{Y}}(t) \ = \ L_t\{m_{\mathrm{X}}(t)\}, \tag{8.11}$$

а для знаходження кореляційної функції $\mathrm{K}_{\mathrm{Y}}(t,\, t')$ необхідно *двоpазово* піддати функцію $K_{\mathrm{X}}(t,\, t')$ відповідному *лінійному однорідному перетворенню*: перший раз за t, другий раз за t':

$$K_{\mathrm{Y}}(t,\, t') \ = \ L_t L_{t'}\{K_{\mathrm{X}}(t,\, t')\}. \tag{8.12}$$

Взаємною кореляційною функцією $R_{\mathrm{XY}}(t,\, t')$ двох випадкових функцій $\mathrm{X}(t)$ та $\mathrm{Y}(t)$ називається функція

$$R_{\mathrm{XY}}(t,\, t') \ = \ \mathrm{M}[(\mathrm{X}(t) - m_{\mathrm{X}}(t))(\mathrm{Y}(t') - m_{\mathrm{Y}}(t'))]. \tag{8.13}$$

З визначення взаємної кореляційної функції випливає, що

$$R_{\mathrm{XY}}(t,\, t') \ = \ R_{\mathrm{YX}}(t',\, t). \tag{8.14}$$

Випадкові функції $\mathrm{X}(t)$ та $\mathrm{Y}(t)$ називаються *некорельованими*, якщо виконується $R_{\mathrm{XY}}(t, t') = 0$.

Якщо $\mathrm{Z}(t) = \mathrm{X}(t) + \mathrm{Y}(t)$, то

$$m_{\mathrm{Z}}(t) \ = \ m_{\mathrm{X}}(t) + m_{\mathrm{Y}}(t) \tag{8.15}$$

та

$$K_{\mathrm{Z}}(t,\, t') \ = \ K_{\mathrm{X}}(t,\, t') + K_{\mathrm{Y}}(t,\, t') + R_{\mathrm{XY}}(t,\, t') + R_{\mathrm{XY}}(t', t). \tag{8.16}$$

Якщо випадкові функції $\mathrm{X}(t)$ та $\mathrm{Y}(t)$ некорельовані, то

$$K_{\mathrm{Z}}(t,\, t') \ = \ K_{\mathrm{X}}(t,\, t') + K_{\mathrm{Y}}(t,\, t'). \tag{8.17}$$

Якщо $Z(t) = \sum\limits_{n=1}^{N} X_n(t_n)$, де $X_1(t)$, $X_2(t), \ldots, X_N(t)$ – некорельовані випадкові функції, то

$$m_{\mathrm{Z}}(t) \;=\; \sum_{n=1}^{N} m_{\mathrm{X}_n}(t), \qquad K_{\mathrm{Z}}(t,\, t') \;=\; \sum_{n=1}^{N} K_{\mathrm{X}_n}(t,\, t'). \tag{8.18}$$

Стаціонарною випадковою функцією $X(t)$ називається випадкова функція, математичне сподівання якої є сталою, $m_{\mathrm{X}} = const$, а кореляційна функція залежить лише від різниці її аргументів: $K_{\mathrm{X}}(t, t') = k_{\mathrm{X}}(\tau)$, де $\tau = t - t'$.

Із симетрії кореляційної функції $K_{\mathrm{X}}(t,\, t')$ відносно аргументів випливає, що $k_{\mathrm{X}}(\tau) = k_{\mathrm{X}}(-\tau)$. Таким чином, *кореляційна функція стаціонарної випадкової функції є парною функцією аргументу.*

Дисперсія стаціонарної випадкової функції є сталою:

$$\mathrm{D}_{\mathrm{X}} \;=\; K_{\mathrm{X}}(t,\, t) \;=\; k_{\mathrm{X}}(0) \;=\; const. \tag{8.19}$$

Кореляційна функція стаціонарної випадкової функції має властивість

$$|k_{\mathrm{X}}(\tau)| \;\leq\; \mathrm{D}_{\mathrm{X}}. \tag{8.20}$$

Нормована кореляційна функція стаціонарної випадкової функції

$$r_{\mathrm{X}}(\tau) \;=\; k_{\mathrm{X}}(\tau) \,/\, \mathrm{D}_{\mathrm{X}} \;=\; k_{\mathrm{X}}(\tau) \,/\, k_{\mathrm{X}}(0). \tag{8.21}$$

Спектральною густиною стаціонарної випадкової функції $X(t)$ називається границя відношення дисперсії, яка знаходиться на даному інтервалі частот, до довжини цього інтервалу, коли остання прямує до нуля. Спектральна густина $S_{\mathrm{X}}(\omega)$ і кореляційна функція $k_{\mathrm{X}}(\tau)$ пов'язані перетвореннями Фур'є.

У дійсній формі цей зв'язок має вигляд

$$S_{\mathrm{X}}(\omega) \;=\; \frac{2}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} k_{\mathrm{X}}(\tau) \cos(\omega\tau)\, d\tau. \tag{8.22}$$

У комплексній формі перетворення Фур'є, що пов'язують спектральну густину $S^*_{\mathrm{X}}(\omega)$ і кореляційну функцію $k_{\mathrm{X}}(\tau)$, мають вигляд

$$S^*_{\mathrm{X}}(\omega) \;=\; \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} k_{\mathrm{X}}(\tau) \exp(-i\omega\tau)\, d\tau, \qquad k^*_{\mathrm{X}}(\tau) \;=\; \int\limits_{-\infty}^{\infty} S_{\mathrm{X}}(\omega) \exp(i\omega\tau)\, d\omega. \tag{8.23}$$

Як $S^*_{\mathrm{X}}(\omega)$, так і $S_{\mathrm{X}}(\omega)$ – дійсні, невід'ємні функції; $S^*_{\mathrm{X}}(\omega)$ – парна функція на інтервалі $(-\infty, \infty)$; $S_{\mathrm{X}}(\omega)$ визначена на інтервалі $(0, \infty)$ та на цьому інтервалі $S^*_{\mathrm{X}}(\omega) = 0,5 S_{\mathrm{X}}(\omega)$.

Якщо взаємна кореляційна функція $R_{\mathrm{XY}}(t, t')$ двох стаціонарних випадкових функцій $X(t)$ і $Y(t')$ є функцією лише $\tau = t - t'$, то такі випадкові функції називаються *стаціонарно пов'язаними.* У цьому випадку між взаємною кореляційною функцією $R_{\mathrm{XY}}(\tau)$ та взаємною спектральною густиною $S_{\mathrm{XY}}(\omega)$ існують співвідношення

$$R_{\mathrm{XY}}(\tau) \;=\; \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{i\omega\tau}\, S^*_{\mathrm{XY}}(\omega)\, d\omega, \tag{8.24a}$$

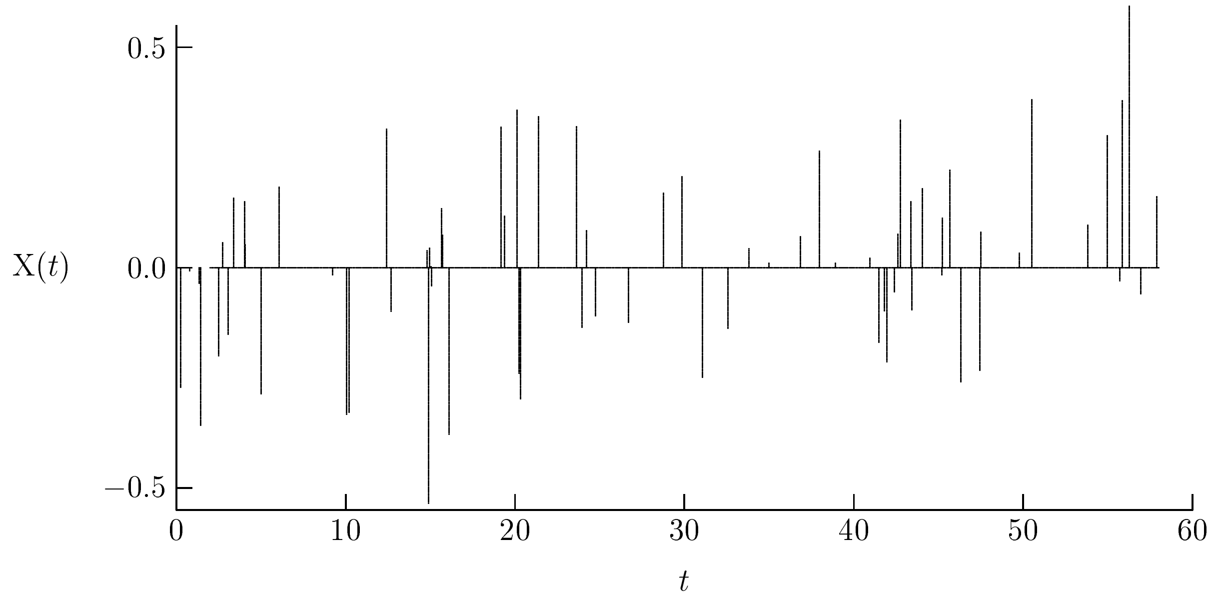


Рисунок 8.5 — Приклад дробового шуму $\mathrm{X}(t)$; $\sigma = 1{,}0$; $\lambda = 0{,}8$

$$S^*_{\mathrm{XY}}(\omega) \;=\; \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-i\omega\tau}\, R_{\mathrm{XY}}(\tau)\, d\tau. \tag{8.24b}$$

Ці співвідношення називають *формулами Вінера-Хінчина.*

8.4. Білий шум

Білим шумом (чи білим шумом у широкому сенсі) називається випадкова функція $\mathrm{X}(t)$, будь-які два різних (скільки завгодно близьких) перетини якої некорельовані та кореляційна функція якої пропорційна дельта–функції:

$$K_{\mathrm{X}}(t,t') \;=\; G(t)\,\delta(t-t'). \tag{8.25}$$

Величина $G(t)$ називається *інтенсивністю білого шуму.*

Стаціонарним білим шумом називається білий шум із сталою інтенсивністю: $G(t) = G = const.$

Кореляційна функція стаціонарного білого шуму є дельтовидною $k_{\mathrm{X}}(\tau) = G\delta(\tau)$, тому його спектральна густина стала:

$$S^*_{\mathrm{X}}(\omega) \;=\; G\,/\,2\pi. \tag{8.26}$$

Дисперсія стаціонарного білого шуму $\mathrm{D_X} = G\delta(0)$, таким чином, нескінченна.

8.5. Дробовий шум

Дробовий шум $\mathrm{X}(t)$ будується таким чином. Він є послідовністю δ-імпульсів вигляду $a_k\delta(t-t_k)$, $k = 1, 2, \ldots$.

Амплітуди цих імпульсів розподілені за нормальним законом з дисперсією σ^2 і нульовим середнім. Часові інтервали $\tau_k = t_k - t_{k-1}$ розподілені за показниковим законом, $f(\tau) = \lambda^{-1}\exp(-\tau/\lambda)$; таким чином, в одиницю часу в середньому відбувається $\mathrm{M}[\tau] = \lambda$ імпульсів, а потужність дробового шуму $W = \lambda\sigma^2$. Приклад реалізації дробового шуму наведено на рис. 8.5.

У межі $\lambda \to 0$, але за умови, що $W = const$, дробовий шум переходить у білий.

8.6. Ергодичність та марковські випадкові процеси

Якщо на вхід стаціонарної лінійної системи, яку можна зобразити за допомогою оператора L, надходить стаціонарна випадкова функція $\mathrm{X}(t)$, то через деякий час, достатній для згасання перехідного процесу, випадкова функція $\mathrm{Y}(t)$ на виході лінійної системи також буде стаціонарною. Спектральні густини вхідного та вихідного сигналів пов'язані співвідношенням

$$S^*_{\mathrm{Y}}(\omega) \;=\; S_{\mathrm{X}}(\omega)\,|\Phi(i\omega)|, \tag{8.27}$$

де $\Phi(i\omega)$ – амплітудно-частотна характеристика лінійної системи.

Кажуть, що стаціонарна функція $\mathrm{X}(t)$ *має ергодичну властивість*, якщо її характеристики $[m_{\mathrm{X}}, k_{\mathrm{X}}(t)]$ можуть бути визначені як відповідні середні щодо часу для однієї достатньо тривалої реалізації. Достатньою умовою ергодичності стаціонарної випадкової функції (за математичним сподіванням) є прямування до нуля її кореляційної функції за $\tau \to \infty$:

$$\lim_{\tau\to\infty} k_{\mathrm{X}}(\tau) \;=\; 0. \tag{8.28}$$

Залежно від того, неперервну або дискретну множину значень приймає випадкова величина $\xi(t)$ та її параметр t в області завдання процесу $[0,\,T]$, розрізняють чотири основних види марковських випадкових процесів:

1а – марковські ланцюги (дискретний процес з дискретним часом),

1б – марковські послідовності (неперервний процес з дискретним часом),

2а – дискретний марковський процес (дискретний процес з неперервним часом),

2б – неперервний марковський процес (неперервний процес з неперервним часом).

Визначальна властивість усіх виглядів марковських процесів полягає ось у чому. *Випадковий процесс* $\xi(t)$ *називається марковським*, якщо для будь-яких n моментів часу $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ з часового відрізка $[0,\,T]$ умовна функція розподілу "останнього" значення $\xi(t_n)$ за фіксованих значеннях $\xi(t_1), \xi(t_2), \ldots, \xi(t_{n-1})$ залежить тільки від $\xi(t_{n-1})$.

За заданих значень $\xi_1,\,\xi_2,\,\ldots,\,\xi_n$ має місце співвідношення

$$\begin{aligned}\Pr\left(\xi(t_n) \le \xi_n | \xi(t_1) \;=\; \xi_1, \ldots, \xi(t_{n-1}) = \xi_{n-1}\right) \;=&\\ =\; \Pr\left(\xi(t_n) \le \xi_n | \xi(t_{n-1}) \;=\; \xi_{n-1}\right).&\end{aligned} \tag{8.29}$$

Для трьох моментів часу формула (8.29) набуває вигляду

$$\Pr\left(\xi(t_i) \le \xi_i | \xi(t_k) = \xi_k, \xi(t_j) = \xi_j\right) \;=\; \Pr\left(\xi(t_i) \le \xi_i | \xi(t_j) = \xi_j\right). \tag{8.30}$$

Тому кажуть, що характерна властивість марковських процесів полягає ось у чому: якщо точно відомий стан марковського процесу у нинішній момент часу t_j, то майбутній стан (за t_i) не залежить від минулого стану (за t_k).

Область значень неперервнозначного марковського процесу $\xi(t)$ і область його визначення $[0, T]$ є неперервними множинами. Для неперервного марковського процесу дифузійного типу густина імовірності переходу задовольняє *рівнянню Фоккера-Планка-Колмогорова.*

Це рівняння має вигляд

$$\frac{\partial}{\partial t} f(\xi, t) \;=\; \frac{\partial}{\partial \xi}[a(\xi, t)\, f(\xi, t)] + \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2}{\partial \xi^2}[b(\xi, t)\, f(\xi, t)]. \tag{8.31}$$

Коефіцієнти знесення $a(\xi, t)$ та дифузії $b(\xi, t)$ визначаються за вхідним стохастичним диференціальним рівнянням, яке описує поведінку розглядуваної системи:

$$a(\xi, t) \;=\; \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t}\, \mathrm{M}\{[\xi(t + \Delta t) - \xi(t)]\xi(t)\}, \tag{8.32}$$

$$b(\xi, t) \;=\; \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t}\, \mathrm{M}\{[\xi(t + \Delta t) - \xi(t)]^2\xi(t)\}. \tag{8.33}$$

Якщо стохастичне диференціальне рівняння має вигляд

$$\frac{d\xi}{dt} \;=\; h(\xi, t) + g(\xi, t)n(t), \qquad \xi(t_0) = \xi_0, \tag{8.34}$$

де $h(\xi, t)$ та $g(\xi, t)$ – детерміновані функції своїх аргументів, $n(t)$ – гауссівський білий шум з нульовим математичним сподіванням та кореляційною функцією

$$\mathrm{M}[n(t_1)\, n(t_2)] \;=\; 0,5\, N_0 \delta(t_1 - t_2), \tag{8.35}$$

то коефіцієнти знесення $a(\xi, t)$ та дифузії $b(\xi, t)$

$$a(\xi, t) \;=\; h(\xi, t) + \frac{1}{4}\,\frac{\partial b(\xi, t)}{\partial \xi}, \qquad b(\xi, t) \;=\; 0,5\, N_0 g^2(\xi, t). \tag{8.36}$$

8.7. Приклади

Приклад 8.1

Знайти одновимірну $f_1(\xi;\, t)$ та двовимірну $f_2(\xi_1, \xi_2;\, t_1, t_2)$ густин розподілу ймовірностей процесу $\xi(t) = \alpha \cos(\omega t) + \beta \sin(\omega t)$. Тут ω – стала кутова частота; α і β – взаємно незалежні гауссівські випадкові величини з нульовими математичними сподіваннями $m_\alpha = m_\beta = 0$ та дисперсіями $\mathrm{D}_\alpha = \mathrm{D}_\beta = \sigma^2$.

Розв'язання

Випадкова величина $\xi = \xi(t)$ за будь-якого фіксованого значення t є лінійною комбінацією гауссівських випадкових величин і тому також є гауссівською. Таким чином, для визначення густин розподілу ймовірностей $f_1(\xi;\, t)$ і $f_2(\xi_1, \xi_2;\, t_1, t_2)$ процесу $\xi(t)$ необхідно визначити його математичне сподівання $m_\xi(t)$ та кореляційну функцію $R_\xi(t_1,\, t_2)$.

Знайдемо математичне сподівання:

$$m_\xi(t) \;=\; \mathrm{M}[\xi(t)] \;=\; \mathrm{M}[\alpha\cos(\omega t) + \beta\sin(\omega t)] \;=\; 0,$$

оскільки з умови $\mathrm{M}[\alpha] = m_\alpha = 0$, $\mathrm{M}[\beta] = m_\beta = 0$.

Для кореляційної функції отримуємо

$$R_\xi(t_1, t_2) \;=\; \mathrm{M}\{[\alpha\cos(\omega t_1) + \beta\sin(\omega t_1)][\alpha\cos(\omega t_2) + \beta\sin(\omega t_2)]\}.$$

Враховуючи, що з умови $\mathrm{M}[\alpha\beta] = \mathrm{M}[\beta\alpha] = 0$, остаточно одержуємо

$$R_\xi(t_1, t_2) \;=\; \sigma^2\cos(\omega t_1 - \omega t_2) \;=\; R_\xi(\tau), \qquad \tau = t_1 - t_2.$$

Таким чином, ці густини розподілу ймовірностей мають вигляд

$$f_1(\xi; t) \;=\; \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\exp\left(-\frac{\xi^2}{2\sigma^2}\right),$$

$$f_2(\xi_1, \xi_2;\, t_1, t_2) \;=\; \frac{1}{2\pi\sigma^2\sqrt{1-\cos^2(\omega\tau)}}\exp\left(-\frac{\xi_1^2 - 2\xi_1\xi_2\cos(\omega\tau) + \xi_2^2}{2\sigma^2(1-\cos^2(\omega\tau))}\right).$$

Приклад 8.2

Визначити, чи має функція

$$R(\tau) \;=\; \sigma^2\exp(-\alpha|\tau|)\left(\mathrm{ch}(\omega_0\tau) + \frac{\alpha}{\omega_0}\mathrm{sh}(\omega_0|\tau|)\right), \qquad \alpha > 0, \quad \omega_0 > 0$$

властивості кореляційної функції.

Розв'язання

Для відповіді на поставлене запитання необхідно перевірити виконання таких умов:

1) $R(0) > 0$; 2) $R(\tau) = R(-\tau)$; 3) $|R(\tau)| \le R(0)$; 4) $S(\omega) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} R(\tau)\mathrm{e}^{-i\omega\tau}\,d\tau \ge 0$.

Позитивна відповідь щодо виконання умов 1 й 2 випливає безпосередньо з аналізу виразу для $R(\tau)$. Для перевірки виконання умови 3 зобразимо функцію $R(\tau)$ у вигляді

$$R(\tau) \;=\; \frac{\sigma^2}{2}\left(\mathrm{e}^{-(\alpha-\omega)\tau}(1 + \alpha/\omega_0) + \mathrm{e}^{-(\alpha+\omega)\tau}(1 - \alpha/\omega_0)\right), \qquad \tau \ge 0.$$

Оскільки $R(0) = \mathrm{D} = \sigma^2$, для виконання умови 3 необхідно, щоб вираз у більших дужках за модулем не був більше 2. Можна показати, що за $\alpha < \omega_0$ ця умова не виконується, бо за $\tau \to \infty$ і $\alpha < \omega_0$ значення $\exp[-(\alpha - \omega_0)\tau]$ необмежено зростає. У випадку $\alpha = \omega_0$ функція $R(\tau) \equiv 1$, та тільки за $\alpha > \omega_0$ умова 3 виконується. До такого ж висновку приводить аналіз виразу для $R(\tau)$ за $\tau < 0$.

Відповідно до формул Вінера-Хінчина одержимо після інтегрування та зведення подібних членів:

$$S(\omega) \;=\; \int\limits_{-\infty}^{\infty} R(\tau)\mathrm{e}^{-i\omega\tau}\,d\tau \;=\; \frac{4\alpha(\alpha^2-\omega_0^2)}{[(\alpha-\omega_0)^2+\omega_0^2][(\alpha+\omega_0)^2+\omega_0^2]}.$$

Звідси випливає, що умова 4 виконується також за $\alpha > \omega_0$. Отже, функція $R(\tau)$, що аналізується, має всі властивості кореляційної функції за $\alpha > \omega_0$.

Приклад 8.3

Знайти кореляційну функцію $R_\xi(\tau)$ та спектральну густину $S_\xi(\omega)$ для стаціонарного випадкового сигналу $\xi(t) = A_m \sin(\omega_0 t + \varphi)$, де A_m і ω_0 – сталі амплітуда та кутова частота; φ – випадкова початкова фаза, рівномірно розподілена на інтервалі $(-\pi,\pi)$.

Розв'язання

Щодо визначення кореляційної функції маємо

$$R_\xi(\tau) \;=\; \mathrm{M}[\xi(t)\xi(t+\tau)] - m_\xi^2.$$

Оскільки

$$m_\xi \;=\; \mathrm{M}[\xi(t)]_\varphi \;=\; \int\limits_{-\pi}^{\pi} A_m \sin(\omega_0 t+\varphi) f_1(\varphi)\,d\varphi \;=\; 0,$$

то

$$R_\xi(\tau) \;=\; \mathrm{M}[\xi(t)\xi(t+\tau)]_\varphi \;=$$

$$= A_m^2 \int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin(\omega_0 t+\varphi)\sin(\omega_0 t+\omega_0\tau+\varphi) f_1(\varphi)\,d\varphi \;=\; \frac{A_m^2}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin(\omega_0 t+\varphi)\sin(\omega_0 t+\omega_0\tau+\varphi)\,d\varphi.$$

Після інтегрування отримаємо

$$R_\xi(\tau) \;=\; \frac{1}{2}\,A_m^2\cos(\omega_0\tau).$$

Спектральна густина обчислюється за формулою Вінера-Хінчина:

$$S_\xi(\omega) \;=\; \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-i\omega\tau}\,R_\xi(\tau)\,d\tau \;=\; \frac{A_m^2}{4}\int\limits_{-\infty}^{\infty} [\exp(i\omega_0\tau - i\omega\tau) + \exp(-i\omega_0\tau + i\omega\tau)]\,d\tau.$$

Враховуючи, що

$$(2\pi)^{-1}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp(-i\omega\tau)\,d\tau \;=\; \delta(\omega),$$

остаточно одержуємо

$$S_\xi(\omega) \;=\; \frac{1}{2}\,\pi A_m^2\left[\delta(\omega+\omega_0)+\delta(\omega-\omega_0)\right].$$

У спектрі $S_\xi(\omega)$ випадкового процесу $\xi(t)$ присутні дві частоти: $\omega = \omega_0$ та $\omega = -\omega_0$.

Приклад 8.4 (Процес Вінера)

Необхідно знайти основні характеристики неперервного марковського процесу $\lambda(t)$, що заданий стохастичним диференціальним рівнянням

$$d\xi\,/\,dt \;=\; n(t), \qquad\qquad \xi(0) = 0, \tag{$*$}$$

де $n(t)$ – гауссівський білий шум з нульовим математичним сподіванням та дельтовидною кореляційною функцією,

$$\mathrm{M}[n(t)n(t')] \;=\; \frac{1}{2}\,\sigma^2\delta(t-t').$$

Розв'язання

Знайдемо спочатку коефіцієнти знесення та дифузії для процесу $\xi(t)$. Визначимо, що розв'язання рівняння $(*)$ за початкової умови $\xi(0) = 0$ можна записати у вигляді

$$\xi(t) \;=\; \int\limits_0^t n(x)\,dx.$$

Приріст процесу за малий часовий інтервал Δt

$$\xi(t+\Delta t) - \xi(t) \;=\; \int\limits_t^{t+\Delta t} n(x)\,dx.$$

Звідси отримуємо для математичного сподівання умовного приросту

$$\mathrm{M}[(\xi(t+\Delta t) - \xi(t))|\xi(t)] \;=\; 0,$$

та для коефіцієнта знесення $a(\xi) = 0$.

Для середнього квадрата умовного приросту можемо написати

$$\mathrm{M}[(\xi(t+\Delta t) - \xi(t))^2|\xi(t)] \;=\; \int\limits_t^{t+\Delta t}\int\limits_t^{t+\Delta t} \mathrm{M}[n(x)n(y)]\,dx\,dy \;=\; \frac{1}{2}\,\sigma^2\Delta t.$$

Тому $b(\xi) = \sigma^2/2$.

Рівняння Фоккера-Планка-Колмогорова набуває вигляду

$$\frac{\partial}{\partial t}\,f(\xi,t) \;=\; \frac{1}{4}\,\sigma^2\,\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\,f(\xi,t).$$

Можна переконатися (наприклад, безпосередньою перевіркою), що густина імовірності переходу $f_0(\xi,t|\xi_0,0)$ є фундаментальним розв'язком цього диференціального рівняння у частинних похідних і за заданої початкової умови $\xi_0 = 0$ має вигляд

$$f(\xi,t|\xi_0,0) \;=\; \frac{1}{\sqrt{2\pi\,t}\,\sigma}\,\exp\left(-\frac{\xi^2}{2\sigma^2\,t}\right).$$

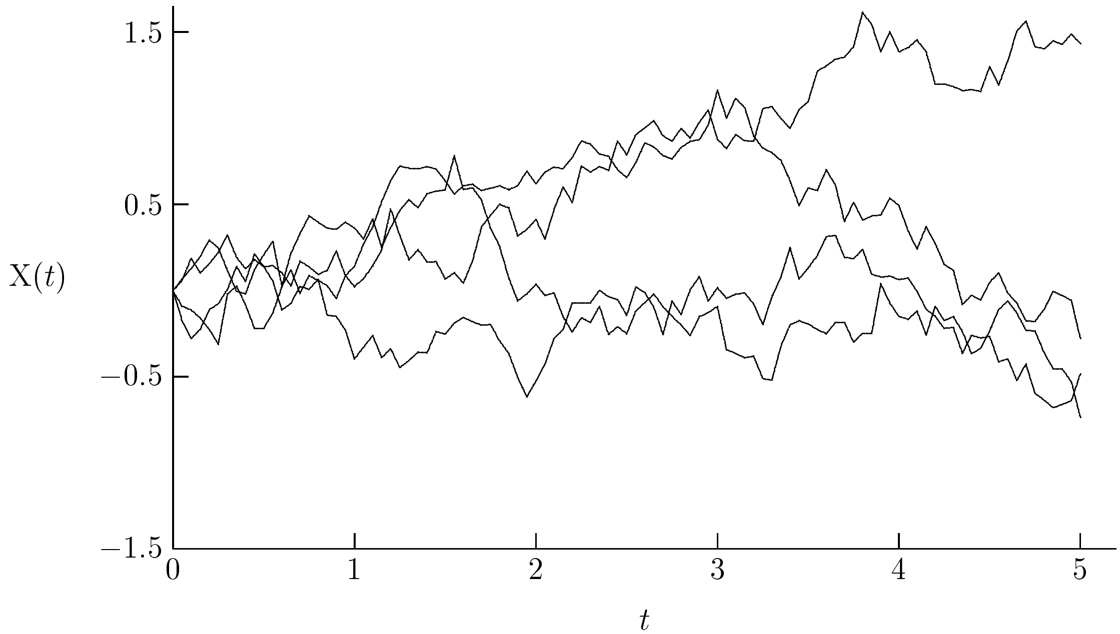


Рисунок 8.6 — Реалізації процесу Вінера $X(t)$; $N_0 = 0{,}1$

Це нормальна нестаціонарна густина розподілу ймовірностей з нульовим математичним сподіванням й дисперсією $\sigma^2 t$.

Випадковий процес, що має означені властивості, називається *процесом Вінера*. Приклади реалізації процесу Вінера наведено на рис. 8.6.

Приклад 8.5 (Процес Орнштейна-Уленбека)

Необхідно знайти основні характеристики неперервного нормального марковського процесу $\lambda(t)$, що заданий стохастичним диференціальним рівнянням

$$d\xi \,/\, dt \;=\; -\nu\xi + n(t), \qquad \xi(0) = \xi_0, \tag{$*$}$$

де $\nu > 0$ – стала величина, $n(t)$ – гауссівський білий шум з нульовим математичним сподіванням та дельтовидною кореляційною функцією, $\mathrm{M}[n(t)n(t')] = \sigma^2\delta(t - t')$.

Розв'язання

Знайдемо спочатку коефіцієнти знесення та дифузії для процесу $\xi(t)$. Відзначимо, що розв'язок рівняння $(*)$ за початкової умови $\xi(0) = \xi_0$ можна записати у вигляді

$$\xi(t) \;=\; \xi_0 \exp(-\nu t) + \int_0^t \exp(-\nu t + \nu\tau) n(\tau)\, d\tau.$$

Приріст процесу за малий тимчасовий інтервал Δt

$$\xi(t + \Delta t) - \xi(t) \;=\; \int_t^{t+\Delta t} \left(-\nu\xi(\tau) + n(\tau)\right)\, d\tau.$$

Звідси знаходимо математичне сподівання умовного приросту:

$$\mathrm{M}[(\xi(t+\Delta t)-\xi(t))|\xi(t)] \;=\; -\nu\int\limits_t^{t+\Delta t}\xi(\tau)\,d\tau,$$

а також вираз для коефіцієнта знесення $a(\xi)$:

$$a(\xi) \;=\; -\nu\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\int\limits_t^{t+\Delta t}\xi(\tau)\,d\tau \;=\; -\nu\xi(t).$$

Для середнього квадрата умовного приросту можемо написати

$$\mathrm{M}[(\xi(t+\Delta t)-\xi(t))^2|\xi(t)] \;=$$

$$=\;\int\limits_t^{t+\Delta t}\int\limits_t^{t+\Delta t}\mathrm{M}[(-\nu\xi(\tau)+n(\tau))\,(-\nu\xi(\tau')+n(\tau'))]\,d\tau\,d\tau' \;=\; \nu^2\left(\int\limits_t^{t+\Delta t}\xi(\tau)\,d\tau\right)^2+\sigma^2 t.$$

Тому

$$b(\xi) \;=\; \nu^2\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}(\xi(t)\Delta t)^2+\sigma^2 \;=\; \sigma^2.$$

Рівняння Фоккера-Планка-Колмогорова набуває вигляду

$$\frac{\partial}{\partial t}f(\xi,t) \;=\; \nu\,\frac{\partial}{\partial\xi}\,(\xi\, f)+\frac{1}{4}\,\sigma^2\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\,f(\xi,t).$$

Можна переконатися (наприклад, безпосередньою перевіркою), що густина імовірності переходу $f_0(\xi,t|\xi_0,0)$ є фундаментальним розв'язком цього диференціального рівняння у частинних похідних і за заданої початкової умови $f_0(\xi)=\delta(\xi-\xi_0)$ має вигляд

$$f(\xi,t|\xi_0,0) \;=\; \frac{1}{\sqrt{2\pi\,(1-\mathrm{e}^{-2\nu t})}\,\sigma}\,\exp\left(-\frac{(\xi-\xi_0\mathrm{e}^{-\nu t})^2}{2\sigma^2(1-\mathrm{e}^{-2\nu t})}\right).$$

Це нормальна нестаціонарна густина розподілу ймовірностей з умовним математичним сподіванням

$$\mathrm{M}[\xi|\xi_0] \;=\; \xi_0\exp(-\nu t)$$

та умовною дисперсією

$$\mathrm{M}[\xi^2|\xi_0] \;=\; \xi_0^2\exp(-2\nu t)+\sigma^2[1-\exp(-2\nu t)].$$

Вважаючи $t\to\infty$, отримуємо стаціонарну густину імовірності

$$f_{\mathrm{st}}(\xi) \;=\; \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\exp\left(-\,\frac{\xi^2}{2\sigma^2}\right).$$

Якщо густина імовірності початкової координати ξ_0 збігається зі стаціонарною густиною імовірності, $f_0(\xi)=f_{\mathrm{st}}(\xi)$, то неважко перевірити, що перехідний процес

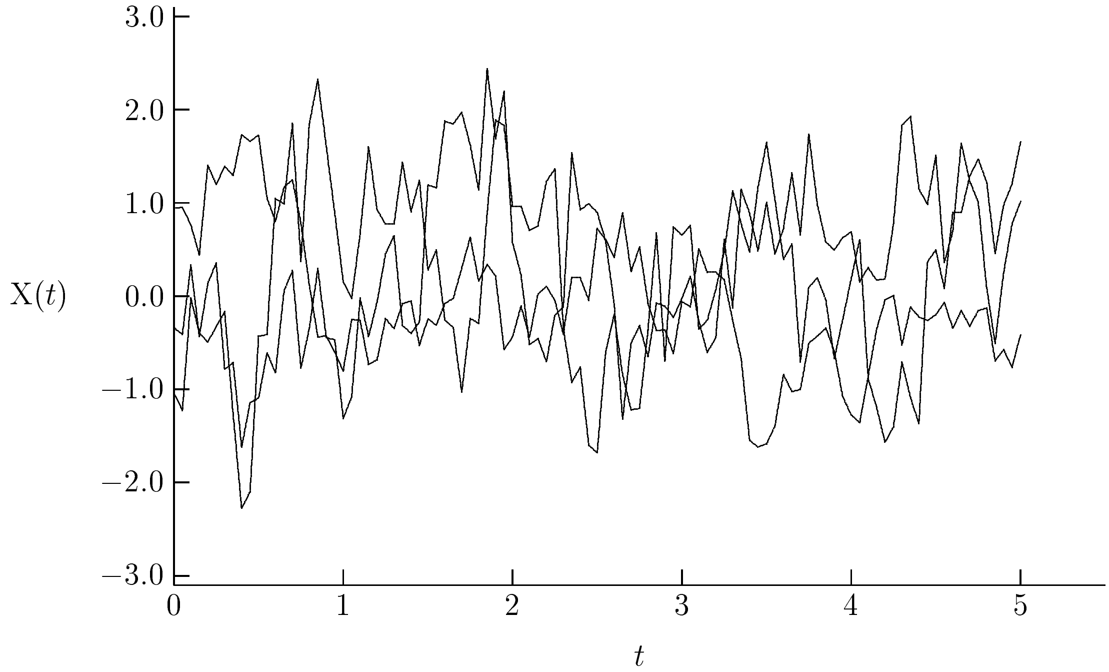


Рисунок 8.7 — Три реалізації нормального марковського процесу Орнштейна-Уленбека $\mathrm{X}(t)$; $\nu = 2{,}303$; $\sigma = 1{,}0$

буде відсутній та стаціонарний стан має місце, починаючи з початкового моменту часу $t = 0$.

Якщо вже знайдені вище умовні середні доусередити по всіх можливих початкових значеннях за $t = 0$, то отримаємо $\mathrm{M}[\xi(t)] = 0$ та $\mathrm{D}[\xi^2(t)] = \sigma^2$.

Випадковий процес, що має означені властивості, називається *нормальним марковським процесом* або *процесом Орнштейна-Уленбека.*

Приклади реалізації процесу Орнштейна-Уленбека наведено на рис. 8.7.

Приклад 8.6 (Інтегральні квадратичні функціонали)

Спираючись на задані випадкові процеси, можна будувати *інтегральні квадратичні функціонали.* Такі функціонали є випадковими величинами та мають густину розподілу ймовірностей або, що еквівалентно, відповідну твірну функцію.

В загальному випадку інтегральний квадратичний функціонал $\mathrm{J}[\xi(t)]$, визначений на випадковому процесі $\xi(t)$, має вигляд

$$\mathrm{J} \;=\; \int\limits_0^T \xi^2(t)\,dt, \tag{1}$$

де T – часовий інтервал розгляду. Твірна функція розподілу ймовірностей випадкових значень функціоналу $\mathrm{J}[\xi(t)]$ така:

$$Q_{\mathrm{J}}(\lambda) \;=\; \mathrm{M_J}[\exp(-\lambda \mathrm{J})] \;=\; \mathrm{M}\left[\exp\left(-\lambda\int\limits_0^T \xi^2(t)\,dt\right)\right], \tag{2}$$

де λ – твірний параметр. Як можна бачити з (2), відповідне усереднення необхідно виконати в просторі функцій – просторі всіх можливих реалізацій випадкового процесу $\xi(t)$ на інтервалі $[0,\,T]$.

Сформулюємо твердження про твірні функції для двох процесів – процесу Вінера та процесу Орнштейна–Уленбека.

Випадок процесу Вінера

Нехай $\xi(t)$ – процес Вінера з інтенсивністю σ^2. Тоді

$$Q_{\mathrm{J}}(\lambda) \;=\; \left(\frac{1}{\mathrm{ch}(\sqrt{\lambda\sigma^2 T})}\right)^{1/2}. \tag{3}$$

Випадок процесу Орнштейна-Уленбека

Нехай $\xi(t)$ – процес Орнштейна-Уленбека, що має інтенсивність σ^2 та декремент ν. Тоді

$$Q_{\mathrm{J}}(\lambda) \;=\; \left(\frac{4\rho\nu\exp(\nu T)}{(\rho+\nu)^2\exp(\rho T)-(\rho-\nu)^2\exp(-\rho T)}\right)^{1/2}, \tag{4}$$

де $\rho=\sqrt{\nu^2+2\lambda\nu\sigma^2}$.

Густини розподілу $f_{\mathrm{J}}(J)$ ймовірностей випадкових значень функціоналу $\mathrm{J}[\xi(t)]$ можна визначити, згідно з (2), шляхом оберненого перетворення Лапласа з твірних функцій (3) або (4).

Приклад 8.7 (Нормальне марковське поле)

1. Двовимірні випадкові поля

Випадкові поля давно стали предметом вивчення і застосування в самих різних галузях. Можна сказати, що з усіх можливих варіантів і моделей двовимірних випадкових полів дійсне нормальне марковське двовимірне поле (НМД-поле) $\mathrm{H}(x,y)$ частіше усього використовується, якщо не має яких-небудь апріорних факторів, оскільки воно є зручним об'єктом аналізу та важливим в прикладному відношенні. Його ортогональні перерізи є стаціонарним процесом Орнштейна–Уленбека (ОУ–процес).

Властивістю стаціонарного НМД-поля, що розглядається, є його кореляційна функція

$$K_{\mathrm{XY}} \;=\; K_{\mathrm{XY}}(x,y;\,x',y') \;=\; \mathrm{M}\Big[\mathrm{H}(x,y)\mathrm{H}(x',y')\Big] \;=\; pq\sigma^2 \tag{1}$$

з парціальними кореляторами

$$p \;=\; \exp\left(-\nu|x-x'|\right), \qquad q \;=\; \exp\left(-\mu|y-y'|\right), \tag{2}$$

де

$h=h(x,y)$ – реалізація гауссівського двовимірного поля $\mathrm{H}(x,y)$ в прямокутній області $\{x\in[0,\,a],\;\; y\in[0,\,b]\}$ на площині $x0y$;

$\sigma^2=\mathrm{M}\left[\mathrm{H}^2(x,y)\right]$ – інтенсивність НМД-поля;

ν та μ – декременти згасання поля по осях x та y відповідно.

Узагальненням відомих одновимірних конструкцій – перехідних густин ймовірностей для нормального марковського процесу (процесу Орнштейна-Уленбека) – може служити така перехідна густина розподілу ймовірностей для амплітуди $h(x,y)$ НМД-поля:

$$f_{\text{н}}\Big(h(x,y) \mid h(x',y), h(x,y'), h(x',y')\Big) \;=\; \frac{1}{\sqrt{2\pi(1-p^2)(1-q^2)\,\sigma^2}}\,\exp\Big\{-Q(x,y)\Big\}, \tag{3a}$$

де

$$Q(x,y) \;=\; -\frac{\left[h(x,y) - ph(x',y) - qh(x,y') + pqh(x',y')\right]^2}{2(1-p^2)(1-q^2)\,\sigma^2}.$$

Виконуючи перехід $x' \to -\infty$ або $y' \to -\infty$, отримуємо граничні перехідні густини розподілу ймовірностей

$$f_{\text{н}}\Big(h(x,y) \mid h(x',y)\Big) \;=\; \frac{1}{\sqrt{2\pi(1-p^2)}\,\sigma}\exp\left\{-\frac{\left[h(x,y)-ph(x',y)\right]^2}{2(1-p^2)\,\sigma^2}\right\}, \tag{3b}$$

$$f_{\text{н}}\Big(h(x,y) \mid h(x,y')\Big) \;=\; \frac{1}{\sqrt{2\pi(1-q^2)}\,\sigma_{\text{н}}}\exp\left\{-\frac{\left[h(x,y)-qh(x,y')\right]^2}{2(1-q^2)\,\sigma^2}\right\}, \tag{3c}$$

які є перехідними густинами для парціальних ОУ-процесів, а виконуючи перехід $x' \to -\infty$ та $y' \to -\infty$, отримаємо вершинну густину розподілу ймовірностей рівноважного вигляду

$$f_{\text{н}}\Big(h(x,y)\Big) \;=\; \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\,\exp\left\{-\frac{h^2(x,y)}{2\sigma^2}\right\} \tag{3d}$$

для випадкової величини – реалізації $h(x,y)$ НМД-поля $\mathrm{H}(x,y)$ в точці з координатами (x,y), і тому з співвідношень (2–3) випливає кореляційна функція (1).

2. Рівняння руху для амплітуди НМД-поля

Розмістимо на площині декартову систему координат з початком в точці $(0,0)$.

Динаміку випадкового поля $\mathrm{H}(x,y)$ в прямокутнику $\{x \in [0,\,a],\ y \in [0,\,b]\}$ з вершиною в $(0,\,0)$ можна описати за допомогою рівняння, що узагальнює рівняння Ланжевена для процесу Орнштейна-Уленбека,

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \nu\right)\left(\frac{\partial}{\partial y} + \mu\right) h(x,y) \;=\; \sigma\, u(x,y), \tag{4}$$

де $u(x,y)$ – випадкове поле, що має властивості гауссівського двовимірного білого шуму з одиничною інтенсивністю.

Як граничні умови до (4) використаємо два нормальних стохастичних процеси, що описуються рівняннями Ланжевена,

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \nu\right) h(x,0) \;=\; \sigma\, u(x,0), \tag{5a}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial y} + \mu\right) h(0,y) \;=\; \sigma\, u(0,y), \tag{5b}$$

які реалізуються вздовж осей x та y відповідно, а початковою умовою до них будуть вершинні значення випадкової величини

$$h(0,0) \;=\; \sigma\, u(0,0). \tag{5c}$$

Розв'язок рівняння (4) з умовами (5) такий:

$$h(x,0) \;=\; h(0,0)\exp(-\nu x) + \sigma \int_0^x \exp\left[-\nu\,(x-x')\right] u(x',0)\,dx', \tag{6a}$$

$$h(0,y) \;=\; h(0,0)\exp(-\mu y) + \sigma \int_0^y \exp\left[-\mu\,(y-y')\right] u(0,y')\,dy', \tag{6b}$$

$$\begin{aligned} h(x,y) \;=\;& h(0,0)\exp(-\nu x - \mu y) \;+ \\ &+\; \sqrt{2\nu}\,\sigma\exp(-\mu y)\int\limits_0^x \exp\left[-\nu(x-x')\right] u(x',0)\,dx' \;+ \\ &+\; \sqrt{2\mu}\,\sigma\exp(-\nu x)\int\limits_0^y \exp\left[-\mu(y-y')\right] u(0,y')\,dy' \;+ \\ &+\; \sqrt{4\nu\mu}\,\sigma\int\limits_0^x\int\limits_0^y \exp\left[-\nu\,(x-x') - \mu\,(y-y')\right] u\,(x',y')\;dx'\,dy'. \end{aligned} \tag{6c}$$

Таким чином, марковська властивість має місце вздовж осей x та y.

3. Алгоритм генерації НМД-поля

На підставі рівняння (5) можна побудувати чисельні алгоритми генерації НМД-поля (рис. 8.8).

Ієрархічний алгоритм генерації значень у вузлах випадкового нормального стаціонарного марковського поля в прямокутній області площини $x0y$ зручно подати наступними 4 кроками:

Крок 1. Генерація значення в вершині:

$$h_{00} \;=\; \sigma\, u_{00}. \tag{7a}$$

Крок 2. Генерація значень процесу вздовж x-межі прямокутника:

$$h_{j+1,0} \;=\; p h_{j,0} + \sqrt{(1-p^2)}\,\sigma\, u_{j+1,0}, \qquad j > 0. \tag{7b}$$

Крок 3. Генерація значень процесу вздовж y-межі прямокутника:

$$h_{0,k+1} \;=\; q h_{0,k} + \sqrt{(1-q^2)}\,\sigma\, u_{0,k+1}, \qquad k > 0. \tag{7c}$$

Крок 4. Послідовне (зліва-направо та шарами) заповнення значеннями внутрішніх вузлів прямокутника $(j > 0,\; k > 0)$:

$$h_{j+1,k+1} \;= \tag{7d}$$

$$=\; p h_{j,k+1} + q h_{j+1,k} - pq h_{j,k} + \sqrt{(1-p^2)(1-q^2)}\,\sigma\, u_{j+1,k+1}. \tag{7d}$$

У виразах (7)

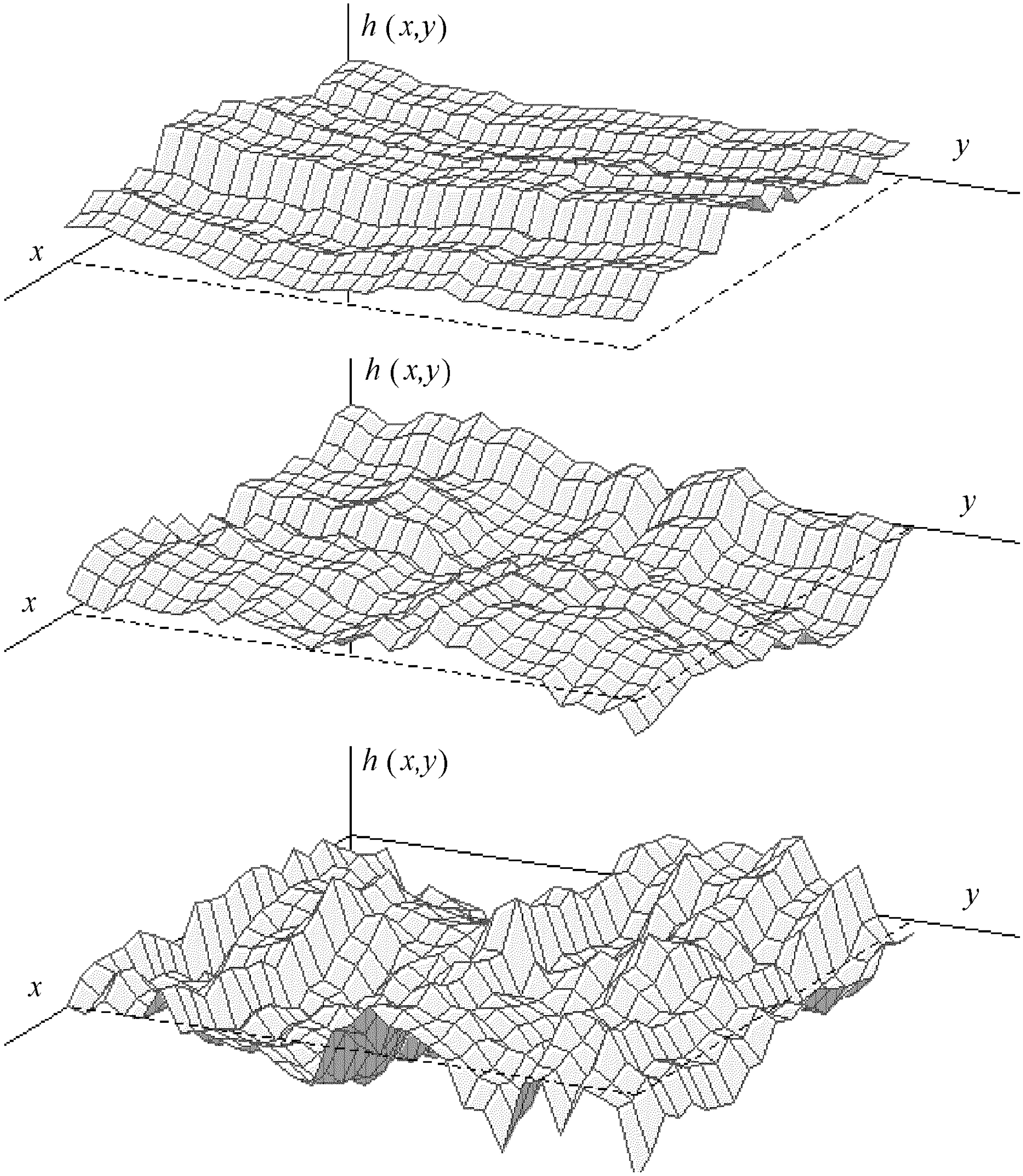


Рисунок 8.8 — Три реалізації $h(x,y)$ випадкового НМД-поля $\mathrm{H}(x,y)$ в прямокутнику $\{x \in [0,\, a],\ y \in [0,\, b]\}$ з вершиною в $(0,\, 0)$. Параметри: $a = 1$; $b = 1$; $\sigma^2 = 1$; $\nu = 1$; $\mu = 0,1$ (зверху), $\mu = 1,0$ (посередині), $\mu = 10,0$ (знизу); загальна кількість просторових вузлів однакова

$p = \exp(-\nu\Delta_x)$, $q = \exp(-\mu\Delta_y)$ – парціальні корелятори;

ν та μ – парціальні декременти;

Δ_x та Δ_y – кроки вузлів по осях x та y відповідно.

Відмітимо, що за обраних кроках Δ_x, Δ_y (тобто за кількістю кроків $N_x = a/\Delta_x$, $N_y = b/\Delta_y$, що задані відповідно до обраних розмірів прямокутника a та b) інтенсивність в чисельному алгоритмі необхідно перенормувати так, щоб енергія НМД-поля, що відповідає одиниці площі, збігалась з заданою за певної кількості кроків.

З (7) можна отримати для значення $h_{j,k}$ в обраному (j,k)-вузлі

$$\mathrm{M}[h_{j,k}] = 0, \qquad \mathrm{M}[h_{j,k}^2] = \sigma = const, \tag{8}$$

якщо за допомогою (7b–7d) послідовно знижувати значення j-індексу, а потім k-індексу і, наприкінці, за допомогою (7a) знайти безумовне рівноважне середнє.

Таким чином, алгоритм (7) генерації значень випадкового поля в прямокутнику на площині є стаціонарним.

На рис. 8.8 наведено реалізації випадкового НМД-поля, що відповідають трьом значенням декремента μ. На ньому можна бачити динаміку формування флуктуацій НМД-поля за двома координатами.

Аналогічно можна побудувати ієрархічні алгоритми генерації значень нормального марковського поля третього і більш високих порядків.

8.8. Задачі для розв'язання

Задача 8.1

Стаціонарні випадкові процеси $\xi(t)$ мають кореляційні функції вигляду:

1) $R_\xi(t) = \sigma^2 \exp(-\alpha|\tau|)$;

2) $R_\xi(t) = \sigma^2 \exp(-\alpha|\tau|) \cos(\omega_0\tau)$;

3) $R_\xi(t) = \sigma^2 \exp(-\alpha|\tau|) \left(\cos(\omega_0\tau) + \frac{\alpha}{\omega_0}\sin(\omega_0|\tau|)\right)$.

Визначити, чи задовольняють умовам неперервності та диференційованості випадкові процеси $\xi(t)$.

Відповідь:

Процеси $\xi(t)$ з кореляційними функціями вигляду 1 і 2 неперервні, але не є диференційованими; процес $\xi(t)$ з кореляційною функцією 3 неперервний та диференційований.

Задача 8.2

Випадкові процеси $\xi(t)$ та $\eta(t)$ задані математичними сподіваннями $m_\xi(t)$ й $m_\eta(t)$, кореляційними $R_\xi(t_1, t_2)$ й $R_\eta(t_1, t_2)$, а також взаємними кореляційними функціями

$$R_{\xi\eta}(t_1, t_2) = \mathrm{M}\left([\xi(t_1) - m_\xi(t_1)][\eta(t_1) - m_\eta(t_1)]\right),$$
$$R_{\eta\xi}(t_1, t_2) = \mathrm{M}\left([\eta(t_1) - m_\eta(t_1)][\xi(t_1) - m_\xi(t_1)]\right).$$

Визначити: а) математичне сподівання $m_\zeta(t)$ сумарного випадкового процесу $\zeta(t) = \xi t) \pm \eta(t)$, б) кореляційну функцію $R_\zeta(t_1, t_2)$ сумарного (різницевого) випадкового процесу $\zeta(t) = \xi(t) \pm \eta(t)$.

Відповідь:

$m_\zeta(t) = m_\eta(t) \pm m_\xi(t)$;

$R_\zeta(t_1, t_2) = R_\xi(t_1, t_2) + R_\eta(t_1, t_2) \pm R_{\xi\eta}(t_1, t_2) \pm R_{\eta\xi}(t_1, t_2)$.

Задача 8.3

Випадковий процес $\eta(t)$ одержується шляхом диференціювання стаціонарного випадкового коливання $\xi(t)$: $\eta(t) = d\xi(t) / dt$.

Визначити кореляційну функцію $R_\eta(t)$ процесу $\eta(t)$ у тих випадках, коли функція $R_\xi(t)$ коливання $\xi(t)$ задана виразами:

1) $R_\xi(t) = \sigma_\xi^2 \exp(-\alpha\,|\tau|)$;

2) $R_\xi(t) = \sigma_\xi^2 \exp(-\alpha\,|\tau|)(1 + \alpha\tau)$;

3) $R_\xi(t) = \sigma_\xi^2 \exp(-\alpha\,|\tau|)\left(\cos(\omega_0\tau) + \frac{\alpha}{\omega_0}\sin(\omega_0\tau)\right)$;

Відповідь:

1) $R_\eta(t) = \alpha^2\sigma^2 \exp(-\alpha|\tau|)\left(1 - \frac{2}{\alpha}\delta(\tau)\exp(-\alpha|\tau|)\right)$;

2) $R_\eta(t) = \alpha^2\sigma^2 \exp(-\alpha|\tau|)(1 - \alpha|\tau|)$;

3) $R_\eta(t) = (\alpha^2 + \omega^2)\,\sigma^2 \exp(-\alpha|\tau|)\left(\cos(\omega_0\tau) - \frac{\alpha}{\omega_0}\sin(\omega_0\tau)\right)$.

Задача 8.4

Випадкові процеси $\xi(t)$ та $\eta(t)$ характеризуються математичними сподіваннями $m_\xi(t)$ та $m_\eta(t)$.

Знайти математичне сподівання $m_\zeta(t)$ сумарного випадкового процесу $\zeta(t) = \xi(t) \pm \eta(t)$.

Відповідь:

$m_\zeta(t) = m_\eta(t) \pm m_\xi(t)$.

Задача 8.5

Знайти спектральну густину $S_\xi(\omega)$ стаціонарного випадкового процесу $\xi(t)$, кореляційна функція якого $R_\xi(t) = \sigma^2 \exp(-\alpha^2 t^2)$.

Відповідь:

$S_\xi(\omega) = \sqrt{\pi}\,\alpha^{-1}\,\sigma^2 \exp\left(-\omega^2 / 4\,\alpha^2\right)$.

Задача 8.6

Чисто дифузійний випадковий процес $v(t)$ заданий стохастичним диференціальним рівнянням

$$\frac{dv}{dt} = n(t), \qquad v(0) = v_0,$$

де $n(t)$ – гауссівський білий шум з нульовим математичним сподіванням й кореляційною функцією дельтовидного вигляду.

Записати для процесу $v(t)$ рівняння Фоккера–Планка–Колмогорова та отримати його фундаментальне розв'язання.

Відповідь:

$$\frac{d}{dt}f(v,t) = \frac{1}{4}\sigma^2\frac{d^2}{dt^2}f(v,t), \qquad f(v,t) = (\pi\,\sigma^2\,t)^{-1/2}\exp\left(-\frac{(vv_0)^2}{\sigma^2 t}\right).$$

Задача 8.7

Визначити кореляційну функцію $K_{\mathrm{x}}(t_1,\, t_2)$ випадкового процесу $\mathrm{X}(t)$, якщо

$$\mathrm{X}(t) \;=\; \sum_{j=1}^{k} \left[A_j \cos(\omega_j t) + B_j \sin(\omega_j t)\right],$$

де ω_j – задані числа, а дійсні випадкові величини A_j та B_j взаємно не зв'язані, мають нульові математичні сподівання і дисперсії, що визначаються рівняннями $\mathrm{D}[A_j] = \mathrm{D}[B_j] = \sigma^2$, $(j = 1, 2, \ldots, k)$.

Відповідь:

$$K_{\mathrm{x}}(t_1,\, t_2) \;=\; \sum_{j=1}^{k} \sigma^2 \cos(\omega_j t_1 - \omega_j t_2).$$

Задача 8.8

Отримати вираз для стаціонарної густини ймовірності марковського випадкового процесу $\lambda(t)$, що заданий стохастичним диференціальним рівнянням

$$\frac{d\lambda}{dt} \;=\; -\gamma\lambda + \sigma^2/4\lambda + n(t),$$

де $\lambda > 0$ й $\gamma > 0$ – сталі величини; $n(t)$ – гауссівський білий шум.

Відповідь:

$$f_{\mathrm{st}}(\lambda) \;=\; \frac{\lambda}{\sigma^2} \exp(-\lambda^2 \,/\, 2\sigma^2).$$

Задача 8.9

Записати рівняння Фоккера-Планка-Колмогорова та отримати його фундаментальне розв'язання для випадкового процесу $\lambda(t)$, що заданий рівнянням

$$\frac{d\lambda}{dt} + \mu = n(t), \qquad\qquad \lambda(0) = \lambda_0,$$

де μ— сталі величини; $n(t)$ – гауссівський білий шум.

Відповідь:

$$\frac{d}{dt}\, f(\lambda, t) \;=\; \mu\, \frac{d}{d\lambda}\, f(\lambda, t) + \frac{1}{4}\, \sigma^2 \frac{d^2}{dt^2}\, f(\lambda, t),$$

$$f(\lambda, t) \;=\; (\pi\, \sigma^2\, t)^{-1/2} \exp\left(-\,\frac{(\lambda - \lambda_0 - \mu t)^2}{\sigma^2 t}\right).$$

Задача 8.10

Випадковий процес $\xi(t)$ заданий кореляційною функцією

$$R(\tau) \;=\; \exp(-\alpha|\tau|) \left(\mathrm{ch}(\omega_0\tau) + \frac{\alpha}{\omega_0}\, \mathrm{sh}(\omega_0|\tau|)\right), \qquad \alpha > \omega_0 > 0.$$

Визначити кореляційну функцію $R_\eta(\tau)$ та спектральну густину $S_\eta(\omega)$ випадкового процесу $\eta(t) = d\xi(t) \,/\, dt$.

Відповідь:

$$R_\eta(\tau) \;=\; (\alpha^2 - \omega^2)\, \exp(-\alpha|\tau|) \left(\mathrm{ch}(\omega_0\tau) - \tfrac{\alpha}{\omega}\, \mathrm{sh}(\omega_0\tau)\right);$$

$$S_\eta(\omega) \;=\; 4\alpha\, \omega^2 (\alpha^2 - \omega^2)[(\alpha - \omega)^2 + \omega^2][(\alpha + \omega)^2 + \omega^2]^{-1}.$$

8.9. Завдання для перевірки

1. Сформулюйте поняття випадкового процесу.

2. Вкажіть конкретну роль випадкових процесів у розв'язанні практичних задач. Побудуйте приклад застосування випадкових процесів.

3. Перелічте основні типи випадкових процесів.

4. Сформулюйте визначення поняття марковського випадкового процесу.

5. Сформулюйте визначення поняття ергодичного випадкового процесу.

6. Розкрийте зміст кореляційної функції.

7. Розкрийте зміст спектральної густини.

8. Сформулюйте визначення поняття пуассонівського процесу.

9. Сформулюйте визначення поняття дробового шуму.

10. Сформулюйте визначення поняття білого шуму.

11. Розкрийте зміст стохастичних диференціальних рівнянь.

12. Сформулюйте визначення поняття процесу Вінера.

13. Сформулюйте поняття процесу Орнштейна-Уленбека.

14. Сформулюйте поняття випадкового поля.

Додаток

Д.1. Фонд залікових завдань для самостійної роботи

Задача 1

Випадкова величина X має густину розподілу ймовірностей

$$f_{\mathrm{X}}(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } 0 \le x \le 1, \\ 0 & \text{у протилежному випадку.} \end{cases}$$

Випадкова величина Y має густину розподілу ймовірностей

$$f_{\mathrm{Y}}(y) = \begin{cases} 0,5 & \text{при } 0 \le y \le 2, \\ 0 & \text{у протилежному випадку.} \end{cases}$$

Знайти густину розподілу випадкової величини $\mathrm{Z} = \mathrm{XY}$.

Задача 2

В області $\{(x^2 + y^2) \le 1\}$ система випадкових величин (X, Y) має густину спільного розподілу $f_{\mathrm{XY}}(x, y) = 3\pi^{-1}(x^2 + y^2)^2$.

Знайти густину розподілу $f_{\mathrm{Z}}(z)$ випадкової величини $\mathrm{Z} = (\mathrm{X}^2 + \mathrm{Y}^2)^{1/2}$.

Задача 3

Випадкова величина X рівномірно розподілена на $[0; 1]$. Розглядаються дві випадкові величини: $\mathrm{Y} = (\mathrm{X} - 1/2)$ та $\mathrm{Z} = (\mathrm{X} - 1/2)^2$.

Знайти їх коефіцієнт кореляції k.

Задача 4

Випадкова величина X рівномірно розподілена на $[0\,; 1]$. Розглядаються дві випадкові величини: $\mathrm{Y} = p\mathrm{X}$ та $\mathrm{Z} = q\mathrm{X}^2$ (p та q задані).

Знайти їх коефіцієнт кореляції k.

Задача 5

Випадкові величини $\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2, \ldots, \mathrm{X}_N$ незалежні, вони приймають значення -1, 0, 1. Відомо, що

$$\Pr\{\mathrm{X}_n = 1\} = \Pr\{\mathrm{X}_n = -1\} = 1/4,$$
$$\Pr\{\mathrm{X}_n = 0\} = 1/2 \qquad (n = 1, 2, \ldots, N).$$

Знайти математичне сподівання і дисперсію величини $\mathrm{Z} = \sum\limits_{n=1}^{N} \mathrm{X}_n$.

Задача 6

Випадкова величина X рівномірно розподілена на $[0; 1]$. Розглядаються дві випадкові величини: $\mathrm{Y} = \cos(\pi\mathrm{X}/2)$ та $\mathrm{Z} = \sin(\pi\mathrm{X}/2)$.

Знайти їх коефіцієнт кореляції k.

Задача 7

Випадкова величина X рівномірно розподілена на інтервалі $[0; 1]$. Інша випадкова величина Y може набувати двох значень: 0 та 1, при цьому відомо, що $\Pr(\mathrm{Y} = 0) = 0{,}5$ та $\Pr(\mathrm{Y} = 1) = 0{,}5$.

Знайти закон розподілу випадкової величини $\mathrm{Z} = \mathrm{X} + \mathrm{Y}$.

Задача 8

Відомо, що випадкова величина X рівномірно розподілена на $[0; 1]$. Розглядаються дві випадкові величини: $\mathrm{Y} = \sqrt{\mathrm{X}}$ та $\mathrm{Z} = 1/\sqrt{\mathrm{X}}$.

Знайти їх коефіцієнт кореляції k.

Задача 9

Відрізок довжиною d розламується в наугад вибраній точці.

Знайти функцію розподілу випадкової величини — площі прямокутника, сторони якого дорівнюють частинам, що утворилися на відрізку.

Задача 10

Випадкова величина Z має показниковий розподіл з параметром λ.

Знайти ймовірність P події $\{|\mathrm{Z} - \mathrm{M}[\mathrm{Z}]|^2 < \mathrm{D}[\mathrm{Z}]\}$.

Задача 11

Всі елементи (3×3)-матриці є незалежними випадковими величинами. Кожна з них має математичне сподівання, яке дорівнює нулю, і дисперсію, яка дорівнює σ^2.

Знайти математичне сподівання і дисперсію визначника цієї матриці.

Задача 12

Випадкові величини X та Y незалежні та мають нормальний розподіл з параметрами $(0; \sigma^2)$.

Знайти функцію розподілу випадкової величини $\mathrm{Z} = \mathrm{X}^2 + \mathrm{Y}^2$.

Задача 13

Випадкова величина X, що визначена при $x \geq 0$, має густину розподілу $f(x) = \exp(-x)$. Розглядається випадкова величина $\mathrm{Y} = \mathrm{X}[1 - \exp(-\lambda\,\mathrm{X})]$, де $\lambda > 0$.

Знайти її математичне сподівання і дисперсію.

Задача 14

Випадкова величина X визначена в інтервалі $[0; 2]$ і має густину розподілу ймовірностей $f_{\mathrm{X}}(x) = Ax$.

Знайти сталу A і обчислити $\Pr\{(\mathrm{X} - m_{\mathrm{X}}) \leq 0,3\}$.

Задача 15

У досліді водночас кидають N шестигранних гральних костей.

Знайти математичне сподівання і дисперсію суми чисел очок, що випали.

Задача 16

Знайти ексцес експоненціального розподілу ймовірностей, вважаючи його параметр заданим.

Задача 17

На інтервалі $[0,\ a]$ випадково вибрана точка A. Після цього на тому ж інтервалі випадково вибрана точка B.

Знайти густину розподілу випадкової величини X, яка дорівнює модулю довжини відрізка AB.

Задача 18

В родині 10 дітей.

Знайти (вважаючи ймовірності народження хлопчиків і дівчаток рівними 0,5), імовірність того, що у родині:

а) 5 хлопчиків і 5 дівчаток;

б) число хлопчиків від 3 до 8.

Задача 19

Випадкова величина Z нормальна з нульовим математичним сподіванням і заданою дисперсією σ^2.

Знайти значення дисперсії, за якого ймовірність $\Pr\{p \geq \mathrm{Z} \geq q\}$ буде найбільшою (параметри p та q задані і позитивні, $p > q$).

Задача 20

Випадкові величини X та Y незалежні і нормально розподілені з нульовим математичним сподіванням і одиничною дисперсією.

Визначити, чи є незалежними величини $\mathrm{U} = \mathrm{X} + \mathrm{Y}$ та $\mathrm{V} = \mathrm{X} - \mathrm{Y}$.

Задача 21

Випадкові величини X та Y незалежні і нормально розподілені з нульовим математичним сподіванням і одиничною дисперсією.

Визначити, чи є незалежними величини $\mathrm{U} = 2\mathrm{X} + \mathrm{Y}$ та $\mathrm{V} = \mathrm{X} - 2\mathrm{Y}$.

Задача 22

Випадкові величини X та Y незалежні й розподілені рівномірно: X — в інтервалі $[a;\ b]$, Y — в інтервалі $[c;\ d]$.

Знайти дисперсію випадкової величини $\mathrm{Z} = \mathrm{XY}$.

Задача 23

Випадкова величина X розподілена за законом Пуассона з параметром λ. Відомо, що $\mathrm{Y} = \mathrm{X}^2$.

Знайти $\mathrm{M[Y]}$, $\mathrm{D[Y]}$.

Задача 24

Випадкова величина X задана інтегральною функцією розподілу

$$F_{\mathrm{X}}(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ x^2 & \text{при } 0 \leq x < 1, \\ 1 & \text{при } x \geq 1. \end{cases}$$

Знайти ймовірність того, що в результаті чотирьох незалежних дослідів величина X рівно три рази набуде значень в інтервалі (0,25; 0,75).

Задача 25

Відомо, що випадкові величини X та Y мають густину розподілу ймовірностей $f_{\mathrm{X}}(x) = a\pi^{-1}/(a^2 + x^2)$ та $f_{\mathrm{Y}}(y) = b\pi^{-1}/(b^2 + y^2)$.

Знайти закон розподілу випадкової величини $\mathrm{Z} = \mathrm{X} + \mathrm{Y}$.

Задача 26

Густина розподілу випадкової величини X задана формулою

$$f_{\mathrm{X}}(x) = \begin{cases} Ax^2, & \text{якщо } 0 \le x \le 2, \\ 0 & \text{у протилежному випадку.} \end{cases}$$

Знайти : сталу A, функцію розподілу ймовірностей $F_{\mathrm{X}}(x)$. Визначити значення ймовірностей $\Pr\{\mathrm{X} > 0,5\}$ та $\Pr\{0,25 < \mathrm{X} < 0,75\}$.

Задача 27

Випадкова величина X має густину $f_{\mathrm{X}}(x) = Ax^6 \exp(-x)$, $x \ge 0$.

Знайти : сталу A, математичне сподівання і дисперсію величини X.

Задача 28

В партії з 5 деталей є 3 дефектних. Наугад відібрано 3 деталі.

Скласти ряд розподілу випадкової величини X — числа стандартних деталей серед відібраних, знайти M[X] та D[X].

Задача 29

У групі 6 чоловіків та 4 жінки. Наугад вибирають 7 осіб.

Знайти ймовірність того, що серед них виявиться 3 жінки.

Задача 30

Випадкові величини X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6 незалежні, позитивні і однаково розподілені.

Довести, що

$$\mathrm{M}\Big[(\mathrm{X}_1 + \mathrm{X}_2 + \mathrm{X}_3)\,(\mathrm{X}_1 + \mathrm{X}_2 + \mathrm{X}_3 + \mathrm{X}_4 + \mathrm{X}_5 + \mathrm{X}_6)^{-1}\Big] = \frac{1}{2}.$$

Задача 31

В одиничному квадраті $(0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1)$ густина розподілу ймовірностей $f(x, y)$ двовимірної системи випадкових величин (X, Y) стала і дорівнює 1.

Визначити, чи є випадкові величини X і Y незалежними.

Задача 32

Координати випадкової точки (X, Y) на площині утворюють систему з густиною розподілу ймовірностей

$$f_{\mathrm{XY}}(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_{\mathrm{X}}\sigma_{\mathrm{Y}}} \exp\Big(-\frac{x^2}{2\sigma_{\mathrm{X}}^2} - \frac{y^2}{2\sigma_{\mathrm{Y}}^2}\Big).$$

Знайти густину розподілу $f_\Phi(\varphi)$ випадкової фази $\Phi = \mathrm{arctg}(\mathrm{Y}/\mathrm{X})$ точки з координатами (X,Y).

Задача 33

Спільна густина розподілу ймовірностей випадкових величин (X, Y) така:

$$f_{XY}(x,y) = 2(1+x+y)^{-3}, \qquad x \geq 0, \quad y \geq 0.$$

Знайти закон розподілу випадкової величини $U = X + Y$.

Задача 34

Центр кола радіусом R знаходиться в точці $(0;0)$. Центр квадрата стороною $2h$ збігається з точкою $(0;0)$, а сторони його паралельні координатним осям.

Знайти ймовірність того, що точка, наугад кинута в коло, влучить також і в квадрат.

Задача 35

Випадкова величина $Y = X^m$, а випадкова величина X рівномірно розподілена на інтервалі $[-1;\ 1]$.

Вважаючи цілий параметр $m > 0$ заданим, знайти коефіцієнт кореляції між випадковими величинами X та Y.

Задача 36

Знайти характеристичну функцію дискретної випадкової величини X, що підпорядковується закону

$$\Pr\{X = a\} = a^m(1+a)^{-m-1}, \qquad a > 0, \qquad m = 0, 1, 2, \ldots$$

і за її допомогою визначити $M[X]$ та $D[X]$.

Задача 37

Система з двох нормальних випадкових величин (X,Y) має такі параметри: математичні сподівання m_X та m_Y; середньоквадратичні відхилення σ_X та σ_Y; коефіцієнт кореляції r.

Знайти лінійне перетворення випадкових величин (X, Y) до незалежних випадкових величин (U, V) і визначити дисперсії нових випадкових величин.

Задача 38

Серед 25 квитків 2 "добрих". Два студенти за чергою беруть по одному квитку.

Знайти ймовірність:

а) того, що перший студент взяв "добрий" квиток;

б) другий студент взяв "добрий" квиток;

в) обидва студенти взяли "добрі" квитки.

Задача 39

Дві випадкові величини X та Y незалежні і мають густини розподілу ймовірностей

$$f_X(x) = (2/\pi)(1-x^2)^{1/2}, \qquad -1 < x < 1;$$
$$f_Y(y) = y\exp(-y^2/2), \qquad y \geq 0.$$

Знайти закон розподілу випадкової величини $Z = XY$.

Задача 40

На площині задані два кола радіуса R. Центр першого кола знаходиться в точці (R, R). Центр другого кола знаходиться в початку координат.

Знайти ймовірність події: {*точка, наугад кинута в перше коло, влучить також і в друге*}.

Задача 41

Літери В, І, Ь, І, І, Р, М, О, Н, С, Т розташовують наугад.

Знайти ймовірність того, що буде отримане слово ІМОВІРНІСТЬ.

Задача 42

Задано випадкову величину X з густиною розподілу $f_{\mathrm{X}}(x)$.

Знайти густину розподілу величини $\mathrm{Y} = \exp(-\mathrm{X}^2)$.

Задача 43

В певному колі $x^2 + y^2 = R^2$ густина розподілу ймовірностей $f_{\mathrm{XY}}(x, y)$ випадкових величин X і Y така:

$$f_{\mathrm{XY}}(x, y) \;=\; A\,[\,R - (x^2 + y^2)^{1/2}\,],$$

поза колом вона дорівнює нулю.

Знайти: а) сталу A; б) імовірність влучення випадкової точки (X, Y) в коло радіусом $r = 2$ з центром в початку координат, якщо $R = 4$.

Задача 44

Площина розграфлена паралельними прямими, що розташовуються одна до іншої на відстані h. На площину наугад кинуте коло діаметром D, причому $D < h$.

Знайти ймовірність події:

{A: *коло перетне яку-небудь пряму*};

{B: *коло не перетне жодної з прямих*}.

Задача 45

Задано інтегральний розподіл $F_{\mathrm{X}}(x)$ випадкової величини X.

Знайти інтегральний розподіл $G_{\mathrm{Y}}(y)$ випадкової величини $\mathrm{Y} = 2 + \mathrm{X}/3$.

Задача 46

Випадкова величина Z має нормальний розподіл $n(0; 1)$.

Знайти $\mathrm{M}[\cos(\mathrm{Z}^2)]$, $\mathrm{M}[\sin(\mathrm{Z}^2)]$.

Задача 47

На площині задано відрізок довжиною L, який обертається таким чином, що всі напрямки його однаково ймовірні.

Визначити математичне сподівання і дисперсію довжини проекції відрізка на вісь абсцис.

Задача 48

Задано випадкову величину X з густиною розподілу $f_{\mathrm{X}}(x)$.

Знайти густину розподілу величини $\mathrm{Y} = (R^2 - \mathrm{X}^2)^{1/2}$.

Задача 49

Задано випадкову величину X з густиною розподілу $f_{\mathrm{X}}(x)$.
Знайти густину розподілу величини $\mathrm{Y} = \mathrm{arctg}(\mathrm{X})$.

Задача 50

Задано випадкову величину X з густиною розподілу $f_{\mathrm{X}}(x)$.
Знайти густину розподілу величини $\mathrm{Y} = 1/(1{+}\mathrm{X})$.

Задача 51

Випадкова величина Z має нормальний розподіл $n(0;1)$.
Знайти $\mathrm{M}[\cos(\mathrm{Z})]$ та $\mathrm{D}[\cos(\mathrm{Z})]$.

Задача 52

Задано інтегральний розподіл $F_{\mathrm{X}}(x)$ випадкової величини X.
Знайти інтегральний розподіл $G_{\mathrm{Y}}(y)$ випадкової величини $\mathrm{Y} = 6\mathrm{X} - 6$.

Задача 53

Знайти закон розподілу випадкової величини, якому відповідає характеристична функція $q(t) = \cos(t)$.

Задача 54

Знайти закон розподілу випадкової величини, якому відповідає характеристична функція $q(t) = \cos^2(t)$.

Задача 55

Знайти закон розподілу випадкової величини, якому відповідає характеристична функція $q(t) = (1-p)/[1-p\exp(it)]$ з параметром p.

Задача 56

Знайти закон розподілу випадкової величини, якому відповідає характеристична функція $q(t) = t^{-1}\sin(t)$.

Задача 57

Знайти закон розподілу випадкової величини, якому відповідає характеристична функція $q(t) = (3+\cos(t))/4$.

Задача 58

Знайти густину розподілу випадкової величини, якій відповідає характеристична функція $q(t) = \exp(-0,5t^2)$.

Задача 59

Знайти густину розподілу випадкової величини, якій відповідає характеристична функція $q(t) = \sin(2t)/(2t)$.

Задача 60

Задано випадкову величину X з густиною розподілу $f_{\mathrm{X}}(x)$.
Знайти густину розподілу величини $\mathrm{Y} = \mathrm{tg}(\mathrm{X})$.

Задача 61

Діаметр кола D у досліді виміряно приблизно.

Вважаючи, що його величина рівномірно розподілена на відрізку $[a, b]$, знайти закон розподілу ймовірностей випадкової площі.

Задача 62

Обидва корені рівняння $x^2 + px + q = 0$ мають випадкові значення, з постійною густиною розподілу в інтервалі $[-1;\ 1]$ кожний.

Визначити густину розподілу ймовірностей випадкових коефіцієнтів p та q.

ЗАДАЧІ ПІДВИЩЕНОЇ СКЛАДНОСТІ

Задача 1

Шматок дроту довжиною 20 *см* був зігнутий в наугад вибраній точці (точка згину рівномірно розподілена по шматку). Після цього, перегнувши дріт ще в двох місцях (не ламаючи), зробили прямокутну рамку.

Знайти ймовірність того, що площа рамки не перевищує 21 *см*^{2}.

Задача 2

На глобусі обрано випадково точку.

Знайти ймовірність таких подій:

а) координати точки знаходяться між 90-м і 180-м градусами східної довготи;

б) координати точки знаходяться між 45-м і 90-м градусами північної широти;

в) координати точки знаходяться між 90-м і 180-м градусами східної довготи, а також між 45-м і 90-м градусами північної широти.

Задача 3

Випадкові величини X_1, X_2, X_3 незалежні й нормально розподілені з математичним сподіванням $m = 0$ та дисперсією $\mathrm{D}= 1$ кожна.

Потрібно знайти густину розподілу ймовірностей $f_{\mathrm{Y}}(y)$ випадкової величини $\mathrm{Y} = (\mathrm{X}_1 + \mathrm{X}_2\ \mathrm{X}_3)(1 + \mathrm{X}_1^2)^{-1/2}$.

Задача 4

Випадкова величина X розподілена за законом χ^2 з k ступенями вільності. Випадкова величина Y розподілена за законом χ^2 з j ступенями вільності.

Знайти закон розподілу випадкової величини $\mathrm{Z} = \mathrm{X} + \mathrm{Y}$.

Задача 5

Випадкова величина X рівномірно розподілена на інтервалі $[\alpha,\ \beta]$, а випадкова величина Y рівномірно розподілена на інтервалі $[\gamma,\ \delta]$.

Знайти закон розподілу випадкової величини $\mathrm{Z} = \mathrm{X} + \mathrm{Y}$.

Задача 6

Знайти закон розподілу композиції двох незалежних випадкових величин, розподілених за законом Коші.

Задача 7

На колі радіусом R випадково вибирається точка A. Закон розподілу її азимута — рівномірний. Після цього незалежно вибирається точка B. Закон розподілу її азимута також рівномірний.

Знайти закон розподілу випадкової довжини хорди AB.

Задача 8

Випадкова величина X має густину розподілу ймовірностей

$$f(x) \;=\; 0,5\,\exp(-|x|), \qquad\qquad -\infty < x < \infty.$$

Незалежна від неї випадкова величина Y розподілена таким же чином.

Знайти функцію розподілу композиції цих випадкових величин.

Задача 9

Випадкова величина X має густину розподілу ймовірностей

$$f_{\mathrm{X}}(x) \;=\; \pi^{-1}(1+x^2)^{-1}, \qquad\qquad -\infty < x < \infty.$$

Незалежна від неї випадкова величина Y має той же закон розподілу.

Знайти густину розподілу відношення $\mathrm{Z} = \mathrm{X}/\mathrm{Y}$.

Задача 10

Випадкові величини X та Y визначені на всій числовій осі і мають густину розподілу

$$f_{\mathrm{XY}}(x,y) \;=\; \frac{1}{2\pi}\,(1+x^2+y^2)^{-3/2}.$$

Знайти густину розподілу випадкової величини $\mathrm{Z} = \mathrm{X} + \mathrm{Y}$.

Задача 11

Знайти густину розподілу ймовірностей суми $\mathrm{Z} = \mathrm{X} + \mathrm{Y}$ двох визначених на усій числовій вісі незалежних випадкових величин X та Y, що підкоряються законам $f_{\mathrm{X}}(x) \;=\; [\pi\,\mathrm{ch}(x)]^{-1}$ та $f_{\mathrm{Y}}(y) \;=\; [\pi\,\mathrm{ch}(y)]^{-1}$.

Задача 12

Монета кидається N разів.

Знайти найімовірніше число появи герба. Розглянути приклади, коли $N = 10$ та $N = 20$.

Задача 13

Відрізок довжиною L обертається в просторі таким чином, що всі його можливі орієнтації рівноможливі.

Знайти закон розподілу довжини проекції цього відрізка на площину, яка виділена.

Задача 14

Випадкова величина X має неперервну функцію розподілу $F_{\mathrm{X}}(x)$.

Знайти густину $f_{\mathrm{Y}}(y)$ розподілу випадкової величини $\mathrm{Y} = F_{\mathrm{X}}(\mathrm{X})$.

Задача 15

Знайти характеристичну функцію гіпергеометричного розподілу.

Задача 16

Система з двох випадкових величин (X, Y) має спільну густину $f_{\mathrm{XY}}(x, y)$.

Знайти густину розподілу ймовірностей $f_{\mathrm{Z}}(z)$ мінімальної з цих двох величин $\mathrm{Z} = \min(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$.

Задача 17

Над площиною $x0y$ на висоті h підвішено точкове джерело світла, випромінювання якого рівномірно спрямоване в усі сторони. На площині розташовано фотопапір, що реєструє випромінювання.

Знайти закон розподілу ступеня почорніння фотопаперу.

Задача 18

Знайти характеристичну функцію $q(\lambda)$ випадкової величини X, яка має густину розподілу ймовірностей

$$f(x) \;=\; \frac{1}{(m+1)\,!}\, b^m\, x^{m-1}\, \exp(-bx), \qquad x \ge 0,$$

якщо задано: m — цілий та b — позитивний параметри.

Задача 19

Тривимірна система випадкових величин $(\mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z})$ має густину розподілу

$$f_{\mathrm{XYZ}}(x, y, z) \;=\; 6\,(1 + x + y + z)^{-4}, \qquad 0 \le x, y, z < \infty.$$

Знайти густину розподілу суми $\mathrm{S} = \mathrm{X} + \mathrm{Y} + \mathrm{Z}$.

Задача 20

Система незалежних випадкових величин $\mathrm{Z}_1, \mathrm{Z}_2, \mathrm{Z}_3, \mathrm{Z}_4$ має нормальну густину з нульовим математичним сподіванням і одиничною дисперсією кожна.

Знайти густину розподілу таких комбінацій цих величин:

а) $\mathrm{Y} \;=\; \mathrm{Z}_1 + \mathrm{Z}_2 + \mathrm{Z}_3 + \mathrm{Z}_4$;

б) $\mathrm{Y} \;=\; \mathrm{Z}_1^2 + \mathrm{Z}_2^2 + \mathrm{Z}_3^2 + \mathrm{Z}_4^2$;

в) $\mathrm{Y} \;=\; \mathrm{Z}_4\,(\mathrm{Z}_1^2 + \mathrm{Z}_2^2 + \mathrm{Z}_3^2)^{-1/2}$;

г) $\mathrm{Y} \;=\; \frac{1}{3}\,(\mathrm{Z}_1^2 + \mathrm{Z}_2^2 + \mathrm{Z}_3^2)\,\mathrm{Z}_4^{-2}$.

Задача 21

Система невід'ємних випадкових величин (X,Y) має густину розподілу ймовірностей $f_{\mathrm{XY}}(x, y)$, $0 \le x, y < \infty$.

Знайти густину розподілу $f_{\mathrm{Z}}(z)$ випадкової величини Z, яка є одним з розв'язків рівняння

$$\mathrm{Z}^2 + 2(\mathrm{X}/\mathrm{Y})\mathrm{Z} - 1 \;=\; 0.$$

Список літератури

П і д р у ч н и к и

1. Вентцель Е.С. *Теория вероятностей.* — М.: Наука, 1964.

2. Колмогоров А.Н. *Основные понятия теории вероятностей.* — М.: Наука, 1974.

3. Гнеденко Б.В. *Курс теории вероятностей.* — М.: Наука, 1963.

4. Прохоров Ю.В., Розанов Ю.А. *Теория вероятностей.* — М.: Наука, 1967.

5. Пугачев В.С. *Теория вероятностей и математическая статистика.* — М.: Наука, 1979.

6. Тихонов В.И., Миронов М.А. *Марковские процессы.* — М.: Сов. радио, 1977.

7. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. *Теория вероятностей и ее инженерные приложения.* — М.: Наука, 1988.

8. Смирнов Н.В., Дунин–Барковский И.В. *Курс теории вероятностей и математической статистики для технических приложений.* — М.: Наука, 1965.

9. Гмурман В.Е. *Теория вероятностей и математическая статистика.* — М.: Высш. шк., 2000.

10. Крамер Г. *Математические методы статистики.* — М.: Мир, 1975.

З а д а ч н и к и і п о с і б н и к и

11. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. *Прикладные задачи теории вероятностей.* — М.: Радио и связь, 1983.

12. Гмурман В.Е. *Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике.* — М.: Высш. шк., 2000.

13. Горяинов В.Т., Журавлев А.Г., Тихонов В.И. *Статистическая радиотехника. Примеры и задачи.* — М.: Сов. радио, 1980.

14. *Руководство для инженеров по решению задач теории вероятностей* / Под ред. А.А.Свешникова. — Л.: Судпромгиз, 1962.

15. Емельянов Г.В., Скитович В.П. *Задачник по теории вероятностей и математической статистике.* — Л.: Изд–во ЛГУ, 1967.

16. Мазманишвили А.С. *Теория вероятностей: Учебное пособие.* — Харьков: ХГПУ, 1994.

17. Зубков А.М., Севастьянов Б.А., Чистяков В.П. *Сборник задач по теории вероятностей.* — М.: Наука, 1989.

Довідники

18. Королюк В.С., Портенко Н.И., Скороход А.В., Турбин А.Ф. *Справочник по теории вероятностей и математической статистике.* — М.: Наука, 1985.
19. Корн Г., Корн Т. *Справочник по математике.* — М.: Наука, 1983.
20. Абрамович М., Стиган И. *Справочник по специальным функциям.* — М.: Наука, 1979.

Додаткова література

21. Чебышев П.Л. *Теория вероятностей.* — М.–Л.: Изд–во АН СССР, 1936.
22. Феллер В. *Введение в теорию вероятностей и ее применение.* — М.: Мир, 1984. – Т.1; 1984. – Т.2.
23. Анго А. *Математика для электро– и радиоинженеров.* — М.: Наука, 1965.
24. Чандрасекар С. *Стохастические проблемы в физике и астрономии.* — М.: ИЛ, 1947.
25. Секей Г. *Парадоксы в теории вероятностей и математической статистике.* — М.: Мир, 1990.
26. Кендалл М., Моран П. *Геометрические вероятности.* — М.: Наука, 1972.
27. Борель Э. *Вероятность и достоверность.* — М.: Физматгиз, 1961.
28. Мостеллер Ф. *Пятьдесят занимательных вероятностных задач с решениями.* — М.: Наука, 1971.

Навчальне видання

МАЗМАНІШВІЛІ Олександр Сергійович

ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ

Навчальний посібник до практичних занять

Українською мовою

Роботу до видання рекомендував О.В. Горілий

Редактор Л.Л. Яковлева

План 2010, поз. 65

Підп. до друку 20.10.2009 Формат 60×94 1/16 Папір офсетн.
Друк – ризографія. Гарнітура Times New Roman. Ум. друк. арк. 12,5.
Обл.–вид. арк. 15,0. Наклад 200 прим. Зам. № Ціна договірна

Видавничий центр НТУ "ХПІ", 61002, Харків, вул. Фрунзе, 21
Свідоцтво про реєстрацію ДК № 116 від 10.07.2000

Друкарня НТУ "ХПІ", 61002, Харків, вул. Фрунзе, 21

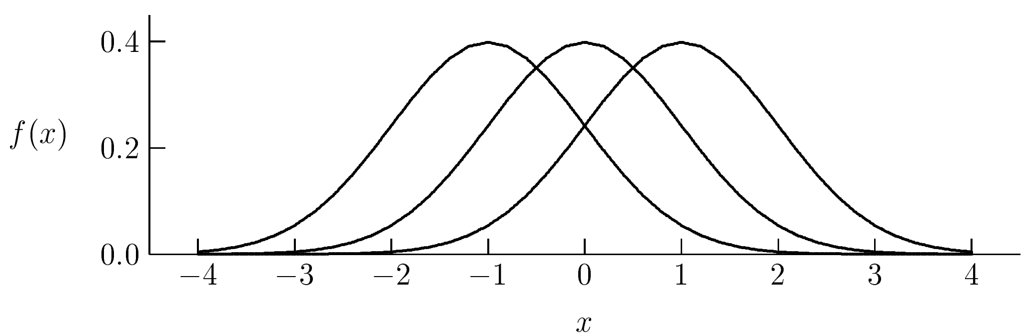
МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
"ХАРКІВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ"

О. С. МАЗМАНІШВІЛІ

ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ

НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК ДО ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ



Харків 2010