

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
"ХАРЬКОВСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ"

А. С. МАЗМАНИШВИЛИ

Т Е О Р И Я В Е Р О Я Т Н О С Т Е Й

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ К ПРАКТИЧЕСКИМ ЗАНЯТИЯМ

Рекомендовано Министерством образования и науки Украины
как учебное пособие для студентов специальностей
7.080201 "Информатика" и 7.080202 "Прикладная математика"

Утверждено Редакционно-издательским
Советом НТУ "ХПИ"

Харьков НТУ "ХПИ" 2010

ББК 22.171

М12

УДК 519.2

Рецензенты:

Е.В. Бодянский, д-р техн. наук, проф.,

Харьковский национальный университет радиоэлектроники

Г.И. Загарий, д-р техн. наук, проф., Харьковская государственная академия железнодорожного транспорта

*Гриф присвоен Министерством образования и науки Украины,
письмо № @@@@ от """"*

М12 Теория вероятностей: Учебное пособие к практическим занятиям /
Мазманишвили А.С. — Харьков: НТУ "ХПИ", 2010. — 213 с.
— Русск. яз.

ISBN 966-593-268-3

Подготовлено для выполнения практикума по курсу "Теория вероятностей". В пособии систематизированы материалы по основным темам дисциплины: теоретические сведения, необходимые для решения задач, примеры таких решений.

Предназначено для студентов, обучающихся по специальности "Прикладная математика". Будет полезно студентам физико-математических, инженерно-технических и экономических специальностей университетов, а также специалистам.

Підготовлений для виконання практикуму з курсу "Теорія ймовірностей". У посібнику систематизовано матеріали з основних тем дисципліни: теоретичні відомості, необхідні для розв'язування задач, приклади таких розв'язків.

Призначений для студентів, що навчаються за спеціальністю "Прикладна математика". Буде корисний студентам фізико-математичних, інженерно-технічних і економічних спеціальностей університетів, а також фахівцям.

This textbook contains tasks on Theory of Probabilities sorted according to the topics of the course: theoretical information that is necessary for solving the tasks, examples of the solutions.

This textbook is created for students on Applied Mathematics. It can also be useful for students on Mathematics, Physics, Engineering and Economy.

Ил. 58. Табл. 3. Библиогр. 28 назв.

ББК 22.171

ISBN 966-593-268-3

© А.С. Мазманишвили, 2010 г.

Оглавление

Введение	6
1. Основные понятия теории вероятностей	8
1.1. Случайные события	8
1.2. Аксиомы теории вероятностей	9
1.3. Примеры	12
1.4. Задачи для решения	17
1.5. Задания для проверки	19
2. Основные теоремы теории вероятностей	20
2.1. Алгебра случайных событий	20
2.2. Правило сложения вероятностей	22
2.3. Правило умножения вероятностей	25
2.4. Теорема о повторении опытов (формула Бернулли)	26
2.5. Формула полной вероятности и формула Байеса	27
2.6. Примеры	28
2.7. Задачи для решения	34
2.8. Задания для проверки	38
3. Законы распределения случайных величин	39
3.1. Случайные величины	39
3.2. Дискретные случайные величины	40
3.3. Числовые характеристики дискретных случайных величин	41
3.4. Дискретный равномерный закон	43
3.5. Биномиальное распределение (распределение Бернулли)	43
3.6. Теорема Муавра-Лапласа	46
3.7. Распределение Пуассона	46
3.8. Геометрическое распределение	48
3.9. Гипергеометрическое распределение	50
3.10. Непрерывные случайные величины	51
3.11. Числовые характеристики непрерывных случайных величин	53
3.12. Равномерное распределение	58
3.13. Нормальное распределение	59
3.14. Показательное (экспоненциальное) распределение	60
3.15. Распределение Коши	61
3.16. Гамма-распределение	61
3.17. Характеристическая и производящая функции	62
3.18. Примеры	63
3.19. Задачи для решения	80
3.20. Задания для проверки	84

4. Нормальное распределение	85
4.1. Свойства нормального распределения	85
4.2. Функция Лапласа	87
4.3. Примеры	90
4.4. Задачи для решения	101
4.5. Задания для проверки	102
5. Системы случайных величин (случайные векторы)	105
5.1. Свойства систем случайных величин	105
5.2. Законы распределения системы случайных величин	105
5.3. Числовые характеристики системы случайных величин	108
5.4. Корреляции случайных величин	109
5.5. Корреляции системы случайных величин	110
5.6. Системы нормальных случайных величин	111
5.7. Дельта-функция Дирака $\delta(x)$	113
5.8. Примеры	114
5.9. Задачи для решения	134
5.10. Задания для проверки	138
6. Законы распределения функций случайных величин	139
6.1. Закон распределения монотонной функции случайного аргумента . . .	139
6.2. Закон распределения немонотонной функции случайного аргумента . .	140
6.3. Закон распределения немонотонной функции нескольких случайных аргументов	142
6.4. Композиция двух равномерно распределенных случайных величин . .	143
6.5. Композиция нормальных случайных величин	144
6.6. Распределение χ^2 (хи-квадрат)	146
6.7. Распределение Стьюдента	147
6.8. Примеры	147
6.9. Задачи для решения	160
6.10. Задания для проверки	162
7. Предельные теоремы теории вероятностей	163
7.1. Закон больших чисел	163
7.2. Неравенство Маркова	165
7.3. Неравенство Чебышева	166
7.4. Центральная предельная теорема	166
7.5. Примеры	168
7.6. Задачи для решения	175
7.7. Задания для проверки	177
8. Случайные процессы	178
8.1. Случайные функции	178
8.2. Виды случайных процессов	179
8.3. Свойства случайных функций	181
8.4. Белый шум	185
8.5. Дробовой шум	186
8.6. Эргодичность и марковские случайные процессы	186

8.7. Примеры	188
8.8. Задачи для решения	199
8.9. Задания для проверки	201
Приложение	202
П.1. Фонд заданий для самостоятельной работы	202
Список литературы	212

Введение

Настоящая работа является пособием для студентов при выполнении всего цикла практических работ по дисциплине "Теория вероятностей".

Пособие включает материал традиционных разделов, образующих в совокупности содержание дисциплины "Теория вероятностей". Материал сгруппирован по следующим основным темам:

1. Основные понятия теории вероятностей.
2. Основные теоремы теории вероятностей.
3. Законы распределения случайных величин.
4. Нормальный закон распределения.
5. Системы случайных величин.
6. Законы распределения функций случайных величин.
7. Предельные теоремы.
8. Случайные процессы.

Издание по своему замыслу преследует основную цель: дать студентам достаточный, удобный для работы и практически апробированный материал, который обучает практическим методам и технике решения различных задач теории вероятностей с учетом того, что сегодня такие методы должны быть обязательно ориентированы на современный теоретический уровень. Поэтому, с одной стороны, несколько видоизменяется обучение самой технике вычислений, с другой, расширяется сфера изучаемых приложений. В издание включены такие разделы, как "Случайные процессы", и усилен материал других разделов, в частности, за счет большого количества графических иллюстраций.

Таким образом, в настоящем пособии систематизируется и организуется учебный материал по практическим аспектам освоения методов и приемов современной теории вероятностей. Для удобства работы, а также возможности самостоятельного углубленного изучения и контроля усвоения материала, содержание скомпоновано из отдельных самостоятельных тем, адаптированных к соответствующим разделам дисциплины "Теория вероятностей".

В каждом разделе приведены необходимые исходные и справочные данные, принципы построения методов решения соответствующих задач, типичные алгоритмы, сформулированы задания для самостоятельной работы, а также контрольные вопросы. Излагаемый практикум основан на знаниях, получаемых студентами в стандартном объеме специальности "Прикладная математика".

Настоящее пособие может рассматриваться как первая (односеместровая) часть пособия для двухсеместровой дисциплины "Теория вероятностей и математическая статистика", вторая (тоже односеместровая) часть которой – "Математическая статистика". Изложение материала и все обозначения в этих двух частях согласованы.

Пособие содержит как традиционные примеры и задачи по курсу, так и новые, почерпнутые автором из научной практики.

Основной материал пособия дополнен заданиями для самостоятельной работы и для контрольных проверок знаний обучающихся. Задачи отличаются как по сложности решения, так и практической значимостью. Как представляется, эти задания могут быть полезными при организации учебных программ различной насыщенности, в частности для контрольных, лабораторных и самостоятельных внеаудиторных занятий, а также курсового проектирования.

При составлении материала имелась в виду также возможность его адаптации к учебным программам различного объема и длительности.

1. Основные понятия теории вероятностей

1.1. Случайные события

Теория вероятностей – математическая наука, изучающая закономерности в случайных явлениях.

Область применимости теории вероятностей – потоки массовых однородных событий.

Методы теории вероятностей приспособлены для исследования только массовых случайных явлений. Они не дают возможности предсказать исход отдельного случайного явления, но позволяют рассчитать средний результат массы однородных случайных событий.

Целью теории вероятностей является получение на базе строгих математических методов количественных результатов относительно массы однородных случайных событий, позволяющих сделать определенные практические выводы.

Одним из основных понятий теории вероятностей является понятие *случайного события* (или просто события).

Событием называется всякий факт, который в результате опыта (испытания, эксперимента) может произойти или не произойти.

Примеры событий: выпадение шестерки при бросании игральной кости; отказ технического устройства во время его работы; искажение сообщения при передаче его по каналу связи. С событиями связываются некоторые *числа*, характеризующие степень их объективной возможности и называемые **вероятностями событий**.

Существует несколько подходов к понятию *вероятность*. Один из них ("классический") основан на подсчете числа исходов опыта, благоприятных для данного события, и его отношении к общему числу равновозможных исходов. В основе другого подхода ("частотного" или "статистического") лежит понятие частоты события в данной серии опытов.

Частотой события в серии из N опытов называется отношение числа опытов, в которых произошло данное событие, к общему числу произведенных опытов. Существуют случайные явления, в которых наблюдается *устойчивость частот*; она состоит в том, что при увеличении числа независимых опытов N частота события стабилизируется, приближаясь к какой-то постоянной величине; эта величина и называется *вероятностью события*.

Пусть производится некоторый опыт (эксперимент, испытание), результат которого заранее неизвестен, случаен. Рассмотрим множество Ω всех возможных исходов опыта: каждый его элемент ω (один отдельный исход опыта) будем называть *элементарным событием*, а все множество Ω – *пространством элементарных*

ω_1	ω_2	ω_3	ω_4
ω_5	ω_6	ω_7	ω_8
ω_9	ω_{10}	ω_{11}	ω_{12}
ω_{13}	ω_{14}	ω_{15}	ω_{16}

Ω

Рисунок 1.1 — Пример пространства элементарных событий $\Omega = \sum_{n=1}^N \omega_n$, образованного из $N = 16$ элементарных событий

событий (рис. 1.1). Подмножества множества Ω называются *событиями* (или случайными событиями); любое событие A — это подмножество множества Ω , т.е. $A \subseteq \Omega$.

Непересекающиеся события A и B (такие, когда $AB = \emptyset$) называются *несовместными*; появление одного из них исключает появление другого. Несколько событий $A_1, A_2, \dots, A_N$ называются *попарно несовместными* (или просто несовместными), если появление каждого из них исключает появление каждого из остальных.

Говорят, что несколько событий $A_1, A_2, \dots, A_N$ образуют полную группу, если $\sum_{n=1}^N A_n = \Omega$, т.е. их сумма есть достоверное событие (другими словами, в результате опыта непременно произойдет хотя бы одно из них).

Пример

Опыт — бросание шестигранной игральной кости. События $A = \{1, 2\}$, $B = \{2, 3, 4\}$, $C = \{4, 5, 6\}$ образуют полную группу:

$$A + B + C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = \Omega.$$

1.2. Аксиомы теории вероятностей

Пусть каждому событию ставится в соответствие некоторое число, называемое *вероятностью события*.

Вероятность события A принято обозначать через $P(A)$ [или $\text{Pr}(A)$, или $\text{Prob}(A)$].

Потребуем, чтобы вероятности событий удовлетворяли следующим аксиомам:

1. Вероятность любого события A заключена между нулем и единицей:

$$0 \leq P(A) \leq 1. \quad (1.1)$$

2. Аксиома сложения вероятностей: если A и B — несовместные события, то

$$P(A + B) = P(A) + P(B). \quad (1.2)$$

Аксиома сразу обобщается на любое конечное число событий: *если $A_1, A_2, \dots, A_N$ – несовместные события, то*

$$P\left(\sum_{n=1}^N A_n\right) = \sum_{n=1}^N P(A_n). \quad (1.3)$$

3. Аксиома сложения вероятностей для бесконечной последовательности событий: *если $A_1, A_2, A_3, \dots$ – несовместные события, то*

$$P\left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n). \quad (1.4)$$

Аксиомы теории вероятностей позволяют вычислять вероятности любых событий (подмножеств пространства Ω) с помощью вероятностей элементарных событий (если их конечное или счетное число). Вопрос о том, как определить вероятности элементарных событий, при этом не рассматривается. На практике они определяются либо из соображений, связанных с симметрией опыта (например, для симметричной игральной кости естественно считать одинаково вероятным выпадение каждой из граней), или же на основе опытных данных (частот).

Для опытов, обладающих симметрией возможных исходов, применяется способ непосредственного вычисления вероятностей событий в так называемой *схеме случаев* (иначе – *схеме урн* или *схеме шансов*).

Эта схема основана на допущениях о равновероятности (равновозможности), несовместности элементарных событий и полноте их группы.

Несколько событий $A_1, A_2, \dots, A_N$ называются *равновозможными*, если в силу симметрии условий опыта относительно этих событий вероятности их одинаковы: $P(A_1) = P(A_2) = \dots = P(A_N)$.

Если в каком-то опыте пространство элементарных событий Ω можно представить в виде несовместных и равновозможных событий $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N$, то такие события называются *случаями* (или шансами), а про сам опыт говорят, что он *сводится к схеме случаев*.

Случай ω_n называют *благоприятным* событию A , если он является элементом множества A , т.е. $\omega_n \in A$.

Так как случаи $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N$ образуют полную группу событий, то

$$\sum_{n=1}^N \omega_n = \Omega. \quad (1.5)$$

Так как элементарные события $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N$ несовместны, то по аксиоме сложения вероятностей

$$P\left(\sum_{n=1}^N \omega_n\right) = P(\Omega) = \sum_{n=1}^N P(\omega_n) = 1. \quad (1.6)$$

Вероятность полной группы событий тождественно равна единице.

Так как элементарные события $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N$ равновозможны, то вероятность каждого из них одна и та же и равна $1/N$:

$$P(\omega_1) = P(\omega_2) = \dots = P(\omega_N) = 1/N. \quad (1.7)$$

Отсюда вытекает классическая формула для вероятности события : если опыт сводится к схеме случаев, то вероятность события A в этом опыте можно вычислить по формуле :

$$P(A) = m_A/N, \quad (1.8)$$

где m_A – число случаев, благоприятных событию A ; N – общее число случаев. Формула (1.8), принимавшаяся ранее за определение вероятности, при современном аксиоматическом подходе есть следствие аксиомы сложения вероятностей.

Пример

В урне находятся 3 белых и 4 черных шара, тщательно перемешанных. Из урны наугад выбирается один шар.

Требуется построить для этого опыта пространство элементарных событий и найти вероятность события $\{A: \text{вынут белый шар}\}$.

Для нахождения вероятности пронумеруем шары в урне – от 1 до 7; первые 3 шара – белые, последние 4 – черные :

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}; \quad A = \{1, 2, 3\}.$$

В силу симметрии условий задачи относительно всех шаров (шар выбирается наугад) элементарные события равновозможны. Поскольку они несовместны и образуют полную группу, вероятность события A найдется по формуле (1.8) :

$$P(A) = m_A/N = 3/7.$$

Эта формула позволяет в некоторых задачах, когда опыт обладает симметрией возможных исходов, непосредственно по условиям опыта вычислить вероятности событий.

Естественным обобщением и расширением непосредственного подсчета вероятностей в схеме случаев является "геометрический" подход к вычислению вероятностей событий; он применяется тогда, когда пространство элементарных событий Ω включает несчетное множество элементарных событий $\omega \in \Omega$, и, по условиям симметрии опыта, никакое из них не имеет преимущества перед другими в смысле возможности появления.

Пусть пространство элементарных событий Ω – какая-то область на плоскости, а элементарные события ω – отдельные точки в пределах этой области. Если для опыта характерна симметрия возможных исходов (например, какой-то "точечный" объект наугад брошен в пределах области), то все элементарные события "равноправны". Тогда естественно предположить, что вероятности попадания элементарного события ω в две области 1 и 2 равной площади S равны, а вероятность любого события $A \in \Omega$ равна отношению площади S_A области A к площади всей области Ω , т.е.

$$P(A) = S_A/S_\Omega. \quad (1.9)$$

Формула (1.9) представляет собой обобщение классической формулы (1.8) на несчетное множество элементарных событий.

Симметрия условий опыта относительно его элементарных исходов ω формулируется обычно с помощью слова "наугад", что, в сущности, равносильно выбору

наугад одного из шаров в урне. Вероятности, вычисленные с помощью такого приема, часто называют *геометрическими вероятностями*.

Пример

Пусть на отрезке прямой от 0 до 2 наугад ставятся точки с абсциссами x и y .

Нужно найти вероятность того, что расстояние L между ними будет меньше единицы.

Элементарное событие A для этого случая характеризуется парой координат (x, y) . Пространство элементарных событий – квадрат со стороной 2 на плоскости xOy ; $L = |y - x|$. Событию $\{A : |y - x| < 1\}$ соответствует геометрическое место точек, таких, что $|y - x| < 1$. Площадь его равна 3 и поэтому

$$P(A) = \Pr\{|y - x| < 1\} = 3/4.$$

Если пространство элементарных событий не плоское, а трехмерное, то в (1.9) вместо площадей S_A и S_Ω ставятся объемы V_A и V_Ω ; для одномерного пространства элементарных событий – длины L_A и L_Ω соответствующих участков прямой.

1.3. Примеры

Пример 1.1

В урне a белых и b черных шаров. Из урны вынимают наугад один шар.

Найти вероятность P_A того, что этот шар — белый.

Решение

Пространство элементарных событий следующее :

$$\Omega = \{\text{б}, \text{б}, \dots, \text{б}, \text{ч}, \text{ч}, \dots, \text{ч}\};$$

здесь символом "б" обозначен белый шар (их по условию a штук), а символом "ч" – черный шар (их соответственно b штук). Пространство благоприятных событий A следующее $A = \{\text{б}, \text{б}, \dots, \text{б}\}$. Имеем $N = a + b$, $m_A = a$. По формуле (1.8) получим

$$P_A = a/(a + b).$$

Пример 1.2

При перевозке ящика, в котором содержалось 21 стандартная и 10 нестандартных деталей, утеряна одна деталь, причем неизвестно какая. Наугад извлеченная (после перевозки) из ящика деталь оказалась стандартной.

Требуется найти вероятность того, что была утеряна: а) стандартная деталь; б) нестандартная деталь.

Решение

а) Извлеченная стандартная деталь, очевидно, не могла быть утеряна; могла быть утеряна любая из остальных 30 деталей, причем среди них было 20 стандартных. Вероятность того, что была утеряна стандартная деталь, $P_1 = 20/30 = 2/3$.

б) Среди 30 деталей, каждая из которых могла быть утеряна, имелось 10 нестандартных экземпляров. Вероятность того, что потеряна нестандартная деталь, $P_2 = 10/30 = 1/3$.

Пример 1.3

Отдел технического контроля обнаружил 5 бракованных деталей в партии из случайно отобранных 100 деталей.

Найти частоту появления бракованных деталей.

Решение

Частота $w(A)$ события A (появление бракованных деталей) равна отношению числа испытаний, в которых появилось событие A , к общему числу произведенных испытаний:

$$w(A) = 5/100 = 0,05.$$

Пример 1.4

В ящике содержится 10 одинаковых деталей, помеченных номерами 1, 2, ..., 10. Наугад извлечены 6 деталей.

Требуется найти вероятность того, что среди извлеченных деталей окажутся:
а) деталь № 1; б) детали № 1 и № 2.

Решение

а) Общее число возможных элементарных исходов испытания равно числу способов, которыми можно извлечь 6 деталей из десяти, т.е. C_{10}^6 . Здесь C_n^m – число сочетаний из n по m .

Подсчитаем число исходов, благоприятствующих интересующему нас событию: среди отобранных шести деталей есть деталь № 1 и, следовательно, остальные 5 деталей имеют другие номера. Число таких исходов, очевидно, равно числу способов, которыми можно отобрать 5 деталей из оставшихся девяти, т.е. C_9^5 .

Искомая вероятность равна отношению числа исходов, благоприятствующих рассматриваемому событию, к общему числу возможных элементарных исходов:

$$\begin{aligned} P &= C_9^5 / C_{10}^6 = C_9^4 / C_{10}^4 = \\ &= [(9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6) / (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4)] / [(10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7) / (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4)] = 0,6. \end{aligned}$$

б) Число исходов, благоприятствующих интересующему нас событию (среди отобранных деталей есть детали № 1 и № 2, следовательно, 4 детали имеют другие номера), равно числу способов, которыми можно отобрать 4 детали из оставшихся восьми, т.е. C_8^4 .

Искомая вероятность

$$P = C_8^4 / C_{10}^6 = C_8^4 / C_{10}^4 = 1/3.$$

Пример 1.5

В группе M человек ($M > 2$). Они произвольно рассаживаются за круглым столом.

Найти вероятность того, что два фиксированных лица A и B окажутся рядом.

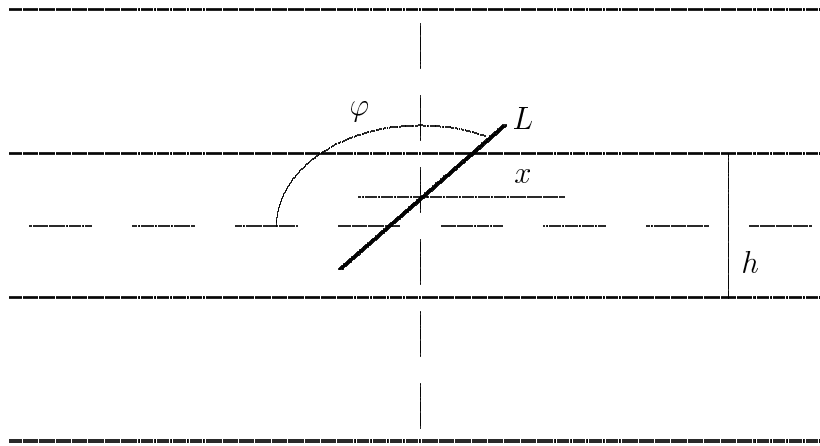


Рисунок 1.2 — Схема опыта Бюффона; h — расстояние между параллелями; L — длина иголки; x — расстояние от центра иголки до ближайшей параллели; φ — угол между осью иголки и параллелью

Решение

Число всех случаев $n = M!$, из них благоприятствующих $m = 2M$, так что всего пар соседних мест M , а на каждой паре соседних мест лица А и В можно рассадить двумя способами.

Поэтому

$$P = m/n = (2M)/M! = 2/(M-1)!.$$

Пример 1.6 (Задача Бюффона)

Плоскость разграфлена параллельными прямыми, отстоящими друг от друга на расстоянии h (рис. 1.2). На плоскость наугад бросают иглу длиной L ($L < h$).

Найти вероятность того, что игла пересечет какую-нибудь прямую.

Решение

Введем обозначения: x — расстояние от середины иглы до ближайшей параллели; φ — угол, составленный иглой с этой параллелью.

Положение иглы полностью определяется заданием определенных значений x и φ , причем x принимает значения от 0 до $h/2$; возможные значения φ изменяются от 0 до π . Другими словами, для выбранного положения иглы её середина может попасть в любую из точек прямоугольника со сторонами $h/2$ и π . Таким образом, этот прямоугольник можно рассматривать как фигуру G , геометрическое место точек которой соответствуют множеству всех возможных положений середины иглы.

Очевидно, площадь фигуры G равна $S_G = \pi h/2$.

Найдем теперь фигуру g , каждая точка которой благоприятствует интересующему нас событию (рис. 1.3), т.е. каждая точка этой фигуры может служить серединой иглы, которая пересекает ближайшую к ней параллель. Игла пересечет ближайшую к ней параллель при условии $x \leq \frac{L}{2} \sin \varphi$.

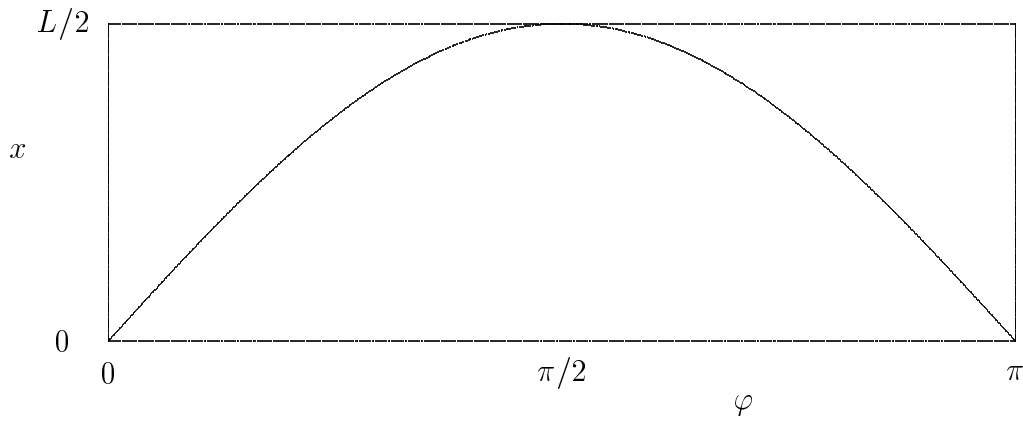


Рисунок 1.3 — К схеме опыта Бюффона

Найдем площадь S_g фигуры g :

$$S_g = \int_0^{\pi} \frac{L}{2} \sin \varphi d\varphi = L.$$

Вероятность того, что игла пересечет прямую:

$$P = S_g / S_G = 2L / \pi h.$$

Пример 1.7

В партии из N деталей имеется n стандартных. Наугад отобраны m деталей.

Найти вероятность того, что среди отобранных деталей окажется ровно k стандартных.

Решение

Общее число возможных элементарных исходов испытания равно числу способов, которыми можно извлечь m деталей из N деталей, т.е. C_N^m — числу сочетаний из N элементов по m .

Подсчитаем число исходов, благоприятствующих интересующему нас событию (среди m деталей ровно k стандартных): k стандартных деталей можно взять из n стандартных деталей C_n^k способами; при этом остальные $(m-k)$ деталей должны быть нестандартными; взять же $(m-k)$ нестандартных деталей из $(N-n)$ нестандартных деталей можно C_{N-n}^{m-k} способами. Следовательно, число благоприятствующих исходов равно $C_n^k C_{N-n}^{m-k}$.

Искомая вероятность равна отношению числа исходов, благоприятствующих событию, к числу всех элементарных исходов:

$$P = C_n^k C_{N-n}^{m-k} / C_N^m.$$

Пример 1.8

Быстро вращающийся диск радиусом R разделен на четное число равных секторов, попеременно окрашенных в белый и черный цвет. По диску произведен выстрел.

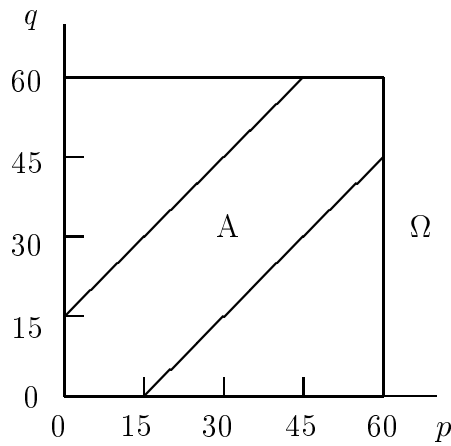


Рисунок 1.4 — К задаче о встрече; Ω – пространство элементарных событий; A – множество благоприятных исходов (встреч)

Найти вероятность того, что пуля попадет в один из белых секторов. Предполагается, что вероятность попадания пули в плоскую фигуру пропорциональна площади этой фигуры.

Ответ: $P = (0,5\pi R^2) / (\pi R^2) = 0,5$.

Пример 1.9

Коля и Петя договорились встретиться на остановке автобуса между 9 и 10 часами. Каждый, придя на остановку, ждет другого 15 минут, а потом уходит.

Найти вероятность встречи Коли и Пети, предполагая, что моменты их прихода являются координатами точки, имеющей равномерное распределение в квадрате $[9,10] \times [9,10]$ (час²).

Решение

Пусть Коля приходит на остановку в 9 часов p минут, а Петя – в 9 часов q минут. В качестве множества элементарных событий выберем

$$\Omega = \{(p, q) : 0 \leq p \leq 60, 0 \leq q \leq 60\}.$$

Тогда событие $\{A: \text{встреча Коли и Пети происходит}\}$ соответствует множеству

$$A = \{(p, q) : |p - q| \leq 15, 0 \leq p \leq 60, 0 \leq q \leq 60\}.$$

Полному множеству Ω можно поставить в соответствие квадрат, сторона которого равна 60, а площадь

$$S_{\Omega} = 60^2.$$

Множеству A также можно поставить в соответствие фигуру, площадь которой составляет (рис. 1.4)

$$S_A = 60^2 - 45^2 = \frac{7}{16} \times 60^2.$$

Поэтому искомая вероятность P равна отношению

$$P(A) = S_A / S_{\Omega} = 7/16.$$

1.4. Задачи для решения

Задача 1.1

В урне a белых и b черных шаров. Из урны вынули один шар и отложили его в сторону. Этот шар оказался белым. После этого из урны берут еще один шар.

Найти вероятность того, что этот шар тоже будет белым.

Ответ: $P = (a - 1)/(a + b - 1)$.

Задача 1.2

В урне a белых и b черных шаров. Из урны вынули один шар и не глядя отложили в сторону. После этого из урны взяли еще один шар.

Найти вероятность того, что этот шар будет белым.

Ответ: $P = a/(a + b)$.

Задача 1.3

На пяти одинаковых карточках написаны цифры 1, 2, 3, 4, 5. Вынимаются наугад одна за другой две карточки.

Найти вероятность следующих событий:

{A: *сумма цифр на вынутых карточках — нечетное число*};

{B: *вторая цифра меньше первой*};

{C: *вторая цифра больше первой ровно на единицу*}.

Ответ: $P(A) = 0,6$; $P(B) = 0,4$; $P(C) = 0,16$.

Задача 1.4

В урне a белых и b черных шаров. Из урны вынимают один за другим все шары, кроме одного.

Найти вероятность того, что последний оставшийся в урне шар будет белым.

Ответ: $P = a/(a + b)$.

Задача 1.5

Из урны, в которой a белых и b черных шаров, вынимают подряд шары.

Найти вероятность того, что второй по порядку шар будет белым.

Ответ: $P = a/(a + b)$.

Задача 1.6

Наугад выбрано четырехзначное число.

Определить вероятность того, что в этом числе: а) все цифры разные; б) имеются только две одинаковые цифры; в) имеются две пары одинаковых цифр; г) имеются только три одинаковые цифры.

Ответ: $P_1 = 504/1000$; $P_2 = 432/1000$; $P_3 = 27/1000$; $P_4 = 36/1000$.

Задача 1.7

Четырехтомное сочинение расположено на библиотечной полке в случайном порядке.

Найти вероятность того, что тома стоят в должном порядке справа налево или слева направо.

Ответ: $P = 1/12$.

Задача 1.8

На плоскости начерчены параллельные прямые, находящиеся друг от друга на расстоянии $2h$. На плоскость наугад бросается круг радиусом r ($r < h$).

Найти вероятность того, что круг не пересечет ни одной прямой.

Ответ: $P = (h - r)/h$.

Задача 1.9

Брошено n шестигранных игральных костей.

Найти вероятность получения суммы очков, равной: а) n ; б) $n + 1$.

Ответ: а) $P = 1/6^n$; б) $P = n/6^n$.

Задача 1.10

Набирая номер телефона, абонент забыл две последние цифры и, помня лишь то, что эти цифры отличны, набрал их наугад.

Определить вероятность P того, что набраны нужные цифры.

Ответ: $P = 1 / A_{10}^2 = 1/90$.

Задача 1.11

В урне 2 белых, 3 черных и 5 красных шаров. Три шара вынимаются наугад.

Найти вероятность того, что среди вынутых шаров хотя бы два будут разного цвета.

Ответ: $P = 109/120$.

Задача 1.12

При испытаниях 200 случайно отобранных резисторов в течение времени t оказалось, что относительная частота исправных резисторов равна 0,95.

Определить число исправных резисторов.

Ответ: 190.

Задача 1.13

В партии триодов n стандартных и m бракованных. При контроле оказалось, что первые k триодов стандартны.

Определить вероятность P того, что следующий триод будет стандартным.

Ответ: $P = (n - k)/(n + m - k)$.

Задача 1.14

Из колоды в 52 карты вынули одновременно три карты.

Найти вероятность того, что среди вынутых карт найдется хотя бы одна красной масти.

Ответ: $P = 15/17$.

Задача 1.15

На поверхности сферы берут наугад две точки и соединяют меньшей дугой большого круга.

Найти вероятность того, что размер получившейся дуги не превзойдет α радиан.

Ответ: $P = \alpha/\pi$.

Задача 1.16

Брошено три монеты.

Предполагая, что элементарные события равновероятны, найти вероятности событий:

$\{A: \text{первая монета выпала гербом вверх}\},$

$\{B: \text{выпало ровно два герба}\},$

$\{C: \text{выпало не больше двух гербов}\}.$

Ответ: $P(A) = 1/2$; $P(B) = 3/8$; $P(C) = 7/8$.

Задача 1.17

Из первого ящика, содержащего a красных шаров и b зеленых шаров, наугад вытащили n шаров и поместили (не рассматривая) во второй ящик. Из второго ящика наугад вытащили m шаров.

Найти вероятность того, что среди вытащенных m шаров окажется 1 красный шар, если $m \leq b$.

$$\text{Ответ: } P = \sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^m \frac{C_a^k C_b^{n-k}}{C_{a+b}^n} \cdot \frac{C_k^l C_{n-k}^{m-l}}{C_n^m} \cdot \frac{C_l^1 C_{m-l}^0}{C_n^1}.$$

Задача 1.18

Решить задачу Бюффона о вероятности пересечения отрезка длиной L хотя бы одной из прямых, проведенных на плоскости на расстоянии h одна от другой, если $L > h$.

$$\text{Ответ: } P = \frac{2L}{\pi h} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{h^2}{L^2}} + \arccos \frac{h}{L} \right).$$

1.5. Задания для проверки

1. Какие задачи рассматривает теория вероятностей?
2. Раскройте понятие случайного события.
3. Поясните суть вероятности события.
4. Раскройте понятия случайной величины и детерминированной величины.
5. Постройте классификацию случайных величин, раскройте понятие дискретных и непрерывных случайных величин.
6. Назовите способы задания и описания случайных величин.
7. Сформулируйте аксиомы теории вероятностей.
8. Постройте практические примеры суммы двух случайных событий, трех случайных событий.
9. Постройте практические примеры произведения двух случайных событий, трех случайных событий.
10. Постройте практический пример набора случайных событий, образующих полную группу.
11. Дайте интерпретацию вероятности полной группы событий.

2. Основные теоремы теории вероятностей

2.1. Алгебра случайных событий

Основными в теории вероятностей являются не прямые, а косвенные методы вычисления вероятностей, когда вероятности интересующих нас событий выражаются через вероятности других событий, с ними связанных. Для этого, прежде всего, нужно уметь выражать интересующие нас события через другие. Этим целям служит так называемая *алгебра событий*.

Для событий вводятся понятия *сумма событий*, *произведение событий* и некоторые другие, а также правила действий с событиями. Все эти понятия вводятся только тогда, когда рассматриваемые события ω , о которых идет речь, представляют собой подмножества одного и того же пространства элементарных событий Ω .

Так как события представляют собой множества, то действия с ними (сложение, умножение) определяются так же, как соответствующие действия с множествами.

Суммой ($A + B$) двух событий A и B называется событие, состоящее в выполнении хотя бы одного из этих событий.

Сумма двух событий представляет собой объединение соответствующих множеств (рис. 2.1).

Пример

Если из ружья произведены два выстрела и событие A – попадание при первом выстреле, событие B – попадание при втором выстреле, то событие $(A + B)$ – попадание или при первом выстреле, или при втором, или при обоих выстрелах.

Аналогично *суммой нескольких событий $A_1, A_2, \dots, A_N$ называется событие*

$$\sum_{n=1}^N A_n = A_1 + A_2 + \dots + A_N, \quad (2.1)$$

состоящее в выполнении хотя бы одного из них (рис. 2.2).

Суммироваться может и бесконечное (счетное) число событий:

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n = A_1 + A_2 + \dots + A_N + \dots \quad (2.2)$$

Произведением AB двух событий A и B называется событие, состоящее в совместном выполнении того и другого события. Произведение событий представляет собой пересечение соответствующих множеств. (Знак произведения, если это не вызывает недоразумений, может быть опущен).

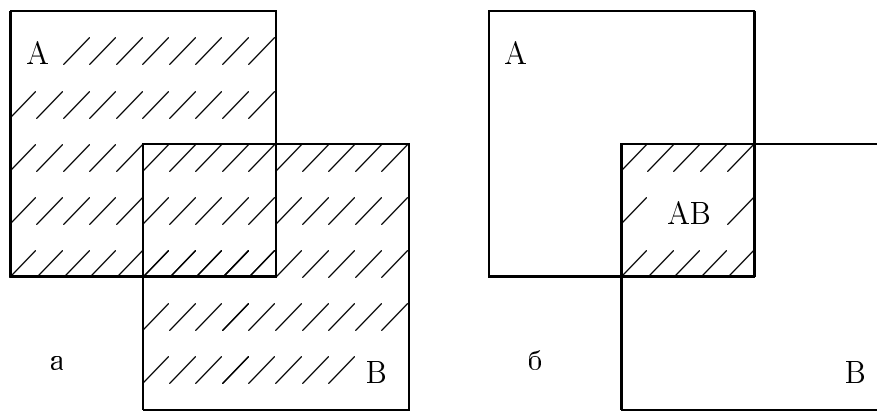


Рисунок 2.1 — К теореме о сумме и произведении двух событий: а) сумма событий $A + B$; б) произведение событий AB

Пример

Если в ящике содержатся детали, изготовленные заводами № 1 и № 2, и событие A – появление стандартной детали; событие B – деталь изготовлена заводом № 1, то событие AB – появление стандартной детали завода № 1.

Произведением нескольких событий $A_1, A_2, A_3, \dots, A_N$ называется событие

$$\prod_{n=1}^N A_n = A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_N, \quad (2.3)$$

состоящее в совместном выполнении всех этих событий.

Перемножаться может и бесконечное (счетное) число событий.

Из определения суммы и произведения событий следует :

$$\begin{aligned} A + A &= A; & A \cdot A &= A; \\ A + \Omega &= \Omega; & A \cdot \Omega &= A; \\ A + \emptyset &= A; & A \cdot \emptyset &= \emptyset. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Если $A \subseteq B$, то

$$A + B = B, \quad A \cdot B = A. \quad (2.5)$$

Операции сложения и умножения событий имеют ряд свойств, присущих обычным сложению и умножению :

1) переместительное свойство :

$$A + B = B + A; \quad A \cdot B = B \cdot A; \quad (2.6)$$

2) сочетательное свойство :

$$(A + B) + C = A + (B + C); \quad (A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C); \quad (2.7)$$

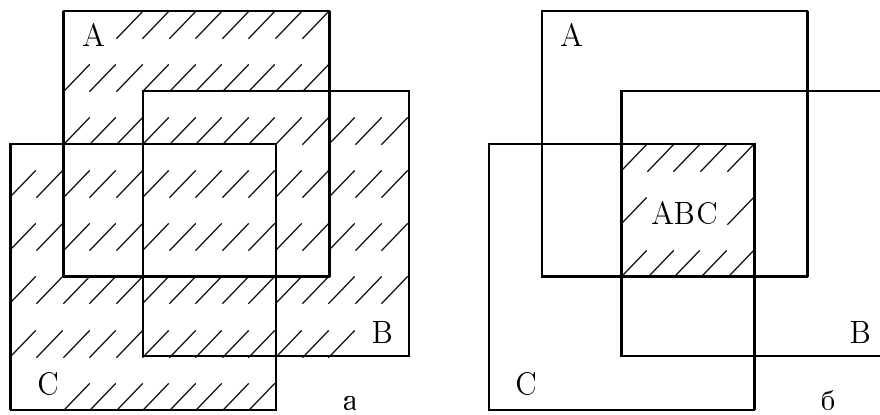


Рисунок 2.2 — К теореме о сумме и произведении трех событий: а) сумма событий $A + B + C$; б) произведение событий ABC

3) распределительное свойство :

$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C. \quad (2.8)$$

Все эти свойства вытекают из того, что события являются множествами.

Противоположным событием для события A (или его дополнением) называется событие $\bar{A}$, состоящее в неоявлении события A , то есть $\{\bar{A}: \text{не появилось } A\}$. Область $\bar{A}$ дополняет область A до полного пространства Ω .

Из определения противоположного события следует (рис. 2.3) :

$$\overline{(\bar{A})} = A; \quad \overline{\Omega} = \emptyset; \quad \overline{\emptyset} = \Omega. \quad (2.9)$$

Если $B \subseteq A$, то $\bar{A} \subseteq \bar{B}$. Для противоположных событий имеют место следующие свойства :

$$\overline{A + B} = \bar{A} \bar{B}; \quad \overline{AB} = \bar{A} + \bar{B}. \quad (2.10)$$

Правила алгебры позволяют, комбинируя различные простые события, образовывать другие, более сложные.

Вероятности сложных событий можно вычислять с помощью вероятностей других, более простых, пользуясь двумя основными правилами теории вероятностей :

- 1) правилом сложения вероятностей,
- 2) правилом умножения вероятностей.

Эти правила часто называют *основными теоремами теории вероятностей*.

2.2. Правило сложения вероятностей

Вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий, т.е. если $A \cdot B = \emptyset$, то

$$P(A + B) = P(A) + P(B). \quad (2.11)$$

Правило сложения вероятностей легко обобщается на случай произвольного числа N несовместных событий :

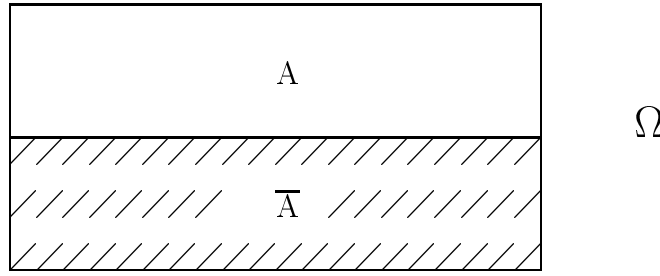


Рисунок 2.3 — Дополнение $\bar{A}$ события A до полного пространства Ω

Если $A_n \cdot A_m = \emptyset$ при $n \neq m$, то

$$P\left(\sum_{n=1}^N A_n\right) = \sum_{n=1}^N P(A_n). \quad (2.12)$$

Правило сложения вероятностей также обобщается на случай бесконечного (счетного) числа событий.

Если $A_n \cdot A_m = \emptyset$ при $n \neq m$, то

$$P\left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n). \quad (2.13)$$

Из правила сложения вероятностей вытекает, что если события $A_1, A_2, \dots, A_N$ несовместны и образуют полную группу, то сумма их вероятностей равна единице.

Таким образом, если

$$\sum_{n=1}^N A_n = \Omega$$

и

$$A_n A_m = \emptyset \quad \text{при} \quad n \neq m,$$

то

$$\sum_{n=1}^N P(A_n) = 1. \quad (2.14)$$

В частности, так как два противоположных события A и $\bar{A}$ несовместны и образуют полную группу, то сумма вероятностей противоположных событий равна единице:

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1. \quad (2.15)$$

При рассмотрении понятий суммы и произведения событий часто оказывается полезной наглядная геометрическая интерпретация.

На рис. 2.1 проиллюстрированы понятия суммы и произведения двух событий A и B .

Пусть событие A есть попадание точки в область A , соответственно событие B – попадание точки в область B . Тогда событие $A + B$ есть попадание в

область, заштрихованную на рис. 2.1а, а событие АВ есть попадание в область, заштрихованную на рис. 2.1б.

Аналогично может быть показана сумма и произведение трех событий — А, В и С.

На рис. 2.2а заштрихована область, отвечающая событию $A + B + C$, а на рис. 2.2б заштрихована область, отвечающая событию ABC .

Если два события А и В совместны, вероятность суммы этих событий выражается формулой

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB). \quad (2.16)$$

Вероятность суммы трех совместных событий находится по формуле

$$\begin{aligned} P(A + B + C) = \\ = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC). \end{aligned} \quad (2.17)$$

С помощью рис. 2.1 и 2.2 можно убедиться в справедливости этих выражений.

Общая формула для вероятности суммы любого числа совместных событий следующая

$$\begin{aligned} P\left(\sum_{n=1}^N A_n\right) = \sum_{n=1}^N P(A_n) - \sum_{n,m=1}^N P(A_n A_m) + \\ + \sum_{n,m,k=1}^N P(A_n A_m A_k) - \dots - (-1)^N P(A_1 A_2 \dots A_N), \end{aligned} \quad (2.18)$$

при этом суммы распространяются на все возможные *различные* значения индексов n, n, m, n, m, k и т.д.

Аналогичные выражения можно написать для произведения событий. Из рис. 2.1 ясно, что для двух событий имеем

$$P(AB) = P(A) + P(B) - P(A + B), \quad (2.19)$$

соответственно из рис. 2.2 следует, что в случае трех событий выполняется

$$\begin{aligned} P(ABC) = \\ = P(A) + P(B) + P(C) - P(A + B) - P(A + C) - P(B + C) + P(A + B + C). \end{aligned} \quad (2.20)$$

Общая формула, выражающая вероятность произведения произвольного числа событий через вероятности сумм этих событий, взятых, как и в (2.18), по одному, по два, по три и т.д., имеет вид:

$$\begin{aligned} P(A_1 A_2 \dots A_N) = \sum_{n=1}^N P(A_n) - \sum_{n,m=1}^N P(A_n + A_m) + \\ + \sum_{n,m,k=1}^N P(A_n + A_m + A_k) - \dots - (-1)^N P\left(\sum_{n=1}^N A_n\right), \end{aligned} \quad (2.21)$$

при этом суммы распространяются на все возможные *различные* значения индексов n, n, m, n, m, k и т.д.

2.3. Правило умножения вероятностей

Чтобы сформулировать правило умножения вероятностей, необходимо ввести понятие условной вероятности.

Условной вероятностью события А при наличии события В [обозначается $P(A|B)$] называется вероятность события А, вычисленная при условии, что событие В произошло.

Рассматриваемое условие, состоящее в том, что событие В произошло, равносильно изменению опыта, когда из всех элементарных событий остаются только те, которые благоприятны событию В, а все остальные отбрасываются. Из этого следует, что вместо пространства элементарных событий Ω рассматривается новое пространство Ω_B , соответствующее событию В. Область АВ, соответствующая пересечению А и В, благоприятна событию А при наличии события В.

Пример

В урне 3 белых и 2 черных шара; два партнера вынимают из урны по одному шару.

Событие А – появление белого шара у первого партнера.

Событие В – появление белого шара у второго партнера.

Вероятность события А до того, как стало известно что-либо о событии В, равна $3/5$. Если стало известно, что событие В произошло, то вероятность события А становится равной $1/2$, следовательно, событие А зависит от события В.

Для этого примера безусловная вероятность события А: $P(A) = 3/5$. Условная вероятность события А: $P(A|B) = 1/2$.

Вероятность произведения двух событий А и В равна вероятности одного из них (например А), умноженной на условную вероятность другого при наличии первого:

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B|A), \quad (2.22)$$

или, если в качестве первого события взять В,

$$P(AB) = P(B) \cdot P(A|B). \quad (2.23)$$

Правило умножения вероятностей обобщается на произвольное число событий:

$$\begin{aligned} P(A_1 A_2 \dots A_N) &= \\ &= P(A_1) P(A_2|A_1) P(A_3|A_1 A_2) \dots P(A_N|A_1 A_2 \dots A_{N-1}). \end{aligned} \quad (2.24)$$

Из формулы (2.22) получаем следующее выражение для условной вероятности:

$$P(B|A) = P(AB) / P(A), \quad (2.25)$$

т.е. условная вероятность одного события при наличии другого равна вероятности произведения двух событий, деленной на вероятность того из них, которое предполагается выполненным.

Аналогично формуле (2.25) можно написать

$$P(A|B) = P(AB) / P(B). \quad (2.26)$$

Два события А и В называются *независимыми*, если появление одного из них не меняет вероятности появления другого :

$$P(A|B) = P(A), \quad (2.27)$$

или, что равносильно,

$$P(B|A) = P(B). \quad (2.28)$$

Для двух независимых событий правило умножения вероятностей принимает вид :

$$P(AB) = P(A)P(B), \quad (2.29)$$

т.е. *вероятность произведения двух независимых событий равна произведению вероятностей этих событий*.

Пример

Монета брошена 2 раза. Вероятность появления герба в первом испытании (событие А) не зависит от появления или не появления герба во втором испытании (событие В). В свою очередь, вероятность выпадания герба во втором испытании не зависит от результата первого испытания. Таким образом, события А и В – независимые.

Несколько событий называются *независимыми в совокупности* (или просто независимыми), если появление любого числа из них не меняет вероятностей остальных событий. Для нескольких независимых событий правило умножения (2.24) принимает вид :

$$P(A_1 A_2 \dots A_N) = P(A_1) P(A_2) \dots P(A_N), \quad (2.30)$$

т.е. *вероятность произведения независимых событий равна произведению вероятностей этих событий*.

Несколько событий называются *независимыми*, если вероятность того или иного исхода каждого из них *не зависит* от того, какие исходы имели другие опыты.

Отметим, что событие А или событие В являются *простыми* относительно события А + В или события АВ, которые являются *сложными*. В теории вероятностей не рассматривается вопрос о происхождении вероятностей P(A) или P(B). Задачей теории вероятностей является связать вероятности сложных событий с заданными вероятностями простых событий.

2.4. Теорема о повторении опытов (формула Бернулли)

Следствием правил сложения и умножения вероятностей является *теорема о повторении опытов*, состоящая в следующем :

Если производится N независимых опытов, в каждом из которых событие А появляется с вероятностью p, то вероятность того, что в данной серии опытов событие А повторится ровно m раз, выражается формулой

$$P_{m,N} = C_N^m p^m q^{N-m}, \quad \text{где } q = 1 - p. \quad (2.31)$$

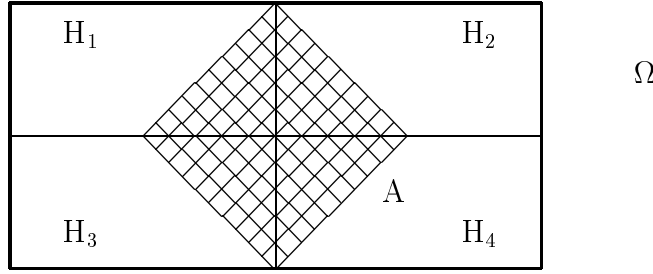


Рисунок 2.4 — К формуле полной вероятности: H_1, H_2, H_3, H_4 — гипотезы; полная группа $\Omega = H_1 + H_2 + H_3 + H_4$; событие A указано штриховкой

Выражение (2.31) часто называют формулой Бернулли.

Вероятность $R_{m,N}$ того, что в серии из N независимых опытов событие A появится не менее m раз, выражается формулой

$$R_{m,N} = \sum_{k=m}^N P_{k,N} = \sum_{k=m}^N C_N^k p^k q^{N-k}. \quad (2.32)$$

2.5. Формула полной вероятности и формула Байеса

Если об обстановке опыта можно сделать N исключаящих друг друга предположений (*гипотез*) $H_1, H_2, \dots, H_N$ и если событие A может появиться только вместе с одной из этих гипотез, то

$$P(A) = \sum_{n=1}^N P(H_n)P(A|H_n), \quad (2.33)$$

где $P(H_n)$ — вероятность гипотезы H_n ; $P(A|H_n)$ — условная вероятность события A при этой гипотезе. Формула (2.33) называется *формулой полной вероятности* (рис. 2.4).

Если до опыта вероятности гипотез $H_1, H_2, \dots, H_N$ были равны $P(H_1), P(H_2), \dots, P(H_N)$, а в результате опыта произошло событие A , то новые условные вероятности гипотез вычисляются по формуле

$$P(H_j|A) = P(H_j)P(A|H_j) \left(\sum_{n=1}^N P(H_n)P(A|H_n) \right)^{-1} \quad (2.34)$$

для $j = 1, 2, \dots, N$.

Формула (2.34) называется *формулой Байеса*.

Доопытные (первоначальные) вероятности гипотез $P(H_1), P(H_2), \dots, P(H_N)$ называются *априорными*, а послеопытные $P(H_1|A), P(H_2|A), \dots, P(H_N|A)$ — *апостериорными*.

Формула Байеса дает возможность "пересмотреть" возможности гипотез с учетом полученного результата опыта. Если после опыта, давшего событие A ,

проводится еще один опыт, в результате которого может произойти или не произойти событие В, то вероятность (условная) этого последнего события вычисляется по формуле полной вероятности, в которую подставлены не прежние вероятности гипотез $P(H_n)$, а новые $P(H_n|A)$:

$$P(B|A) = \sum_{n=1}^N P(H_n|A) P(B|H_n A). \quad (2.35)$$

Формулу (2.35) иногда называют *формулой для вероятностей будущих событий*.

2.6. Примеры

Пример 2.1

В урне находится 30 шаров: 10 красных, 5 синих и 15 белых.

Найти вероятность появления цветного шара.

Решение

Появление цветного шара означает появление либо красного, либо синего шара. Вероятность появления красного шара (событие А):

$$P(A) = 10/30 = 1/3.$$

Вероятность появления синего шара (событие В):

$$P(B) = 5/30 = 1/6.$$

События А и В несовместны (появление шара одного цвета исключает появление шара другого цвета), поэтому применима теорема сложения.

Искомая вероятность:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) = 1/3 + 1/6 = 1/2.$$

Пример 2.2

В урне находится 5 белых, 4 черных и 3 синих шара. Каждое испытание состоит в том, что наугад извлекают один шар, не возвращая его в урну.

Найти вероятность того, что при первом испытании появится белый шар (событие А), при втором – черный (событие В) и при третьем – синий (событие С).

Решение

Вероятность появления белого шара при первом испытании равна $P(A) = 5/12$.

Вероятность появления черного шара при втором испытании, вычисленная в предположении, что при первом испытании появился белый шар, т.е. условная вероятность, $P(B|A) = 4/11$.

Вероятность появления синего шара при третьем испытании, вычисленная в предположении, что при первом испытании появился белый шар, а при втором – черный, $P(C|AB) = 3/10$.

По теореме умножения вероятностей зависимых событий искомая вероятность

$$P(ABC) = P(A)P(B|A)P(C|AB) = 1/22.$$

Пример 2.3

Детали, изготавливаемые цехом завода, попадают для проверки на стандартность к одному из двух контролеров. Вероятность того, что деталь попадет к первому контролеру, равна 0,6, что ко второму – 0,4. Вероятность того, что годная деталь будет признана стандартной первым контролером, равна 0,94, а вторым – 0,98. Годная деталь при проверке была признана стандартной.

Найти вероятность того, что эту деталь проверил первый контролер.

Решение

Обозначим через A событие, состоящее в том, что годная деталь признана стандартной. Можно сделать два предположения: 1) деталь проверил первый контролер (гипотеза H_1); 2) деталь проверил второй контролер (гипотеза H_2).

Искомую вероятность того, что деталь проверил первый контролер, найдем по формуле Байеса

$$P(H_1|A) = \frac{P(H_1)P(A|H_1)}{P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2)}.$$

По условию задачи :

$P(H_1) = 0,60$ (вероятность того, что деталь попадет к первому контролеру);

$P(H_2) = 0,40$ (вероятность того, что деталь попадет ко второму контролеру);

$P(A|H_1) = 0,94$ (вероятность того, что годная деталь будет признана стандартной первым контролером);

$P(A|H_2) = 0,98$ (вероятность того, что годная деталь будет признана стандартной вторым контролером).

Искомая вероятность

$$P(H_1|A) = \frac{0,6 \cdot 0,94}{0,6 \cdot 0,94 + 0,4 \cdot 0,98} \approx 0,59.$$

Как видно, до испытания вероятность гипотезы H_1 равнялась 0,6, а после того, как стал известен результат испытания, вероятность этой гипотезы (точнее, условная вероятность) изменилась и стала равной 0,59. Таким образом, использование формулы Байеса позволило переоценить вероятность рассматриваемой гипотезы.

Пример 2.4

Вероятность попадания в цель при стрельбе первого и второго орудий соответственно: $P_1 = 0,7$; $P_2 = 0,8$.

Найти вероятность попадания при одном залпе (из обоих орудий) хотя бы одним из орудий.

Решение

Вероятность попадания в цель одним орудием не зависит от результата стрельбы из другого орудия, поэтому события A (попадание первого орудия) и B (попадание второго орудия) независимы. Обозначим через $A+B$ событие, вероятность

которого следует найти. События А и В совместны и независимы в условиях задачи. Теперь применим теорему сложения для совместных событий:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

Вероятность события АВ (оба орудия дали попадание):

$$P(AB) = P(A)P(B) = 0,7 \cdot 0,8 = 0,56.$$

Искомая вероятность:

$$P(A + B) = 0,7 + 0,8 - 0,56 = 0,94.$$

Замечание. Так как в настоящем примере события А и В независимые, то можно воспользоваться следующей теоремой: вероятность появления хотя бы одного из независимых событий $A_1, A_2, \dots, A_n$ равна разности событий между единицей и произведением вероятностей противоположных событий $\bar{A}_1, \bar{A}_2, \dots, \bar{A}_n$:

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2) \cdots P(\bar{A}_n).$$

Воспользуемся формулой: $P = 1 - P(\bar{A})P(\bar{B})$, где $P(\bar{A})$ и $P(\bar{B})$, т.е. вероятности промахов, соответственно:

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0,7 = 0,3,$$

$$P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 1 - 0,8 = 0,2.$$

Искомая вероятность того, что при одном залпе хотя бы одно орудие даст попадание:

$$P = 1 - P(\bar{A})P(\bar{B}) = 1 - 0,3 \cdot 0,2 = 1 - 0,06 = 0,94.$$

Как и следовало ожидать, получен тот же результат.

Пример 2.5

Имеется 3 ящика и в каждом – по 10 деталей. В первом ящике 8, во втором 7 и в третьем 9 стандартных деталей. Из каждого ящика наугад вынимают по одной детали.

Найти вероятность того, что все три вынутые детали окажутся стандартными.

Решение

Вероятность того, что из первого ящика вынута стандартная деталь (событие А): $P(A) = 8/10 = 0,8$.

Вероятность того, что из второго ящика вынута стандартная деталь (событие В): $P(B) = 7/10 = 0,7$.

Вероятность того, что из третьего ящика вынута стандартная деталь (событие С): $P(C) = 9/10 = 0,9$.

Так как события А, В и С независимые (в совокупности), то искомая вероятность (по теореме умножения)

$$P(ABC) = P(A)P(B)P(C) = 0,8 \cdot 0,7 \cdot 0,9 = 0,504.$$

Пример 2.6

Имеются 3 одинаковые на вид урны : в первой урне 2 белых и 1 черный шар; во второй – 3 белых и 1 черный; в третьей – 2 белых и 2 черных шара. Некто выбирает наугад одну из урн и вынимает из неё шар.

Найти вероятность того, что этот шар белый.

Решение

Рассмотрим три гипотезы :

H_1 – выбор первой урны;

H_2 – выбор второй урны;

H_3 – выбор третьей урны и событие A – появление белого шара.

Так как гипотезы, по условию задачи, равновозможны, то

$$P(H_1) = P(H_2) = P(H_3) = 1/3.$$

Условные вероятности события A при этих гипотезах соответственно :

$$P(A|H_1) = 2/3; \quad P(A|H_2) = 3/4; \quad P(A|H_3) = 1/2.$$

По формуле полной вероятности

$$P(A) = (1/3) \cdot (2/3) + (1/3) \cdot (3/4) + (1/3) \cdot (1/2) = 23/36.$$

Пример 2.7

По данным ремонтной мастерской в среднем из 100 отказов телевизора 50 % обусловлено выходом из строя электронных ламп, 15 % – конденсаторов, 12 % – резисторов, 5 % – кинескопа, а остальные отказы обусловлены другими причинами.

Найти вероятность $P_*(A)$ отказа телевизора по другим причинам.

Решение

По условию вероятности выхода из строя телевизора из-за отказа различных элементов таковы :

$$P_*(A_1) = 0,50; \quad P_*(A_2) = 0,15; \quad P_*(A_3) = 0,12; \quad P_*(A_4) = 0,05,$$

где A_1, A_2, A_3, A_4 – отказы телевизора, обусловленные соответственно выходом из строя электронных ламп, конденсаторов, резисторов и кинескопа. События A, A_1, A_2, A_3, A_4 составляют полную группу. Следовательно,

$$P_*(A) = 1 - \sum_{k=1}^4 P_*(A_k) = 1 - (0,50 + 0,15 + 0,12 + 0,05) = 0,18.$$

Пример 2.8

Имеются 2 ящика с однотипными деталями; в первом a исправных деталей и b дефектных, во втором c исправных и d дефектных. Выбирается наугад один ящик и из него вынимается одна деталь. Эта деталь оказалась исправной.

Найти вероятность того, что следующая деталь, которую вынем из того же ящика, тоже будет исправной.

Решение

Рассмотрим гипотезы :

$\{H_1: \text{выбран первый ящик}\};$

$\{H_2: \text{выбран второй ящик}\}.$

Событие $\{A: \text{исправная деталь при первом вынимании}\}.$

$$P(H_1) = 1/2; \quad P(H_2) = 1/2.$$

$$P(H_1|A) = \frac{a}{a+b} \left(\frac{a}{a+b} + \frac{c}{c+d} \right)^{-1}, \quad P(H_2|A) = \frac{c}{c+d} \left(\frac{a}{a+b} + \frac{c}{c+d} \right)^{-1}.$$

Событие $\{B: \text{исправная деталь при втором вынимании}\}.$

$$P(B|H_1A) = (a-1)/(a+b-1); \quad P(B|H_2A) = (c-1)/(c+d-1).$$

Отсюда искомая вероятность

$$P(B|A) = \left(\frac{a}{a+b} + \frac{c}{c+d} \right)^{-1} \left(\frac{a(a-1)}{(a+b)(a+b-1)} + \frac{c(c-1)}{(c+d)(c+d-1)} \right).$$

Пример 2.9

Производится 4 независимых выстрела в одинаковых условиях, причем вероятность попадания при каждом выстреле равна $p = 0,25$.

Найти вероятности $P_{0,4}, P_{1,4}, P_{2,4}, P_{3,4}, P_{4,4}$.

Решение

По формуле $P_{n,m} = C_n^m p^m q^{n-m}$ имеем:

$$P_{0,4} = C_4^0 p^0 q^4 = 0,316; \quad P_{1,4} = C_4^1 p^1 q^3 = 0,422;$$

$$P_{2,4} = C_4^2 p^2 q^2 = 0,211; \quad P_{3,4} = C_4^3 p^3 q^1 = 0,047; \quad P_{4,4} = C_4^4 p^4 q^0 = 0,004.$$

Пример 2.10

Производится 6 независимых выстрелов по цели. Вероятность p попадания при каждом выстреле равна 0,75.

Вычислить: а) вероятность ровно 5 попаданий; б) вероятность не менее 5 попаданий; в) вероятность более 3 промахов.

Решение

а) По условию вероятность попадания при каждом выстреле $p = 0,75$. Следовательно, вероятность промаха $q = 1 - p = 0,25$. Вероятность ровно 5 попаданий равна

$$P_6(5) = C_6^5 p^5 q^1 = 6 \cdot (0,75)^5 \cdot 0,25 \approx 0,356.$$

б) Требование, чтобы при 6 выстрелах было не менее 5 попаданий будет удовлетворено, если осуществится 5 или 6 попаданий. Эти события несовместны. Поэтому

$$P_6(m \geq 5) = \sum_{m=5}^6 C_6^m p^m q^{6-m} = C_6^5 p^5 q^1 + C_6^6 p^6 q^0 =$$

$$= 6 \cdot (0,75)^5 \cdot 0,25 + (0,75)^6 \approx 0,534.$$

в) Вероятность того, что при 6 выстрелах будет более 3 промаха, равна вероятности того, что при этих 6 выстрелах будет меньше 3 попаданий (или ни одного попадания, или одно, или два попадания). Поэтому

$$\begin{aligned} P_6(m \leq 2) &= \sum_{m=0}^2 C_6^m p^m q^{6-m} = C_6^0 p^0 q^6 + C_6^1 p^1 q^5 + C_6^2 p^2 q^4 = \\ &= (0,25)^6 + 6 \cdot 0,75 \cdot (0,25)^5 + 15 \cdot (0,75)^2 \cdot (0,25)^4 \approx 0,0376. \end{aligned}$$

Пример 2.11

Производится 8 независимых выстрелов по резервуару с горючим, причем первый попавший снаряд вызывает течь горючего, но не воспламеняет его, а второй попавший снаряд вызывает воспламенение горючего. Вероятность попадания в цель при каждом выстреле равна 0,2.

Найти вероятность того, что резервуар будет зажжен.

Решение

Для воспламенения резервуара требуется не менее двух попаданий. По формуле

$$R_{m,n} = 1 - \sum_{i=0}^{m-1} P_{i,n} \text{ имеем:}$$

$$R_{2,8} = 1 - (P_{0,8} + P_{1,8}) = 1 - (0,8^8 + C_8^1 \cdot 0,2 \cdot 0,8^7) = 0,497.$$

Пример 2.12

По каналу связи, подверженному воздействию помех, передается одна из двух команд управления в виде кодовых комбинаций 11111 или 00000, причем априорные вероятности передачи этих команд соответственно равны 0,7 и 0,3. В отсутствие помех вероятности правильного приема каждого из символов (1 и 0) равны 1. Из-за наличия помех эти вероятности уменьшаются до 0,6. Предполагается, что символы кодовых комбинаций искажаются независимо друг от друга. На выходе приемного устройства зарегистрирована комбинация 10110.

Определить, какая команда была передана.

Решение

Пусть А – событие, состоящее в приеме комбинации 10110. К этому событию ведут две гипотезы: H_1 – была передана комбинация 11111; H_2 – была передана комбинация 00000.

По условию $P(H_1) = 0,7$; $P(H_2) = 0,3$.

Условная вероятность приема кодовой комбинации 10110 вместо 11111 такова:

$$P(A|H_1) = 0,6 \cdot 0,4 \cdot 0,6 \cdot 0,6 \cdot 0,4 \approx 0,035.$$

Аналогично

$$P(A|H_2) = 0,4 \cdot 0,6 \cdot 0,4 \cdot 0,4 \cdot 0,6 \approx 0,023,$$

откуда

$$P(H_1|A) = P(H_1)P(A|H_1) \left(\sum_{k=1}^2 P(H_k)P(A|H_k) \right)^{-1}.$$

Это дает

$$P(H_1|A) = \frac{0,7 \cdot 0,035}{0,7 \cdot 0,035 + 0,3 \cdot 0,023} \approx 0,78$$

и аналогично

$$P(H_2|A) = \frac{0,3 \cdot 0,023}{0,0314} \approx 0,22.$$

Сравнивая найденные условные вероятности, заключаем, что при появлении на выходе комбинации 10110 с вероятностью 0,78 была передана команда 11111.

Пример 2.13

Вероятность появления события A , которое равновозможно в любой момент промежутка T , равна p . Известно, что за время t ($t < T$) данное событие не произошло.

Определить вероятность P того, что событие A произойдет в оставшийся промежуток времени.

Решение

Вероятность p появления события за время T равна вероятности pt/T появления данного события за время t плюс произведение вероятности $(1 - pt/T)$ того, что событие не произойдет за время t , на условную вероятность P появления события за оставшееся время, если раньше оно не произошло.

Таким образом, имеет место равенство $p = pt/T + (1 - pt/T)P$.

Отсюда находим:

$$P = p(1 - t/T)(1 - pt/T)^{-1}.$$

2.7. Задачи для решения

Задача 2.1

Монету бросают 5 раз.

Требуется найти вероятность того, что "герб" выпадет: а) менее 2 раз; б) не менее 2 раз.

Ответ: а) $P = P_5(0) + P_5(1) = 3/16$;

б) $P = 1 - [P_5(0) + P_5(1)] = 13/16$.

Задача 2.2

С помощью шести карточек, на которых написано по одной букве, составлено слово "каре́та". Карточки тщательно перемешиваются, а затем наугад извлекаются по одной.

Какова вероятность, что в порядке поступления букв образуется слово "раке́та"?

Ответ: $P = 1/360$.

Задача 2.3

Три стрелка произвели залп. Две пули поразили мишень.

Найти вероятность того, что мишень поразил третий стрелок, если вероятности попадания первым, вторым и третьим стрелком соответственно равны 0,6, 0,5 и 0,4.

Ответ: $P = 10/19$.

Задача 2.4

В урне 2 белых и 3 черных шара. Два игрока поочередно вынимают из урны по шару, не вкладывая их обратно. Выигрывает тот, кто раньше получит белый шар.

Найти вероятность того, что выиграет первый игрок.

Ответ: $P = (2/5) + (3/5) \cdot (2/4) \cdot (2/3) = 3/5$.

Задача 2.5

На железнодорожной станции пассажиру предоставляется сейф (индивидуальная камера хранения багажа), который открывается только при наборе определенного трехзначного шифра (например, 253, 009, 325 и т.д.). Всего таких шифров имеется $10 \times 10 \times 10 = 1000$. Пассажир набрал шифр, запер сейф и ушел. Посторонний человек, не знающий шифра, пытается открыть сейф, выбирая три цифры наугад (при этом, естественно, неудачные комбинации не повторяются).

Принимая, что $k \leq 1000$, найти вероятности событий:

{А: сейф откроется с первой же попытки};

{В: сейф откроется в результате k -ой попытки}.

Ответ:

$$P(A) = \frac{1}{1000};$$

$$P(B) = 1 - P(\bar{B}) = 1 - \frac{999}{1000} \cdot \frac{998}{999} \cdots \frac{1000 - k + 1}{1000 - k + 2} \cdot \frac{1000 - k}{1000 - k + 1} = \frac{k}{1000}.$$

Задача 2.6

Имеются 3 урны: в первой a белых шаров и b черных; во второй c белых шаров и d черных; в третьей k белых шаров (черных нет). Выбрана наугад урна. Из неё вынут один шар. Он оказался белым.

Найти вероятность того, что этот шар из первой, второй или третьей урны.

Ответ:

$$P(H_1|A) = \left(\frac{a}{a+b} \right) \left(\frac{a}{a+b} + \frac{c}{c+d} + 1 \right)^{-1},$$

$$P(H_2|A) = \left(\frac{c}{c+d} \right) \left(\frac{a}{a+b} + \frac{c}{c+d} + 1 \right)^{-1},$$

$$P(H_3|A) = \left(\frac{a}{a+b} + \frac{c}{c+d} + 1 \right)^{-1}.$$

Задача 2.7

Из чисел 1, 2, ..., n одно за другим выбирают наугад два числа.

Какова вероятность того, что разность между первым выбранным числом и вторым будет не меньше m ($m > 0$)?

Ответ: $P = \frac{(n-m)(n-m+1)}{2n(n-1)}.$

Задача 2.8

Из полного набора домино наугад берутся две кости.

Определить вероятность того, что вторую кость можно приставить к первой.

Ответ: $P = \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{9} + \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{9} = \frac{7}{18}$.

Задача 2.9

В лотерее N билетов, из которых L выигрышных. Куплено K билетов.

Определить вероятность того, что выиграет хотя бы один билет.

Ответ: $P = 1 - \frac{(N-L)!(N-K)!}{N!(N-L-K)!}$.

Задача 2.10

Вероятность того, что в электрической цепи напряжение превысит номинальное значение, равна p . При повышенном напряжении вероятность аварии прибора-потребителя электрического тока равна q .

Определить вероятность аварии прибора вследствие повышения напряжения.

Ответ: $P = pq$.

Задача 2.11

Вычислительная машина состоит из N блоков. Надежность (вероятность безотказной работы) в течение времени T первого блока равна p_1 , второго — p_2 и т.д. Блоки отказывают независимо друг от друга. При отказе любого блока отказывает машина.

Найти вероятность того, что машина откажет за время T .

Ответ: $P = 1 - p_1 p_2 \dots p_N$.

Задача 2.12

Сообщение, передаваемое по каналу связи, состоит из n знаков (символов). При передаче каждый знак искажается (независимо от других) с вероятностью p . Для надежности сообщение дублируется (повторяется k раз).

Найти вероятность того, что хотя бы одно из переданных сообщений не будет искажено ни в одном знаке.

Ответ: $P = 1 - [1 - (1 - p)^n]^k$.

Задача 2.13

При въезде в квартиру включили в осветительную сеть $2k$ новых электроламп. Каждая электролампочка в течение года перегорает с вероятностью r .

Найти вероятность события: $\{A: \text{в течение года не менее половины первоначально включенных лампочек придется заменить новыми}\}$.

Ответ: $P = \sum_{m=k+1}^{2k} C_{2k}^m r^m (1-r)^{2k-m}$.

Задача 2.14

Имеется k_1 урн, в каждой из которых m_1 белых и n_1 черных шаров, и k_2 урн, содержащих по m_2 белых и n_2 черных шаров. Извлеченный из выбранной наугад урны один шар оказался белым.

Какова вероятность, что данный шар извлечен из первой группы урн?

$$\text{Ответ: } P = \left(1 + \frac{k_2 m_2 (m_1 + n_1)}{k_1 m_1 (m_2 + n_2)}\right)^{-1}.$$

Задача 2.15

Из первого ящика, содержащего a красных шаров и b зеленых шаров, наугад вытащили n шаров и поместили (не рассматривая) во второй ящик. Из второго ящика наугад вытащили m шаров.

Найти вероятность того, что среди вытасненных m шаров окажется 1 красный шар, если $m \leq b$.

$$\text{Ответ: } P = \sum_{k=0}^n \sum_{\alpha=0}^m \frac{C_a^k C_b^{n-k}}{C_{a+b}^n} \cdot \frac{C_k^\alpha C_{n-k}^{m-\alpha}}{C_n^m} \cdot \frac{C_\alpha^1 C_{m-\alpha}^0}{C_n^1}.$$

Задача 2.16

Из партии в 5 изделий наугад взято одно изделие, оказавшееся бракованным. Количество бракованных изделий равновозможно любое. Какое предположение о количестве бракованных изделий наиболее вероятно?

Ответ: Гипотезы: H_k – имеется k бракованных изделий ($k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$). Наиболее вероятна гипотеза H_5 , т.е. все пять изделий бракованы.

Задача 2.17

Вероятности попадания при каждом выстреле для 3 стрелков равны соответственно $4/5$, $3/4$ и $2/3$. При одновременном выстреле всех трех стрелков имелось два попадания.

Определить вероятность того, что промахнулся первый стрелок.

$$\text{Ответ: } P = P(H_1|A) = 3/13.$$

Задача 2.18

Из колоды в 52 карты наугад берется 6 карт.

Найти вероятность того, что среди этих карт будут представители всех четырех мастей.

$$\text{Ответ: } P = 1 - \left(4 \cdot C_{39}^6 + 6 \cdot C_{26}^6 + 4 \cdot C_{13}^6\right) / C_{52}^6.$$

Задача 2.19

Сколько раз необходимо бросать пару игральных костей, чтобы с вероятностью, большей, чем $0,5$, ожидать сумму очков, равную 12, хотя бы один раз? (Задача де-Мере).

$$\text{Ответ: } 1 - (35/36)^n \geq 0,5, \text{ поэтому } n \geq 25.$$

Задача 2.20

Стрелок производит один выстрел в мишень, состоящую из центрального круга и двух концентрических колец. Вероятности попадания в круг и кольца соответственно $0,20$; $0,15$ и $0,10$.

Определить вероятность непадания в мишень.

$$\text{Ответ: } P = 0,55.$$

2.8. Задания для проверки

1. Сформулируйте основные теоремы теории вероятностей.
2. Раскройте назначение основных теорем теории вероятностей.
3. Сформулируйте понятия суммы и произведения случайных событий.
4. Поясните суть теоремы сложения вероятностей.
5. Поясните суть теоремы умножения вероятностей.
6. Сформулируйте содержательный смысл формулы полной вероятности.
7. Сформулируйте содержательный смысл понятия гипотезы.
8. Дайте интерпретацию формулы Байеса.
9. Дайте интерпретацию теоремы о повторении опытов.
10. Постройте практический пример применения формулы Бернулли.

3. Законы распределения случайных величин

3.1. Случайные величины

Одно из важнейших понятий теории вероятностей – понятие **случайной величины**. Под *случайной величиной* понимается величина, которая в результате опыта со случайным исходом принимает то или иное значение. Величина называется *детерминированной*, если она может принять определенное значение.

Примеры случайных величин:

а) опыт – четыре последовательных выстрела по мишени; случайная величина – число попаданий;

б) опыт – эксплуатация ЭВМ; случайная величина – время выработки ЭВМ до первого отказа.

В теоретико-множественной трактовке основных понятий теории вероятностей случайная величина X – это некоторая функция элементарного события ω : $X = \varphi(\omega)$, где $\omega \in \Omega$. Значение этой функции зависит от того, какое элементарное событие ω появилось в результате опыта.

В дальнейшем будем обозначать случайные величины прописными буквами, а неслучайные – строчными.

Законом распределения случайной величины называется всякое соотношение, устанавливающее связь между возможными значениями случайной величины и соответствующими им вероятностями, например вероятность того, что величина примет какое-то значение или попадет в какой-то промежуток.

Если случайная величина X имеет данный закон распределения, то про неё говорят, что она *распределена по этому закону* или же ”подчиняется этому закону распределения”.

Наиболее общей формой закона распределения является *функция распределения*, представляющая собой вероятность того, что случайная величина X примет значение меньшее, чем заданное значение x :

$$F(x) = \Pr\{X < x\}. \quad (3.1)$$

Функция распределения $F(x)$ для любой случайной величины обладает свойствами $F(-\infty) = 0$, $F(\infty) = 1$; при возрастании аргумента x функция $F(x)$ не убывает. Наиболее простой вид имеют законы у так называемых дискретных случайных величин.

Случайная величина называется *дискретной*, если множество её возможных значений конечно или счетно. Эти значения могут быть перечислены, пронумерованы одно за другим.

В рассмотренном выше примере случайная величина X – число попаданий при четырех выстрелах – дискретна. Её возможные значения: 0, 1, 2, 3, 4. Вторая случайная величина T – время наработки ЭВМ до первого отказа – недискретна, её возможные значения непрерывно заполняют какой-то участок оси абсцисс, их множество несчетно.

3.2. Дискретные случайные величины

Рассмотренные примеры показывают, что некоторые случайные величины имеют только конечное множество возможных значений. *Дискретной случайной величиной* называется случайная величина с конечным или счетным множеством возможных значений

Простейшей формой закона распределения дискретной случайной величины X является *ряд распределения* — таблица, в верхней строке которой перечислены все значения случайной величины $x_1, x_2, \dots, x_i, \dots$ в порядке их возрастания, а в нижней — соответствующие им вероятности $p_1, p_2, \dots, p_i, \dots$:

$$X : \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline X & x_1 & x_2 & \dots & x_i & \dots \\ \hline P & p_1 & p_2 & \dots & p_i & \dots \\ \hline \end{array}, \quad (3.2)$$

где

$$p_i = \Pr\{X = x_i\}, \quad \sum_i p_i = 1. \quad (3.3)$$

Графическое изображение ряда распределения называется *многоугольником распределения*.

Функция распределения $F(x)$ дискретной случайной величины X есть разрывная, ступенчатая функция, скачки которой соответствуют возможным значениям $x_1, x_2, \dots, x_i, \dots$ случайной величины X и равны вероятностям $p_1, p_2, \dots, p_i, \dots$ этих значений; между скачками функция $F(x)$ сохраняет постоянное значение.

В точке разрыва функция $F(x)$ равна тому значению, с которым она подходит к точке разрыва слева. Функция $F(x)$ "непрерывна слева", т.е. при подходе к любой точке слева не терпит разрыва, а при подходе справа – разрыв возможен.

Вероятность попадания случайной величины X на участок от α до β (включая α) выражается через функцию распределения формулой

$$\Pr\{\alpha \leq X < \beta\} = F(\beta) - F(\alpha), \quad (3.4)$$

или (в других обозначениях)

$$\Pr\{X \in [\alpha, \beta)\} = F(\beta) - F(\alpha), \quad (3.5)$$

где знаком "[" обозначено то, что точка α включается в состав отрезка от α до β , а знаком ")" – то, что точка β в него не включается.

3.3. Числовые характеристики дискретных случайных величин

Математическим ожиданием дискретной случайной величины X называется сумма произведений всех её возможных значений x_i на соответствующие вероятности p_i

$$M[X] = \sum_i x_i p_i. \quad (3.6)$$

Математическое ожидание случайной величины иногда называют просто *средним значением* случайной величины.

Математическое ожидание случайной величины может и не существовать, если соответствующая сумма расходится. В случае, когда надо математическое ожидание случайной величины X обозначить одной буквой, будем писать

$$M[X] = m_x = \bar{x}. \quad (3.7)$$

Центрированной случайной величиной $\overset{\circ}{X}$ называется разность между случайной величиной и её математическим ожиданием

$$\overset{\circ}{X} = X - m_x. \quad (3.8)$$

Дисперсией случайной величины X называется математическое ожидание квадрата соответствующей центрированной случайной величины:

$$D[X] = M[\overset{\circ}{X}^2] = M[(X - m_x)^2]. \quad (3.9)$$

Дисперсия случайной величины есть характеристика рассеивания, разбросанности значений около её среднего значения. Для дискретной случайной величины X дисперсия вычисляется по формуле

$$D[X] = \sum_i (x_i - m_x)^2 p_i. \quad (3.10)$$

Если требуется дисперсию случайной величины X обозначить одной буквой, её обозначают D_x или D (если она одна).

Средним квадратическим отклонением (или стандартом) случайной величины X называется корень квадратный из её дисперсии:

$$\sigma[X] \equiv \sigma_x = \sqrt{D_x} \quad (3.11)$$

(подразумевается арифметическое или положительное значение корня). Для краткости вместо слов "среднее квадратическое отклонение" часто пишут СКО.

Начальным моментом k -го порядка случайной величины X называется математическое ожидание k -й степени этой случайной величины:

$$\alpha_k[X] = M[X^k]. \quad (3.12)$$

Для дискретной случайной величины X начальный момент k -го порядка вычисляется по формуле

$$\alpha_k[X] = \sum_i x_i^k p_i. \quad (3.13)$$

Центральным моментом k -го порядка случайной величины называется математическое ожидание k -й степени соответствующей центрированной величины

$$\mu_k[X] = M[\overset{\circ}{X}^k]. \quad (3.14)$$

Для дискретной случайной величины X центральный момент k -го порядка вычисляется по формуле

$$\mu_k[X] = \sum_i (x_i - m_x)^k p_i. \quad (3.15)$$

Математическое ожидание случайной величины X есть её первый начальный момент, а дисперсия — второй центральный :

$$M[X] = \alpha_1[X], \quad (3.16a)$$

$$D[X] = \mu_2[X]. \quad (3.16b)$$

Центральные моменты выражаются через начальные моменты :

$$\begin{aligned} \mu_1[X] &= \alpha_1[X] - m_x, \\ \mu_2[X] &= \alpha_2[X] - m_x^2, \\ \mu_3[X] &= \alpha_3[X] - 3\alpha_2[X] m_x + 2m_x^3, \\ &\dots \end{aligned} \quad (3.17)$$

Особенно важна вторая из этих формул, выражающая дисперсию через второй начальный момент :

$$D[X] = \alpha_2[X] - m_x^2, \quad (3.18)$$

или в другом написании

$$D[X] = M[X^2] - (M[X])^2, \quad (3.19)$$

т.е. *дисперсия равна математическому ожиданию квадрата случайной величины минус квадрат её математического ожидания.*

Индикатором события A называется дискретная случайная величина U , имеющая два возможных значения: 0 и 1. Она равна нулю, если событие A не появилось, и единице, если оно появилось :

$$U = \begin{cases} 1 & \text{при } \omega \in A, \\ 0 & \text{при } \omega \notin A. \end{cases} \quad (3.20)$$

Ряд распределения индикатора U события A имеет вид :

$$U: \begin{array}{|c|c|c|} \hline U & 0 & 1 \\ \hline P & q & p \\ \hline \end{array}, \quad (3.21)$$

где p — вероятность события в данном опыте и $q = 1 - p$.

Математическое ожидание и дисперсия величины U равны соответственно

$$M[U] = p, \quad (3.22a)$$

$$D[U] = pq. \quad (3.22b)$$

В ряде задач теории вероятностей пользование индикаторами событий существенно упрощает решение.

При вычислении числовых характеристик случайных величин часто бывает удобно пользоваться теоремой о полном математическом ожидании: *если об условиях опыта можно сделать n гипотез $H_1, H_2, \dots, H_n$, полное математическое ожидание случайной величины X может быть вычислено по формуле*

$$M[X] = \sum_{i=1}^n P(H_i) M[X|H_i], \quad (3.23)$$

где $M[X|H_i]$ — *условное математическое ожидание величины X при гипотезе H_i* .

Формулу полного математического ожидания можно применять при вычислении начальных моментов любого порядка:

$$\alpha_k[X] = \sum_{i=1}^n P(H_i) M[X^k|H_i]. \quad (3.24)$$

Рассмотрим некоторые часто встречающиеся типы распределений дискретных случайных величин.

3.4. Дискретный равномерный закон

Предположение о равной вероятности всех возможных значений дискретной случайной величины часто встречается (рис 3.1). Например, при бросании игральной кости с равной вероятностью может выпасть любая из шести её граней.

Пусть возможные значения *дискретной случайной величины* X — целые числа от 1 до M . Если они равновероятны, то

$$P_m = \Pr\{X = m\} = \frac{1}{M}, \quad m = 1, 2, \dots, M. \quad (3.25)$$

Для неё

$$M[X] = \frac{1}{2}(M+1), \quad D[X] = \frac{1}{12}(M^2-1). \quad (3.26)$$

3.5. Биномиальное распределение (распределение Бернулли)

Случайная величина X называется *распределенной по биномиальному закону* (по закону Бернулли), если она является числом m появлений случайного события

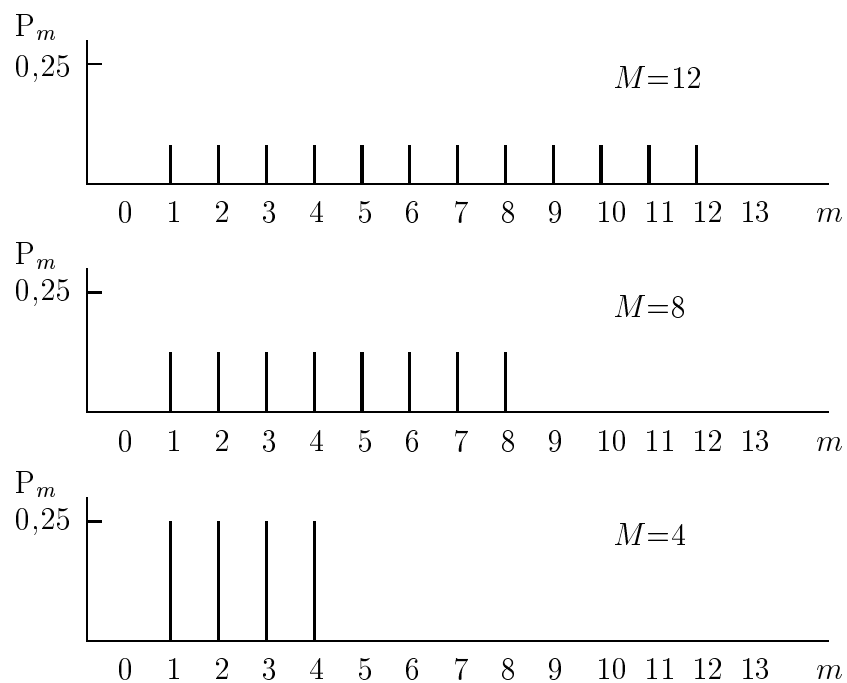


Рисунок 3.1 — Равномерный дискретный закон; $M = 4; 8; 12$

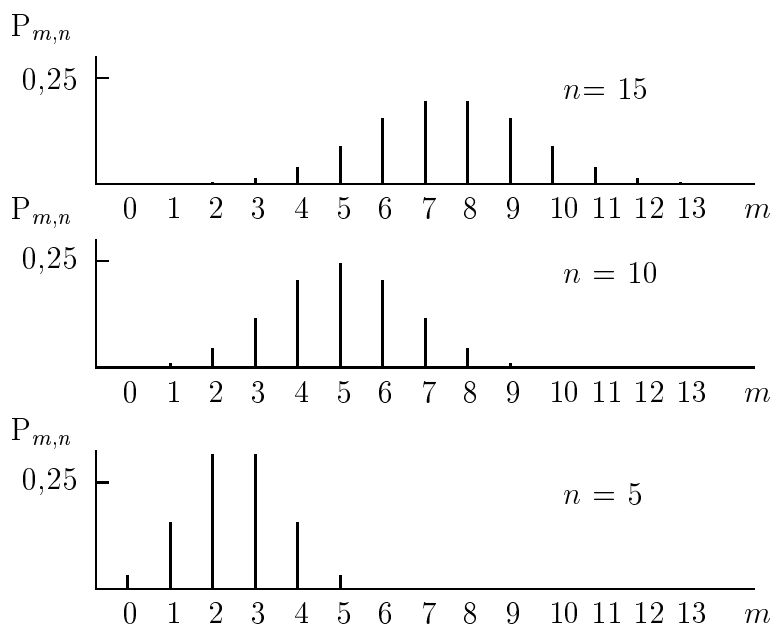


Рисунок 3.2 — Распределение Бернулли; $n = 5; 10; 15$; $p = 0,5$

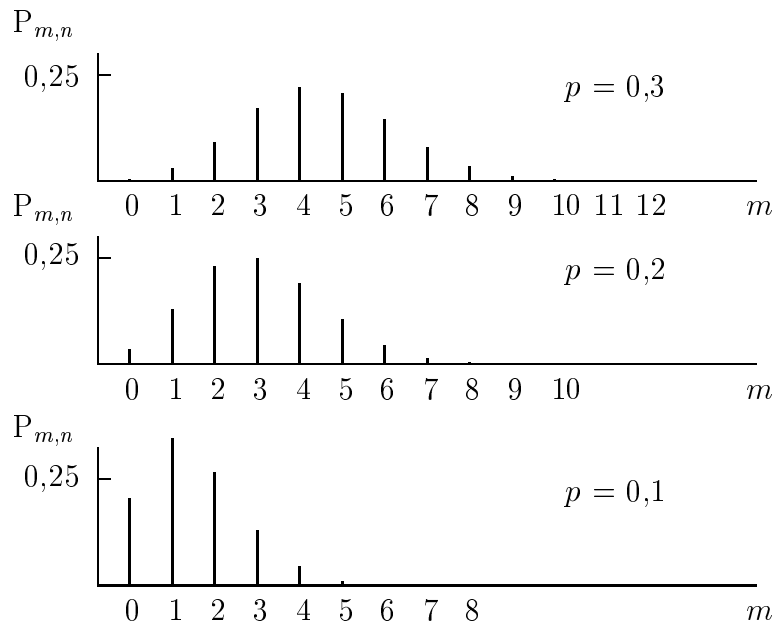


Рисунок 3.3 — Распределение Бернулли; $p = 0,1; 0,2; 0,3$; $n = 15$

в n испытаниях, при условии, что в одном (любом) опыте это событие появляется с заданной вероятностью p .

Закон распределения случайной величины X

$$P_{m,n} = \Pr\{X = m\} = C_n^m p^m q^{n-m}, \quad (3.27a)$$

или

$$P_{m,n} = \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m q^{n-m}, \quad (3.27b)$$

где $0 < p < 1$, $q = 1 - p$; $m = 0, 1, \dots, n$.

Распределение (3.27) зависит от двух параметров: n (рис. 3.2) и p (рис. 3.3).

Из теоремы о повторении опытов следует, что *число X появлений события при n независимых опытах имеет биномиальное распределение*. Таким образом, вероятность одного сложного события, состоящего в том, что в n испытаниях событие A наступит m раз и не наступит $n - m$ раз, равна $P_{m,n}$. Для случайной величины X , имеющей биномиальное распределение с параметрами p и n , выполняется

$$M[X] = np, \quad D[X] = npq, \quad (3.28)$$

где $q = 1 - p$.

Пользоваться формулой Бернулли (3.27) при больших значениях n достаточно трудно, так как она требует выполнения действий над большими числами.

Имеют место асимптотические формулы, которые позволяют приближенно найти вероятность появления события ровно k раз в n испытаниях, если число испытаний достаточно велико. Соответствующие выражения формулируются в виде локальной и интегральной теорем Муавра–Лапласа.

3.6. Теорема Муавра–Лапласа

Эта теорема записывается в локальной и в интегральной формах.

Локальная форма теоремы Муавра–Лапласа :

Если вероятность p появления события A в каждом испытании постоянна и отлична от нуля и единицы, то вероятность $P_n(k)$ того, что событие A появится в n испытаниях ровно k раз, приближенно равна

$$P_n(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} \exp\left(-\frac{(k - np)^2}{2npq}\right), \quad (3.29)$$

тем точнее, чем больше число испытаний n .

Интегральная форма теоремы Муавра–Лапласа :

Если вероятность p наступления события A в каждом испытании постоянна и отлична от нуля и единицы, то вероятность $P_n(k_1, k_2)$ того, что событие A появится в n испытаниях в диапазоне от k_1 до k_2 раз, приближенно равна

$$P_n(k_1, k_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\alpha}^{\beta} \exp(-z^2/2) dz, \quad (3.30)$$

где

$$\alpha = (k_1 - np)/\sqrt{npq}, \quad \beta = (k_2 - np)/\sqrt{npq}.$$

3.7. Распределение Пуассона

Дискретная случайная величина X называется *распределенной по закону Пуассона*, если её возможные значения $0, 1, 2, \dots, m, \dots$, а вероятность события $\{X = m\}$ выражается формулой

$$P_m = \Pr\{X = m\} = \frac{\lambda^m}{m!} \exp(-\lambda), \quad (3.31)$$

где $\lambda > 0$.

Распределение Пуассона зависит от одного параметра λ (рис. 3.4).

Для случайной величины X , распределенной по закону Пуассона,

$$M[X] = \lambda, \quad D[X] = \lambda. \quad (3.32)$$

Пуассоновское распределение является предельным для биномиального (3.27) при $p \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$, если $np = \lambda = \text{const}$. Этим распределением можно пользоваться приближенно, если производится большое число независимых опытов, в каждом из которых событие A происходит с малой вероятностью.

Пуассоновскому закону распределения подчиняется также количество точек, попадающих в заданную область пространства (одномерного, двумерного или трехмерного), если случайное расположение точек в этом пространстве удовлетворяет некоторым ограничениям.

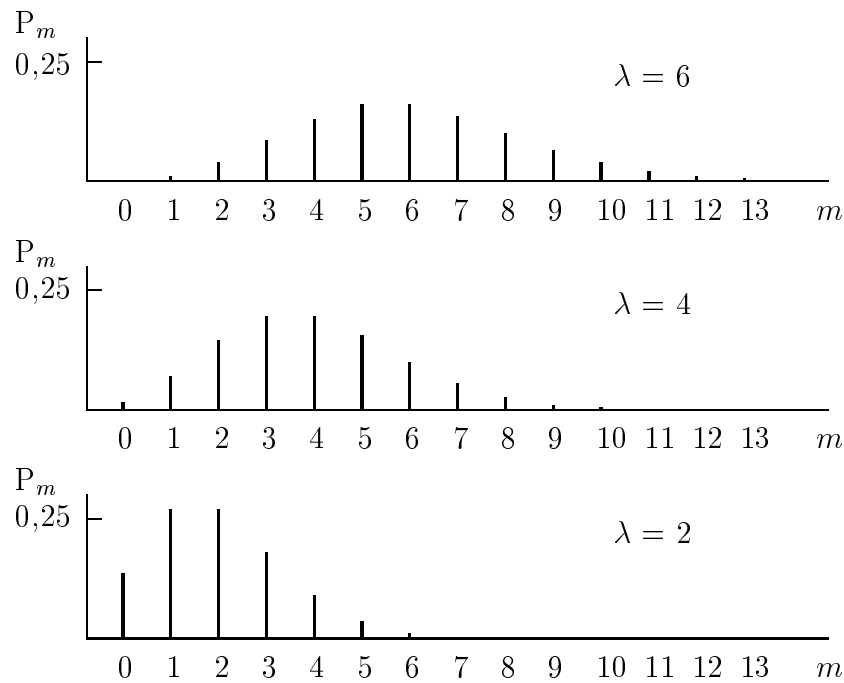


Рисунок 3.4 — Распределение Пуассона; $\lambda = 2; 4; 6$

Одномерный вариант встречается при рассмотрении ”потоков событий”. *Потоком событий* называется последовательность однородных событий, наступающих одно за другим в случайные моменты времени (рис. 3.5).

Среднее число событий λ , приходящихся на единицу времени, называется *интенсивностью потока*. Величина λ может быть как постоянной, так и переменной: $\lambda = \lambda(t)$.

Поток событий называется *поток без последствий*, если вероятность попадания того или иного числа событий на какой-то участок времени не зависит от того, сколько событий попало на любой другой непересекающийся с ним участок.

Поток событий называется *ординарным*, если вероятность появления на элементарном участке двух или более событий пренебрежимо мала по сравнению с вероятностью появления одного события.

Ординарный поток событий без последствий называется *пуассоновским*. Если события образуют пуассоновский поток, то число X событий, попадающих на любой участок времени $(t, t + \tau)$, распределено по закону Пуассона:

$$P_m = \frac{a^m}{m!} \exp(-a), \quad (3.33)$$

где a — математическое ожидание числа точек, попадающих на участок:

$$a = \int_t^{t+\tau} \lambda(t) dt.$$

Если $\lambda(t) = \lambda = \text{const}$, пуассоновский поток называется стационарным пуассоновским или *простейшим*. Для простейшего потока число событий, попадающих на

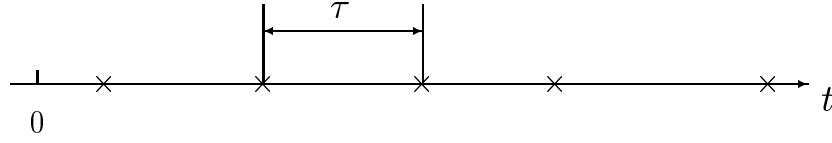


Рисунок 3.5 — Поток событий

любой участок времени продолжительностью τ , распределено по закону Пуассона с параметром $a = \lambda\tau$.

Случайным полем точек называется совокупность точек, случайным образом разбросанных на плоскости (или в пространстве).

Интенсивностью (или плотностью) поля λ называется среднее число точек, попадающих в единицу площади (объема).

Поле точек называется *пуассоновским*, если оно обладает следующими свойствами:

1) вероятность попадания того или иного числа точек в любую область плоскости (пространства) не зависит от того, сколько их попало в любую область, не пересекающуюся с данной;

2) вероятность попадания в элементарную область $\Delta x \Delta y$ двух или более точек пренебрежимо мала по сравнению с вероятностью попадания одной точки (свойство ординарности).

Число X точек пуассоновского поля, попадающих в любую область S плоскости (пространства), распределено по закону Пуассона:

$$P_m = \Pr\{X = m\} = \frac{a^m}{m!} \exp(-a), \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad (3.34)$$

где a — математическое ожидание числа точек, попадающих в область S . Если интенсивность поля постоянна, $\lambda(x, y) = \lambda = \text{const}$, поле называется *однородным* (свойство, аналогичное стационарности потока событий). При однородном поле с интенсивностью λ имеем $a = S\lambda$, где S — площадь области, или $a = V\lambda$, где V — объем области.

Если поле неоднородно, то

$$a = \iint_{(S)} \lambda(x, y) dx dy \quad - \text{ для плоскости;} \quad (3.35a)$$

$$a = \iiint_{(V)} \lambda(x, y, z) dx dy dz \quad - \text{ для объема.} \quad (3.35b)$$

3.8. Геометрическое распределение

Большое число задач включает рассмотрение последовательности независимых испытаний, которые могут иметь только два взаимно исключающих исхода с постоянными вероятностями p и $q = 1 - p$. Такая схема известна как *схема Бернулли*.

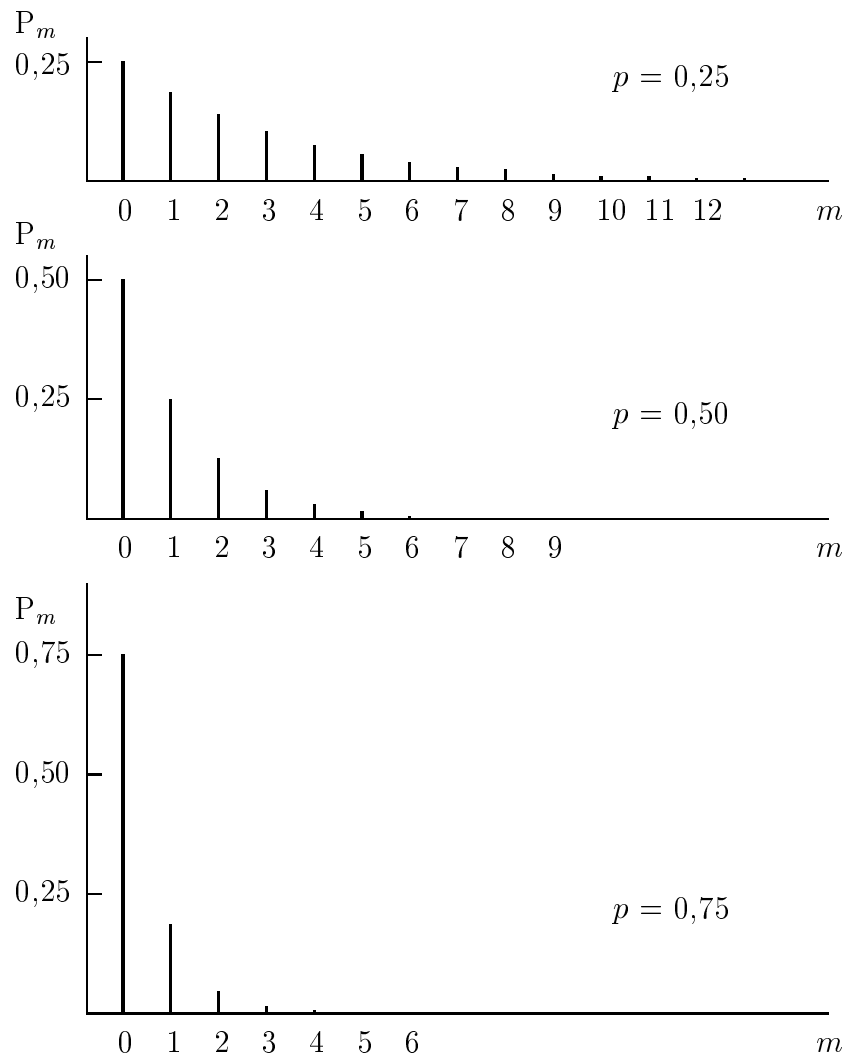


Рисунок 3.6 — Геометрическое распределение P_m ; $p = 0,25; 0,50; 0,75$

Говорят, что случайная величина X имеет *геометрическое распределение*, если её возможные значения $1, 2, \dots, m, \dots$, а вероятности этих значений (рис. 3.6)

$$P_m = \Pr\{X = m\} = q^{m-1}p, \quad m = 1, 2, \dots, \quad (3.36)$$

где $0 < p < 1$ и $q = 1 - p$.

Геометрическое распределение определяет вероятность того, что ожидаемое событие появится при m -м испытании после $m - 1$ испытаний с противоположным исходом.

Для случайной величины X , имеющей геометрическое распределение (3.36), справедливо

$$M[X] = q/p, \quad D[X] = q/p^2. \quad (3.37)$$

Набор амплитуд вероятностей $\{P_m\}$ для ряда последовательных значений m , где $m = 1, 2, \dots$, образуют бесконечно убывающую геометрическую прогрессию со знаменателем q .

На практике геометрическое распределение встречается, когда производится ряд независимых попыток достигнуть какого-то результата А; при каждой попытке результат достигается с вероятностью p .

Случайная величина X – число ”бесполезных” попыток (*до первого опыта*), в котором появится событие А. (Отметим, что в ряде ситуаций оказывается удобным нумеровать попытки с $m = 0$, тогда приведенные формулы видоизменяются.)

$$X:$$

m	0	1	2	3	...	m	...
P_m	p	pq	pq^2	pq^3	...	pq^m	...

Нередко рассматривают случайную величину $Y = X + 1$, равную числу попыток до получения результата, включая удавшуюся попытку. Ряд распределения случайной величины Y имеет вид:

$$Y:$$

m	1	2	3	...	m	...
P_m	p	pq	q^2p	...	$q^{m-1}p$	...

Математическое ожидание и дисперсия случайной величины Y , имеющей ”геометрическое распределение, начинающееся с единицы”, следующие:

$$M[Y] = 1/p, \quad D[Y] = q/p^2. \quad (3.38)$$

3.9. Гипергеометрическое распределение

Случайная величина X с возможными целыми значениями m описывается *гипергеометрическим распределением* с параметрами n, M, N , если $0 \leq m \leq \min(n, M)$, при этом $n \leq N$ и $M \leq N$ (рис. 3.7).

Вероятность события $\{A : X = m\}$ такая:

$$P_m = \Pr\{X = m\} = C_M^m C_{N-M}^{n-m} / C_N^n, \quad m = 0, 1, \dots, \min(n, M). \quad (3.39)$$

Гипергеометрическое распределение можно проиллюстрировать на следующем примере.

Пусть, например, имеется урна, содержащая черные и белые шары, В урне находится всего шаров N штук, из них M – белых и соответственно $(N - M)$ – черных шаров; из неё наугад вынимается n шаров. Случайная величина X – число белых шаров среди вынутых; её распределение выражается формулой (3.39).

Математическое ожидание и дисперсия случайной величины, имеющей распределение (3.39), следующие:

$$M[X] = \frac{nM}{N}, \quad (3.40)$$

$$D[X] = \frac{nM}{N} \left(1 - \frac{M}{N}\right) \frac{N - n}{N - 1}. \quad (3.41)$$

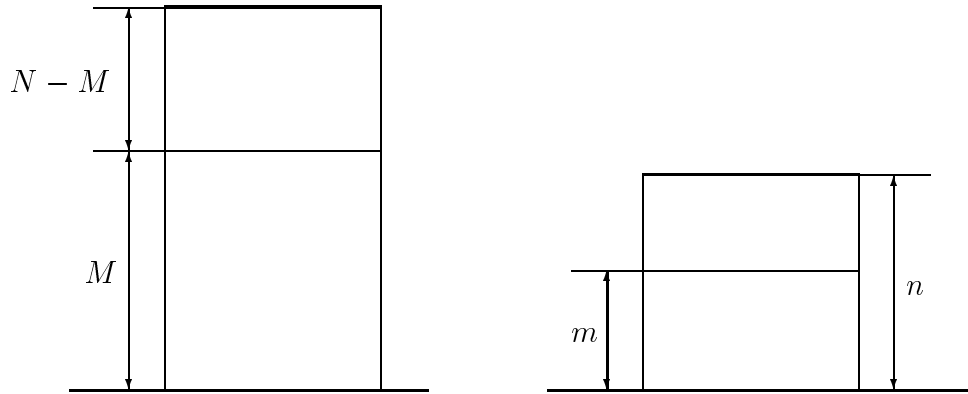


Рисунок 3.7 — Схема гипергеометрического распределения: слева – исходное число шаров, (всего N шаров, из них M штук белых и $N - M$ штук черных); справа – извлеченные шары (из n штук m – белых)

3.10. Непрерывные случайные величины

Множество возможных значений дискретной случайной величины конечно или счетно; недискретные случайные величины характеризуются тем, что множество их возможных значений несчетно.

Примеры недискретных случайных величин: дальность обнаружения объекта локатором; время опоздания поезда; погрешность измерения угла с помощью угломера. У всех этих случайных величин множество возможных значений несчетно, так как непрерывно заполняется какой-то участок оси абсцисс.

Напомним, как определяется функция распределения случайной величины X ,

$$F(x) = \Pr\{X < x\}. \quad (3.42)$$

Функция распределения существует для любых случайных величин – как дискретных, так и недискретных.

Если функция распределения $F(x)$ случайной величины X при любом x непрерывна и имеет производную $F'(x)$ везде, кроме, может быть, отдельных точек, то случайная величина X называется *непрерывной*.

Если функция распределения $F(x)$ на некоторых участках непрерывно возрастает, а в отдельных точках имеет разрывы, то случайная величина называется *смешанной*. Функция $F(x)$ для смешанной случайной величины, как и для дискретной, непрерывна слева.

Вероятность каждого отдельного значения непрерывной случайной величины равна нулю, т.е. $\Pr\{X = x\} = 0$.

Вероятность каждого отдельного значения смешанной случайной величины, лежащего на участке непрерывности $F(x)$, также равна нулю, а вероятность каждого из тех значений $x_1, x_2, \dots$, в которых функция $F(x)$ совершает скачки, численно равна значению соответствующего скачка.

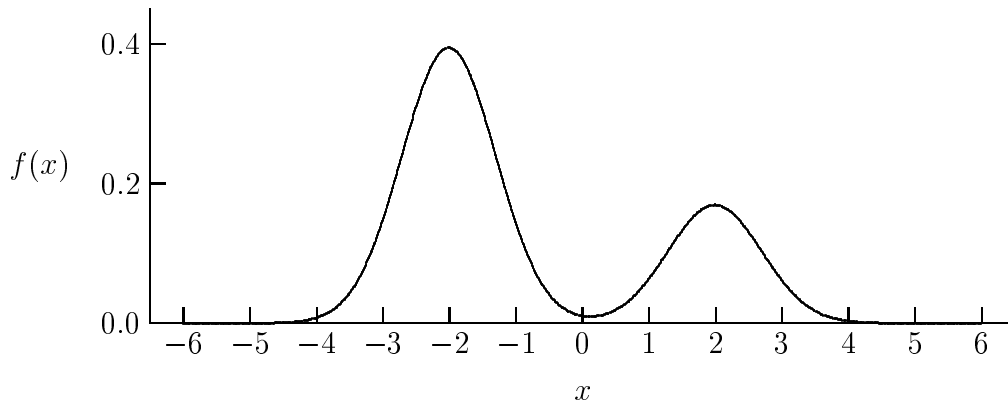


Рисунок 3.8 — Пример плотности распределения $f(x)$ непрерывной случайной величины

Для любой случайной величины (дискретной, непрерывной или смешанной) вероятность попадания случайной величины на участок оси абсцисс от α до β (включая α и не включая β) выражается формулой

$$\Pr\{\alpha \leq X < \beta\} = F(\beta) - F(\alpha). \quad (3.43)$$

Так как для непрерывной случайной величины $\Pr\{X = x\} = 0$, то знак равенства в этом случае в (3.43) можно отбросить:

$$\Pr\{\alpha < X < \beta\} = F(\beta) - F(\alpha). \quad (3.44)$$

Плотностью вероятностей (или плотностью распределения, или просто плотностью) непрерывной случайной величины X называется производная функции распределения (рис. 3.8 и 3.9)

$$f(x) = F'(x) = dF(x) / dx. \quad (3.45)$$

Элементом вероятности для непрерывной случайной величины X называется величина $f(x)dx$, приближенно равная вероятности события, заключающегося в попадании значения случайной величины X на элементарный отрезок dx , примыкающий к точке x ,

$$f(x)dx \approx \Pr\{x < X < x + dx\}. \quad (3.46)$$

Плотность $f(x)$ любой случайной величины неотрицательна, $f(x) \geq 0$, и обладает свойством

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1. \quad (3.47)$$

График плотности называется *кривой распределения*.

Вероятность попадания непрерывной случайной величины X на участок от α до β определяется выражением (рис. 3.10)

$$\Pr\{\alpha < X < \beta\} = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx. \quad (3.48)$$

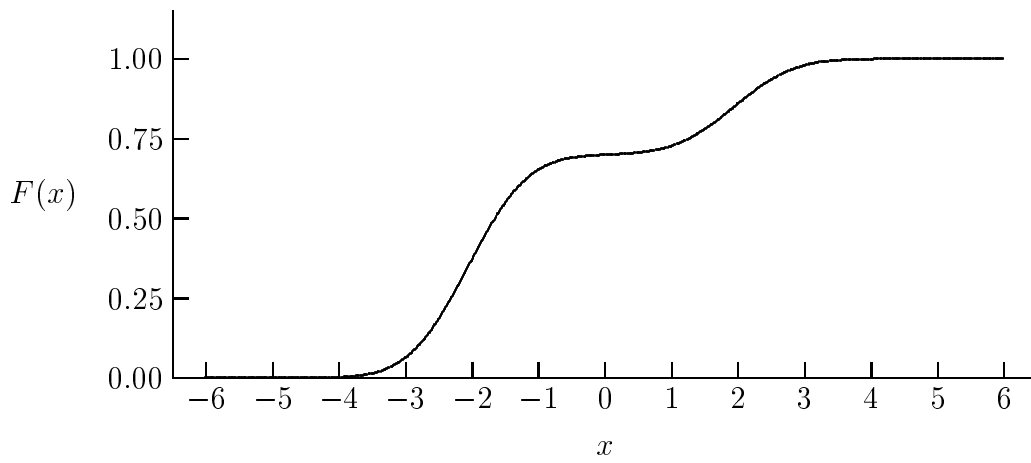


Рисунок 3.9 — Пример функции распределения $F(x)$ непрерывной случайной величины, отвечающей плотности $f(x)$ предыдущего рисунка

Функция распределения непрерывной случайной величины X выражается через её плотность

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx. \quad (3.49)$$

3.11. Числовые характеристики непрерывных случайных величин

Математическим ожиданием непрерывной случайной величины X с плотностью $f(x)$ называется её среднее значение, вычисляемое по формуле

$$M[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx. \quad (3.50)$$

Математическое ожидание смешанной случайной величины с функцией распределения $f(x)$ вычисляется по формуле

$$M[X] = \sum_i x_i p_i + \int_H x F'(x) dx, \quad (3.51)$$

где сумма распространяется на все точки разрыва функции распределения, а интеграл — на все участки её непрерывности. Когда $M[X]$ необходимо обозначить одной буквой, будем писать

$$M[X] = m_x \quad (3.52)$$

(принято в качестве индекса указывать саму случайную величину для определения её принадлежности).

Дисперсия непрерывной случайной величины X

$$D[X] = M[(X - m_x)^2] \quad (3.53)$$

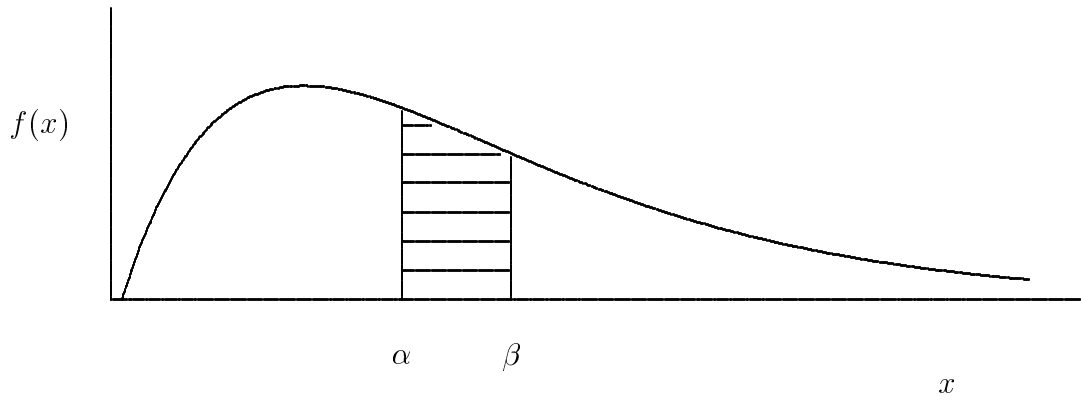


Рисунок 3.10 — Схема вероятности $\Pr(\alpha \leq X \leq \beta)$ попадания случайной величины X на участок от α до β

вычисляется по формуле

$$D[X] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^2 f(x) dx. \quad (3.54)$$

Дисперсия смешанной случайной величины выражается формулой

$$D[X] = \sum_i (x_i - m_x)^2 p_i + \int_H (x - m_x)^2 F'(x) dx, \quad (3.55)$$

где сумма распространяется на все точки разрыва функции $F(x)$, а интеграл — на все участки её непрерывности.

Корень квадратный из дисперсии называется *средним квадратическим отклонением (СКО)* случайной величины или *стандартом*

$$\sigma_x = \sqrt{D[X]}. \quad (3.56)$$

В качестве характеристики меры случайности неотрицательной случайной величины иногда применяют *коэффициент вариации*

$$\text{Var}_x = \sigma_x / m_x. \quad (3.57)$$

Отметим, что коэффициент вариации зависит от "начала отсчета".

Среднее квадратическое отклонение может быть применено для ориентировочной оценки диапазона возможных значений случайной величины. При этом зачастую на практике пользуются так называемым *правилом трех сигм*, состоящим в том, что *диапазон практически возможных значений случайной величины X не выходит за пределы интервала $(m_x - 3\sigma_x, m_x + 3\sigma_x)$* .

Это правило справедливо и для дискретной случайной величины.

Начальный момент k -го порядка

$$\alpha_k = M[X^k] \quad (3.58)$$

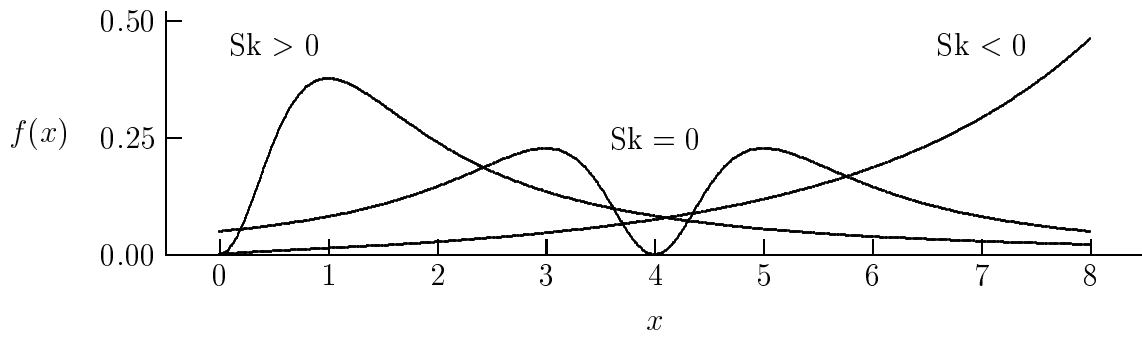


Рисунок 3.11 — Асимметрии распределения

для непрерывной и смешанной случайных величин выражается соответственно формулами :

$$\alpha_k[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x) dx, \quad (3.59a)$$

$$\alpha_k[X] = \sum_i x_i^k p_i + \int_H x^k F'(x) dx. \quad (3.59b)$$

Центральные моменты вычисляются по аналогичным формулам :

$$\mu_k[X] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^k f(x) dx, \quad (3.60a)$$

$$\mu_k[X] = \sum_i (x_i - m_x)^k p_i + \int_H (x - m_x)^k F'(x) dx. \quad (3.60b)$$

Центральные моменты могут быть выражены через начальные совершенно так же, как для дискретной случайной величины. Наибольший практический интерес представляет выражение дисперсии через второй начальный момент

$$D[X] = \alpha_2[X] - m_x^2, \quad (3.61)$$

или в другой форме

$$D[X] = M[X^2] - (M[X])^2. \quad (3.62)$$

Медианой Me случайной величины X называется корень уравнения $F(x) = 0,5$. Таким образом, $\Pr(X < Me) = \Pr(X > Me)$, т.е. одинаково вероятно, окажется ли случайная величина меньше или больше своей медианы Me .

Модой случайной величины называется её наиболее вероятное значение. Для непрерывной случайной величины модой является то значение, в котором плотность распределения имеет максимум.

В случае симметричного и одновершинного распределения медиана совпадает с математическим ожиданием и модой.

Третий центральный момент служит для характеристики асимметрии распределения.

Коэффициент асимметрии Sk определяется как (рис. 3.11)

$$Sk = \mu_3 / \sigma_x^3. \quad (3.63)$$

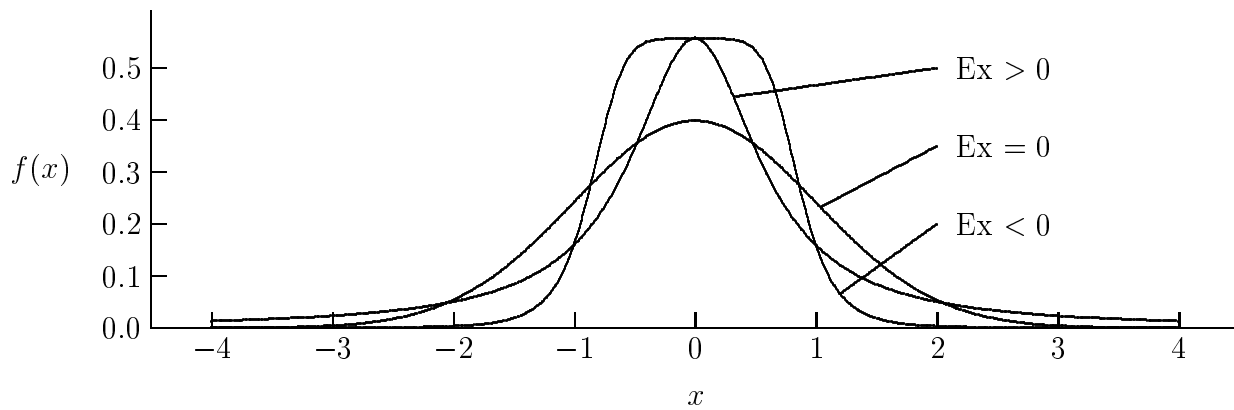


Рисунок 3.12 — Экссесс распределения. Кривая с равным нулю эксцессом, $E_x = 0$, является плотностью нормального распределения

Четвертый центральный момент служит для характеристики островершинности или плосковершинности распределения. Эти свойства распределений описываются с помощью эксцесса.

Эксцессом E_x случайной величины X называется величина (рис. 3.12)

$$E_x = \frac{\mu_4}{\sigma_x^4} - 3. \quad (3.64)$$

Число 3 вычитается из отношения μ_4 / σ_x^4 в связи с тем, что для весьма важного нормального закона (с этим законом мы познакомимся в дальнейшем) это отношение равно трем. Таким образом, для нормального закона $E_x = 0$; кривые, более островершинные по сравнению с нормальными, обладают положительным эксцессом; более плосковершинные кривые — отрицательным эксцессом.

Кроме перечисленных числовых характеристик на практике вероятностных и статистических расчетов применяются квантили. Для заданной вероятности p , $p \in [0, 1]$ *квантилем* ξ_p случайной величины X называется точка, в которой функция распределения вероятностей $F(x)$ переходит от значений, меньших, чем p , до значений, больших, чем p :

$$F(\xi_p) \leq p, \quad F(\xi_p + 0) \geq p. \quad (3.65)$$

Квантиль $\xi_{1/2}$ является медианой.

В отличие от моментов, у любой действительной скалярной случайной величины существуют все квантили. Вместе с тем у некоторых случайных величин квантили могут быть определены неоднозначно. Если, например, у случайной величины X существует интервал (x_1, x_2) , на котором $F(x) = 1/2$, то любая точка этого интервала может служить значением медианы, т.е. квантиля.

Квантили $\xi_{1/4}$ и $\xi_{3/4}$ называются *квартелями*.

Величина $W = \xi_{3/4} - \xi_{1/4}$ при этом часто принимается за характеристику разброса значений случайной величины и называется *срединным* или *вероятностным отклонением*. Иногда величину W называют *семиквартильной широтой* распределения случайной величины. В практике статистических расчетов также пользуются квантилями $\xi_{0,1}, \xi_{0,2}, \dots, \xi_{0,9}$, которые называются *децилями*.

В теории оценивания и принятия решений задаются *уровнем значимости* α , связанным с вероятностью p . При заданном значении уровня значимости $\alpha = 1 - p$ квантиль ξ_p определяется как решение уравнения

$$\int_{\xi_p}^{\infty} f(x) dx = 1 - p = \alpha, \quad (3.66)$$

таким образом, найденное из (3.66) решение ξ_p определяет область (ξ_p, ∞) значений случайной величины X , для которой вероятность попасть в неё равна α . Найденная величина ξ_p называется *критическим значением* или *порогом* $t_\alpha = \xi_{1-p}$ принятия решения по уровню значимости $\alpha = 1 - p$.

Если вероятность какого-либо события A зависит от того, какое значение приняла непрерывная случайная величина X с плотностью $f(x)$, то полная вероятность события A вычисляется по *интегральной формуле полной вероятности*

$$P(A) = \int_{-\infty}^{\infty} P(A|x) f(x) dx, \quad (3.67)$$

где $P(A|x) = P\{A|X = x\}$ — условная вероятность события A при гипотезе $\{X = x\}$.

Соответствующий аналог в схеме непрерывных случайных величин имеет и *формула Байеса*. Если в результате опыта имело место событие A , вероятность которого зависит от того, какое значение приняла непрерывная случайная величина X , то условная плотность этой случайной величины с учетом появления события A

$$f_A(x) = f(x) P(A|x) / P(A), \quad (3.68)$$

или же с учетом (3.67)

$$f_A(x) = f(x) P(A|x) \left(\int_{-\infty}^{\infty} P(A|x) f(x) dx \right)^{-1}. \quad (3.69)$$

Формула (3.69) называется *интегральной формулой Байеса*.

В схеме непрерывных случайных величин применяется *интегральная формула полного математического ожидания*

$$M[X] = \int_{-\infty}^{\infty} M[X|y] f(y) dy, \quad (3.70)$$

где X — любая случайная величина; Y — непрерывная случайная величина с плотностью $f(y)$; $M[X|y]$ — условное математическое ожидание случайной величины X при условии, что случайная величина Y приняла значение y .

Перечислим некоторые часто встречающиеся на практике распределения непрерывных случайных величин и опишем их свойства.

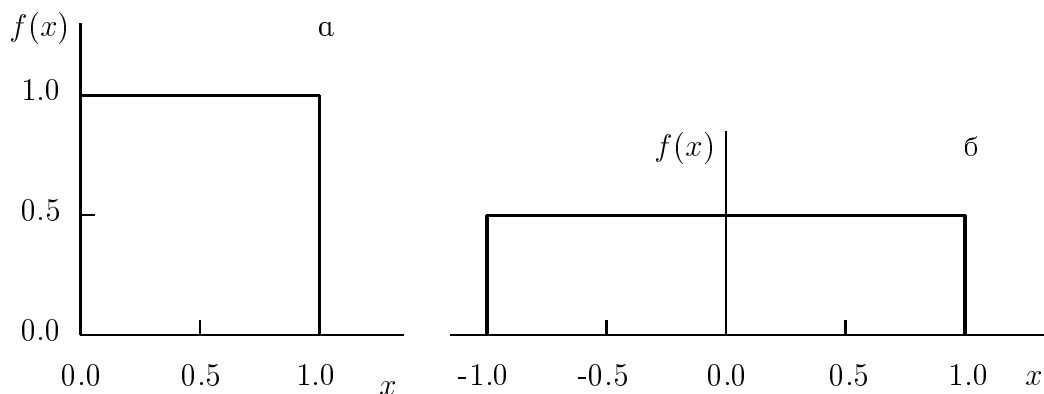


Рисунок 3.13 — Плотность распределения $f(x)$ равномерного непрерывного закона: а – на интервале $[0; 1]$; б – на интервале $[-1; 1]$

3.12. Равномерное распределение

Случайная величина X имеет *равномерное распределение* на участке от a до b , если её плотность на этом участке постоянна (рис. 3.13):

$$f(x) = \begin{cases} 1/(b-a) & \text{при } x \in [a, b], \\ 0 & \text{при } x \notin [a, b]. \end{cases} \quad (3.71)$$

Значения $f(x)$ в точках a и b никак не определены; это и несущественно, так как вероятность попадания в любую из них равна нулю, и, значит, вероятность любого события, связанного со случайной величиной X , не зависит от того, какое значение имеет плотность $f(x)$ в точках a и b . (В дальнейшем, задавая плотность $f(x)$ разными формулами на разных участках оси $0x$, также не будем указывать значения $f(x)$ на границах участков).

Математическое ожидание, дисперсия и среднее квадратичное отклонение для случайной величины X , имеющей плотность (3.71), соответственно

$$M[X] = (a+b)/2; \quad D[X] = (b-a)^2/12; \quad \sigma_x = (b-a)/\sqrt{12}. \quad (3.72)$$

Равномерное распределение имеют ошибки грубых измерений при помощи инструмента с крупными делениями, когда измеренное значение округляется до ближайшего целого (или до ближайшего меньшего, или до ближайшего большего).

Например, ошибка (в сантиметрах) измерения длины карандаша с помощью линейки с сантиметровыми делениями имеет равномерное распределение на участке $(-1/2; 1/2)$, если округление производится до ближайшего целого, и на участке $(0; 1)$, если до ближайшего меньшего целого.

Равномерное распределение на участке $[0, 2\pi]$ имеет угол поворота φ хорошо уравновешенного колеса, если оно приводится во вращение и останавливается в результате трения.

В задаче Бюффона угол, определяющий направление иглы, также имеет равномерное распределение в силу того, что игла бросается наугад – так, что ни одно из значений φ не предпочитается никакому другому.

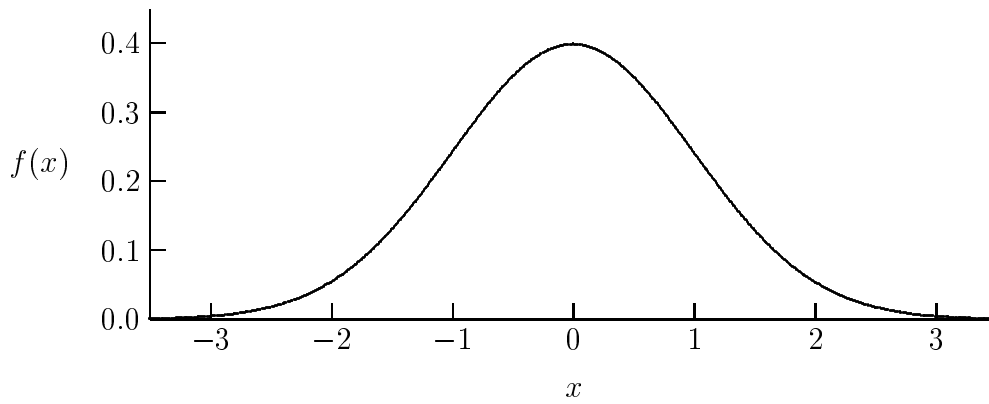


Рисунок 3.14 — Плотность распределения вероятностей $f(x)$ нормального закона; параметры: $m = 0,0$; $\sigma = 1,0$

Типичные условия возникновения равномерного распределения состоят в следующем: точка M случайным образом брошена на ось Ox , разделенную на равные интервалы длины L . Каждый из случайных отрезков X и Y , на которые делит точка M тот интервал, на который она попала, имеет равномерное распределение на участке $[0, L]$.

3.13. Нормальное распределение

Случайная величина X имеет *нормальное распределение* [или распределена по нормальному закону (*закону Гаусса*)], если её плотность следующая

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} \exp \left(-\frac{(x - m)^2}{2\sigma^2} \right), \quad -\infty < x < \infty. \quad (3.73)$$

Математическое ожидание случайной величины, имеющей распределение (3.73), равно m , дисперсия составляет σ^2 , поэтому среднее квадратическое отклонение равно σ (рис. 3.14).

Вероятность попадания случайной величины X , имеющей нормальное распределение с параметрами m и σ , на участок от α до β , выражается формулой

$$\Pr\{\alpha < X < \beta\} = \Phi \left(\frac{\beta - m}{\sigma} \right) - \Phi \left(\frac{\alpha - m}{\sigma} \right), \quad (3.74)$$

где $\Phi(x)$ – функция Лапласа:

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x \exp(-t^2/2) dt. \quad (3.75)$$

Функция Лапласа обладает следующими свойствами:

- 1) $\Phi(0) = 0$;
- 2) $\Phi(-x) = -\Phi(x)$ (нечетная функция);
- 3) $\Phi(\infty) = 0,5$.

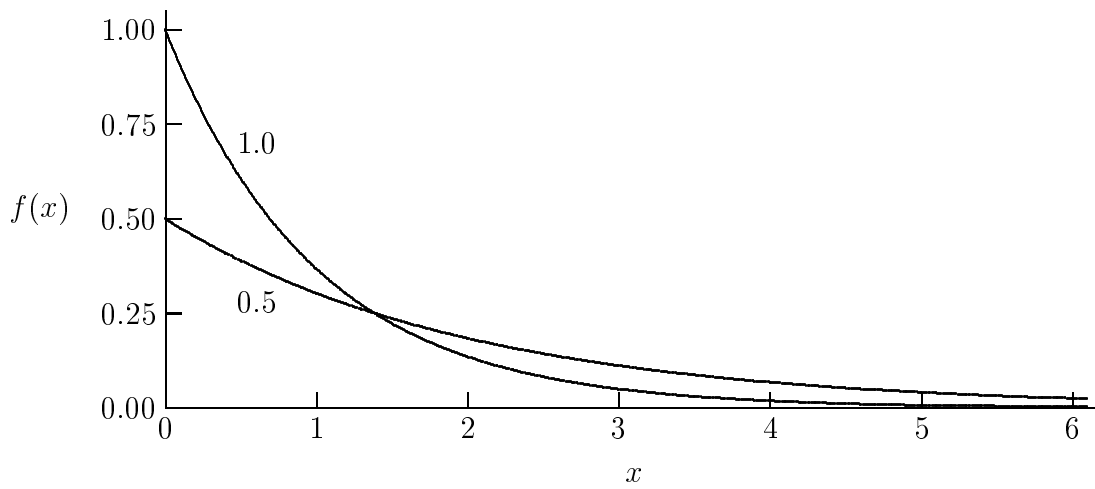


Рисунок 3.15 — Плотность распределения $f(x) = \lambda \exp(-\lambda x)$ показательного закона; $\lambda = 0,5$ и $\lambda = 1,0$

Если участок $[\alpha, \beta]$ симметричен относительно точки $x = m$, то вероятность попадания в него

$$\Pr\{|X - m| < L\} = 2\Phi(L/\sigma), \quad (3.76)$$

где $L = (\beta - \alpha)/2$ — половина длины участка.

Нормальное распределение возникает тогда, когда величина X образуется в результате суммирования большого числа независимых (или слабо зависимых) случайных слагаемых, сравнимых по своему влиянию на эту величину.

3.14. Показательное (экспоненциальное) распределение

Случайная величина X имеет *показательное (экспоненциальное) распределение*, если её плотность выражается формулой (рис. 3.15)

$$f(x) = \begin{cases} \lambda \exp(-\lambda x) & \text{при } x \geq 0, \\ 0 & \text{при } x < 0, \end{cases} \quad (3.77)$$

где λ — параметр показательного распределения.

Показательному распределению придается большое значение в теории марковских случайных процессов и теории массового обслуживания.

Если на оси времени Ot имеется простейший поток событий с интенсивностью λ , то случайная величина — интервал времени T между двумя соседними событиями имеет показательное распределение с параметром λ .

Математическое ожидание, дисперсия и среднее квадратичное отклонение величины X , имеющей показательное распределение, соответственно

$$M[X] = \lambda^{-1}; \quad D[X] = \lambda^{-2}; \quad \sigma_x = \lambda^{-1}. \quad (3.78)$$

Коэффициент вариации показательного распределения равен единице:

$$\text{Var}_x = \sigma_x / m_x = 1. \quad (3.79)$$

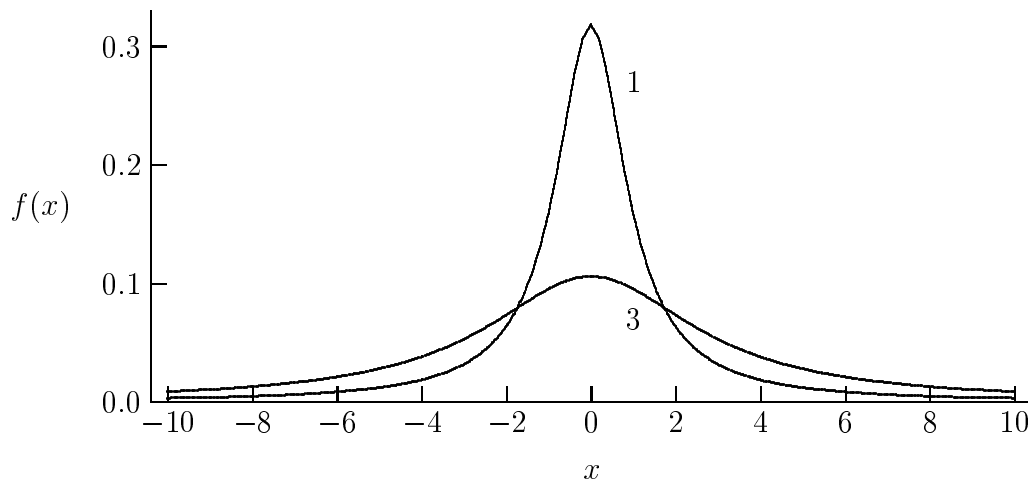


Рисунок 3.16 — Плотность распределения вероятностей $f(x)$ закона Коши; $\alpha = 1$ и $\alpha = 3$; $\beta = 0$

Вместо подробной записи показательного распределения (3.77) часто ограничиваются более краткой:

$$f(x) = \lambda \exp(-\lambda x). \quad (3.80)$$

3.15. Распределение Коши

Случайная величина имеет *распределение Коши* с параметрами $\alpha > 0$ и β , если её плотность выражается формулой (рис. 3.16)

$$f(x) = \frac{\alpha/\pi}{\alpha^2 + (x - \beta)^2}, \quad -\infty < x < \infty. \quad (3.81)$$

Распределению Коши подчиняется отношение двух независимых нормальных случайных величин с равными нулю математическими ожиданиями.

В качестве другого примера можно указать распределение тангенса случайного угла, если значения угла равновероятны на интервале $[-\pi/2, \pi/2]$.

Математическое ожидание случайной величины, имеющей распределение Коши, не существует, второй начальный момент бесконечен. Параметр β является и модой, и медианой.

3.16. Гамма-распределение

Случайная величина имеет *гамма-распределение* с параметрами $\lambda > 0$ и $\alpha > 0$, если её плотность выражается формулой

$$f(x) = \frac{\lambda^\alpha x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \exp(-\lambda x), \quad x > 0. \quad (3.82)$$

Здесь

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} t^{\alpha-1} \exp(-t) dt$$

– гамма-функция Эйлера.

Случайная величина с таким законом распределения рассматривается в задачах массового обслуживания и в задачах, связанных с оцениванием и минимизацией риска.

3.17. Характеристическая и производящая функции

В ряде прикладных задач теории вероятностей удобно пользоваться характеристическими и производящими функциями.

Если случайная величина X принимает только целые неотрицательные значения, то *производящей функцией* $\Phi_X(t)$ распределения случайной величины X называется функция действительного аргумента t

$$\Phi_X(t) = M[t^X] = \sum_{k=0}^{\infty} t^k \Pr\{X = k\}, \quad |t| \leq 1; \quad (3.83)$$

производящую функцию можно рассматривать и в том случае, когда X принимает и отрицательные значения, если область сходимости ряда в правой части последнего равенства отлична от окружности $|t| = 1$.

Если случайная величина X принимает действительные значения, то *характеристической функцией* $q_X(t)$ распределения X называется функция действительной переменной t

$$q_X(t) = M[\exp(itX)], \quad -\infty < t < \infty. \quad (3.84)$$

В частности, если распределение X абсолютно непрерывно и имеет плотность $f_X(x)$, то

$$q_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(itx) f_X(x) dx. \quad (3.85)$$

Перечислим важнейшие свойства производящих и характеристических функций:

- 1) Если справедливо $\Pr\{|X| < \infty\} = 1$, то производящая функция $\Phi_X(t) = M[t^X]$ и характеристическая функция $q_X(t) = M[\exp(itX)]$ непрерывны и $\Phi_X(1) = q_X(0) = 1$.
- 2) Если $M[|X|^k] < \infty$ для некоторого целого $k \geq 1$, то

$$\left. \frac{d^k}{dt^k} q_X(t) \right|_{t=0} = i^k M[X^k]. \quad (3.86)$$

- 3) Если случайные величины $X_1, X_2, \dots, X_n$ независимы, то

$$q_{X_1+X_2+\dots+X_n}(t) = q_{X_1}(t) \cdot q_{X_2}(t) \cdot \dots \cdot q_{X_n}(t). \quad (3.87)$$

4) *Теорема соответствия.* Если производящие (или характеристические) функции распределений случайных величин X_1 и X_2 совпадают, то совпадают и функции распределения величин X_1 и X_2 .

5) *Теорема непрерывности функций распределений.* Последовательность $F_n(x) = \Pr\{X_n \leq x\}$ функций распределения ($n = 1, 2, \dots$) слабо сходится к функции распределения $F(x) = \Pr\{X \leq x\}$ тогда и только тогда, когда существует непрерывная функция

$$q(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} q_n(t), \quad (3.88)$$

где $q_n(t) = M[\exp(itX_n)]$. В этом случае $q(t) = M[\exp(itX)]$, и сходимость $q_n(t) \rightarrow q(t)$ равномерна на каждом конечном интервале значений t .

6) *Формулы обращения.* Если функция $q(t) = M[\exp(itX)]$ абсолютно интегрируема, то распределение случайной величины X имеет ограниченную непрерывную плотность $f(x)$ и

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-itx) q(t) dt. \quad (3.89)$$

Если x и $x+h$ — точки непрерывности функции распределения вероятностей $F(x) = \Pr\{X \leq x\}$, то

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{1}{2\pi} \lim_{a \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-a^2 t^2 / 2) \frac{1 - e^{ith}}{ith} \exp(-itx) dt. \quad (3.90)$$

3.18. Примеры

Пример 3.1

Для 3 выстрелов вероятности попадания в цель следующие: $p_1 = 0,4$; $p_2 = 0,3$; $p_3 = 0,6$.

Найти математическое ожидание общего числа попаданий.

Решение

Пусть X_1 — случайная величина числа попаданий при первом выстреле. Тогда её ряд распределения:

X_1	1 (попадание)	0 (промах)
p	0,4	0,6

Поэтому $M[X_1] = 1 \cdot 0,4 + 0 \cdot 0,6 = 0,4$.

Пусть X_2 — случайная величина числа попаданий при втором выстреле. Тогда её ряд распределения:
и $M[X_2] = 1 \cdot 0,3 + 0 \cdot 0,7 = 0,3$.

Пусть X_3 — случайная величина числа попаданий при третьем выстреле. Тогда её ряд распределения:

X_2	1 (попадание)	0 (промах)
p	0,3	0,7

и $M[X_3] = 1 \cdot 0,6 + 0 \cdot 0,4 = 0,6$.

Общее число попаданий есть также случайная величина, состоящая из суммы попаданий в каждом из трех выстрелов: $X = X_1 + X_2 + X_3$.

Искомое математическое ожидание :

$$M[X] = M[X_1] + M[X_2] + M[X_3] = 0,4 + 0,3 + 0,6 = 1,3.$$

Пример 3.2

Прядильщица обслуживает 1000 веретен. Вероятность обрыва нити на одном веретене в течение одной минуты равна 0,004.

Найти вероятность того, что в течение одной минуты обрыв произойдет в пяти веретенах.

Решение

По условию: число веретен $n = 1000$; вероятность обрыва нити на одном веретене в течение одной минуты $p = 0,004$; число веретен $m = 5$. Это дает: $\lambda = np = 1000 \cdot 0,004 = 4$. По формуле Пуассона искомая вероятность $P_{5,1000}$ вычисляется приближенно $P_{5,1000} \approx \frac{\lambda^m}{m!} \exp(-\lambda)$, т.е.

$$P_{5,1000} \approx \frac{\lambda^m}{m!} \exp(-\lambda) = \frac{4^5}{5!} \exp(-4) \approx 0,1562.$$

Пример 3.3

Найти математическое ожидание случайной величины X , зная ряд её распределения.

Решение

Используя формулу $M[X] = \sum_{i=1}^n x_i p_i$, находим искомое математическое ожидание $M[X] = 3 \cdot 0,1 + 5 \cdot 0,6 + 2 \cdot 0,3 = 3,9$.

Пример 3.4

Из партии, состоящей из 100 изделий, среди которых 10 бракованных, выбраны случайным образом 5 изделий для проверки их качества.

Построить ряд распределения случайного числа X – бракованных изделий, содержащихся в выборке.

Решение

Так как в выборке, состоящей из 5 изделий, число бракованных изделий может быть любым целым числом в пределах от 0 до 5 включительно, то частные значения x случайной величины X таковы:

$$x_1 = 0; \quad x_2 = 1; \quad x_3 = 2; \quad x_4 = 3; \quad x_5 = 4; \quad x_6 = 5.$$

X_3	1 (попадание)	0 (промах)
p	0,6	0,4

Вероятность $P(X=k)$ того, что в выборке окажется ровно k экземпляров ($k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$) бракованных изделий,

$$P(X = k) = C_{10}^k C_{90}^{5-k} / C_{100}^5.$$

В результате расчетов по данной формуле с точностью до 0,001 получим:

$$\begin{aligned} P_1 = \Pr(X=0) &= 0,583; & P_2 = \Pr(X=1) &= 0,340; \\ P_3 = \Pr(X=2) &= 0,070; & P_4 = \Pr(X=3) &= 0,007; \\ P_5 = \Pr(X=4) &= 0,000; & P_6 = \Pr(X=5) &= 0,000. \end{aligned}$$

Пример 3.5

Случайная величина X задана рядом распределения:
Найти среднее квадратическое отклонение $\sigma[X]$.

Решение

Найдем математическое ожидание $M[X]$:

$$M[X] = \sum_{i=1}^3 x_i p_i = 2 \cdot 0,1 + 3 \cdot 0,4 + 10 \cdot 0,5 = 6,4.$$

Найдем математическое ожидание $M[X^2]$:

$$M[X^2] = \sum_{i=1}^3 x_i^2 p_i = 2^2 \cdot 0,1 + 3^2 \cdot 0,4 + 10^2 \cdot 0,5 = 54.$$

Найдем дисперсию

$$D[X] = M[X^2] - (M[X])^2 = 54 - 6,4^2 = 13,04.$$

Для искомого среднего квадратического отклонения $\sigma[X]$ получим

$$\sigma[X] = \sqrt{D[X]} = \sqrt{13,04} \approx 3,61.$$

Пример 3.6

Радиоаппаратура состоит из 1000 элементов. Вероятность отказа одного элемента в течение одного года работы равна 0,001 и не зависит от состояния других элементов.

Какова вероятность отказа двух и не менее двух элементов за год?

Решение

Считая случайное число X отказавших элементов подчиняющимся закону Пуассона,

$$\Pr\{X = m\} = P_m = \frac{a^m}{m!} \exp(-a),$$

X	3	5	2
p	0,1	0,6	0,3

где $a = np = 1000 \cdot 0,001 = 1$, получим:

1) вероятность отказа ровно двух элементов

$$\Pr\{X = 2\} = P_2 = \frac{a^2}{2!} \exp(-a) = 0,184;$$

2) вероятность отказа не менее двух элементов

$$\begin{aligned} \Pr\{X \geq 2\} &= \sum_{m=2}^{\infty} P_m = 1 - \sum_{m=0}^1 P_m = 1 - P_0 - P_1 = \\ &= 1 - (1 + a) \exp(-a) = 1 - 2e^{-1} = 0,264. \end{aligned}$$

Пример 3.7

Дан график функции распределения вероятностей $F(x)$ случайной величины X .

Как изменится этот график, если: а) прибавить к случайной величине единицу; б) умножить случайную величину на 2; в) вычесть из случайной величины 2; г) изменить знак случайной величины на обратный?

Решение

а) сдвинется влево на единицу; б) масштаб по оси абсцисс удвоится; в) сдвинется вправо на 2; г) график переместится на свое зеркальное отражение относительно оси ординат и затем каждую ординату вычесть из единицы.

Пример 3.8

Монета брошена 4 раза. Составить закон распределения вероятностей случайной величины X – числа появлений герба, найти функцию распределения $F(x)$.

Решение

Вероятность появления герба в каждом испытании $p = 0,5$; следовательно, вероятность неоявления герба равна $1 - 0,5 = 0,5 = q$.

При четырех бросаниях монеты герб может совсем не появиться либо появиться 1 раз, 2, 3, 4 раза. Таким образом, возможные значения m величины X таковы: $x_0 = 0$; $x_1 = 1$; $x_2 = 2$; $x_3 = 3$; $x_4 = 4$.

Найдем вероятности рассматриваемых возможных значений по формуле Бернулли $P = P_m(n) = C_n^m p^m q^{n-m}$:

$$P_0(4) = C_4^0 p^0 q^4 = \left(\frac{1}{2}\right)^0 \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16};$$

$$P_1(4) = C_4^1 p^1 q^3 = 4 \left(\frac{1}{2}\right)^1 \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{4};$$

$$P_2(4) = C_4^2 p^2 q^2 = 6 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{8};$$

X	2	3	10
p	0, 1	0, 4	0, 5

$$P_3(4) = C_4^3 p^3 q^1 = 4 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{1}{4};$$

$$P_4(4) = C_4^4 p^4 q^0 = \left(\frac{1}{2}\right)^4 \left(\frac{1}{2}\right)^0 = \frac{1}{16}.$$

Напишем искомый закон биномиального распределения в виде ряда распределения :

X	0	1	2	3	4
P _i	1/16	1/4	3/8	1/4	1/16

В целях контроля вычислений сложим вероятности всех возможных значений :

$$\sum_{i=0}^4 P_i = \frac{1}{16} + \frac{1}{4} + \frac{3}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} = 1,$$

что и следовало ожидать.

Составим теперь функцию распределения $F(x)$:

$$1. \quad -\infty < x < 0, \quad F(x) = 0;$$

$$2. \quad -\infty < x < 1, \quad F(x) = \sum_{i=0}^0 P(X = x_i) = P_0 = \frac{1}{16};$$

$$3. \quad -\infty < x < 2, \quad F(x) = \sum_{i=0}^1 P(X = x_i) = P_0 + P_1 = \frac{1}{16} + \frac{1}{4} = \frac{5}{16};$$

$$4. \quad -\infty < x < 3, \quad F(x) = \sum_{i=0}^2 P(X = x_i) = P_0 + P_1 + P_2 = \\ = \frac{1}{16} + \frac{1}{4} + \frac{3}{8} = \frac{11}{16};$$

$$5. \quad -\infty < x < 4, \quad F(x) = \sum_{i=0}^3 P(X = x_i) = P_0 + P_1 + P_2 + P_3 = \\ = \frac{1}{16} + \frac{1}{4} + \frac{3}{8} + \frac{1}{4} = \frac{15}{16};$$

$$6. \quad -\infty < x \leq 4, \quad F(x) = \sum_{i=0}^4 P(X = x_i) = P_0 + P_1 + P_2 + P_3 + P_4 = \\ = \frac{1}{16} + \frac{1}{4} + \frac{3}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} = 1.$$

Итак,

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } -\infty < x \leq 0, \\ 1/16 & \text{при } 0 < x \leq 1, \\ 5/16 & \text{при } 1 < x \leq 2, \\ 11/16 & \text{при } 2 < x \leq 3, \\ 15/16 & \text{при } 3 < x \leq 4, \\ 1 & \text{при } 4 \leq x < \infty. \end{cases}$$

Пример 3.9

Изделия испытываются при перегрузочных режимах. Вероятности для каждого изделия пройти испытания равны 4/5. Испытания заканчиваются после первого же изделия, не выдержавшего перегрузку.

Вывести формулу для ряда распределений числа испытаний.

Решение

Испытание заканчивается на k -м изделии ($k = 1, 2, 3, \dots$), если первые $(k - 1)$ изделий пройдут испытания, а k -е изделие не выдержит перегрузку. Если X — случайное число испытаний, то

$$P_k = \Pr(X = k) = \frac{1}{5} (1 - 1/5)^{k-1} = \frac{4^{k-1}}{5^k}, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Пример 3.10

На пути движения автомашины есть четыре светофора. Каждый из них либо разрешает, либо запрещает дальнейшее движение с вероятностью 0,5.

Определить вероятности P_k того, что автомашина проедет k светофоров ($k = 1, 2, 3, 4$) без остановки. Построить многоугольник распределения рассматриваемой случайной величины.

Решение

Пусть X — случайное число светофоров, пройденных автомашиной. Эта величина может принимать следующие значения :

$$x_0 = 0; \quad x_1 = 1; \quad x_2 = 2; \quad x_3 = 3; \quad x_4 = 4.$$

Вероятности $P_k = \Pr(X = x_k)$ того, что число пройденных светофоров X будет равно данному частному значению x_k , вычисляются следующим образом:

$$P_k = \Pr(X = x_k) = C_4^k p^k (1 - p)^{4-k} \quad \text{для } k = 0, 1, 2, 3, 4,$$

где p — вероятность задержки автомашины светофорами ($p = 0,5$).

В результате вычислений получим :

$$P_0 = \frac{1}{16}; \quad P_1 = \frac{4}{16}; \quad P_2 = \frac{6}{16}; \quad P_3 = \frac{4}{16}; \quad P_4 = \frac{1}{16}.$$

Эти данные и образуют многоугольник распределения вероятностей.

Пример 3.11

Имеется две шестигранные игральные кости. Случайная величина X — сумма выпавших очков за один бросок.

Описать свойства случайной величины X .

Решение

На каждой из шести граней одной игральной кости указаны очки: 1, 2, 3, 4, 5, 6. Таким образом, поскольку имеется две игральных кости, область возможных значений случайной величины X — от 2 до 12.

Ряд распределения следующий :

$X = m$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
P_m	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36

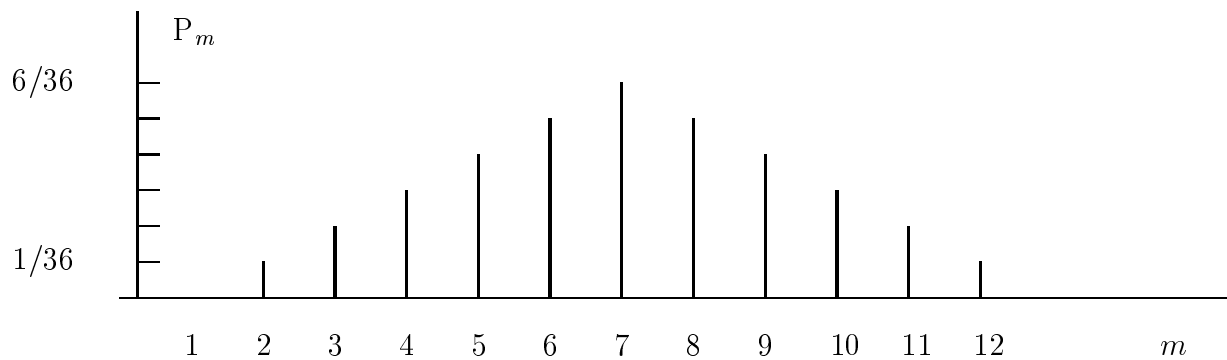


Рисунок 3.17 — Вероятность $P_m = \Pr\{X=m\}$ выпадения m очков

Набор амплитуд вероятностей $\{P_m\}$, где $m = 1, 2, \dots, 11, 12$, показан на рис. 3.17.

Пример 3.12

Плотность вероятности случайной величины X имеет вид :

$$f(x) = \alpha \exp(-\beta |x|), \quad -\infty < x < \infty,$$

где α и β – постоянные величины.

Требуется : а) найти соотношение, которому должны удовлетворять постоянные α и β ; б) вычислить функцию распределения $F_x(x)$ случайной величины X .

Решение

а) Чтобы найти соотношение между постоянными α и β , воспользуемся условием нормировки для плотности вероятности.

При этом учтем, что плотность вероятности имеет разные аналитические выражения при $x < 0$ и $x > 0$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \alpha \int_{-\infty}^0 \exp(\beta x) dx + \alpha \int_0^{\infty} \exp(-\beta x) dx = 2\alpha/\beta = 1.$$

Следовательно, $\beta = 2\alpha$.

б) По определению функция распределения

$$F_x(x) = \int_{-\infty}^x f(x') dx'.$$

При $x < 0$:

$$F_x(x) = \alpha \int_{-\infty}^x \exp(\beta x') dx' = (\alpha/\beta) \exp(\beta x) = \frac{1}{2} \exp(\beta x).$$

При $x \geq 0$:

$$F_x(x) = \frac{1}{2} + \alpha \int_0^x \exp(-\beta x') dx' = 1 - \frac{1}{2} \exp(-\beta x).$$

Пример 3.13

Плотность вероятности случайной величины равна

$$f(x) = Ax^2 \exp(-kx), \quad k > 0, \quad x > 0.$$

Требуется: а) найти связь между коэффициентами A и k ; б) вычислить вероятность попадания случайной величины X в интервал $(0; 1/k)$; в) найти функцию распределения случайной величины X .

Решение

а) Искомый коэффициент A определим с помощью формулы о вероятности полной группы событий

$$A \int_0^{\infty} x^2 \exp(-kx) dx = 1,$$

следовательно, $A = 0,5k^3$ и плотность вероятности имеет вид

$$f(x) = \frac{1}{2}k^3 x^2 \exp(-kx).$$

б) Вероятность попадания случайной величины X в заданный промежуток $(0, 1/k)$ вычисляем по формуле

$$\Pr\{0 < X < 1/k\} = \int_0^{1/k} \frac{1}{2}k^3 x^2 \exp(-kx) dx = 1 - \frac{5}{2e} \approx 0,0803.$$

в) Функция распределения $F(x)$ случайной величины X следующая

$$F(x) = \int_0^x \frac{1}{2}k^3 x^2 \exp(-kx) dx = 1 - \frac{1}{2}(k^2 x^2 + 2kx + 2) \exp(-kx).$$

Пример 3.14

Случайная величина X задана интегральной функцией распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } -\infty < x < 0, \\ 0,5(1 - \cos x) & \text{при } 0 \leq x \leq \pi, \\ 1 & \text{при } \pi < x < \infty. \end{cases}$$

Найти: а) вероятность того, что в результате испытания случайная величина X окажется в пределах промежутка $(\pi/3; \pi/2)$; б) плотность распределения вероятности $f(x)$ случайной величины X ; в) моду M_0 и медиану M_e распределения; г) математическое ожидание $M[X]$, дисперсию $D[X]$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma[X]$.

Решение

а) Пользуясь формулой

$$\Pr\{a < X < b\} = F(b) - F(a),$$

найдем

$$\Pr\{\pi/3 < X < \pi/2\} = F(\pi/2) - F(\pi/3) = 1/2 - 1/4 = 1/4.$$

б) По формуле $f(x) = F'(x)$ находим:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } -\infty < x < 0, \\ 0,5 \sin x & \text{при } 0 \leq x \leq \pi, \\ 0 & \text{при } \pi < x < \infty. \end{cases}$$

в) Из вида $f(x)$ следует, что $\max_x[f(x)] = \max[0, 5 \sin x]$ достигается при $x = \pi/2$, следовательно, мода $M_0 = \pi/2$.

Медиана $M_e = x_{0,5}$ – такое значение x , при котором $F(x_{0,5}) = 0,5$.

Решая уравнение $\frac{1}{2}(1 - \cos x_{0,5}) = 0,5$, находим $x_{0,5} = \pi/2$.

г) По формуле для математического ожидания $M[X] = \int_0^\pi x f(x) dx$ находим, что $M[X] = \pi/2$.

Для вычисления дисперсии $D[X] = M[X^2] - (M[X])^2$ вычислим сначала $M[X^2]$ – второй начальный момент:

$$M[X^2] = \int_0^\pi x^2 f(x) dx = \pi^2/2 - 2,$$

что дает

$$D[X] = \pi^2/2 - 2 - \pi^2/4 = (\pi^2 - 8)/4.$$

Среднее квадратическое отклонение равно $\sigma[X] = \sqrt{D[X]}$, что дает

$$\sigma[X] = \sqrt{(\pi^2 - 8)/4}.$$

Пример 3.15

Найти характеристическую функцию случайной величины X , определенной на $(-\infty, \infty)$ и имеющей плотность распределения вероятностей $f(x) = \frac{1}{2} \exp(-|x|)$.

Решение

Так как характеристическая функция $q(u) = M[\exp(iuX)]$, то

$$q(u) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(iux) \exp(-|x|) dx = \int_0^{\infty} \cos(ux) \exp(-x) dx,$$

поскольку $\exp(iux) = \cos(ux) + i \sin(ux)$ и $\int_{-\infty}^{\infty} \sin(ux) \exp(-|x|) dx = 0$.

Интегрируя по частям, получим

$$\int_0^{\infty} \exp(-x) \cos(ux) dx = (1 + u^2)^{-1}.$$

Поэтому $q(u) = (1 + u^2)^{-1}$.

Пример 3.16

Случайная величина X задана дифференциальной функцией распределения

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } -\infty < x < -\pi/2, \\ 0,5 \cos x & \text{при } -\pi/2 \leq x \leq \pi/2, \\ 0 & \text{при } \pi/2 < x < \infty. \end{cases}$$

Найти интегральную функцию распределения $F(x)$.

Решение

Интегральную функцию распределения $F(x)$ найдем, пользуясь формулой, связывающей $F(x)$ и функцию распределения $f(x)$,

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt.$$

1) В случае, когда $-\infty < x < -\pi/2$:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_{-\infty}^x 0 dt = 0.$$

2) В случае, когда $-\pi/2 < x < \pi/2$:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_{-\infty}^{-\pi/2} 0 dt + \int_{-\pi/2}^x f(t) dt = \frac{1}{2} \int_{-\pi/2}^x \cos t dt = \frac{1}{2}(\sin x + 1).$$

3) В случае, когда $\pi/2 < x < \infty$:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_{-\infty}^{-\pi/2} 0 dt + \frac{1}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos t dt + \int_{\pi/2}^x 0 dt = \frac{1}{2} \sin x \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = 1.$$

Итак,

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } -\infty < x < -\pi/2, \\ 0,5(\sin x + 1) & \text{при } -\pi/2 \leq x \leq \pi/2, \\ 1 & \text{при } \pi/2 < x < \infty. \end{cases}$$

Пример 3.17

Найти плотность вероятности $f(x)$ случайной величины X , характеристическая функция которой имеет вид $q(t) = 1/(1+t^2)$.

Решение

Пользуясь определением характеристической функции, найдем

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} q(t) e^{-itx} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (1+t^2)^{-1} \exp(-itx) dt.$$

Имеем $\exp(-itx) = \cos(tx) - i \sin(tx)$. Поэтому

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(tx) - i \sin(tx)}{1+t^2} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(tx)}{1+t^2} dt,$$

поскольку мнимая часть выражения тождественно равна нулю.

После интегрирования получаем

$$f(x) = \frac{1}{2} \exp(-|x|).$$

Пример 3.18

Случайная величина X имеет равномерную плотность вероятности в интервале от $-\beta/2$ до $\beta/2$.

Требуется определить характеристическую функцию $q(t)$ случайной величины X .

Решение

По условию нормировки

$$\int_{-\beta/2}^{\beta/2} f(x) dx = 1.$$

Следовательно, $f(x) = 1/\beta$. Тогда

$$q(t) = \frac{1}{\beta} \int_{-\beta/2}^{\beta/2} e^{itx} dx = \frac{\sin(\beta t/2)}{(\beta t/2)}.$$

Пример 3.19

В теории надежности устройств в качестве закона распределения времени безотказной работы применяется закон *Вейбулла* с функцией распределения

$$F_T(t) = 1 - \exp(-\alpha t^n), \quad t \geq 0,$$

где α – некоторая константа, n – натуральное число.

Найти: плотность $f_T(t)$ и математическое ожидание случайной величины T .

Решение

Имеем

$$f_T(t) = dF_T(t)/dt = n \alpha t^{n-1} \exp(-\alpha t^n),$$

поэтому

$$M[T] = \int_0^{\infty} t f_T(t) dt = \int_0^{\infty} t n \alpha t^{n-1} \exp(-\alpha t^n) dt.$$

Используем замену переменной интегрирования $t = \alpha^{-1/n} y^{1/n}$, тогда

$$M[T] = \alpha^{-1/n} \int_0^{\infty} y^{1/n} \exp(-y) dy = \Gamma(1 + 1/n) \alpha^{-1/n},$$

где $\Gamma(1 + 1/n)$ – гамма-функция.

Пример 3.20 (Теорема о повторении опытов)

Пусть в неизменных условиях производится n независимых опытов, в каждом из которых регистрируется некоторое событие A . Пусть также известно, что вероятность появления события A в каждом из опытов равна $\Pr(A) = p$, соответственно вероятность неоявления события A , т.е. события $\bar{A}$, составляет $\Pr(\bar{A}) = 1 - \Pr(A) = 1 - p \equiv q$.

Рассмотрим составное событие $\{B: \text{из } n \text{ независимых опытов событие } A \text{ появится ровно } m \text{ раз}\}$.

Решение

Требуется найти вероятность $P_{m,n} = \Pr(B)$.

Для вычисления искомой вероятности $P_{m,n}$ рассмотрим подробнее событие B . Это событие является, очевидно, суммой произведений n событий, каждое из которых является или A или $\bar{A}$. В реализации последовательности n событий на k -м месте может оказаться A или $\bar{A}$, что удобно пометать индексом (A_k или $\bar{A}_k$).

Такого рода реализации отличаются друг от друга лишь порядком следования указанных событий. При этом должно оказаться, что событий A обнаружилось ровно m штук, а событий $\bar{A}$ – соответственно $n - m$ штук.

Итак, составное событие B имеет вид

$$B = A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_m \cdot \bar{A}_{m+1} \cdot \dots \cdot \bar{A}_n + \dots + \bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot \dots \cdot \bar{A}_{n-m} \cdot A_{n-m+1} \cdot \dots \cdot A_n. \quad (1)$$

Обозначим любое из слагаемых в (1) через B_l . В силу несовместности событий $\{B_l\}$ имеем

$$P_{m,n} = \Pr(B) = \Pr\left(\sum_{l=1}^L B_l\right) = \sum_{l=1}^L \Pr(B_l), \quad (2)$$

где L — число слагаемых в (1), т.е. общее количество комбинаций C_n^m , какими из n опытов можно выбрать m , в которых имело место событие A . Таким образом, здесь C_n^m — число сочетаний из n по m . Вероятность любой из таких комбинаций составляет

$$\Pr(B_l) = \prod_{k=1}^m \Pr(A_k) \prod_{l=m+1}^n \Pr(\bar{A}_l), \quad (3)$$

что составляет

$$\Pr(B_l) = (\Pr(A))^m (\Pr(\bar{A}))^{n-m} = p^m q^{n-m}. \quad (4)$$

Из (2) и (4) получаем для вероятности искомого составного события

$$P_{m,n} = \Pr(B) = C_n^m p^m q^{n-m}, \quad (5)$$

т.е. формула Бернулли.

Закон вида (5) называют *биномиальным распределением*. Он определяется двумя параметрами: числом n независимых опытов и заданной вероятностью p появления события A .

Пример 3.21 (Гипергеометрическое распределение)

Случайная величина, подчиняющаяся гипергеометрическому распределению, возникает в задачах двух типов, которые отличаются заданием исходных данных. Эти типы продемонстрируем на примерах из двух вариантов.

Вариант 1

Имеется урна, в которой N белых и M черных шаров. Из урны извлекается n шаров. Случайная величина X – число белых шаров m среди вынутых. Здесь $m = 0, 1, 2, \dots, n$, при этом, естественно, $m \leq N$.

Вероятность случайного события $\{A_m : X = m\}$ составляет

$$\Pr(A_m) = P_m = \frac{C_N^m C_M^{n-m}}{C_{N+M}^n}, \quad m = 0, 1, 2, \dots, n. \quad (1)$$

Числовые характеристики случайной величины X :

$$M[X] = \frac{nN}{N+M}, \quad (2a)$$

$$D[X] = \frac{nNM}{(N+M)^2} - n(n-1) \left[\frac{N(N-1)}{(N+M)(N+M-1)} - \left(\frac{N}{N+M} \right)^2 \right]. \quad (2b)$$

Вариант 2

Рассмотрим известную игру "Спортлото".

Некто купил карточку "Спортлото 6 из 36" и отметил в ней 6 из имеющихся 36 номеров.

Требуется рассчитать вероятности $P_m = \Pr(A_m)$ случайного события $\{A_m : \text{верно угаданы } m \text{ из } 6\}$.

Эта задача формулируется в терминах схемы случаев следующим образом. Имеется урна, в которой N белых и черных шаров, из них M черных шаров. Из урны извлекается n шаров. Случайная величина X – число белых шаров m среди вынутых. Здесь $m = 0, 1, 2, \dots, n$, при этом, естественно, $m \leq N$.

Вероятность случайного события $\{A_m : X = m\}$ составляет

$$\Pr(A_m) = P_m = \frac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}, \quad m = 0, 1, 2, \dots, n. \quad (3)$$

Числовые характеристики случайной величины X :

$$M[X] = \frac{nM}{N}, \quad D[X] = \frac{nM}{N} \left(1 - \frac{M}{N} \right) \frac{N-n}{N-1}. \quad (4)$$

Для случая первой лотереи "Спортлото 6 из 36" имеем $N = 36$, $M = 6$, $n = 6$ и $m = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

Таблица 3.1 — Вероятности при игре в "Спортлото"

"Спортлото 6 из 36"		"Спортлото 7 из 49"	
m	P_m	m	P_m
0	0,3048451785	0	0,3140645470
1	0,4389770571	1	0,4274767445
2	0,2110466621	2	0,2079616595
3	0,0416882295	3	0,04560562708
4	0,0033499470	4	0,004677500214
5	0,0000924123	5	0,0002104875096
6	0,0000005134	6	$0,3422561132 \cdot 10^{-5}$
		7	$0,1164136439 \cdot 10^{-7}$

Приведем рассчитанные согласно (3) значения вероятностей:

$$\begin{aligned}
 P_0 &= \frac{28275}{92752}; & P_1 &= \frac{10179}{23188}; & P_2 &= \frac{19575}{92752}; & P_3 &= \frac{725}{17391}; \\
 P_4 &= \frac{2175}{649264}; & P_5 &= \frac{15}{162316}; & P_6 &= \frac{1}{1947792},
 \end{aligned} \tag{5}$$

математическое ожидание составляет

$$M[X] = \sum_{m=0}^6 m P_m = 1. \tag{6}$$

Для случая второй лотереи "Спортлото 7 из 49" имеем $N = 49$, $M = 7$, $n = 7$ и $m = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$. Случайное событие A_m здесь следующее: $\{A_m : \text{верно угаданы } m \text{ из } 7\}$. Рассчитаем вероятности $P_m = \Pr(A_m)$ такого события.

Приведем рассчитанные согласно (3) значения вероятностей:

$$\begin{aligned}
 P_0 &= \frac{1124097}{3579191}; & P_1 &= \frac{2622893}{6135756}; & P_2 &= \frac{212667}{1022626}; & P_3 &= \frac{93275}{2045252}; \\
 P_4 &= \frac{7175}{1533939}; & P_5 &= \frac{861}{4090504}; & P_6 &= \frac{7}{2045252}; & P_7 &= \frac{1}{85900584},
 \end{aligned} \tag{7}$$

математическое ожидание составляет

$$M[X] = \sum_{m=0}^7 m P_m = 1, \tag{8}$$

т.е. в среднем, как и выше, можно угадать *одно* число.

В табл. 3.1 приведены соответствующие вероятности для обеих лотерей. Как можно видеть, с увеличением m вероятности выиграть быстро уменьшаются.

Пример 3.22 (Закон Пуассона)

При выводе формулы распределения Пуассона опираются на формулу распределения Бернулли. Распространенным примером случайной величины, подчиняющейся распределению Пуассона, является поток случайных событий, которые регистрируются в порядке их поступления. Это может быть, например, число телефонных вызовов за выделенный временной интервал, количество посетителей в учреждении за рабочий день, число изюминок в булочке с изюмом и т.д.

Будем говорить о такого рода событиях как о точках, расположенных на оси $0x$. Примем, что поток событий на оси $0x$ подчиняется следующим предположениям:

1. Точки расположены на оси $0x$ с некоторой постоянной плотностью λ , т.е. на единицу длины приходится в среднем одинаковое число точек.
2. Точки располагаются на оси $0x$ независимо друг от друга, т.е. события, попадающие в неперекрывающиеся отрезки оси, независимы.

Указанных двух предположений достаточно для того, чтобы найти распределение вероятностей P_m ($m = 0, 1, 2, \dots$) случайного события $\{G: \text{на заданный отрезок длины } L \text{ попадет ровно } m \text{ точек}\}$.

Для решения задачи разделим отрезок на n одинаковых малых участков (интервалов) и рассмотрим на оси $0x$ выделенный интервал длины $\Delta x = L/n$. Среднее число точек, приходящееся на этот интервал, равно

$$M[X] = \lambda \Delta x = \lambda L/n. \quad (1)$$

Рассмотрим события:

- $\{A: \text{отрезок длины } \Delta x - \text{занятый}\},$
- $\{B: \text{отрезок длины } \Delta x - \text{пустой}\}.$

Для этих событий имеем

$$\Pr(A) = \lambda \cdot \Delta x = \lambda L/n; \quad (2)$$

$$\Pr(B) = \Pr(\bar{A}) = 1 - \Pr(A) = 1 - \lambda \cdot \Delta x = 1 - \lambda L/n. \quad (3)$$

Обозначим вероятности $\Pr(A) = p$ и $\Pr(B) = 1 - p = q$. Всего на участке L отрезков имеется n , а попадания в неперекрывающиеся отрезки точек независимы. Найдём вероятность P_m того, что среди n отрезков будет m занятых. По теореме Бернулли

$$P_{m,n} = C_n^m p^m q^{n-m}. \quad (4)$$

При неограниченном увеличении количества интервалов ($n \rightarrow \infty$) вероятность $P_{m,n}$ стремится к вероятности попадания m точек на отрезок длиной L

$$P_m = \lim_{n \rightarrow \infty} P_{m,n} = \lim_{n \rightarrow \infty} C_n^m p^m q^{n-m}. \quad (5)$$

Запишем явно выражение (5):

$$P_m = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n-1) \dots (n-m+1)}{m!} \left(\frac{\lambda L}{n}\right)^m \left(1 - \frac{\lambda L}{n}\right)^{n-m}. \quad (6)$$

Для вычисления предела скомпонуем множители:

$$\begin{aligned} P_m &= \\ &= \frac{(\lambda L)^m}{m!} \times \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n-1) \dots (n-m+1)}{n^m} \times \left(1 - \frac{\lambda L}{n}\right)^{-m} \times \left(1 - \frac{\lambda L}{n}\right)^n. \end{aligned} \quad (7)$$

Под знаком предела в (7) три сомножителя. Из них при фиксированном m и $n \rightarrow \infty$ первые два в пределе равны 1. Последний предел равен $\exp(-\lambda L)$. Итак, получаем

$$P_m = \Pr(X = m) = \frac{(\lambda L)^m}{m!} \exp(-\lambda L). \quad (8)$$

Таблица 3.2 — Распределение Бернулли и распределение Пуассона

m	Биномиальные вероятности P_m					Вероятность P_m закона Пуассона
	$p = 0,50$ $n = 8$	$p = 0,25$ $n = 16$	$p = 0,10$ $n = 40$	$p = 0,04$ $n = 100$	$p = 0,004$ $n = 1000$	
0	0,0039	0,0100	0,0148	0,0169	0,0182	0,0183
1	0,0313	0,0535	0,0657	0,0703	0,0730	0,0733
2	0,1094	0,1336	0,1423	0,1450	0,1464	0,1465
3	0,2188	0,2079	0,2003	0,1973	0,1956	0,1954
4	0,2734	0,2252	0,2059	0,1994	0,1958	0,1954
5	0,2188	0,1802	0,1647	0,1595	0,1566	0,1563
6	0,1094	0,1101	0,1068	0,1052	0,1043	0,1042
7	0,0313	0,0524	0,0576	0,0589	0,0595	0,0595
8	0,0039	0,0197	0,0264	0,0285	0,0297	0,0298
9		0,0058	0,0104	0,0121	0,0131	0,0132
10		0,0014	0,0036	0,0046	0,0052	0,0053
11		0,0002	0,0011	0,0016	0,0019	0,0019
12		0,0000	0,0003	0,0005	0,0006	0,0006
13		0,0000	0,0001	0,0001	0,0002	0,0002
14		0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0001
15		0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
16		0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
17			0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
18			0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
19			0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

Если обозначить среднее число точек на интервале L через $a = \lambda L$, то запишем окончательно

$$P_m = \frac{a^m}{m!} \exp(-a), \quad (9)$$

т.е. закон Пуассона.

В табл. 3.2 приведен пример расчета вероятностей $P_m = \Pr(X = m)$ в распределении Бернулли и в распределении Пуассона. Параметры расчета подобраны таким образом, чтобы средние в обоих законах совпадали, т.е. $M[X] = np = a = 4$. Из этой таблицы можно видеть асимптотическое свойство закона Пуассона относительно распределения Бернулли при больших значениях n .

Пример 3.23 (Закон арксинуса)

Функция распределения случайной величины X имеет вид :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < -a, \\ A + B \arcsin(x/a) & \text{при } -a \leq x \leq a, \\ 1 & \text{при } x > a. \end{cases}$$

Найти: а) при каких значениях параметров A и B функция распределения $F(x)$ является непрерывной в точках $x = a$ и $x = -a$; б) вероятность того, что случайная величина X окажется в пределах промежутка $(-a/2; a/2)$; в) плотность распределения вероятностей $f(x)$ случайной величины X .

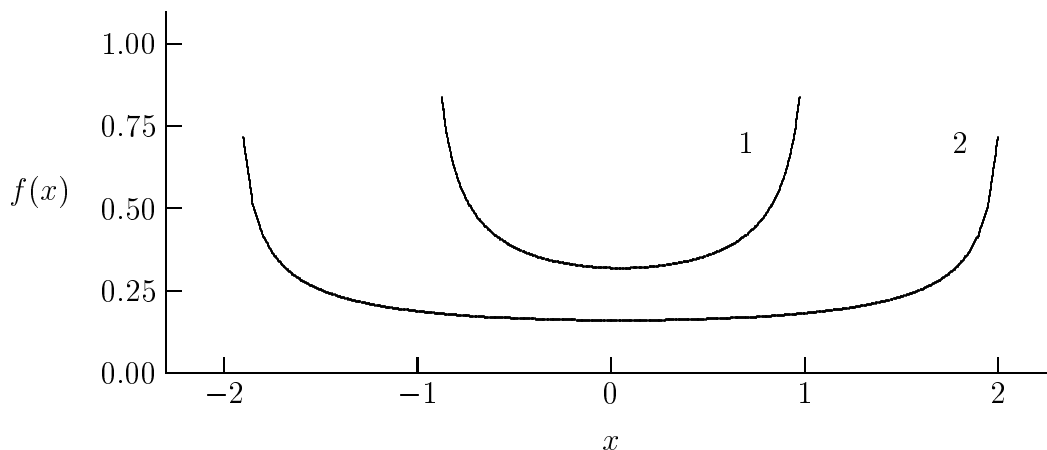


Рисунок 3.18 — Закон арксинуса; $a = 1; 2$

Решение

а) Для того, чтобы функция $F(x)$ была непрерывной, необходимо, чтобы $F(-a) = 0$ и $F(a) = 1$. Из этих условий получаются два уравнения для нахождения неизвестных A и B :

$$A + B \arcsin(-a/a) = A - B\pi/2 = 0;$$

$$A + B \arcsin(a/a) = A + B\pi/2 = 1.$$

Отсюда $A = 1/2$ и $B = \pi^{-1}$.

Итак, функция распределения случайной величины X

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < -a, \\ 1/2 + \pi^{-1} \arcsin(x/a) & \text{при } -a \leq x \leq a, \\ 1 & \text{при } x > a. \end{cases}$$

б) Вероятность $P = \Pr\{-a/2 < X < a/2\}$ события, что рассматриваемая случайная величина X окажется в пределах промежутка $(-a/2; a/2)$, равна

$$P = F(a/2) - F(-a/2) = 1/3.$$

в) Плотность распределения вероятностей $f(x)$ значений случайной величины X равна:

1) для всех x , принадлежащих промежутку $(-a, a)$,

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx} = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arcsin(x/a) \right) = \pi^{-1} (a^2 - x^2)^{-1/2};$$

2) нулю – для всех остальных значений x .

Найденная плотность вероятности

$$f(x) = \frac{1}{\pi (a^2 - x^2)^{1/2}} \quad \text{при } |x| \leq a$$

называется *законом арксинуса* (рис. 3.18).

Пример 3.24 (Экспоненциальное распределение)

Рассмотрим однородный пуассоновский поток точек с постоянной плотностью λ . На заданном интервале L число точек m является случайной величиной X .

Вероятность P_m случайного события $\{A_m : X = m\}$ составляет

$$P_m = \Pr(A_m) = \frac{(\lambda L)^m}{m!} \exp(-\lambda L). \quad (1)$$

Выберем теперь некоторую точку (например, первую) и рассмотрим случайное событие $\{B: \text{после первой точки на интервале } l \text{ других точек нет}\}$. Для этого события из (1) получаем

$$\Pr(B) = \exp(-\lambda l). \quad (2)$$

Теперь рассмотрим противоположное событие $\bar{B}$.

Сформулируем его так $\{\bar{B}: \text{после первой точки на интервале } l \text{ есть хотя бы одна точка}\}$. Для этого события справедливо

$$\Pr(\bar{B}) = 1 - \exp(-\lambda l). \quad (3)$$

Это выражение можно интерпретировать как вероятность случайного события $\{C: \text{случайный интервал } T \text{ между первой точкой и ближайшей к ней точкой не превышает заданного значения } t\}$, т.е.

$$F_T(t) = \Pr(T \leq t) = 1 - \exp(-\lambda t). \quad (4)$$

Дифференцируя (4), получаем

$$f_T(t) = \lambda \exp(-\lambda t), \quad (5)$$

т.е. плотность распределения вероятностей экспоненциального закона.

3.19. Задачи для решения

Задача 3.1

Монета подбрасывается 2 раза.

Написать биномиальный закон распределения дискретной случайной величины X – числа появлений ”герба” при двух подбрасываниях монеты.

Ответ :

X :	0	1	2
	1/4	1/2	1/4

Задача 3.2

Монета подбрасывается n раз. Рассматривается случайная величина X – число выпавших гербов.

Построить ряд распределения этой случайной величины и найти её характеристики: m_X , D_X , σ_X .

Ответ :

X :	0	1	...	m	...	n
	$(1/2)^n$	$C_n^1(1/2)^n$	...	$C_n^m(1/2)^n$	...	$C_n^n(1/2)^n$

$$m_x = n/2; \quad D_x = n/4; \quad \sigma_x = \sqrt{n}/2.$$

Задача 3.3

Непрерывная случайная величина X в интервале $(0, \infty)$ задана плотностью распределения вероятностей

$$f_x(x) = \alpha \exp(-\alpha x), \quad \alpha > 0;$$

вне этого интервала $f_x(x) = 0$.

Найти вероятность того, что случайная величина X примет значение, принадлежащее интервалу $[1; 2]$.

Ответ : $\Pr\{1 < X < 2\} = \exp(-\alpha) - \exp(-2\alpha)$.

Задача 3.4

Учебник издан тиражом 100000 экземпляров. Вероятность того, что учебник сброшюрован неправильно, равна 0,0001.

Найти вероятность того, что тираж содержит ровно 5 бракованных книг.

Ответ : искомая вероятность

$$P_{100000}(5) = \frac{1}{5!} 10^5 e^{-10} = 0,0378.$$

Задача 3.5

Бросают N игральных костей.

Найти математическое ожидание суммы числа очков, которые выпадут на всех гранях.

Ответ : $M[X] = 7N/2$.

Задача 3.6

Непрерывная случайная величина X определена в интервале $(0, \pi/3)$ и имеет плотность распределения вероятностей $f_x(x) = (3/2) \sin(3x)$.

Найти вероятность того, что X примет значение, принадлежащее интервалу $(\pi/6, \pi/4)$.

Ответ : $\Pr\{\pi/6 < X < \pi/4\} = 2^{-3/2}$.

Задача 3.7

Непрерывная случайная величина задана плотностью распределения

$$f_x(x) = \pi^{-1} c / \sqrt{c^2 - x^2}$$

в интервале $(-c, c)$; вне этого интервала $f_x(x) = 0$.

Найти математическое ожидание случайной величины X .

Ответ : $M[X] = 0$.

Задача 3.8

Случайная величина X в интервале $[-3, 3]$ задана плотностью распределения вероятностей $f(x) = \pi^{-1}(9 - x^2)^{-1/2}$.

Требуется: а) найти дисперсию $D[X]$; б) определить, что вероятнее: в результате испытания окажется $X < 1$ или $X > 1$?

Ответ: а) $D[X] = 9$;

б) $\Pr\{-3 < X < 1\} = 0,5 + \pi^{-1} \arcsin(1/3)$;

$\Pr\{1 < X < 3\} = 0,5 - \pi^{-1} \arcsin(1/3)$.

Задача 3.9

Известно, что случайная величина X подчинена гамма-распределению

$$f_x(x) = \frac{x^\alpha}{\beta^{\alpha+1}\Gamma(\alpha+1)} \exp(-x/\beta), \quad x > 0, \quad \alpha > -1, \quad \beta > 0.$$

Доказать, что характеристическая функция величины X имеет следующий вид

$$q_x(\lambda) = (1 - i\beta\lambda)^{-(\alpha+1)},$$

а начальные моменты k -го порядка вычисляются по формуле

$$\alpha_k = \beta^k \Gamma(k + \alpha + 1) / \Gamma(\alpha + 1).$$

Задача 3.10

Случайная величина X задана плотностью распределения вероятностей:

$$f(x) = \frac{1}{n!} x^n \exp(-x), \quad x \geq 0.$$

Найти: а) математическое ожидание $M[X]$; б) дисперсию $D[X]$.

Ответ: а) $M[X] = n + 1$; б) $D[X] = n + 1$.

Задача 3.11

Случайная величина X задана на всей числовой оси $0x$ интегральной функцией

$$F_x(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg}(x/2).$$

Требуется найти возможное значение b , удовлетворяющее следующему условию: с вероятностью $1/4$ случайная величина X в результате испытания примет значение, большее, чем b .

Ответ: $b = 2$.

Задача 3.12

Длительность X безотказной работы некоторого устройства есть величина случайная и имеет следующую интегральную функцию распределения вероятностей

$$F_x(x) = 1 - \exp(-x/T), \quad x \geq 0, \quad T > 0.$$

Найти вероятность безотказной работы устройства за время $X \geq T$.

Ответ: $\Pr\{X \geq T\} = 1 - \Pr\{X < T\} = 1/e$.

Задача 3.13

Плотность распределения вероятностей непрерывной случайной величины X задана на всей оси $0x$ равенством $f_X(x) = A/\operatorname{ch}(x)$.

Найти постоянный параметр A .

Ответ: $A = \pi^{-1}$.

Задача 3.14

Случайная величина X характеризуется плотностью распределения вероятностей $f(x) = x + 0,5$ в интервале $[0, 1]$; вне этого интервала $f(x) = 0$.

Найти математическое ожидание $Y = X^3$.

Ответ: $M[Y] = M[X^3] = 5/12$.

Задача 3.15

Найти вероятность того, что событие A наступит ровно 80 раз в 400 испытаниях, если вероятность появления этого события в каждом испытании равна 0,2.

Ответ: искомая вероятность $P_{80,400}$ равна 0,04986.

Задача 3.16

Случайная величина распределена по закону Коши:

$$f_X(x) = B/(1+x^2), \quad -\infty < x < \infty.$$

Найти: а) значение коэффициента B ; б) функцию распределения $F_X(x)$; в) вероятность попадания случайной величины на участок $[-1, 1]$.

Ответ:

а) $B = 1/\pi$;

б) $F_X(x) = \pi^{-1} \operatorname{arctg}(x) + \frac{1}{2}$;

в) $\Pr\{-1 < X < 1\} = 0,5$.

Задача 3.17

Станок-автомат штампует детали. Вероятность того, что изготовленная деталь окажется бракованной, равна 0,01.

Найти вероятность того, что среди 200 деталей окажется ровно 4 бракованных.

Ответ: $P_{200}(4) = 0,09$.

Задача 3.18

Определить характеристическую функцию $q_X(\lambda)$ случайной величины X , если известно, что она принимает: а) одно-единственное значение, равное C ; б) с одинаковой вероятностью два значения, равные $\pm C$.

Ответ: а) $q_X(\lambda) = \exp(i\lambda C)$; б) $q_X(\lambda) = \cos(\lambda C)$.

3.20. Задания для проверки

1. Сформулируйте основные законы распределения случайных величин.
2. Поясните суть ряда распределения.
3. Поясните суть функции распределения.
4. Раскройте смысл вероятности попадания случайной величины на заданный участок.
5. Раскройте смысл плотности распределения случайной величины.
6. Перечислите основные числовые характеристики распределения случайных величин.
7. Раскройте смысл моментов распределения вероятностей.
8. Дайте интерпретацию дисперсии, моды, медианы, среднеквадратичного отклонения.
9. Раскройте смысл характеристической функции распределения вероятностей случайной величины.
10. Перечислите основные свойства закона равномерной плотности на заданном интервале.
11. Перечислите основные свойства закона Пуассона.
12. Перечислите основные свойства экспоненциального распределения.
13. Постройте примеры применения известных законов распределения на практике.
14. В каком отношении связаны закон Пуассона и экспоненциальное распределение?

4. Нормальное распределение

4.1. Свойства нормального распределения

Нормальное распределение – одно из важнейших распределений вероятностей. Случайные величины, имеющие нормальное распределение, рассматриваются и используются в математической статистике, теории вероятностей, имитационном моделировании, во многочисленных задачах и приложениях науки и техники.

Случайная величина X имеет *нормальное распределение* [или распределена по нормальному закону (*закону Гаусса*)], если её плотность следующая

$$f_x(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right), \quad -\infty < x < \infty. \quad (4.1)$$

Семейство нормальных распределений зависит от двух параметров: m (рис. 4.1) и $\sigma > 0$ (рис. 4.2).

Математическое ожидание нормальной случайной величины

$$M[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx \equiv m \quad (4.2)$$

(часто еще употребляют обозначение m_x , а также $\bar{x}$).

Дисперсия случайной нормальной величины X

$$D[X] = M[(X-m)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x-m)^2 f(x) dx \equiv \sigma^2. \quad (4.3)$$

Среднеквадратичное отклонение σ часто обозначают σ_x .

Математическое ожидание случайной величины, имеющей нормальную плотность распределения (4.1), равно m , её среднее квадратическое отклонение σ , а дисперсия равна σ^2 .

Для нормального распределения случайной величины X , имеющей математическое ожидание m и дисперсию σ^2 , принято обозначение $n_x(m; \sigma)$ или $\mathcal{N}_x(m; \sigma)$.

Кривая $y = f(x)$ симметрична относительно ординаты, проходящей через точку $x = m$, и имеет в этой точке единственный максимум, равный $1/\sqrt{2\pi} = 0,3989$ (при $\sigma = 1$).

С уменьшением σ кривая нормального распределения становится все более островершинной. Изменение m при постоянном σ не меняет форму кривой, а вызывает лишь её смещение по оси абсцисс.

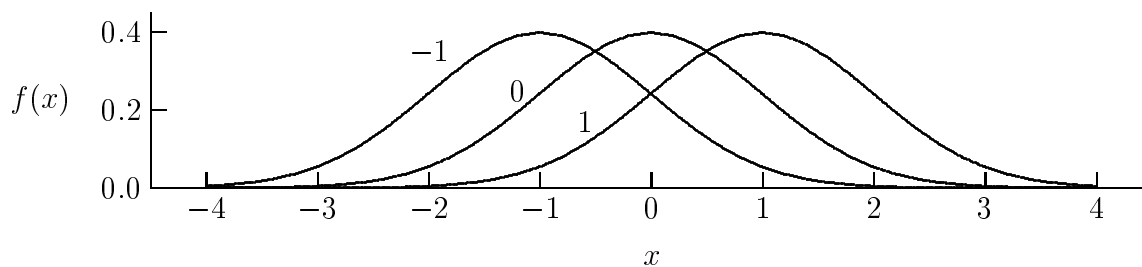


Рисунок 4.1 — Плотность распределения вероятностей $f(x)$ нормальной случайной величины; $m = -1; 0; 1$; $\sigma = 1,0$

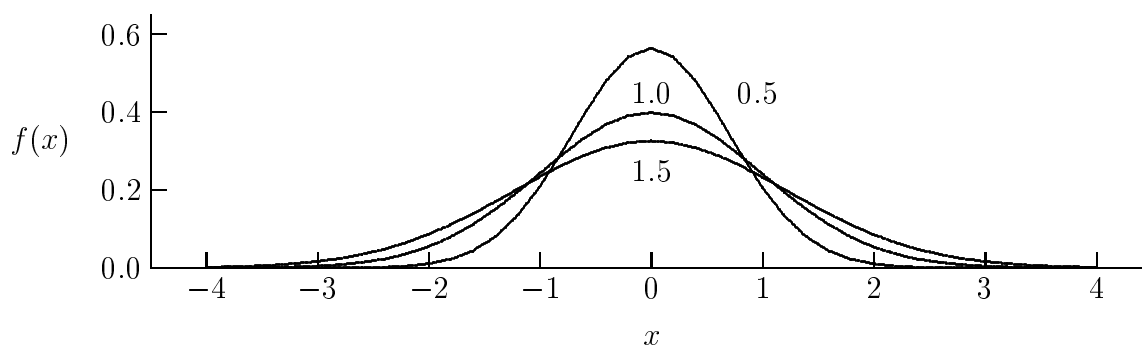


Рисунок 4.2 — Плотность распределения вероятностей $f(x)$ нормальной случайной величины; $m = 0$; $\sigma = 0,5; 1,0; 1,5$

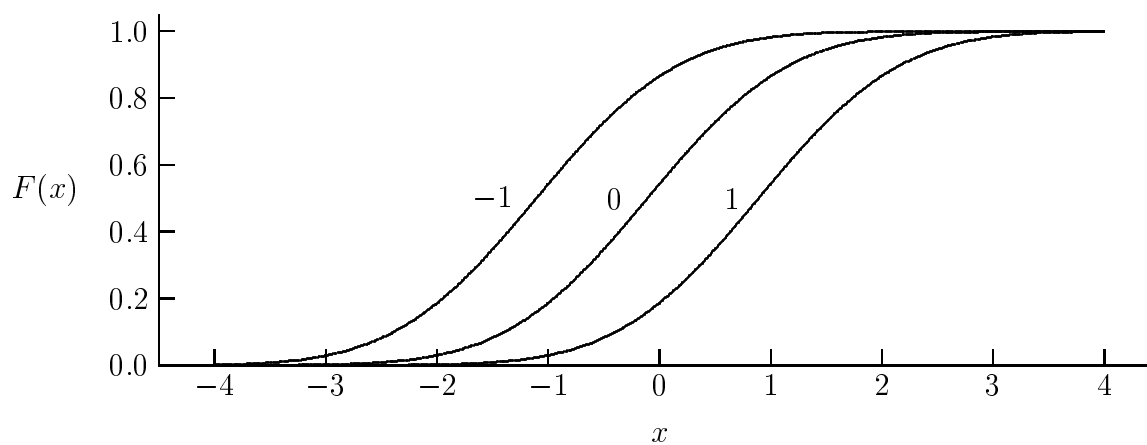


Рисунок 4.3 — Интегральная вероятность $F(x)$ нормальной случайной величины; $m = -1; 0; 1$; $\sigma = 1,0$

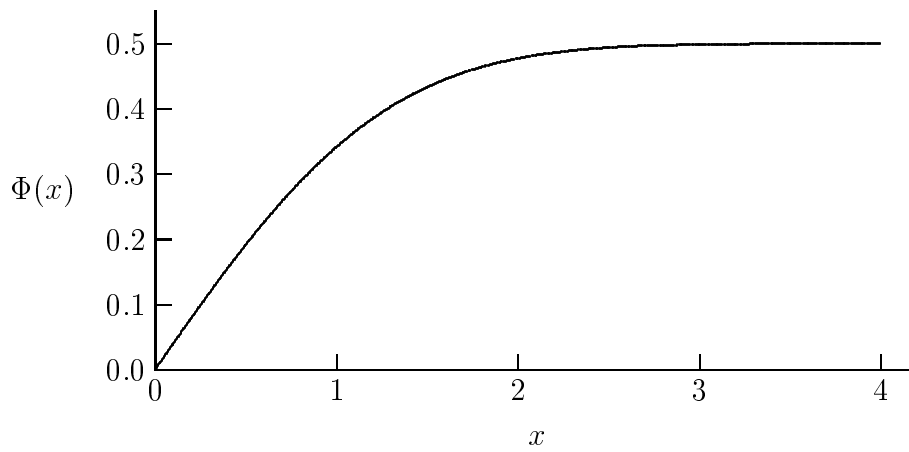


Рисунок 4.4 — Функция Лапласа $\Phi(x)$

Площадь, заключенная между кривой $y = f(x)$ и осью абсцисс $y = 0$, всегда равна единице.

Интегральная вероятность (рис. 4.3)

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx. \quad (4.4)$$

Характеристическая функция нормального распределения ($i = \sqrt{-1}$)

$$q_X(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(ix\lambda) f_X(x) dx \quad (4.5)$$

следующая

$$q_X(\lambda) = \exp\left(im\lambda - \frac{1}{2}\sigma^2\lambda^2\right). \quad (4.6)$$

4.2. Функция Лапласа

Вероятность попадания случайной величины X , имеющей нормальное распределение с параметрами m и σ , на участок от α до β выражается формулой

$$\Pr\{\alpha < X < \beta\} = \Phi\left(\frac{\beta - m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - m}{\sigma}\right), \quad (4.7)$$

где $\Phi(x)$ — *функция Лапласа (интеграл вероятностей)*:

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x \exp(-t^2/2) dt. \quad (4.8)$$

Функция Лапласа обладает следующими свойствами (рис. 4.4):

1) $\Phi(0) = 0$;

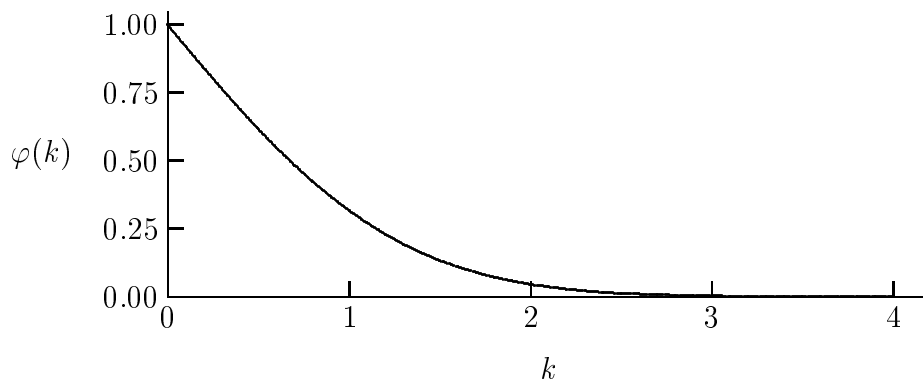


Рисунок 4.5 — Функция $\varphi(k) = 1 - \Phi(k\sigma) + \Phi(-k\sigma)$ в правиле трех сигм; $\sigma = 1$

2) $\Phi(-x) = -\Phi(x)$ (нечетная функция);

3) $\Phi(\infty) = 0,5$.

Если участок (α, β) симметричен относительно точки m , то вероятность попадания в него

$$\Pr\{|X - m| < (\beta - \alpha)/2\} = 2\Phi\left(\frac{\beta - \alpha}{2\sigma}\right). \quad (4.9)$$

Для функции $\Phi(x)$, а также нескольких её производных составлены обширные таблицы (табл. 4.1 и табл. 4.2 в конце раздела).

Вероятность выполнения неравенства $\{|X - m| \geq k\sigma\}$ для заданной величины k составляет (рис. 4.5)

$$\Pr\{|X - m| \geq k\sigma\} = 1 - \Phi(k\sigma) + \Phi(-k\sigma) \equiv \varphi(k). \quad (4.10)$$

Таблица 4.1 — К вероятности $\varphi(k) = \Pr\{|X - m| \geq k\sigma\}$

k	$\varphi(k)$	$1 - \varphi(k)$
1	0,31731	0,68269
2	0,04550	0,95450
3	0,00270	0,99730
4	0,00006	0,99994

Эта величина для целых k приведена в табл. 4.1, в которой также указаны значения дополнительной вероятности

$$\Pr\{|X - m| \leq k\sigma\} = 1 - \varphi(k). \quad (4.11)$$

На практике, при рассмотрении случайной величины, распределенной по нормальному закону (4.1), пренебрегают возможностью её отклонения от математического ожидания $M[X] = m$ далее, чем на 3σ , поскольку (при $k = 3$)

$$\Pr\{|X - m| \geq 3\sigma\} = 0,00270. \quad (4.12)$$

Это так называемое *правило "трех сигм"*.

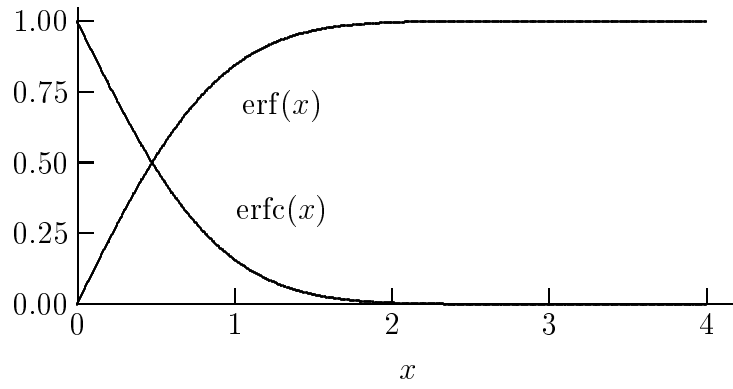


Рисунок 4.6 — Функция ошибок $\text{erf}(x)$ и дополнительная функция ошибок $\text{erfc}(x)$

Нормальное распределение возникает в тех практических ситуациях, когда величина X образуется в результате суммирования большого числа независимых (или слабо зависимых) случайных слагаемых, сравнимых по своему влиянию.

В практике вероятностных расчетов помимо функции Лапласа (4.8) часто используется еще одна специальная функция (рис. 4.6)

$$\text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-t^2) dt, \quad (4.13)$$

которую называют *функцией ошибок*.

Из (4.8) и (4.13) вытекает, что

$$\Phi(x) = \frac{1}{2} \text{erf}(x/\sqrt{2}), \quad \text{erf}(x) = 2\Phi(\sqrt{2}x). \quad (4.14)$$

С $\text{erf}(x)$ связана функция $\text{erfc}(x)$, которую называют *дополнительной функцией ошибок*,

$$\text{erfc}(x) = 1 - \text{erf}(x). \quad (4.15)$$

В табл. 4.2 приведены значения гауссовской функции $\exp(-x^2)$, функции ошибок $\text{erf}(x)$ и дополнительной функции ошибок $\text{erfc}(x)$.

Функция $\text{erf}(x)$ имеет следующие свойства:

$$\text{erf}(-x) = -\text{erf}(x), \quad (4.16a)$$

$$\text{erf}(0) = 0, \quad \text{erf}(\infty) = 1. \quad (4.16b)$$

Для $x > 0$ эта функция подчиняется неравенству

$$\frac{2x}{\sqrt{\pi}(2x^2 + 1)} \exp(-x^2) < \text{erfc}(x) < \frac{1}{\sqrt{\pi}x} \exp(-x^2), \quad (4.17)$$

которое удобно использовать для приближенного нахождения её значений. Из (4.17) следует, что при $x \gg 1$ имеет место следующая асимптотика для функции ошибок

$$\text{erf}(x) \cong \frac{1}{\sqrt{\pi}x} \exp(-x^2). \quad (4.18)$$

Это дает при $x \gg 1$ для функции Лапласа

$$\Phi(x) \cong \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2\pi} x} \exp(-x^2/2). \quad (4.19)$$

В табл. 4.3 приведены значения функции Лапласа $\Phi(x)$ (4.8) и связанных с ней функций.

Нормальный закон широко распространен в случайных явлениях природы. Подходящие условия для этого возникают в тех случаях, когда складывается много независимых (или слабо зависимых) случайных величин $X_1, X_2, \dots, X_n$ (причем они сравнимы по порядку своего влияния на рассеивание суммы)

$$X = \sum_{i=1}^n X_i. \quad (4.20)$$

Тогда, каковы бы ни были законы распределения отдельных величин $X_1, X_2, \dots, X_n$, закон распределения их суммы $X = \sum_{i=1}^n X_i$ будет тем ближе к нормальному, чем больше число слагаемых.

4.3. Примеры

Пример 4.1

От математического ожидания m нормальной величины последовательно откладываются отрезки длиной σ .

Определить вероятности попадания случайной величины X на эти отрезки.

Решение

По формуле (4.7) находим, пользуясь табл. 4.3 :

$$\Pr\{m < X < (m + \sigma)\} = \Phi\left(\frac{\sigma}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{m - m}{\sigma}\right) = \Phi(1) - \Phi(0) = 0,341;$$

$$\Pr\{(m + \sigma) < X < (m + 2\sigma)\} = \Phi\left(\frac{2\sigma}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\sigma}{\sigma}\right) = \Phi(2) - \Phi(1) = 0,136;$$

$$\Pr\{(m + 2\sigma) < X < (m + 3\sigma)\} = \Phi\left(\frac{3\sigma}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{2\sigma}{\sigma}\right) = \Phi(3) - \Phi(2) = 0,021.$$

Пример 4.2

Найти вероятность того, что случайная величина X , подчиненная нормальному закону распределения, окажется заключенной в интервал $(5; 10)$, если $m = 20$ и $\sigma = 5$.

Решение

$$\begin{aligned} P(5 < X < 10) &= \Phi\left(\frac{10 - 20}{5}\right) - \Phi\left(\frac{5 - 20}{5}\right) = \\ &= \Phi(-2) - \Phi(-3) = \Phi(3) - \Phi(2) = 0,4987 - 0,4772 = 0,0215. \end{aligned}$$

Пример 4.3

Случайные ошибки измерения дальности до неподвижной цели подчинены гауссовскому закону с математическим ожиданием $m = 5$ м и средним квадратическим отклонением $\sigma = 10$ м.

Определить вероятность того, что: а) измеренное значение дальности отклонится от истинного не более чем на 15 м; б) при трех независимых измерениях ошибка хотя бы одного измерения не превысит по абсолютной величине 15 м.

Решение

а) Определение вероятности P_1 того, что измеренное значение дальности отклонится от истинного не более чем на 15 м, сводится к вычислению вероятности попадания случайной величины X (ошибки измерения) со средним $m = 5$ м и СКО $\sigma = 10$ м на интервал от -10 м до 20 м.

Используя значения функции $\Phi(x)$, получаем

$$\begin{aligned} P_1 &= P(|X - m| < 15) = P(-10 < X < 20) = \Phi\left(\frac{15 - 5}{10}\right) - \Phi\left(\frac{-15 - 5}{10}\right) = \\ &= \Phi(1) - \Phi(-2) = \Phi(1) + \Phi(2) = 0,3413 + 0,4772 \cong 0,82. \end{aligned}$$

б) Вероятность P_2 того, что при трех независимых измерениях ошибка хотя бы одного измерения не превысит по абсолютной величине 15 м, определится по формуле

$$P_2 = 1 - (1 - P_1)^3 = 1 - (1 - 0,82)^3 \cong 0,994.$$

Пример 4.4 (Моменты нормального закона)

Имеется случайная величина X , распределенная по нормальному закону с параметрами m и σ .

Найти выражение для величины $\alpha_k[X]$ – начального момента k -го порядка.

Решение

Выразим начальные моменты $\alpha_k[X] = M[X^k]$ случайной величины X через центральные моменты $\mu_k[X] = M[(X - m)^k]$:

$$\alpha_k[X] = M[(X - m + m)^k] = \sum_{j=0}^k C_k^j \mu_j[X] m^{k-j}; \quad \mu_0[X] = 1.$$

Для центральных моментов при нечетном $k = 2n + 1$

$$\mu_k[X] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} (x - m)^k \exp\left(-\frac{(x - m)^2}{2\sigma^2}\right) dx = 0.$$

При четном $k = 2n$ имеем

$$\mu_{2n}[X] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} y^{2n} \exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma^2}\right) dy = \sigma^{2n} (2n + 1) !!,$$

где символом $(2n + 1) !!$ обозначено произведение

$$(2n + 1) !! = (2n + 1) \cdot (2n - 1) \cdot \dots \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1.$$

Например:

$$\begin{aligned}\mu_1[X] &= 0; & \alpha_1[X] &= m; \\ \mu_2[X] &= \sigma^2; & \alpha_2[X] &= m^2 + \sigma^2; \\ \mu_3[X] &= 0; & \alpha_3[X] &= m^3 + 3\sigma^2 m; \\ \mu_4[X] &= 3\sigma^4; & \alpha_4[X] &= m^4 + 6\sigma^2 m^2 + 3\sigma^4; \\ \mu_5[X] &= 0; & \alpha_5[X] &= m^5 + 10\sigma^2 m^3 + 75\sigma^4 m; \\ \mu_6[X] &= 15\sigma^6; & \alpha_6[X] &= m^6 + 15\sigma^2 m^4 + 45\sigma^4 m^2 + 15\sigma^6.\end{aligned}$$

Пример 4.5

Плотность вероятности случайных амплитуд X боковой качки корабля имеет вид

$$f(x) = \frac{x}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right), \quad x \geq 0.$$

Определить: а) математическое ожидание $M[X]$; б) дисперсию $D[X]$ и среднее квадратическое отклонение σ ; в) центральные моменты третьего и четвертого порядков μ_3 и μ_4 .

Решение

При решении данной задачи возникает необходимость в вычислении интегралов вида ($n \geq 0$ и целое)

$$J_n = \int_0^\infty t^n \exp(-t^2) dt,$$

которые с помощью подстановки $t^2 = u$ приводятся к известному интегралу Эйлера

$$\Gamma(p) = \int_0^\infty u^{p-1} \exp(-u) du, \quad p > 0,$$

определяющему гамма-функцию, т.е. $J_n = 0,5 \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)$.

На основании свойства гамма-функции $\Gamma(p+1) = p\Gamma(p)$, при p целом имеем $\Gamma(p+1) = p!$, а

$$\Gamma(1/2) = \int_0^\infty u^{-1/2} \exp(-u) du = 2 \int_0^\infty \exp(-t^2) dt = \sqrt{\pi}.$$

Следовательно, при целом k

$$J_{2k} = 0,5 \cdot \Gamma(k+1/2) = \frac{(2k-1)!!}{2^{k+1}} \sqrt{\pi},$$

$$J_{2k+1} = \frac{1}{2} \Gamma(k+1) = \frac{1}{2} k!,$$

где обозначено $(2k-1)!! = (2k-1) \cdot (2k-3) \cdot (2k-5) \cdot \dots \cdot 7 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1$.

Последние две формулы могут быть получены и непосредственно повторным интегрированием по частям исходной формулы для J_n без использования свойств гамма-функции.

а) Математическое ожидание случайной амплитуды боковой качки

$$\alpha_1 = M[X] = \int_0^{\infty} x f(x) dx = \int_0^{\infty} \frac{x^2}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) dx.$$

После замены переменной интегрирования по правилу $t = x/\sqrt{2}\sigma$, получим

$$\alpha_1 = M[X] = \sigma \sqrt{\pi/2}.$$

б) Так как $D[X] = M[X^2] - \alpha_1^2$, то достаточно вычислить второй начальный момент

$$\alpha_2 = M[X^2] = \int_0^{\infty} \frac{x^3}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) dx.$$

После той же замены переменной интегрирования получим $\alpha_2 = 2\sigma^2$, поэтому

$$D[X] = 2\sigma^2 - \frac{\pi\sigma^2}{2} = \sigma^2(2 - \pi/2).$$

Среднее квадратическое отклонение σ_x случайной величины X

$$\sigma_x = \sqrt{D[X]} = \sigma \sqrt{2 - \pi/2}.$$

в) При вычислении центрального момента третьего порядка μ_3 его удобнее выразить через начальный момент

$$\mu_3 = M[(X - \alpha_1)^3] = \int_0^{\infty} (x - \alpha_1)^3 \frac{x}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) dx = \alpha_3 - 3\alpha_1\alpha_2 + 2\alpha_1^3.$$

Величины $\alpha_1 = \sigma \sqrt{\pi/2}$, $\alpha_2 = 2\sigma^2$ известны; остается вычислить α_3 :

$$\alpha_3 = 4\sqrt{2}\sigma^3 \int_0^{\infty} t^4 \exp(-t^2) dt = 4\sqrt{2}\sigma^3 J_4 = 3\sigma^3 \sqrt{\pi/2}.$$

Подставляя значения α_1 , α_2 и α_3 в формулу для μ_3 , получим

$$\mu_3 = \sigma^3 (\pi - 3) \sqrt{\pi/2}.$$

Аналогично для центрального момента четвертого порядка получим

$$\mu_4 = M[(X - m_1)^4] = \int_0^{\infty} (x - m_1)^4 \frac{x}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) dx = \alpha_4 - 4\alpha_1\alpha_3 + 6\alpha_1^2\alpha_2 - 3\alpha_1^4.$$

Начальный момент четвертого порядка

$$\alpha_4 = \int_0^{\infty} x^4 \frac{x}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) dx = 8\sigma^4 \int_0^{\infty} t^5 \exp(-t^2) dt = 8\sigma^4 J_5 = 8\sigma^4.$$

Подставляя $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ и α_4 в формулу для μ_4 , получим

$$\mu_4 = \sigma^4(8 - 3\pi^2/4).$$

Пример 4.6

При фиксированном значении параметра b случайная величина X имеет нормальное распределение

$$f(x|b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_x} \exp\left(-\frac{(x-b)^2}{2\sigma_x^2}\right).$$

Параметр b также случаен, его плотность распределения

$$\varphi(b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_b} \exp\left(-\frac{(b-m)^2}{2\sigma_b^2}\right).$$

Найти безусловную плотность распределения случайной величины X .

Решение

Безусловная плотность

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x|b) \varphi(b) db = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi \sigma_x \sigma_b} \exp\left(-\frac{(x-b)^2}{2\sigma_x^2} - \frac{(b-m)^2}{2\sigma_b^2}\right) db.$$

После вычисления этого интеграла получим

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right), \quad \sigma^2 = \sigma_x^2 + \sigma_b^2.$$

Пример 4.7

Шарики для подшипников бракуются следующим образом: если шарик не проходит через отверстие диаметром d_1 , но проходит через отверстие диаметром $d_2 > d_1$, то его размер считается приемлемым. Если какое-нибудь из этих условий не выполняется, шарик бракуется. Известно, что диаметр шарика D есть нормально распределенная случайная величина с параметрами $m_D = (d_1 + d_2)/2$, $\sigma_D = (d_2 - d_1)/4$.

Определить вероятность P того, что шарик не будет забракован.

Решение

Участок (d_1, d_2) симметричен относительно m_D . По формуле (4.9), полагая $\alpha = d_1$ и $\beta = d_2$, находим вероятность того, что шарик не будет забракован:

$$P_{12}\{|X - m_D| < (d_2 - d_1)/2\} = 2\Phi\left(\frac{d_2 - d_1}{2\sigma_D}\right) = 2\Phi(2) = 0,9544.$$

Пример 4.8

В условиях предыдущей задачи найти среднее квадратическое отклонение σ_D диаметра шарика, если известно, что брак составляет 10 % всей продукции.

Решение

Вероятность брака

$$P = 1 - 2\Phi\left(\frac{d_2 - d_1}{2\sigma_D}\right) = 0,1,$$

что дает

$$\Phi\left(\frac{d_2 - d_1}{2\sigma_D}\right) = 0,45.$$

По таблицам функции Лапласа (табл. 4.3) находим значение аргумента, при котором функция Лапласа равна 0,45: $(d_2 - d_1)/(2\sigma_D) \cong 1,65$.

Поэтому $\sigma_D \cong (d_2 - d_1)/3,3$.

Пример 4.9

Вероятность отказа радиолампы в момент включения зависит от напряжения U в схеме и равна $q_U(u)$. Напряжение U случайно и имеет нормальное распределение $f(u)$ с параметрами $m_U = u_0$ и σ_U .

Найти полную вероятность P отказа радиолампы в момент включения.

Решение

По интегральной формуле полной вероятности

$$P = \int_{-\infty}^{\infty} q_U(u) f(u) du = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_U} \int_{-\infty}^{\infty} q_U(u) \exp\left(-\frac{(u - u_0)^2}{2\sigma_U^2}\right) du.$$

Пример 4.10

Размер диаметра изготавливаемых за смену цилиндров можно считать нормально распределенной случайной величиной с математическим ожиданием $a = 25 \text{ мм}$ и дисперсией $\sigma^2 = 0,01 \text{ мм}^2$.

В каких границах можно практически гарантировать размер диаметра цилиндра, если за вероятность практической достоверности принимается 0,997 (правило "трех сигм")?

Решение

При указанных значениях параметров плотность распределения вероятностей

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot 0,1} \exp\left(-\frac{(x - 25)^2}{2 \cdot 0,01}\right).$$

Вероятность $\text{Pr}(|\xi - a| \leq \alpha)$ того, что случайная величина ξ (размер диаметра) отклонится от a не более, чем на α , равна 0,997, т.е.

$$\int_{a-\alpha}^{a+\alpha} f(x) dx \leq 0,997.$$

Поэтому

$$0,997 \geq \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{a-\alpha}^{a+\alpha} \exp\left(-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right) dx.$$

Пусть $t = (x - a)/\sigma$, тогда

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\alpha/\sigma}^{\alpha/\sigma} \exp(-t^2/2) dt \leq 0,997.$$

Это неравенство имеет место, если $\alpha = 3\sigma$, т.е. $\alpha = 0,3$. Итак, размер диаметра гарантирован в границах от $a - 3\sigma = 24,7$ мм до $a + 3\sigma = 25,3$ мм.

Пример 4.11

Случайная величина X распределена по нормальному закону с математическим ожиданием m и средним квадратическим отклонением σ .

Определить абсциссы x_1 , x_2 и ординату y точек перегиба кривой распределения $y = f(x)$.

Решение

Для непрерывной и дважды дифференцируемой функции координаты её точек перегиба определяются как решения уравнения

$$\frac{d^2}{dx^2} f(x) = 0, \quad -\infty < x < \infty.$$

В нашем случае

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right).$$

Дважды дифференцируя по x , получаем уравнение

$$f(x) \left(\frac{(x-m)^2}{\sigma^4} - \frac{1}{\sigma^2} \right) = 0.$$

Поскольку $f(x)$ не равна нулю, корни уравнения определяются вторым множителем. Это дает для искомых точек перегиба

$$x_1 = m - \sigma, \quad x_2 = m + \sigma.$$

В этих точках ордината составляет $y = e/(\sqrt{2\pi}\sigma) \cong 1,084/\sigma$.

Пример 4.12

Измерение дальности до объекта сопровождается систематическими и случайными ошибками. Систематическая ошибка составляет 50 м в сторону занижения дальности. Случайные ошибки подчиняются нормальному закону со средним квадратическим отклонением $\sigma = 100$ м.

Определить: а) вероятность измерения дальности с ошибкой, не превышающей по абсолютной величине 150 м; б) вероятность того, что измеренная дальность не превысит истинной.

Решение

Обозначим через X суммарную ошибку измерения дальности. Её систематическая составляющая $\bar{x} = -50$ м. Следовательно, плотность распределения вероятностей суммарных ошибок имеет вид

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} 100} \exp\left(-\frac{(x+50)^2}{20000}\right).$$

а) Вероятность измерения дальности с ошибкой, не превосходящей по абсолютной величине 150 м, вычисляется с помощью таблиц функции Лапласа $\Phi(x)$ по формуле

$$\begin{aligned} \Pr\{|X| < 150\} &= \Pr\{-150 < X < 150\} = \\ &= \Phi\left(\frac{150+50}{100}\right) - \Phi\left(\frac{-150+50}{100}\right) = \Phi(2) - \Phi(-1). \end{aligned}$$

Из определения следует, что функция Лапласа является нечетной функцией, т.е. $\Phi(-x) = -\Phi(x)$, то $\Phi(-1) = -\Phi(1)$, поэтому

$$\Pr\{|X| < 150\} = \Phi(2) + \Phi(1).$$

Пользуясь табл. 4.3 находим: $\Phi(2) = 0,4772$, $\Phi(1) = 0,3413$, что дает $\Pr\{|X| < 150\} = 0,8185$.

б) Вероятность того, что измеренная дальность не превзойдет истинной, вычисляется по формуле

$$\Pr\{-\infty < X < 0\} = \Phi\left(\frac{0+50}{100}\right) - \Phi(-\infty) = \Phi(0,5) + \Phi(\infty).$$

Так как $\Phi(\infty) = 0,5$ и $\Phi(0,5) = 0,1915$, то получим окончательно

$$\Pr\{-\infty < X < 0\} = 0,1915 + 0,5000 = 0,6915.$$

Пример 4.13 (Теорема Муавра-Лапласа)

В этом примере рассмотрим асимптотический переход биномиального распределения в нормальное распределение.

Пусть имеется серия из n независимых опытов, выполненных в однородных условиях. Пусть в каждом из них некоторое событие A реализуется с постоянной и известной вероятностью p , а случайная величина X – количество реализаций события A . Тогда с увеличением *объема выборки* n закон распределения случайной величины X асимптотически приближается к нормальному закону с параметрами

$$m_x = np, \quad \sigma_x^2 = np(1-p). \quad (1)$$

Другими словами, для заданных величин α и β

$$\Pr(\alpha < X < \beta) \approx \Phi\left(\frac{\beta - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right). \quad (2)$$

Доказательство формулы (2) проведем, опираясь на формулу Бернулли

$$P(X = m) \equiv P_m = C_n^m p^m q^{n-m}, \quad q = 1 - p. \quad (3)$$

Из вида производящей функции случайной величины X

$$Q_X(\lambda) = \sum_{m=0}^n \lambda^m P_m = \sum_{m=0}^n C_n^m \lambda^m p^m q^{n-m} = (q + p\lambda)^n \quad (4)$$

следует вспомогательное выражение для амплитуды вероятностей

$$P_m = \frac{1}{m!} \left(\frac{d}{d\lambda} \right)^m Q_X(\lambda) \Big|_{\lambda=0}. \quad (5)$$

Пользуясь интегральной формулой Коши, получаем

$$P_m = \frac{1}{2\pi i m!} \oint dz \left(\frac{d}{d\lambda} \right)^m \frac{1}{z - \lambda} (q + zp)^n \Big|_{\lambda=0} = \frac{1}{2\pi i} \oint dz \frac{(q + zp)^n}{z^{m+1}}. \quad (6)$$

Введем теперь в рассмотрение отцентрированную и отнормированную непрерывную случайную величину

$$Y = \frac{X - m_X}{\sigma_X} = \frac{X - np}{\sqrt{npq}}, \quad (7)$$

после чего запишем её закон распределения

$$f_Y(y) = M \left[\delta \left(y - \frac{X - np}{\sqrt{npq}} \right) \right], \quad (8)$$

где $\delta(\cdot)$ – дельта-функция Дирака, характеризующаяся фильтрующими свойствами.

Пользуясь этими свойствами, последовательно запишем

$$f_Y(y) = \sqrt{npq} M [\delta(X - np - y\sqrt{npq})] = \sqrt{npq} \sum_{m=0}^n P_m \delta(m - np - y\sqrt{npq}). \quad (9)$$

Поскольку $n \gg 1$, в сумме (9) перейдем от дискретной переменной m к непрерывной x , т.е. к интегрированию.

Заменим в (9) набор амплитуд $\{P_m\}$, $(m = 0, 1, \dots)$ на плотность $f_X(x)$, тогда

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \sqrt{npq} \int \delta(x - np - y\sqrt{npq}) f_X(x) dx = \\ &= \frac{\sqrt{npq}}{2\pi i} \int \delta(x - np - y\sqrt{npq}) \oint dz \frac{(q + zp)^n}{z^{x+1}} dx, \end{aligned} \quad (10)$$

что дает, с учетом свойств дельта-функции,

$$f_Y(y) = \frac{\sqrt{npq}}{2\pi i} \oint dz \exp\{\Psi(z)\}, \quad (11)$$

где

$$\Psi(z) = n \ln(q + zp) - (np + y\sqrt{npq}) \ln z. \quad (12)$$

Значение интеграла (11) на комплексной z -плоскости будем искать, пользуясь методом перевала. Согласно этому методу, необходимо найти точку z_* , доставляющую функции $\Psi(z)$ максимум, т.е. решить уравнение

$$\frac{d}{dz}\Psi(z) = \frac{np}{q+zp} - \frac{np+y\sqrt{npq}}{z} = 0, \quad (13)$$

что дает

$$z_* = \frac{1+yq/\sqrt{npq}}{1-yp/\sqrt{npq}}. \quad (14)$$

Поскольку $p+q=1$ и рассматривается асимптотический случай $n \gg 1$, то запишем

$$z_* = 1 + \frac{y}{\sqrt{npq}} + O(n^{-1}). \quad (15)$$

Контур интегрирования в (11) проведем через точку z_* . Принимая, что главный вклад в (11) дает окрестность этой точки, запишем

$$f_Y(y) = \frac{\sqrt{npq}}{2\pi i} \oint dz \exp\{\Psi(z_*) + (z-z_*)\Psi'(z_*) + \frac{1}{2}(z-z_*)^2\Psi''(z_*) + \dots\}. \quad (16)$$

В интеграле (16): а) ограничимся слагаемыми до второй производной включительно; б) перейдем к новой переменной интегрирования η по правилу $i\eta = z - z_*$, $dz = i d\eta$. Тогда получим

$$f_Y(y) = \frac{\sqrt{npq}}{2\pi} \oint d\eta \exp\{\Psi_* - \frac{1}{2}\eta^2\Psi''_*\}, \quad (17)$$

где $\Psi_* = \Psi(z_*)$, $\Psi''_* = \Psi''(z_*)$. Выбирая контур интегрирования по η вдоль вещественной оси, получим

$$f_Y(y) = \frac{\sqrt{npq}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\eta \exp\{\Psi_* - \frac{1}{2}\eta^2\Psi''_*\} = \sqrt{\frac{npq}{2\pi\Psi''_*}} \exp(\Psi_*). \quad (18)$$

Таким образом, необходимо определить значения Ψ_* и Ψ''_* . Поскольку для $\varepsilon \ll 1$ справедливо $\ln(1+\varepsilon) = \varepsilon - \varepsilon^2/2 + \dots$, то имеем при $n \gg 1$

$$\Psi_* = n \ln(q+z_*p) - (np+y\sqrt{npq}) \ln z_* \approx -\frac{y^2}{2}, \quad (19a)$$

$$\Psi''_* = -\frac{np^2}{(1+yp/\sqrt{npq})^2} + \frac{np+y\sqrt{npq}}{(1+y/\sqrt{npq})^2} \approx -np^2 + np = npq. \quad (19b)$$

Наконец, получаем

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right). \quad (20)$$

Возвращаясь к случайной величине X , можно записать

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} \exp\left(-\frac{(x-np)^2}{2npq}\right). \quad (21)$$

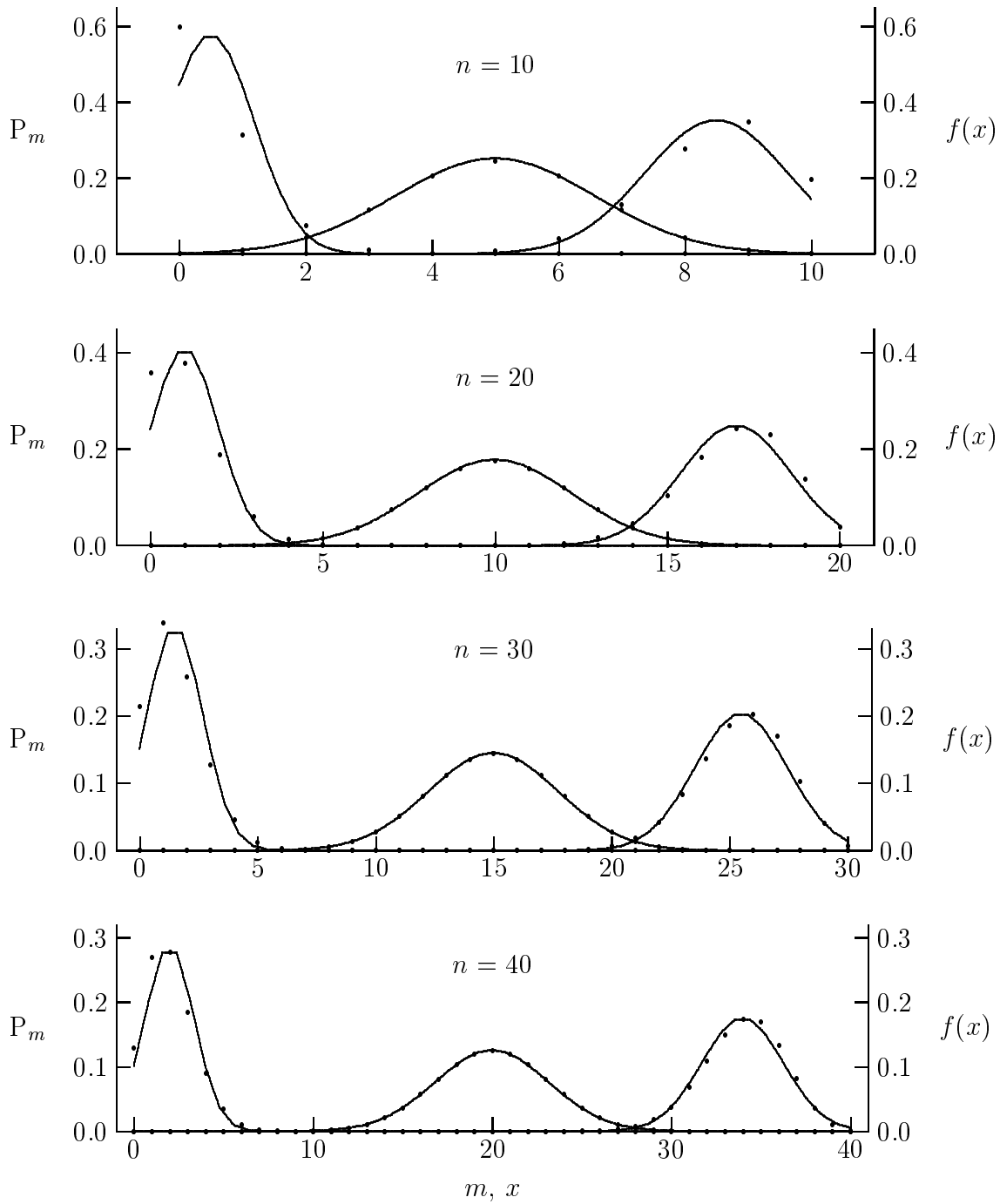


Рисунок 4.7 — Эволюция биномиального распределения P_m (указано точками) с параметрами n и p в нормальное распределение $f(x)$ (указано сплошной линией) с параметрами $m_x = np$ и $\sigma_x^2 = npq$ для объемов выборки $n = 10, 20, 30, 40$; слева $p = 0,05$; посередине $p = 0,50$; справа $p = 0,85$

Таким образом, для заданного интервала (α, β) и при условии $n \gg 1$ вероятность случайного события $\{B : \alpha < X < \beta\}$ следующая

$$\Pr(B) = \Pr(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - np}{\sqrt{npq}}\right). \quad (22)$$

Полученное выражение (22) является формулой Муавра-Лапласа.

На рис. 4.7 показана эволюция биномиального распределения с параметрами n и p в нормальное с параметрами $m_x = np$ и $\sigma_x^2 = npq$ для объемов выборки $n = 20, 40, 60, 80$ и значений параметра $p = 0,05, p = 0,50, p = 0,85$. Из этого рисунка видно, что для $n \approx 40$ и средних значений $p \approx 0,5$ нормальный закон асимптотически соответствует биномиальному распределению, в то же время при периферийных значениях $p \gtrsim 0,0$ или $p \lesssim 1,0$ это соответствие имеет место при значительно больших значениях объема выборки n .

4.4. Задачи для решения

Задача 4.1

Случайная величина X с вероятностью 0,4 имеет нормальное распределение с параметрами $m = 0$ и $\sigma = 2$, а с вероятностью 0,6 – нормальное распределение с параметрами $m = 2$ и $\sigma = 1$.

Найти плотность распределения случайной величины X .

Ответ :

$$f_x(x) = 0,2 (2\pi)^{-1/2} \exp\left(-\frac{x^2}{8}\right) + 0,6 (2\pi)^{-1/2} \exp\left(-\frac{(x-2)^2}{2}\right).$$

Задача 4.2

Случайная величина X имеет нормальное распределение с параметрами $m_x = 3$, $\sigma_x = 2$.

Как изменится плотность распределения вероятностей $f(x)$, если параметры примут значения $m_x = -3$, $\sigma_x = 2$?

Задача 4.3

Случайная величина X имеет нормальное распределение с параметрами $m_x = 3$, $\sigma_x = 2$.

Как изменится плотность распределения вероятностей $f(x)$, если параметры примут значения $m_x = 3$, $\sigma_x = 4$?

Задача 4.4

Дан график плотности $f_x(x)$ нормальной случайной величины X .

Написать выражение для плотности $f_x(x)$. Построить на том же графике плотность $f_y(y)$ случайной величины $Y = X + q$, где q – неслучайная величина.

Ответ :

$$f_y(y) = f_x(y - q - m_x).$$

Задача 4.5

Случайная величина X подчинена нормальному закону с математическим ожиданием $m = 0$. Задан интервал $[\alpha, \beta]$, не включающий начало координат.

При каком значении среднего квадратичного отклонения σ вероятность попадания случайной величины X в интервал $[\alpha, \beta]$ достигает максимума?

Ответ:

$$\sigma = \left(\frac{\beta + \alpha}{2} \frac{\beta - \alpha}{\ln(\beta) - \ln(\alpha)} \right)^{1/2}.$$

Задача 4.6

Мгновенные значения амплитуды X принимаемого сигнала описываются распределением Релея

$$f_X(x) = \frac{x}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right), \quad x \geq 0.$$

Вычислить среднее значение и дисперсию случайной величины X .

Ответ: $m_X = \sigma\sqrt{\pi/2}$, $D[X] = \sigma^2(2 - \pi/2)$.

Задача 4.7

Имеется случайная величина X , подчиненная нормальному закону с математическим ожиданием m и средним квадратичным отклонением σ .

Требуется приближенно заменить нормальный закон равномерным в интервале $[\alpha, \beta]$; границы α, β подобрать так, чтобы сохранить неизменными основные характеристики случайной величины X : математическое ожидание и дисперсию.

Ответ: $\alpha = m - \sigma\sqrt{3}$; $\beta = m + \sigma\sqrt{3}$.

4.5. Задания для проверки

1. Дайте формулировку нормального закона распределения.
2. Назовите основные свойства нормальной случайной величины.
3. Перечислите параметры нормального закона.
4. Приведите выражения для моментов нормального распределения.
5. Поясните суть вероятности попадания нормальной случайной величины на заданный участок.
6. Поясните суть правила "трех сигм".
7. Перечислите основные свойства функции Лапласа.
8. Приведите примеры практического применения нормального закона.
9. Перечислите основные свойства функции ошибок, дополнительной функции ошибок.

Таблица 4.2 — Функция Гаусса $\exp(-x^2)$ и связанные с ней функции

x	$\exp(-x^2)$	$(2\pi)^{-1/2} \exp(-x^2/2)$	$\operatorname{erf}(x)$	$\operatorname{erfc}(x)$
0,00	1,00000	0,39894	0,00000	1,00000
0,10	0,99005	0,39695	0,11246	0,88754
0,20	0,96079	0,39104	0,22270	0,77730
0,30	0,91393	0,38139	0,32863	0,67137
0,40	0,85214	0,36827	0,42839	0,57161
0,50	0,77880	0,35207	0,52050	0,47950
0,60	0,69768	0,33322	0,60386	0,39614
0,70	0,61263	0,31225	0,67780	0,32220
0,80	0,52729	0,28969	0,74210	0,25790
0,90	0,44486	0,26609	0,79691	0,20309
1,00	0,36788	0,24197	0,84270	0,15730
1,10	0,29820	0,21785	0,88021	0,11979
1,20	0,23693	0,19419	0,91031	0,08969
1,30	0,18452	0,17137	0,93401	0,06599
1,40	0,14086	0,14973	0,95229	0,04771
1,50	0,10540	0,12952	0,96611	0,03389
1,60	0,07730	0,11092	0,97635	0,02365
1,70	0,05558	0,09405	0,98379	0,01621
1,80	0,03916	0,07895	0,98909	0,01091
1,90	0,02705	0,06562	0,99279	0,00721
2,00	0,01832	0,05399	0,99532	0,00468
2,10	0,01216	0,04398	0,99702	0,00298
2,20	0,00791	0,03547	0,99814	0,00186
2,30	0,00504	0,02833	0,99886	0,00114
2,40	0,00315	0,02239	0,99931	0,00069
2,50	0,00193	0,01753	0,99959	0,00041
2,60	0,00116	0,01358	0,99976	0,00024
2,70	0,00068	0,01042	0,99987	0,00013
2,80	0,00039	0,00792	0,99992	0,00008
2,90	0,00022	0,00595	0,99996	0,00004
3,00	0,00012	0,00443	0,99998	0,00002

Таблица 4.3 — Функция Лапласа $\Phi(x)$ и связанные с ней функции

x	$d\Phi(x)/dx$	$\Phi(x)$	$2\Phi(x)$	$1 - \Phi(x)$
0,00	0,39894	0,00000	0,00000	1,00000
0,10	0,39695	0,03983	0,07966	0,96017
0,20	0,39104	0,07926	0,15852	0,92074
0,30	0,38139	0,11791	0,23582	0,88209
0,40	0,36827	0,15542	0,31084	0,84458
0,50	0,35207	0,19146	0,38292	0,80854
0,60	0,33322	0,22575	0,45149	0,77425
0,70	0,31225	0,25804	0,51607	0,74196
0,80	0,28969	0,28814	0,57629	0,71186
0,90	0,26609	0,31594	0,63188	0,68406
1,00	0,24197	0,34134	0,68269	0,65866
1,10	0,21785	0,36433	0,72867	0,63567
1,20	0,19419	0,38493	0,76986	0,61507
1,30	0,17137	0,40320	0,80640	0,59680
1,40	0,14973	0,41924	0,83849	0,58076
1,50	0,12952	0,43319	0,86639	0,56681
1,60	0,11092	0,44520	0,89040	0,55480
1,70	0,09405	0,45543	0,91087	0,54457
1,80	0,07895	0,46407	0,92814	0,53593
1,90	0,06562	0,47128	0,94257	0,52872
2,00	0,05399	0,47725	0,95450	0,52275
2,10	0,04398	0,48214	0,96427	0,51786
2,20	0,03547	0,48610	0,97219	0,51390
2,30	0,02833	0,48928	0,97855	0,51072
2,40	0,02239	0,49180	0,98360	0,50820
2,50	0,01753	0,49379	0,98758	0,50621
2,60	0,01358	0,49534	0,99068	0,50466
2,70	0,01042	0,49653	0,99307	0,50347
2,80	0,00792	0,49744	0,99489	0,50256
2,90	0,00595	0,49813	0,99627	0,50187
3,00	0,00443	0,49865	0,99730	0,50135

5. Системы случайных величин (случайные векторы)

5.1. Свойства систем случайных величин

Система двух случайных величин (X, Y) геометрически интерпретируется как *случайная точка* с координатами (X, Y) на плоскости xOy или как случайный вектор, направленный из начала координат в точку (X, Y) , составляющие которого представляют собой случайные величины X и Y .

Система трех случайных величин (X, Y, Z) изображается *случайной точкой* или *случайным вектором* в *трехмерном пространстве*; система n случайных величин $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ — *случайной точкой* или *случайным вектором* в *пространстве n измерений*.

5.2. Законы распределения системы случайных величин

Совместной функцией распределения двух случайных величин (X, Y) (или функцией распределения системы двух случайных величин X и Y) называется вероятность совместного выполнения двух неравенств: $X < x$ и $Y < y$;

$$F(x, y) = \Pr\{X < x, Y < y\}. \quad (5.1)$$

Геометрически функция $F(x, y)$ интерпретируется как вероятность попадания случайной точки (X, Y) в квадрант с вершиной (x, y) . Этот квадрант заштрихован на рис. 5.1.

Вероятность попадания случайной точки с координатами (X, Y) в прямоугольник R (рис. 5.2) со сторонами, параллельными осям координат, который включает свои нижнюю γ и левую α границы, но не включает верхнюю δ и правую β , выражается через функцию распределения формулой

$$\Pr\{(X, Y) \in R\} = \Pr\{\alpha < X < \beta, \gamma < Y < \delta\}. \quad (5.2)$$

Функция распределения $F(x, y)$ обладает свойствами:

- 1) $F(-\infty, -\infty) = F(-\infty, y) = F(x, -\infty) = 0$;
- 2) $F(\infty, \infty) = 1$;
- 3) $F(x, \infty) = F_X(x)$, $F(\infty, y) = F_Y(y)$, где $F_X(x), F_Y(y)$ — функции распределения случайных величин X и Y ;

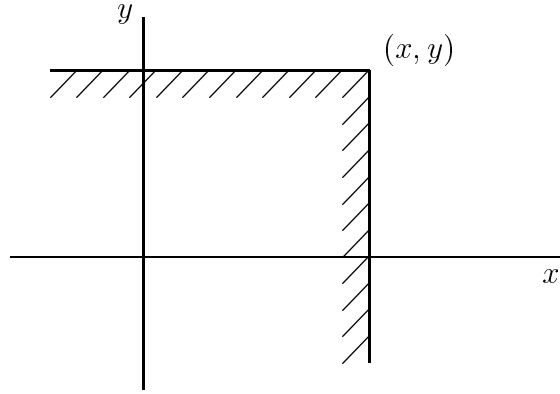


Рисунок 5.1 — К вероятности попадания случайной точки в квадрант с вершиной (x, y)

- 4) $F(x, y)$ — неубывающая функция аргументов x и y ;
- 5) $F(x, y)$ непрерывна слева по каждой координате;
- 6) для любых α, β и γ, δ , таких что $\alpha < x < \beta$ и $\gamma < y < \delta$, справедливо

$$F(\beta, \delta) - F(\alpha, \delta) - F(\beta, \gamma) + F(\alpha, \gamma) \geq 0$$

(последнее свойство означает, что вероятность попадания в прямоугольник R неотрицательна).

Совместной плотностью двух непрерывных случайных величин (или плотностью распределения системы) называется предел отношения вероятности попадания случайной точки в элементарный участок плоскости $\Delta x \Delta y$, примыкающий к точке (x, y) , к площади этого участка, когда его размеры Δx и Δy стремятся к нулю.

Совместная плотность выражается через совместную функцию распределения

$$f(x, y) = \partial^2 F(x, y) / \partial x \partial y = F''_{xy}(x, y), \quad (5.3)$$

т.е. представляет собой вторую смешанную частную производную функции распределения по обоим аргументам.

Поверхность, изображающая функцию $f(x, y)$, называется *поверхностью распределения*.

Элементом вероятности для системы двух случайных величин называется величина $f(x, y) dx dy$, приближенно выражающая вероятность попадания случайной точки (X, Y) в элементарный прямоугольник со сторонами dx и dy , примыкающий к точке (x, y) .

Вероятность попадания случайной точки (X, Y) в произвольную область D равна

$$\Pr\{(X, Y) \in D\} = \int_D \int f(x, y) dx dy. \quad (5.4)$$

Свойства совместной плотности:

- 1) плотность $f(x, y)$ — величина неотрицательная:

$$f(x, y) \geq 0; \quad (5.5)$$

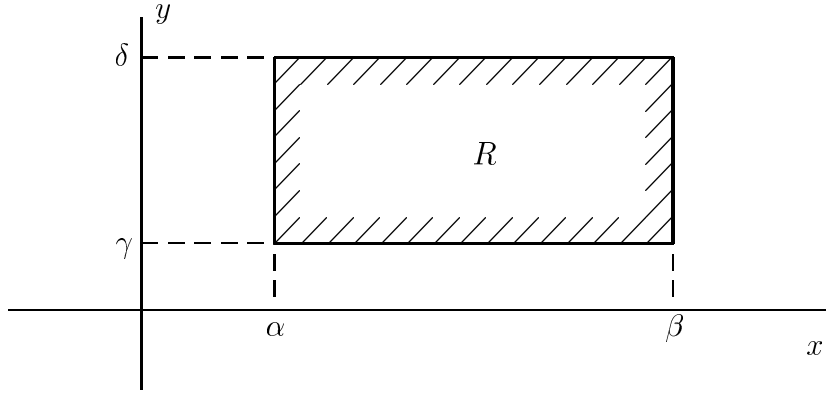


Рисунок 5.2 — К вероятности попадания случайной точки в прямоугольник R

2) полная вероятность, т.е. интеграл от плотности $f(x, y)$ по всем возможным значениям, равна единице :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy = 1. \quad (5.6)$$

Совместная функция распределения выражается через совместную плотность :

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(x, y) dx dy. \quad (5.7)$$

Плотности отдельных величин, входящих в систему, выражаются через совместную плотность:

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy \quad \text{или} \quad f_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx. \quad (5.8)$$

Условным законом распределения случайной величины, входящей в систему, называется закон распределения, вычисленный при условии, что другая случайная величина приняла определенное значение.

Условные функции распределения случайных величин X и Y , входящих в систему, обозначаются $F_1(x|y)$, $F_2(y|x)$, а условные плотности распределения — $f_1(x|y)$, $f_2(y|x)$.

Теорема умножения плотностей :

$$f(x, y) = f_1(x) f_2(y|x) \quad \text{или} \quad f(x, y) = f_2(y) f_1(x|y). \quad (5.9)$$

Выражение для условных плотностей через безусловные :

$$f_2(y|x) = f(x, y) / f_1(x) \quad \text{при } f_1(x) \neq 0; \quad (5.10a)$$

$$f_1(x|y) = f(x, y) / f_2(y) \quad \text{при } f_2(y) \neq 0. \quad (5.10b)$$

Случайные величины X, Y называются *независимыми*, если условный закон распределения одной из них не зависит от того, какое значение примет другая:

$$f_1(x|y) = f_1(x) \quad \text{или} \quad f_2(y|x) = f_2(y). \quad (5.11)$$

Для независимых случайных величин теорема умножения плотностей принимает вид:

$$f(x, y) = f_1(x) f_2(y). \quad (5.12)$$

5.3. Числовые характеристики системы случайных величин

Для характеристики свойств системы случайных величин пользуются начальными и центральными моментами.

Начальным моментом порядка $(k + s)$ системы из двух случайных величин (X, Y) называется следующая их характеристика:

$$\alpha_{ks}[X, Y] = M[X^k Y^s]. \quad (5.13)$$

Центральным моментом порядка $(k + s)$ системы (X, Y) называется величина

$$\mu_{ks}[X, Y] = M[(X - m_X)^k (Y - m_Y)^s]. \quad (5.14)$$

Расчетные формулы для определения моментов:

а) для дискретных случайных величин

$$\alpha_{ks}[X, Y] = \sum_i \sum_j x_i^k y_j^s p_{ij}; \quad (5.15)$$

$$\mu_{ks}[X, Y] = \sum_i \sum_j (x_i - m_X)^k (y_j - m_Y)^s p_{ij}; \quad (5.16)$$

б) для непрерывных случайных величин

$$\alpha_{ks}[X, Y] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x^k y^s f(x, y) dx dy; \quad (5.17a)$$

$$\mu_{ks}[X, Y] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_X)^k (y - m_Y)^s f(x, y) dx dy, \quad (5.17b)$$

где $f(x, y)$ – совместная плотность.

Совместной функцией распределения n случайных величин $X_1, X_2, \dots, X_n$ называется вероятность выполнения события, заключающегося в реализации n неравенств вида $X < x$:

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \Pr\{X_1 < x_1, X_2 < x_2, \dots, X_n < x_n\}. \quad (5.18)$$

Совместной плотностью n случайных величин называется n -я смешанная частная производная функции распределения:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{\partial^n}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_n} F(x_1, x_2, \dots, x_n). \quad (5.19)$$

Функция распределения $F_i(x_i)$ одной из величин X_i , входящих в систему, получается из $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$, если положить в ней все аргументы, кроме x_i , равными ∞ :

$$F_i(x_i) = F(\infty, \infty, \dots, \infty, x_i, \infty, \dots, \infty). \quad (5.20)$$

Плотность распределения отдельной величины X_i , входящей в систему $(X_1, X_2, \dots, X_n)$, выражается через совместную плотность формулой — интегралом кратности $(n - 1)$ в области определения:

$$f_1(x_i) = \int \dots \int^{(n-1)} f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_{i-1} dx_{i+1} \dots dx_n. \quad (5.21)$$

Если случайные величины $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ независимы, то

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f_1(x_1) f_2(x_2) \dots f_n(x_n). \quad (5.22)$$

Вероятность попадания случайной точки $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ в пределы n -мерной области D выражается n -кратным интегралом по этой области

$$\Pr\{(X_1, \dots, X_n) \in D\} = \int \dots \int^{(n)} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n. \quad (5.23)$$

5.4. Корреляции случайных величин

Корреляционным моментом (или ковариацией) двух случайных величин X и Y называется смешанный центральный момент второго порядка

$$K_{XY} = \mu_{11}[X, Y]. \quad (5.24)$$

Величину K_{XY} удобно вычислять через второй смешанный начальный момент

$$K_{XY} = \alpha_{11}[X, Y] - \alpha_X \alpha_Y, \quad (5.25)$$

или в других обозначениях

$$K_{XY} = M[XY] - M[X] M[Y]. \quad (5.26)$$

Для независимых случайных величин корреляционный момент равен нулю.

Коэффициентом корреляции (или нормированным корреляционным моментом) r_{XY} двух случайных величин X, Y называется безразмерная величина

$$r_{XY} = K_{XY} / (\sigma_X \sigma_Y). \quad (5.27)$$

Коэффициент корреляции характеризует степень тесноты (статистической связи) линейной зависимости между двумя случайными величинами.

Система случайных величин (X, Y) называется *некоррелированной*, если их корреляционный момент (или, что равносильно, коэффициент корреляции) равен нулю.

Из независимости случайных величин следует их некоррелированность. С другой стороны, из некоррелированности случайных величин еще не следует их независимость.

Если случайные величины X, Y связаны линейной функциональной зависимостью вида $Y = aX + b$, где a, b неслучайны, то их коэффициент корреляции r_{XY} равен ± 1 , в зависимости от знака коэффициента a . Для любых двух случайных величин $|r_{XY}| \leq 1$.

5.5. Корреляции системы случайных величин

Корреляционной матрицей системы n случайных величин $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ называется таблица, составленная из корреляционных моментов всех этих величин, взятых попарно:

$$K_{ij} = \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & \dots & K_{1n} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & \dots & K_{2n} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & \dots & K_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{n1} & K_{n2} & K_{n3} & \dots & K_{nn} \end{pmatrix}, \quad (5.28)$$

где

$$K_{ij} = K_{X_i X_j} = M[(X_i - m_{X_i})(X_j - m_{X_j})] \quad (5.29)$$

– корреляционный момент случайных величин X_i, X_j .

Корреляционная матрица симметрична ($K_{ij} = K_{ji}$), поэтому обычно заполняется лишь половина таблицы:

$$K_{ij} = \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & \dots & K_{1n} \\ & K_{22} & K_{23} & \dots & K_{2n} \\ & & K_{33} & \dots & K_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ & \dots & \dots & \dots & K_{nn} \end{pmatrix}. \quad (5.30)$$

По главной диагонали корреляционной матрицы расположены дисперсии случайных величин $X_1, X_2, \dots, X_n$:

$$K_{ii} = D[X_i], \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (5.31)$$

Нормированной корреляционной матрицей системы n случайных величин называется таблица, составленная из коэффициентов корреляции всех этих величин,

взятых попарно :

$$K_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & r_{12} & r_{13} & \dots & r_{1n} \\ & 1 & r_{23} & \dots & r_{2n} \\ & & 1 & \dots & r_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ & \dots & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix}, \quad (5.32)$$

где $r_{ij} = K_{ij} / (\sigma_i \sigma_j)$ — коэффициент корреляции величин X_i, X_j .

5.6. Системы нормальных случайных величин

Нормальный закон распределения для системы из двух случайных величин X, Y (нормальный закон на плоскости) имеет плотность вида :

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi \sigma_x \sigma_y \sqrt{1 - r_{xy}^2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2(1 - r_{xy}^2)} Q(x, y) \right\}, \quad (5.33)$$

где

$$Q(x, y) = \frac{(x - m_x)^2}{\sigma_x^2} - 2r_{xy} \frac{(x - m_x)(y - m_y)}{\sigma_x \sigma_y} + \frac{(y - m_y)^2}{\sigma_y^2},$$

m_x, m_y — математические ожидания случайных величин X, Y ; σ_x, σ_y — их средние квадратические отклонения; r_{xy} — их коэффициент корреляции.

На рис. 5.3 коэффициент корреляции r_{xy} равен 0,9; на рис. 5.4 $r_{xy} = 0,0$.

Для случайных величин, распределенных по нормальному закону, некоррелированность равносильна независимости. Если случайные величины X, Y некоррелированы (независимы), то $r_{xy} = 0$ и

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi \sigma_x \sigma_y} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{(x - m_x)^2}{\sigma_x^2} + \frac{(y - m_y)^2}{\sigma_y^2} \right) \right\}. \quad (5.34)$$

В этом случае оси Ox, Oy называются *главными осями рассеивания*. Если при этом $m_x = m_y = 0$, то нормальный закон распределения принимает *канонический вид* :

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi \sigma_x \sigma_y} \exp \left\{ -\frac{x^2}{2\sigma_x^2} - \frac{y^2}{2\sigma_y^2} \right\}. \quad (5.35)$$

Вероятность попадания случайной точки, распределенной по нормальному закону, в прямоугольник R со сторонами, параллельными главным осям рассеивания, выражается формулой

$$\Pr\{(X, Y) \in R\} = \left[\Phi \left(\frac{\beta - m_x}{\sigma_x} \right) - \Phi \left(\frac{\alpha - m_x}{\sigma_x} \right) \right] \left[\Phi \left(\frac{\delta - m_y}{\sigma_y} \right) - \Phi \left(\frac{\gamma - m_y}{\sigma_y} \right) \right], \quad (5.36)$$

здесь $x \in [\alpha, \beta], y \in [\gamma, \delta]$.

Эллипсом равной плотности (эллипсом рассеивания) называется эллипс, во всех точках которого совместная плотность нормального закона: $f(x, y) = \text{const}$. Полуоси такого эллипса пропорциональны σ_x, σ_y : $a = k\sigma_x, b = k\sigma_y$.

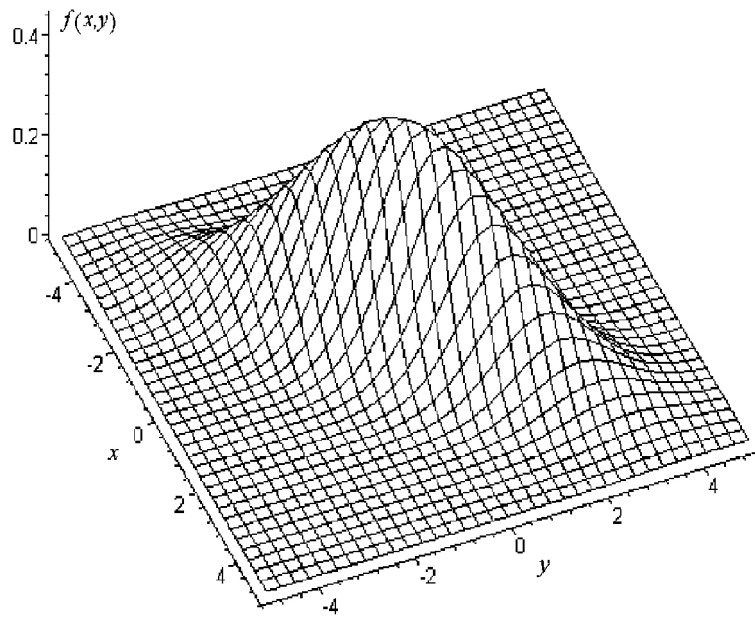


Рисунок 5.3 — Плотность распределения вероятностей $f(x, y)$ системы из двух случайных величин X, Y (параметры: $m_x = m_y = 0$; $\sigma_x = \sigma_y = 1$; коэффициент корреляции $r_{xy} = 0,9$)

Вероятность попадания случайной точки, распределенной по нормальному закону, в область E_k , ограниченную эллипсом рассеивания с полуосями a и b ,

$$\Pr\{(X, Y) \in E_k\} = 1 - \exp(-k^2/2), \quad (5.37)$$

где k – размеры полуосей в средних квадратичных отклонениях: $k = a/\sigma_x = b/\sigma_y$.

Если $\sigma_x = \sigma_y = \sigma$, рассеивание по нормальному закону называется *круговым*. При круговом нормальном рассеивании с $m_x = m_y = 0$ расстояние R от точки (X, Y) до начала координат (центра рассеивания) распределено по закону Релея

$$f(r) = (r/\sigma^2) \exp(-r^2/2\sigma^2), \quad r \geq 0. \quad (5.38)$$

Распределению Релея подчиняется модуль вектора на плоскости, если его ортогональные составляющие (проекции на координатные оси) независимы и распределены нормально с нулевыми математическими ожиданиями и равными дисперсиями.

Обобщением закона Релея является *распределение Релея–Райса*. При заданной константе s плотность этого закона следующая:

$$f(r) = (r/\sigma^2) \exp(-r^2/2\sigma^2) I_0(rs/\sigma^2), \quad r \geq 0, \quad (5.39)$$

где

$$I_0(x) = (2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} \exp[x \cos(\varphi)] d\varphi \quad (5.39')$$

– модифицированная функция Бесселя нулевого индекса.

Нормальный закон в пространстве трех измерений для независимых случайных величин X, Y, Z :

$$f(x, y, z) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2} \sigma_x \sigma_y \sigma_z} \exp\left(-\frac{(x - m_x)^2}{2\sigma_x^2} - \frac{(y - m_y)^2}{2\sigma_y^2} - \frac{(z - m_z)^2}{2\sigma_z^2}\right). \quad (5.40)$$

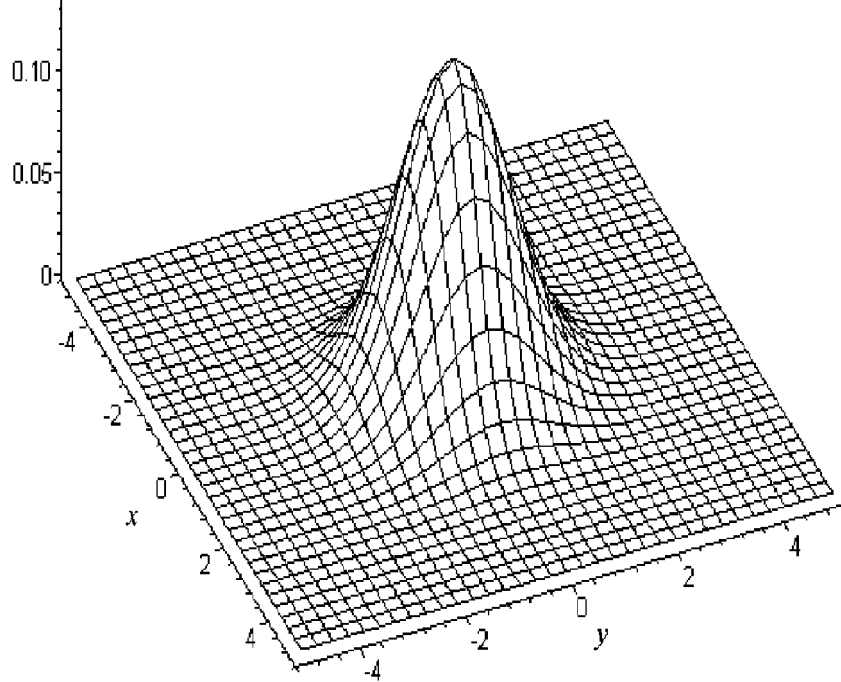


Рисунок 5.4 — Плотность распределения вероятностей $f(x, y)$ системы из двух случайных величин X, Y (параметры: $m_X = m_Y = 0$; $\sigma_X = \sigma_Y = 1$; коэффициент корреляции $r_{XY} = 0,0$)

Вероятность попадания случайной точки (X, Y, Z) в область E_k , ограниченную эллипсоидом равной плотности с полуосями $a = k\sigma_X$, $b = k\sigma_Y$, $c = k\sigma_Z$, равна

$$\Pr\{(X, Y, Z) \in E_k\} = 2\Phi(k) - 1 - \sqrt{2/\pi} k \exp(-k^2/2). \quad (5.41)$$

5.7. Дельта-функция Дирака $\delta(x)$

В практике решения вероятностных задач удобно применять дельта-функцию Дирака $\delta(x)$. Дельта-функция определяется своим интегральным представлением

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x - \alpha) dx = f(\alpha), \quad (5.42)$$

про неё говорят, что δ -функция обладает фильтрующим свойством (из всех возможных аргументов выбирается один, а именно $x = \alpha$).

Из определения вытекает свойство нормировки:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - \alpha) dx = 1. \quad (5.43)$$

Одно из возможных представлений δ -функции:

$$\delta(x - \alpha) = \lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} \exp\left(-\frac{(x - \alpha)^2}{2\sigma^2}\right), \quad (5.44)$$

что позволяет, рассматривая (5.44) как плотность распределения вероятностей некоторой нормальной случайной величины X со средним α и дисперсией σ , в пределе $\sigma \rightarrow 0$ получить детерминированную величину с единственным значением $x = \alpha$.

Фурье-представление δ -функции следующее :

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\lambda x) d\lambda, \quad (5.45)$$

откуда вытекает четность дельта-функции, $\delta(-x) = \delta(x)$.

Пусть на интервале $[a, b]$ непрерывная функция $\varphi(x)$ имеет простой ноль в точке $x = \alpha$. Тогда

$$\int_a^b \delta(\varphi(x)) dx = \frac{1}{|\varphi'(\alpha)|} \varphi(\alpha). \quad (5.46)$$

Если простых нулей несколько, т.е. $\varphi(\alpha_k) = 0$, $k = 1, 2, \dots, n$, то

$$\int_a^b \delta(\varphi(x)) dx = \sum_{k=1}^n \frac{1}{|\varphi'(\alpha_k)|} \varphi(\alpha_k). \quad (5.47)$$

Эти свойства δ -функции вместе с равенствами (5.42), (5.45) часто используют на практике.

5.8. Примеры

Пример 5.1

Определить математическое ожидание квадрата расстояния между двумя точками, выбранными наугад на любой из сторон прямоугольника.

Решение

Пусть две стороны прямоугольника имеют длину a , две другие – длину b . При выборе двух точек на любой из сторон прямоугольника возможны следующие единственно возможные и несовместные события (гипотезы) :

H_1 – обе точки выбраны на одной и той же стороне a ;

H_2 – обе точки выбраны на одной и той же стороне b ;

H_3 – точки выбраны на смежных сторонах прямоугольника;

H_4 – точки выбраны на противоположных сторонах a ;

H_5 – точки выбраны на противоположных сторонах b .

Вероятности этих гипотез определяются по формулам :

$$P(H_1) = 2 \frac{a}{2p} \frac{a}{2p} = a^2 / 2p^2; \quad P(H_2) = 2 \frac{b}{2p} \frac{b}{2p} = b^2 / 2p^2;$$

$$P(H_3) = 2 \frac{a}{2p} \frac{b}{2p} = ab / 2p^2; \quad P(H_4) = 2 \frac{a}{2p} \frac{a}{2p} = a^2 / 2p^2;$$

$$P(H_5) = 2 \frac{b}{2p} \frac{b}{2p} = b^2 / 2p^2,$$

где $2p$ – периметр прямоугольника.

Определим условное математическое ожидание квадрата расстояния :

$$M[Z^2|H_1] = \int_0^a \int_0^a f(x, y)(x - y)^2 dx dy = \frac{1}{a^2} \int_0^a \int_0^a (x - y)^2 dx dy = \frac{a^2}{6};$$

$$M[Z^2|H_2] = \frac{1}{b^2} \int_0^b \int_0^b (x - y)^2 dx dy = \frac{b^2}{6};$$

$$M[Z^2|H_3] = \frac{1}{ab} \int_0^a \int_0^b (x^2 + y^2) dx dy = \frac{a^2 + b^2}{3};$$

$$M[Z^2|H_4] = M[b^2 + X^2 + Y^2] = b^2 + \frac{1}{a^2} \int_0^a \int_0^a (x - y)^2 dx dy = b^2 + \frac{a^2}{6};$$

$$M[Z^2|H_5] = M[a^2 + X^2 + Y^2] = a^2 + \frac{1}{b^2} \int_0^b \int_0^b (x - y)^2 dx dy = a^2 + \frac{b^2}{6}.$$

Полное математическое ожидание случайной величины Z определяется по формуле

$$M[Z^2] = \sum_{i=1}^5 P(H_i)M[Z|H_i] = (a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4) / (6p^2) = p^2 / 6.$$

Пример 5.2

Имеется система случайных величин X и Y . Случайная величина X распределена по показательному закону с параметром λ :

$$f_1(x) = \begin{cases} \lambda \exp(-\lambda x) & \text{при } x \geq 0, \\ 0 & \text{при } x < 0. \end{cases}$$

Случайная величина Y при заданном значении $X = x > 0$ распределена также по показательному закону, но с параметром x :

$$f_2(y|x) = \begin{cases} x \exp(-xy) & \text{при } y \geq 0, \\ 0 & \text{при } y < 0. \end{cases}$$

Написать плотность распределения $f(x, y)$ системы (X, Y) , найти плотность распределения $f_2(y)$ случайной величины Y и условную плотность $f_1(x|y)$.

Решение

Плотность распределения системы (X, Y) следующая :

$$f(x, y) = f_1(x) f_2(y|x) = \begin{cases} \lambda x \exp(-\lambda x - xy) & \text{при } x \geq 0 \text{ и } y \geq 0, \\ 0 & \text{при } x < 0 \text{ или } y < 0. \end{cases}$$

Для плотности распределения $f_2(y)$ найдем

$$f_2(y) = \int_0^{\infty} f(x, y) dx = \begin{cases} \lambda(\lambda + y)^{-2} & \text{при } y \geq 0, \\ 0 & \text{при } y < 0. \end{cases}$$

Далее при $x > 0$ и $y > 0$ имеем

$$f_1(x|y) = f(x, y)/f_2(y) = x(\lambda + y)^2 \exp(-\lambda x - xy),$$

а при $x < 0$ и $y > 0$ имеем $f_1(x|y) = 0$.

Пример 5.3

Индикатор кругового обзора навигационной станции представляет собой круг радиусом R . Отраженный сигнал от ориентира с равной вероятностью может появиться в виде пятна в любой точке этого круга.

Определить математическое ожидание и дисперсию расстояния центра пятна от центра круга.

Решение

Случайное расстояние от центра экрана до пятна может быть выражено через прямоугольные координаты X и Y :

$$U = \varphi(X, Y) = (X^2 + Y^2)^{1/2}.$$

Плотность распределения вероятностей системы случайных величин (X, Y) задана и определяется формулой

$$f(x) = \begin{cases} 1/(\pi R^2) & \text{при } (x^2 + y^2) \leq R^2, \\ 0 & \text{при } (x^2 + y^2) > R^2. \end{cases}$$

Пусть H — геометрическое место точек на плоскости xOy , удовлетворяющее условию $(x^2 + y^2) \leq R^2$. Имеем

$$\begin{aligned} M[U] &= M[\varphi(X, Y)] = \int_H \int \varphi(x, y) f(x, y) dx dy = \\ &= \int_H \int (x^2 + y^2)^{1/2} f(x, y) dx dy = \frac{1}{\pi R^2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R r^2 dr = \frac{2}{3} R; \\ D[U] &= M[U^2] - (M[U])^2 = \frac{1}{\pi R^2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R r^3 dr - \left(\frac{2}{3} R\right)^2 = \frac{R^2}{18}. \end{aligned}$$

Пример 5.4

Задана плотность распределения вероятностей $f(x, y)$ системы случайных величин (X, Y) :

$$f(x, y) = \frac{20}{\pi^2(16 + x^2)(25 + y^2)}, \quad -\infty < x < \infty, \quad -\infty < y < \infty.$$

Найти интегральную функцию распределения вероятностей системы.

Решение

Воспользуемся формулой

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(x', y') dx' dy'.$$

После интегрирования получим

$$F(x, y) = \left(\frac{1}{\pi} \operatorname{arctg}(x/4) + \frac{1}{2} \right) \left(\frac{1}{\pi} \operatorname{arctg}(y/5) + \frac{1}{2} \right).$$

Пример 5.5

Система случайных величин (X, Y) распределена по закону

$$f(x, y) = \frac{A}{1 + x^2 y^2 + x^2 + y^2}, \quad -\infty < x < \infty, \quad -\infty < y < \infty.$$

Определить: а) коэффициент A ; б) являются ли величины X и Y зависимыми.

Решение

а) Условие нормировки на полную вероятность

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy = 1$$

дает $A = 1/\pi^2$.

б) Для случайных величин X и Y имеем

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy = \frac{1}{\pi(1 + x^2)}, \quad f_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx = \frac{1}{\pi(1 + y^2)}.$$

Поскольку $f(x, y) = f_1(x) \cdot f_2(y)$, то случайные величины X и Y независимы.

Пример 5.6

Известно, что двухкомпонентная система случайных величин (X, Y) задана в квадрате $\{(0, \pi/2); (0, \pi/2)\}$ и имеет плотность распределения вероятностей $f(x, y) = 0,5 \sin(x + y)$.

Определить: а) функцию распределения системы; б) математические ожидания X и Y ; в) корреляционную матрицу.

Решение

Находим функцию распределения

$$F(x, y) = \int_0^x \int_0^y 0,5 \sin(x + y) dx dy = 0,5 [\sin(x) + \sin(y) - \sin(x + y)].$$

Математическое ожидание случайной величины X

$$M[X] = 0,5 \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} x \sin(x + y) dx dy = \pi/4 \approx 0,785.$$

Дисперсия случайной величины X

$$D[X] = 0,5 \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} x^2 \sin(x+y) dx dy - (\pi/4)^2 = \pi^2/16 + \pi/2 - 2 = 0,187.$$

Из симметрии плотности распределения вероятностей относительно величин X и Y следует, что $M[Y] = M[X]$ и $D[Y] = D[X]$.

Найдем теперь корреляционный момент

$$\begin{aligned} K_{XY} &= M[XY] - M[X] M[Y] = 0,5 \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} xy \sin(x+y) dx dy - (\pi/4)^2 = \\ &= (\pi - 2)/2 - (\pi/4)^2 \approx -0,045. \end{aligned}$$

Таким образом, корреляционная матрица имеет вид :

$$K = \begin{pmatrix} 0,187 & -0,045 \\ -0,045 & 0,187 \end{pmatrix}.$$

Пример 5.7

Совместная плотность вероятности $f(x, y)$ двумерной случайной величины (X, Y) имеет вид

$$f(x, y) = \begin{cases} 4xy \exp(-x^2 - y^2) & \text{при } x \geq 0, y \geq 0, \\ 0 & \text{при } x < 0 \text{ или } y < 0. \end{cases}$$

Определить: математические ожидания m_X и m_Y величин X и Y; дисперсии $D[X]$ и $D[Y]$.

Решение

Предварительно найдем плотности вероятности величин X и Y :
для $x \geq 0$

$$f_1(x) = \int_0^{\infty} f(x, y) dy = 4x \exp(-x^2) \int_0^{\infty} y \exp(-y^2) dy = 2x \exp(-x^2),$$

для $y \geq 0$

$$f_2(y) = \int_0^{\infty} f(x, y) dx = 2y \exp(-y^2).$$

Рассмотрим теперь математическое ожидание случайной величины X

$$m_X = \int_0^{\infty} x f_1(x) dx = 2 \int_0^{\infty} x^2 \exp(-x^2) dx.$$

Так как

$$\int_0^{\infty} x^n \exp(-x^2) dx = \frac{\Gamma((n+1)/2)}{2}$$

при $n > -1$, то

$$m_x = 2 \frac{\Gamma((2+1)/2)}{2} = \Gamma(3/2) = \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

и аналогично для математического ожидания случайной величины Y

$$m_y = 2 \int_0^{\infty} y^2 \exp(-y^2) dy = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Дисперсия случайной величины X следующая :

$$D[X] = \int_0^{\infty} (x - m_x)^2 f_1(x) dx = \int_0^{\infty} x^2 f_1(x) dx - m_x^2 = 1 - \frac{\pi}{4},$$

и аналогично для дисперсии случайной величины Y .

Поэтому $D[X] = D[Y] = 1 - \pi/4$.

Пример 5.8

Случайные величины ξ и η независимы и нормально распределены с параметрами $M[\xi] = M[\eta] = a$ и $D[\xi] = D[\eta] = \sigma^2$.

Найти коэффициент корреляции величин $X = \alpha\xi + \beta\eta$ и $Y = \alpha\xi - \beta\eta$, а также их совместное распределение.

Решение

Из вида плотности распределения

$$f(\xi, \eta) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{(\xi - a)^2}{2\sigma^2} - \frac{(\eta - a)^2}{2\sigma^2}\right)$$

вытекает следующее :

$$M[X] = a(\alpha + \beta); \quad M[Y] = a(\alpha - \beta);$$

$$M[XY] = (\alpha^2 - \beta^2)(a^2 + \sigma^2); \quad D[X] = D[Y] = (\alpha^2 + \beta^2)\sigma^2.$$

Поэтому коэффициент корреляции

$$r = \frac{M[XY] - M[X] M[Y]}{\sqrt{D[X] D[Y]}} = \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha^2 + \beta^2}.$$

Для нахождения совместной плотности распределения $g(x, y)$ используем закон сохранения дифференциальной вероятности

$$g(x, y) dx dy = f(\xi, \eta) d\xi d\eta,$$

что дает

$$g(x, y) = f(\xi(x, y), \eta(x, y)) \frac{|D(\xi, \eta)|}{|D(x, y)|}.$$

Выразим исходную пару величин (ξ, η) через новые :

$$\xi = (x + y)/2\alpha, \quad \eta = (x - y)/2\beta,$$

поэтому якобиан преобразования $|D(\xi, \eta)/D(x, y)|$ равен $(2\alpha\beta)^{-1}$.

Таким образом, совместное распределение случайных величин X и Y

$$g(x, y) = \frac{1}{4\pi\alpha\beta\sigma^2} \exp\left(-\frac{(x+y-2a\alpha)^2}{8\alpha^2\sigma^2} - \frac{(x-y-2a\beta)^2}{8\beta^2\sigma^2}\right).$$

Пример 5.9

Случайная точка (X, Y) распределена по нормальному закону на плоскости

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2}\right).$$

Найти вероятность P попадания точки (X, Y) в квадрат с вершинами $(\sqrt{2}; 0)$, $(0; \sqrt{2})$, $(-\sqrt{2}; 0)$, $(0; -\sqrt{2})$.

Решение

Поскольку по условию задачи рассеяние круговое ($\sigma_x = \sigma_y = 1$), то решение задачи не изменится при любом повороте координатных осей. Поэтому при повороте на 45° получим

$$P = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(x, y) dx dy = [2\Phi(1)]^2.$$

Пользуясь таблицей функции Лапласа, находим $P = 0,466$.

Пример 5.10

Двухкомпонентный случайный вектор (ξ, η) нормально распределен, причем $M[\xi] = M[\eta] = 0$, $D[\xi] = D[\eta] = 1$, $M[\xi\eta] = r$.

Найти среднее максимума $M[\max(\xi, \eta)]$.

Решение

Пусть $\theta = \max(\xi, \eta)$. Тогда интегральная вероятность $F_\Theta(\theta)$ случайной величины Θ

$$F_\Theta(\theta) = \Pr\{\xi < \theta, \eta < \theta\} = \frac{1}{2\pi R} \int_{-\infty}^{\theta} d\xi \int_{-\infty}^{\theta} \exp\left(-\frac{\xi^2 - 2r\xi\eta + \eta^2}{2R^2}\right) d\eta,$$

где $R = (1 - r^2)^{1/2}$. Отсюда вытекает, что плотность распределения случайной величины Θ

$$f_\Theta(\theta) = \frac{1}{\pi R} \int_{-\infty}^{\theta} \exp\left(-\frac{\xi^2 - 2r\xi\theta + \theta^2}{2R^2}\right) d\xi.$$

Тогда

$$M[\Theta] = \frac{1}{\pi R} \int_{-\infty}^{\infty} \theta d\theta \int_{-\infty}^{\theta} \exp\left(-\frac{\xi^2 - 2r\xi\theta + \theta^2}{2R^2}\right) d\xi.$$

Для вычисления этого повторного интеграла сделаем замену переменной ξ по правилу $z = \xi - r\theta$, что дает

$$M[\Theta] = \frac{1}{\pi R} \int_{-\infty}^{\infty} \theta d\theta \int_{-\infty}^{\theta(1-r)} \exp\left(-\frac{\theta^2}{2} - \frac{z^2}{2R^2}\right) dz.$$

Теперь возьмем внешний интеграл по частям (переменная θ)

$$M[\Theta] = \frac{1-r}{\pi R} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{\theta^2}{2} - \frac{\theta^2(1-r)^2}{2R^2}\right) d\theta.$$

После интегрирования получим

$$M[\Theta] = M[\max(\xi, \eta)] = \sqrt{(1-r)/\pi}.$$

Пример 5.11

Двухкомпонентный случайный вектор (X, Y) нормально распределен с параметрами: $M[X] = a$, $M[Y] = b$, $D[X] = \sigma_X^2$, $D[Y] = \sigma_Y^2$; r — коэффициент корреляции между X и Y .

Доказать, что $r = \cos(\pi\mu)$, где $\mu = \Pr\{(X-a)(Y-b) > 0\}$.

Решение

Вычислим указанную вероятность

$$\mu = \iint_S f(x, y) dx dy \quad (*)$$

для плотности

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi \sigma_X \sigma_Y R} \exp\left\{-\frac{1}{2R^2} \left(\frac{(x-a)^2}{\sigma_X^2} + \frac{2r(x-a)(y-b)}{\sigma_X \sigma_Y} + \frac{(y-b)^2}{\sigma_Y^2}\right)\right\},$$

где S — область, удовлетворяющая условию $(x-a)(y-b) > 0$, и $R^2 = 1 - r^2$.

Перейдем в двойном интеграле для μ к новым переменным интегрирования

$$\xi = (x-a)/(\sqrt{2}\sigma_X), \quad \eta = (y-b)/(\sqrt{2}\sigma_Y),$$

тогда

$$\mu = \frac{1}{\pi R} \iint_H \exp\left(-\frac{\xi^2 + 2r\xi\eta + \eta^2}{1-r^2}\right) d\xi d\eta,$$

где H — область, удовлетворяющая условию $\xi\eta > 0$. Это условие справедливо для первого и третьего квадрантов, поэтому дальше будем интегрировать по первому квадранту, а результат удвоим.

Перейдем к полярным координатам: $\xi = \rho \cos \varphi$, $\eta = \rho \sin \varphi$, тогда

$$\mu = \frac{2}{\pi R} \int_0^{\infty} \int_0^{\pi/2} \exp\left(-\frac{\rho^2}{2}[1 + 2r \sin \varphi \cos \varphi]\right) \rho d\rho d\varphi = \frac{R}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{1 + r \sin 2\varphi}.$$

После интегрирования найдем

$$\mu = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg}(r/R),$$

что дает $r/\sqrt{1-r^2} = \operatorname{ctg}(\pi\mu)$.

Поэтому получим окончательно $r = \cos(\pi\mu)$.

Пример 5.12

Задана функция распределения вероятностей двумерной случайной величины

$$F(x, y) = \begin{cases} \sin x \sin y & \text{при } 0 \leq x \leq \pi/2 \text{ и } 0 \leq y \leq \pi/2, \\ 0 & \text{при } x < 0, x > \pi/2 \text{ или } y < 0, y > \pi/2. \end{cases}$$

Найти вероятность P попадания случайной точки (X, Y) в прямоугольник, ограниченный прямыми $x = 0$, $x = \pi/4$, $y = \pi/6$, $y = \pi/3$.

Решение

Воспользуемся формулой

$$P = \Pr\{\alpha < X < \beta, \gamma < Y < \delta\} = F(\beta, \delta) - F(\alpha, \delta) - F(\beta, \gamma) + F(\alpha, \gamma).$$

Положив $\alpha = 0$, $\beta = \pi/4$, $\gamma = \pi/6$, $\delta = \pi/3$, получим

$$\begin{aligned} P &= \sin(\pi/4) \sin(\pi/3) - \sin(0) \sin(\pi/3) - \sin(\pi/4) \sin(\pi/6) + \sin(0) \sin(\pi/6) = \\ &= (\sqrt{6} - \sqrt{2})/4 \approx 0,26. \end{aligned}$$

Пример 5.13

Тело взвешивается на аналитических весах. Истинное (неизвестное нам) значение массы тела равно a . Вследствие наличия ошибок результат каждого взвешивания случаен и распределяется по нормальному закону с параметрами a и σ . Для уменьшения ошибок тело независимо взвешивают n раз, и в качестве приближенного значения массы берут среднее арифметическое (*выборочное среднее*) результатов n взвешиваний:

$$Y(n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i.$$

Найти: а) характеристики случайной величины $Y(n)$: математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение; б) сколько нужно сделать взвешиваний для того, чтобы уменьшить в десять раз среднюю квадратическую ошибку массы?

Решение

а) Имеем

$$M[Y(n)] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n M[X_i].$$

Так как все взвешивания производятся в одинаковых условиях, то для случайных величин $X_1, X_2, \dots, X_n$ имеем $M[X_i] = a$ при любом i . Тогда

$$M[Y(n)] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a = a.$$

Принимая, что ошибки отдельных взвешиваний независимыми, находим дисперсию $Y(n)$:

$$D[Y(n)] = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n D[X_i] = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sigma_i^2 = \sigma^2/n.$$

б) Число взвешиваний n находим из условия

$$\sigma[Y(n)] = \sqrt{\sigma^2/n} = \sigma/\sqrt{n} = \sigma/10,$$

откуда $n = 100$.

Пример 5.14 (Закон Релея)

Случайные величины X и Y имеют одинаковые нормальные распределения с нулевым математическим ожиданием и дисперсией σ^2 .

Определить закон распределения (рис. 5.5) модуля R вектора (X, Y) .

Решение

Искомую плотность распределения вероятностей $f_R(r)$ можно записать в виде

$$f_R(r) = M[\delta(r - \sqrt{X^2 + Y^2})]_{XY} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(r - \sqrt{x^2 + y^2}) f_{XY}(x, y) dx dy,$$

где скобками $M[\dots]_{XY}$ обозначена операция нахождения математического ожидания относительно случайных величин X и Y .

Из определения δ -функции Дирака следует, что для любого заданного a имеем $\delta(ax) = |a|^{-1} \delta(x)$, поэтому, с учетом её четности,

$$\begin{aligned} f_R(r) &= 2r M[\delta(r^2 - X^2 - Y^2)]_{XY} = 2r \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x^2 + y^2 - r^2) f_{XY}(x, y) dx dy = \\ &= \frac{2r}{2\pi\sigma^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x^2 + y^2 - r^2) \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2\sigma^2}\right) dx dy. \end{aligned}$$

В получившемся интеграле перейдем от декартовых переменных интегрирования x и y к полярным $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$, что дает

$$f_R(r) = \frac{r}{\pi\sigma^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} \delta(\rho^2 - r^2) \exp\left(-\frac{\rho^2}{2\sigma^2}\right) \rho d\rho d\varphi.$$

После интегрирования по полярному углу φ и замены $t = \rho^2$ найдем

$$f_R(r) = \frac{r}{2\sigma^2} \int_0^{\infty} \delta(t - r^2) \exp\left(-\frac{t}{2\sigma^2}\right) dt,$$

что дает окончательно для искомой плотности распределения

$$f_R(r) = \frac{r}{2\sigma^2} \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right), \quad r \geq 0.$$

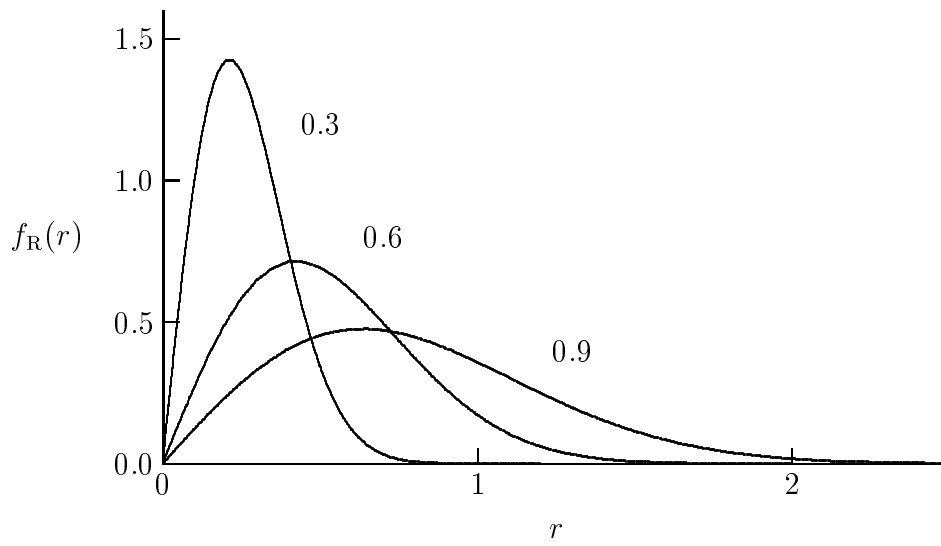


Рисунок 5.5 — Плотность распределения $f_R(r)$ закона Релея; $\sigma = 0,3; 0,6; 0,9$

Получившееся выражение называется *закон Релея* (рис. 5.5).

Пример 5.15 (Закон Релея-Райса)

Случайные величины X и Y имеют одинаковые нормальные распределения с нулевым математическим ожиданием и дисперсией σ^2 . К каждой из компонент добавлена детерминированная величина, равная $s/\sqrt{2}$, где s – заданная константа (сигнал).

Определить закон распределения вероятностей модуля R вектора $(X - s/\sqrt{2}, Y - s/\sqrt{2})$ на плоскости.

Решение

При $s = 0$ задача была рассмотрена выше (распределение Релея).

При $s \neq 0$ аналогично запишем

$$\begin{aligned} f_R(r) &= M \left[\delta \left(r - \sqrt{(X - s/\sqrt{2})^2 + (Y - s/\sqrt{2})^2} \right) \right]_{XY} = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta \left(r - \sqrt{(x - s/\sqrt{2})^2 + (y - s/\sqrt{2})^2} \right) f_{XY}(x, y) dx dy, \end{aligned}$$

где скобками $M[\dots]_{XY}$ обозначена операция нахождения математического ожидания относительно случайных величин X и Y .

Это дает

$$f_R(r) = \frac{r}{\pi\sigma^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x^2 + y^2 - r^2) \exp \left(-\frac{(x - s/\sqrt{2})^2 + (y - s/\sqrt{2})^2}{2\sigma^2} \right) dx dy.$$

В получившемся интеграле перейдем от декартовых переменных интегрирования x и y к полярным $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$:

$$f_R(r) = \frac{r}{\pi\sigma^2} \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} \delta(\rho^2 - r^2) \exp \left(-\frac{\rho^2 - \sqrt{2}\rho s(\cos \varphi + \sin \varphi) + s^2}{2\sigma^2} \right) \rho d\rho d\varphi.$$

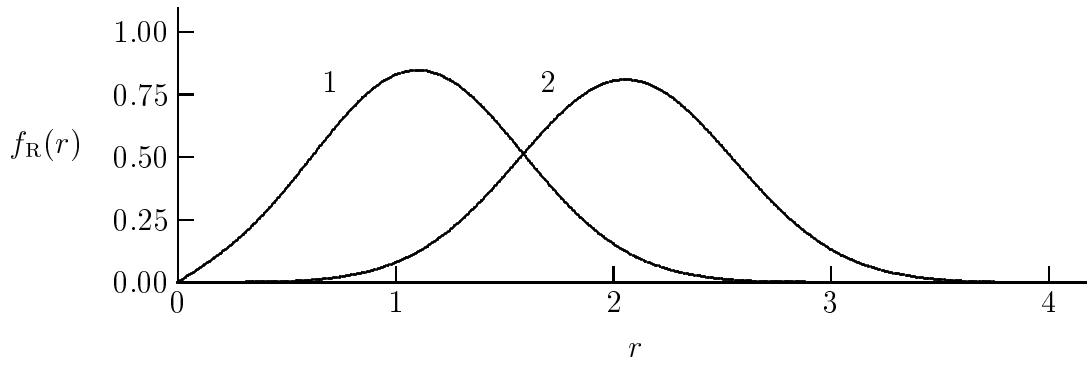


Рисунок 5.6 — Плотность распределения $f_R(r)$ закона Релея-Райса; $s = 1, 2$; $\sigma = 0,5$

В этом интеграле произведем сдвиг угловой переменной на $5\pi/4$:

$$f_R(r) = \frac{r}{\pi\sigma^2} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \delta(\rho^2 - r^2) \exp\left(-\frac{\rho^2 + 2\rho s \cos \varphi + s^2}{2\sigma^2}\right) \rho d\rho d\varphi.$$

Получившийся интеграл по φ не берется в элементарных функциях. Поэтому используем представление для *модифицированной функции Бесселя нулевого индекса*

$$I_0(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp(z \cos \varphi) d\varphi.$$

Тогда

$$f_R(r) = \frac{2r}{\sigma^2} \int_0^\infty \delta(\rho^2 - r^2) \exp\left(-\frac{\rho^2 + s^2}{2\sigma^2}\right) I_0(\rho s/\sigma^2) \rho d\rho.$$

После замены $t = \rho^2$ и последующего интегрирования найдем окончательно для искомой плотности распределения

$$f_R(r) = \frac{r}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{r^2 + s^2}{2\sigma^2}\right) I_0(rs/\sigma^2), \quad r \geq 0.$$

Полученное выражение называется *закон Релея-Райса* (рис. 5.6).

Пример 5.16 (Уравнения регрессии)

Совместная плотность вероятности $f(x, y)$ гауссовского распределения двумерной случайной величины (X, Y) имеет вид:

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi \sigma_X \sigma_Y \sqrt{1 - r_{XY}^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1 - r_{XY}^2)} Q(x, y)\right\},$$

где

$$Q(x, y) = \frac{(x - m_X)^2}{\sigma_X^2} - 2r_{XY} \frac{(x - m_X)(y - m_Y)}{\sigma_X \sigma_Y} + \frac{(y - m_Y)^2}{\sigma_Y^2},$$

и $m_X, m_Y, \sigma_X, \sigma_Y, r_{XY}$ – параметры распределения.

Определить: а) плотности вероятностей $f_1(x)$ и $f_2(y)$ случайных величин X и Y ; б) условные плотности вероятностей $f_1(x|y)$ и $f_2(y|x)$ случайных величин X и Y .

Решение

а) Имеем

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy.$$

Используем замену переменных по правилу

$$u = (x - m_X)/(\sqrt{2}\sigma_X), \quad v = (y - m_Y)/(\sqrt{2}\sigma_Y),$$

тогда запишем

$$f_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(1-r_{XY}^2)}\sigma_X} \exp\left(-\frac{u^2}{1-r_{XY}^2}\right) \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{v^2}{1-r_{XY}^2} + \frac{2vr_{XY}}{1-r_{XY}^2}\right) dv.$$

Известно, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-p^2 x^2 \pm qx) dx = \frac{\sqrt{\pi}}{p} \exp\left(\frac{q^2}{4p^2}\right).$$

Воспользовавшись этим интегралом, найдем

$$f_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_X} \exp(-u^2),$$

что дает

$$f_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_X} \exp\left(-\frac{(x - m_X)^2}{2\sigma_X^2}\right).$$

Таким образом, величина X подчинена нормальному закону, имеющему параметры m_X, σ_X .

Произведя аналогичные вычисления, получим

$$f_2(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_Y} \exp\left(-\frac{(y - m_Y)^2}{2\sigma_Y^2}\right).$$

б) Находим условные плотности вероятностей:

$$f_2(y|x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(1-r_{XY}^2)}\sigma_Y} \exp\left(-\frac{[y - m_Y - r_{XY}(x - m_X)\sigma_Y/\sigma_X]^2}{(1-r_{XY}^2)\sigma_Y}\right).$$

аналогично

$$f_1(x|y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(1-r_{XY}^2)}\sigma_X} \exp\left(-\frac{[x - m_X - r_{XY}(y - m_Y)\sigma_X/\sigma_Y]^2}{(1-r_{XY}^2)\sigma_X}\right).$$

Из этих выражений следует, что $f_2(y|x)$ и $f_1(x|y)$ представляют собой нормальные плотности вероятности с параметрами:

$$\begin{aligned} m_{Y|X} &= m_Y + r_{XY}(x - m_X)\sigma_Y/\sigma_X, & \sigma_{Y|X} &= \sigma_Y\sqrt{1 - r_{XY}^2}, \\ m_{X|Y} &= m_X + r_{XY}(y - m_Y)\sigma_X/\sigma_Y, & \sigma_{X|Y} &= \sigma_X\sqrt{1 - r_{XY}^2}. \end{aligned}$$

Найденные зависимости называются *уравнениями регрессии*. С помощью уравнений регрессии оценивают зависимость одной случайной величины от другой.

Пример 5.17

В области с границей $x^2 + y^2 = R^2$ плотность распределения вероятностей системы случайных величин (X, Y) равна $f(x, y) = A[R - (x^2 + y^2)^{1/2}]$, вне области $f(x, y) = 0$.

Найти: а) постоянную A ; б) вероятность P попадания случайной точки (X, Y) в область радиусом $r = 1$ с центром в начале координат, если $R = 2$.

Решение

а) Если все возможные значения системы (X, Y) принадлежат области D , то

$$\iint_D f(x, y) dx dy = 1.$$

В нашем случае область D – это круг радиусом R с центром в начале координат. После интегрирования получаем $A\pi R^2 = 1$, что дает $A = 1/(\pi R^2)$. Поэтому

$$f(x, y) = [R - (x^2 + y^2)^{1/2}] / (\pi R^2).$$

б) Пусть область G – это круг радиусом r с центром в начале координат. Тогда искомая вероятность

$$P = \iint_G f(x, y) dx dy.$$

После вычисления интеграла найдем $P = (r/R)^2(3 - 2r/R)$.

При $r = 1$ и $R = 2$ искомая вероятность: $P = 1/2$.

Пример 5.18 (Квадратичные формы и нормальный закон)

Рассмотрим нормальный закон (5.33) на плоскости. Выполним замену переменных по правилу

$$u = x - m_X, \quad v = y - m_Y,$$

т.е. совместим начало координат с точкой (m_X, m_Y) , тогда для плотности распределения системы (U, V) получим

$$f(u, v) = \frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1 - r_{XY}^2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2(1 - r_{XY}^2)} \left(\frac{u^2}{\sigma_X^2} - 2r_{XY}\frac{uv}{\sigma_X\sigma_Y} + \frac{v^2}{\sigma_Y^2} \right) \right\}. \quad (1)$$

Выражение в показателе экспоненты удобно записывать в терминах *квадратичной формы* $Q(u, v)$ следующего вида:

$$Q(u, v) = \frac{1}{1 - r_{XY}^2} \left(\frac{u^2}{\sigma_X^2} - 2r_{XY}\frac{uv}{\sigma_X\sigma_Y} + \frac{v^2}{\sigma_Y^2} \right) = (u, v)K^{-1} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \quad (2)$$

где K – корреляционная матрица двухкомпонентной нормальной величины,

$$K = \begin{pmatrix} \sigma_x^2 & r_{xy}\sigma_x\sigma_y \\ r_{xy}\sigma_x\sigma_y & \sigma_y^2 \end{pmatrix}. \quad (3)$$

В новых обозначениях плотность $f(u, v)$ системы (U, V) следующая:

$$f(u, v) = \frac{1}{2\pi \sqrt{\det K}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (u, v) K^{-1} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right\}. \quad (4)$$

Векторно-матричные обозначения типа (4) допускают простое обобщение на многокомпонентный случай.

Рассмотрим теперь задачу о приведении плотности (4) к *канонической форме*, в которой квадратичная форма диагональна, т.е. состоит лишь из квадратов переменных. Используя унитарную матрицу T вращения на плоскости, выполним преобразование поворота

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \quad (5)$$

с углом поворота φ от старых осей (u, v) к новым (x', y') .

В переменных (x', y') плотность f запишется в виде

$$f(x', y') = \frac{1}{2\pi \sqrt{\det K}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (x', y') T K^{-1} T^{-1} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \right\}. \quad (6)$$

Найдем такой угол вращения φ , для которого матрица $T K^{-1} T^{-1}$ станет диагональной матрицей D^{-1} , т.е.

$$T K^{-1} T^{-1} = D^{-1} \equiv \begin{pmatrix} \lambda_1^{-1} & 0 \\ 0 & \lambda_2^{-1} \end{pmatrix} \quad (7)$$

с собственными числами λ_1 и λ_2 .

Из (3) и (7) следует, что спектр (λ_1, λ_2) корреляционной матрицы K определяется характеристическим уравнением

$$\det(K - \lambda E) = \lambda^2 - (\sigma_x^2 + \sigma_y^2)\lambda + (1 - r_{xy}^2)\sigma_x^2\sigma_y^2 = 0, \quad (8)$$

что дает

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{1}{2} \left[(\sigma_x^2 + \sigma_y^2) + \sqrt{(\sigma_x^2 - \sigma_y^2)^2 + 4r_{xy}^2\sigma_x^2\sigma_y^2} \right], \\ \lambda_2 &= \frac{1}{2} \left[(\sigma_x^2 + \sigma_y^2) - \sqrt{(\sigma_x^2 - \sigma_y^2)^2 + 4r_{xy}^2\sigma_x^2\sigma_y^2} \right]. \end{aligned} \quad (9)$$

Если теперь в (7) рассмотреть, например, левый верхний матричный элемент, то найдем

$$\sigma_x^2 \cos \varphi + r_{xy}\sigma_x\sigma_y \sin \varphi = \lambda_1 \cos \varphi. \quad (10)$$

Поэтому для угла φ приведения к диагональной (канонической) форме получим

$$\operatorname{tg} \varphi = -\frac{\sigma_x^2 - \sigma_y^2 + \sqrt{(\sigma_x^2 - \sigma_y^2)^2 + 4r_{xy}^2\sigma_x^2\sigma_y^2}}{2r_{xy}\sigma_x\sigma_y}. \quad (11)$$

Тогда плотность $f(x', y')$ примет вид

$$f(x', y') = \frac{1}{2\pi\sqrt{\lambda_1\lambda_2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{(x')^2}{\lambda_1} + \frac{(y')^2}{\lambda_2} \right) \right\} \quad (12)$$

с дисперсиями

$$\begin{aligned} M[X'^2] &= \lambda_1 = \frac{1}{2} \left[(\sigma_x^2 + \sigma_y^2) + \sqrt{(\sigma_x^2 - \sigma_y^2)^2 + 4r_{xy}^2 \sigma_x^2 \sigma_y^2} \right], \\ M[Y'^2] &= \lambda_2 = \frac{1}{2} \left[(\sigma_x^2 + \sigma_y^2) - \sqrt{(\sigma_x^2 - \sigma_y^2)^2 + 4r_{xy}^2 \sigma_x^2 \sigma_y^2} \right]. \end{aligned} \quad (13)$$

При выполнении условия $r_{xy} = 0$ имеем круговое распределение в терминах отнормированных переменных X'/σ_x и Y'/σ_y . Если же $r_{xy} \rightarrow 1$, то дисперсия $M[Y'^2]$ стремится к нулю. В этом предельном случае плотность распределения $f(x', y')$ фактически зависит лишь от одного аргумента, принимая вид

$$f(x', y') = \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma_x^2 + \sigma_y^2)}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \frac{(x')^2}{\sigma_x^2 + \sigma_y^2} \right\} \delta(y'). \quad (14)$$

Пример 5.19

Вектор X образован из набора из n компонент и распределен по многомерному нормальному закону с корреляционной матрицей K и вектором математических ожиданий $X_c = (X_{c1}, X_{c2}, \dots, X_{cn})$.

Найти дисперсию $D[X]$ случайного вектора X .

Решение

Выпишем выражение для дисперсии случайного вектора

$$D[X] = M[(X - X_c)^T (X - X_c)], \quad (1)$$

здесь "Т" — символ транспонирования. С помощью выражения для плотности распределения вероятностей случайного вектора X запишем искомую дисперсию в виде многократного интеграла

$$D[X] = \int \int^{(n)} (X - X_c)^T (X - X_c) f(X) d^n X, \quad (2)$$

где индексом n у дифференциала $d^n X$ указана кратность интегрирования. По условию плотность распределения $f(X)$ имеет вид

$$f(X) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det(K)}} \exp \left(-\frac{1}{2} (X - X_c)^T K^{-1} (X - X_c) \right). \quad (3)$$

Выполним в интегральном представлении для дисперсии сдвиг переменных интегрирования по правилу $x_i \rightarrow x_i - x_{c,i}$ для всех $i = 1, 2, \dots, n$. Тогда

$$D[X] = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det(K)}} \int \int^{(n)} (X^T X) \exp \left(-\frac{1}{2} X^T K^{-1} X \right) d^n X. \quad (4)$$

Дисперсия является скалярной величиной, в то время как единственный свободный параметр справа в получившемся выражении – это корреляционная матрица K . Поэтому ответ должен быть выражен в терминах скалярных инвариантов этой матрицы.

В получившемся интеграле выполним еще одну замену переменных интегрирования по правилу $X = K^{1/2}Y$. Такую замену здесь можно произвести, поскольку матрица K – симметричная. Тогда

$$(X^T X) = (Y^T K Y), \quad (5)$$

а для дифференциала $d^n X$ запишем

$$d^n X = \sqrt{\det(K)} d^n Y. \quad (6)$$

Имеем

$$\begin{aligned} D[X] &= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n}} \int \int^{(n)} (Y^T K Y) \exp\left(-\frac{1}{2}(Y^T Y)\right) d^n Y = \\ &= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n}} \int \int^{(n)} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n y_i y_j K_{ij} \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{m=1}^n y_m^2\right) dy_1 dy_2 \dots dy_n. \end{aligned} \quad (7)$$

В этом выражении дают вклад в сумму лишь те слагаемые, у которых переменные приведены в квадрате, а остальные слагаемые тождественно равны нулю в силу нечетности подинтегральной функции. Поэтому

$$D[X] = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n}} \int \int^{(n)} \sum_{i=1}^n y_i^2 K_{ii} \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{m=1}^n y_m^2\right) dy_1 dy_2 \dots dy_n. \quad (8)$$

Теперь выполним в каждом i -м слагаемом суммы интегрирование по всем переменным, отличным от y_i ,

$$D[X] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{i=1}^n K_{ii} \int_{-\infty}^{\infty} y_i^2 \exp\left(-\frac{1}{2} y_i^2\right) dy_i, \quad (9)$$

что после интегрирования по y_i дает окончательно

$$D[X] = \sum_{i=1}^n K_{ii} = \text{Sp}(K). \quad (10)$$

Таким образом, искомая дисперсия случайной векторной величины X равна сумме диагональных элементов $\text{Sp}(K)$ корреляционной матрицы K системы.

Пример 5.20

При построении законов χ^2 и Стьюдента было принято допущение, что случайные величины $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ являются некоррелированными. На практике может оказаться, что величины $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ являются частично коррелированными, или может отсутствовать информация про степень их коррелированности.

В настоящем примере рассмотрим степень влияния коррелированности компонент случайных величин $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ на стандартные статистические законы типа χ^2 и Стьюдента.

Рассмотрение будет проведено при следующих предположениях:

а) Используемая последовательность величин $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ является стационарной со средним

$$M[X_k^2] = \sigma^2, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (1)$$

и скоррелированной с коэффициентом корреляции ρ

$$M[X_k X_{k+1}] = \rho \sigma^2, \quad k = 1, 2, \dots, n-1. \quad (2)$$

б) Последовательность величин $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ статистически описывается с помощью равновесной ($k = 0$)

$$f(x_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{x_0^2}{2\sigma^2}\right) \quad (3)$$

и переходных ($k = 1, 2, \dots, n$)

$$f(x_k, k\tau; x_{k+1}, k\tau + \tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(1-\rho^2)}\sigma} \exp\left(-\frac{(x_{k+1} - \rho x_k)^2}{2(1-\rho^2)\sigma^2}\right) \quad (4)$$

плотностей распределения вероятностей.

в) Дополнительная случайная величина Y , используемая далее в распределении Стьюдента, является нормальной, независимой от совокупности $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$, при этом она также имеет интенсивность σ^2 .

Теорема 1

В принятых предположениях аддитивный функционал

$$J = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k^2 \quad (5)$$

имеет равновесную производящую функцию

$$Q_J(\lambda; \rho, n) \equiv M[\exp(-\lambda J)]_J \quad (6)$$

следующего вида

$$Q_J(\lambda; \rho, n) = \sqrt{(1-\rho^2) R \left[(a_+ - \rho^2)^2 a_+^{n-1} - (a_- - \rho^2)^2 a_-^{n-1} \right]^{-1}}, \quad (7)$$

где

$$a_{\pm} = \frac{1}{2} \left(1 + \rho^2 + \frac{\lambda \sigma^2 (1 - \rho^2)}{n} \pm R \right), \quad (8a)$$

$$R = \left[\left(1 + \rho^2 + \frac{\lambda \sigma^2 (1 - \rho^2)}{n} \right)^2 - 4\rho^2 \right]^{1/2}. \quad (8b)$$

Доказательство

Вычисляя возникающий $(n + 1)$ -кратный интеграл гауссовского типа

$$Q_J(\lambda; \rho, n) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx_0}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx_1}{\sqrt{2\pi(1-\rho^2)}\sigma} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx_n}{\sqrt{2\pi(1-\rho^2)}\sigma} \times \\ \times \exp\left(-\frac{x_0^2}{2\sigma^2} - \sum_{k=1}^n \frac{(x_k - \rho x_{k-1})^2}{2(1-\rho^2)\sigma^2} - \frac{\lambda}{n} \sum_{k=1}^n x_k^2\right),$$

приходим к (7).

Плотность распределения вероятностей $g_J(J)$ случайной величины J связана с производящей функцией $Q_J(\lambda; \rho, n)$ обратным преобразованием Лапласа.

Теорема 2

Для допустимых значений коэффициента корреляции q случайная величина – стандартизованное отношение Стьюдента $T = Y/\sqrt{J}$ имеет функцию распределения $F_T(t)$ вида

$$F_T(t) = 1 - \frac{\text{sgn}(t)}{\pi} \int_0^{\infty} Q_J\left(\frac{1+t^2}{2}\theta^2; \rho, n\right) \frac{d\theta}{1+\theta^2}. \quad (9)$$

Доказательство

Для равновесной характеристической функции $\Psi_T(\xi)$ случайной величины T имеем (везде далее величину σ^2 будем опускать)

$$\Psi_T(\xi) = M \left[\exp(i \xi Y / \sqrt{J}) \right]_{Y,J}. \quad (10)$$

Из имеющихся двух случайных величин, пользуясь (3), выполним усреднение по Y

$$\Psi_T(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy}{\sqrt{2\pi}} \exp(-y^2/2) M \left[\exp(i \xi y / \sqrt{J}) \right]_J = M \left[\exp(-\xi^2/2J) \right]_J. \quad (11)$$

Отсюда для плотности распределения $f_T(t)$ случайной величины T имеем

$$f_T(t) = M \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{J} \exp(-t^2 J/2) \right]_J = \int_0^{\infty} \frac{dJ}{\sqrt{2\pi}} g_J(J) \sqrt{J} \exp(-t^2 J/2), \quad (12)$$

где $g_J(J)$ – плотность распределения вероятностей случайной величины J , отвечающая производящей функции $Q_J(\lambda; \rho, n)$ (7). Поэтому и на основании (3) для закона распределения $F_T(t)$ случайной величины T получаем, интегрируя по контуру Бромвича C ,

$$F_T(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_C d\lambda Q_J(\lambda; q, n) \int_{-\infty}^t d\varphi (\varphi^2 - 2\lambda)^{-3/2}. \quad (13)$$

После интегрирования по φ и обхода точки ветвления $\lambda_0 = t^2/2$ на комплексной λ -плоскости приходим к (9).

Полученные выше выражения (7) и (12) справедливы для любых допустимых значений коррелятора ρ , в том числе и нулевых. При $\rho = 0$ формулы (7) и (12) переходят в известные выражения для распределения χ^2 и распределения Стюдента.

Пример 5.21

В этом примере рассмотрим технику применения δ -функции Дирака при вычислении производящих функций распределения и связанных с ними законов распределения случайных величин.

1. Рассмотрим случайную величину X , подчиняющуюся закону Пуассона с параметром a . Поскольку возможные значения X таковы, что $X \geq 0$, распределению этой случайной величины отвечает *производящая функция*

$$q(\lambda) = M[\exp(-\lambda X)] = \sum_{m=0}^{\infty} \exp(-\lambda m) P_m.$$

Это выражение имеет форму стандартного преобразования Лапласа с параметром λ относительно закона распределения вероятностей случайной величины X .

Используя известные выражения для набора амплитуд вероятностей $\{P_m\}$, где $m = 0, 1, 2 \dots$, пуассоновской случайной величины X , запишем для производящей функции

$$q(\lambda) = \sum_{m=0}^{\infty} \exp(-\lambda m) \frac{a^m}{m!} \exp(-a).$$

Итак, находим

$$q(\lambda) = \exp(-a + ae^{-\lambda}).$$

2. На основе полученного выражения для производящей функции $q(\lambda)$ найдем теперь закон распределения $f_x(x)$ случайной величины X , т.е. рассмотрим обратную задачу. При этом будем иметь в виду общий случай и будем пользоваться выражениями, действительными для случайных величин как непрерывного, так и дискретного типа. А именно, для нахождения плотности $f_x(x)$ используем обратное преобразование Лапласа:

$$f_x(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \exp(\lambda x) q(\lambda) d\lambda,$$

где C — контур Бромвича.

Выбор контура интегрирования C необходимо выполнить таким образом, чтобы на комплексной λ -плоскости оставить *слева* от него все возможные особенности подинтегрального выражения (полюса и др.).

Из вида производящей функции $q(\lambda)$ вытекает, что в качестве контура интегрирования C можно выбрать мнимую ось. Имеем,

$$f_x(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \exp(\lambda x) q(\lambda) d\lambda,$$

что после замены $\lambda = iy$ дает

$$f_x(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(iyx) \exp(-a + ae^{-iy}) dy.$$

Выразим теперь экспоненту, пользуясь рядом Тейлора,

$$f_x(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(iyx) \exp(-a) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a^m}{m!} e^{-iy m} dy$$

и переставим порядок интегрирования и суммирования

$$f_x(x) = \exp(-a) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a^m}{m!} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(iyx - iym) dy.$$

Используем интегральное представление для δ -функции Дирака

$$\delta(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(iyz) dy.$$

Это дает

$$f_x(x) = \exp(-a) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a^m}{m!} \delta(x - m).$$

Итак, получаем

$$f_x(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \delta(x - m) P_m, \quad P_m = \frac{a^m}{m!} \exp(-a), \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

Найденное выражение показывает, что случайная величина пуассоновского типа подчиняется закону распределения $f_x(x)$, который отличается от нуля только для целых значений m своего аргумента x . При этом для $m = 0, 1, 2, \dots$ вероятность события $\{X = m\}$ равняется P_m .

5.9. Задачи для решения

Задача 5.1

Плотность вероятности двумерной случайной величины (X, Y) определяется формулой $f(x, y) = 0,5 \sin(x + y)$, при $0 \leq x \leq \pi/2$, $0 \leq y \leq \pi/2$.

Определить: математические ожидания m_x и m_y , дисперсии $D[X]$ и $D[Y]$ случайных величин X и Y , корреляционную и нормированную корреляционную матрицы.

Ответ: $m_x = m_y = 0,785$; $D[X] = D[Y] = 0,188$;

$$K = \begin{pmatrix} 0,188 & -0,046 \\ -0,046 & 0,188 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 1,000 & -0,245 \\ -0,245 & 1,000 \end{pmatrix}.$$

Задача 5.2

Плотность вероятностей $f(x, y)$ системы двух случайных величин (X, Y) задана выражением $f(x, y) = (A/\pi) \exp(-x^2 + 6x - y^2 - 2y - 12)$.

Определить: а) коэффициент A ; б) плотности вероятностей $f_1(x)$ и $f_2(y)$ соответственно величин X и Y ; в) являются ли случайные величины X и Y зависимыми.

Ответ:

а) $A = e^2$;

б) $f_1(x) = \pi^{-1/2} \exp[-(x-3)^2]$; $f_2(y) = \pi^{-1/2} \exp[-(y+1)^2]$;

в) случайные величины X и Y независимы.

Задача 5.3

На отрезок длиной L наугад брошены две точки.

Найти математическое ожидание и дисперсию расстояния X между ними.

Ответ: $M[X] = L/3$; $D[X] = L^2/18$.

Задача 5.4

На окружность радиусом R с центром в начале координат наугад брошена точка.

Найти математическое ожидание площади S квадрата со стороной, равной абсциссе этой точки.

Ответ: $M[S] = R^2/4$.

Задача 5.5

Задана интегральная вероятность двумерной случайной величины

$$F(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0 \text{ или } y < 0; \\ 1 - 3^{-x} - 3^{-y} + 3^{-x-y} & \text{при } x \geq 0 \text{ и } y \geq 0. \end{cases}$$

Найти плотность распределения вероятностей системы (X, Y) .

Ответ: искомая плотность $f(x, y)$ распределения вероятностей определяется выражениями:

$$f(x, y) = (\ln 3)^2 \cdot 3^{-x-y} \quad \text{при } x \geq 0, y \geq 0;$$

$$f(x, y) = 0 \quad \text{при } x < 0 \text{ или } y < 0.$$

Задача 5.6

Две точки выбраны наугад на смежных сторонах прямоугольника со сторонами a и b .

Найти математическое ожидание расстояния L между этими точками.

Ответ:

$$M[L] = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{3} + \frac{a^2}{6b} [\ln(b + \sqrt{a^2 + b^2}) - \ln a] + \frac{b^2}{6a} [\ln(a + \sqrt{a^2 + b^2}) - \ln b].$$

Задача 5.7

Плотность вероятности $f(x, y)$ системы двух случайных величин (X, Y) имеет вид $f(x, y) = A/(1 + x^2 + y^2 + x^2 y^2)$.

Определить: а) коэффициент A ; б) вероятность P попадания величины (X, Y) в квадрат: $\{-1 \leq x \leq 1; -1 \leq y \leq 1\}$; в) функции распределения $F(x, y)$, $F_1(x)$, $F_2(y)$; г) плотности распределения вероятностей $f_1(x)$ и $f_1(y)$ и зависимость случайных величин X и Y .

Ответ :

а) $A = 1/\pi^2$;

б) $P = 0,25$;

в) $F(x, y) = \pi^{-2}(\arctg(x) + \pi/2)(\arctg(y) + \pi/2)$;

$$F_1(x) = \pi^{-1}(\arctg(x) + \pi/2), \quad F_2(y) = \pi^{-1}(\arctg(y) + \pi/2),$$

г) $f_1(x) = \pi^{-1}(1+x^2)^{-1}, \quad f_1(y) = \pi^{-1}(1+y^2)^{-1}.$

Задача 5.8

Двухкомпонентный случайный вектор (ξ, η) нормально распределен, причем $M[\xi] = M[\eta] = 0$, $D[\xi] = D[\eta] = 1$, $M[\xi\eta] = r$.

Найти среднее минимума $M[\min(\xi, \eta)]$.

Ответ : $M[\min(\xi, \eta)] = -\sqrt{(1-r)/\pi}$.

Задача 5.9

Имеются две независимые случайные величины X и Y , подчиненные каждая показательному закону:

$$f_1(x) = \lambda \exp(-\lambda x), \quad x \geq 0; \quad f_2(y) = \mu \exp(-\mu y), \quad y \geq 0.$$

Написать выражения: а) совместной плотности; б) функции распределения системы (X, Y) .

Ответ :

$$\text{а) } f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0 \text{ или } y < 0; \\ \lambda\mu \exp(-\lambda x - \mu y) & \text{при } x \geq 0 \text{ и } y \geq 0. \end{cases}$$

$$\text{б) } F(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0 \text{ или } y < 0; \\ (1 - e^{-\lambda x})(1 - e^{-\mu y}) & \text{при } x \geq 0 \text{ и } y \geq 0. \end{cases}$$

Задача 5.10

Случайные величины X и Y связаны соотношением $pX + qY = c$, где p, q и c – неслучайные величины, причем $p \neq 0$ и $q \neq 0$.

Найти: а) коэффициент корреляции r_{XY} ; б) отношение среднеквадратических отклонений σ_X / σ_Y .

Ответ :

а) если выполняется $(p/q) < 0$, то $r_{XY} = +1$, если же $(p/q) > 0$, то $r_{XY} = -1$;

б) $\sigma_X / \sigma_Y = p/q$.

Задача 5.11

Непрерывная двумерная случайная величина (X, Y) распределена равномерно внутри прямоугольника с центром симметрии в начале координат и сторонами, длины которых $2a$ и $2b$, параллельными координатным осям.

Найти плотности распределения вероятностей: а) случайной системы (X, Y) ; б) случайной величины X ; в) случайной величины Y .

Ответ :

а) $f(x, y) = 1/(4ab)$ внутри заданного прямоугольника,

$f(x, y) = 0$ вне заданного прямоугольника;

б) $f_1(x) = 1/2a$ при $x < a$, $f_1(x) = 0$ при $x > a$;

в) $f_2(y) = 1/2b$ при $y < b$, $f_2(y) = 0$ при $y > b$.

Задача 5.12

Имеются две независимые случайные величины X и Y . Величина X распределена по нормальному закону с параметрами $m = 1$, $\sigma^2 = 4$

$$f_1(x) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-1)^2}{8}\right).$$

Величина Y распределена равномерно в интервале $[0; 2]$.

Определить: $M[X+Y]$; $M[XY]$; $M[X^2]$; $M[Y^2]$; $D[X+Y]$; $D[X-Y]$.

Ответ :

$$M[X+Y] = M[X] + M[Y] = 2;$$

$$M[XY] = M[X] \cdot M[Y] = 1;$$

$$M[X^2] = D[X] + (M[X])^2 = 5;$$

$$M[Y^2] = 4/3;$$

$$D[X+Y] = D[X] + D[Y] = 13/3;$$

$$D[X-Y] = D[X] + (-1)^2 D[Y] = 13/3.$$

Задача 5.13

Однотипные детали в зависимости от точности изготовления различаются по форме как круглые и овальные, а по весу – как легкие и тяжелые. Вероятности того, что взятая наугад деталь окажется круглой и легкой, овальной и легкой, круглой и тяжелой, овальной и тяжелой, соответственно равны α, β, γ и $\delta = 1 - \alpha - \beta - \gamma$.

Найти математические ожидания и дисперсии: а) числа круглых деталей X ; б) числа легких деталей Y ; в) коэффициент корреляции K_{XY} между числом круглых и числом легких деталей, если известно, что $\alpha = 0,40$; $\beta = 0,05$; $\gamma = 0,10$.

Ответ :

$$\text{а) } M[X] = \alpha + \gamma = 0,50; \quad D[X] = (\alpha + \gamma)(\beta + \gamma) = 0,075;$$

$$\text{б) } M[Y] = \alpha + \beta = 0,45; \quad D[Y] = (\alpha + \beta)(\gamma + \delta) = 0,2475;$$

$$\text{в) } K_{XY} = M[XY] - M[X]M[Y] = \alpha - (\alpha + \gamma)(\alpha + \beta) = 0,175.$$

Задача 5.14

Независимые случайные величины X и Y распределены по закону Гаусса с параметрами $m_X = 1$, $m_Y = -3$, $\sigma_X^2 = 9$, $\sigma_Y^2 = 16$.

Написать выражение для плотности вероятностей $f(x, y)$ системы случайных величин (X, Y) .

Ответ :

$$f(x, y) = \frac{1}{24\pi} \exp\left(-\frac{(x-1)^2}{18} - \frac{(y+3)^2}{32}\right).$$

Случайные величины X и Y независимы.

Задача 5.15

Дана плотность распределения системы неотрицательных случайных величин

$$f(x, y) = Axy \exp(-x^2 - y^2), \quad x \geq 0, \quad y \geq 0.$$

Определить: постоянную A , плотности распределения $f_1(x)$, $f_2(y)$, $f_1(x|y)$, $f_2(y|x)$, первые и вторые моменты распределения.

Ответ :

$$A = 4;$$

$$f_1(x) = 2x \exp(-x^2); \quad f_2(y) = 2y \exp(-y^2);$$

$$f_1(x|y) = f_1(x); \quad f_2(y|x) = f_2(y);$$

$$M[X] = \sqrt{\pi} / 2; \quad M[Y] = \sqrt{\pi} / 2;$$

$$D[X] = 1 - \pi / 4; \quad D[Y] = 1 - \pi / 4; \quad K_{XY} = 0.$$

5.10. Задания для проверки

1. Раскройте смысл понятия системы случайных величин.
2. Раскройте смысл функции распределения и плотности распределения системы двух случайных величин.
3. Поясните суть условных законов распределения.
4. Поясните суть зависимых и независимых случайных величин.
5. Перечислите числовые характеристики системы случайных величин.
6. Раскройте смысл коэффициента корреляции.
7. Сформулируйте нормальный закон распределения для системы независимых случайных величин.
8. Сопоставьте нормальный закон на плоскости и нормальный закон в пространстве.
9. Раскройте смысл эллипса рассеяния двумерной нормальной величины.
10. Сформулируйте многомерный нормальный закон распределения для системы случайных величин.
11. Сформулируйте закон Релея.
12. Сформулируйте закон Релея-Райса.
13. Сформулируйте закон арксинуса.

6. Законы распределения функций случайных величин

В ряде задач возникает необходимость определять не только числовые характеристики случайной величины X , связанные с её целыми степенями. На практике часто требуется связать свойства случайной величины X со свойствами другой случайной величины, например Y , между которыми имеется зависимость вида $Y = \varphi(X)$. В общем случае ставят задачу о законе распределения функции случайного аргумента.

6.1. Закон распределения монотонной функции случайного аргумента

Пусть X — непрерывная случайная величина с плотностью распределения $f(x)$, а случайная величина Y связана с ней функциональной зависимостью

$$Y = \varphi(X), \quad (6.1)$$

где φ — дифференцируемая функция, *монотонная на всем участке возможных значений аргумента X* (рис. 6.1). Тогда плотность $g(y)$ распределения случайной величины Y выражается формулой

$$g(y) = f(\psi(y)) |\psi'(y)|, \quad (6.2)$$

где ψ — функция, обратная по отношению к φ .

Событию $\{A : X < x\}$ отвечает вероятность $\Pr\{X < x\}$. Этому же событию $\{A : Y < y\}$ можно в монотонном случае поставить в соответствие вероятность $\Pr\{Y < y\}$. Другими словами,

$$\Pr(X < x) = \Pr(Y < y),$$

или

$$\int_{-\infty}^x f(x) dx = \int_{-\infty}^y g(y) dy.$$

Таким образом,

$$F(x) = G(y), \quad (6.3)$$

где $G(y)$ — функция распределения случайной величины Y . Выражение (6.3) называется *законом сохранения интегральной вероятности*.

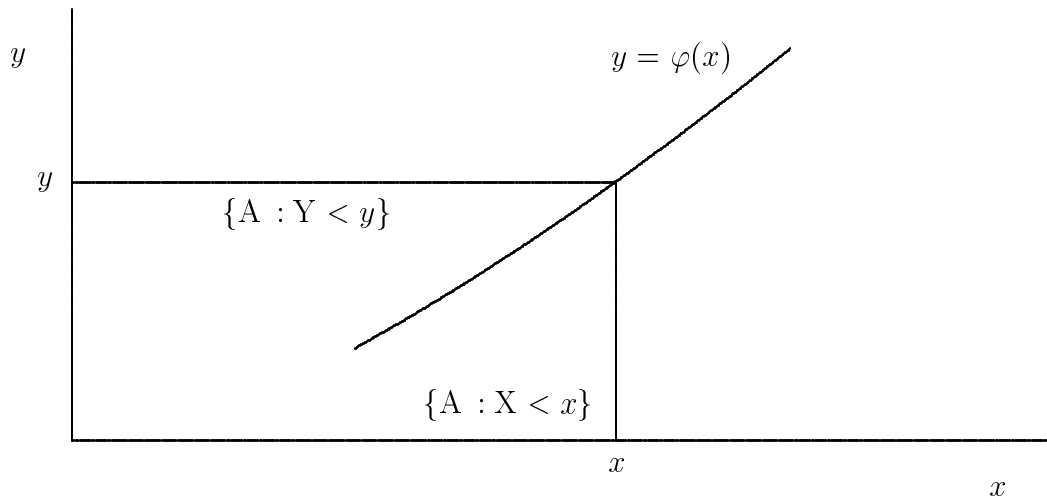


Рисунок 6.1 — К закону распределения функции случайного аргумента (монотонный случай)

Поскольку $Y = \varphi(X)$, где $\varphi(x)$ – монотонная функция, то после дифференцирования (6.3) получим *закон сохранения дифференциальной вероятности*:

$$g(y) dy = f(x) dx, \quad y = \varphi(x). \quad (6.4)$$

Пример

Случайная величина X равномерно распределена на интервале $[0, 1]$. Требуется найти плотность распределения вероятностей случайной величины $Y = X^2$.

В этом случае $y = \varphi(x) = x^2$, поэтому $x = \psi(y) = \sqrt{y}$ (берем только положительное значение) и $dx/dy = 1/(2\sqrt{y})$.

Тогда из закона о сохранении дифференциальной вероятности вытекает, что $g(y) = f(\sqrt{y})/(2\sqrt{y})$. Функция $f(x)$ по условию равна единице для любых допустимых значений своего аргумента. Поэтому $g(y) = 1/(2\sqrt{y})$, $0 < y \leq 1$.

Хотя полученная плотность имеет особенность в нуле, однако после интегрирования найдем $\int_0^1 g(y) dy = 1$.

6.2. Закон распределения немонотонной функции случайного аргумента

Если $y = \varphi(x)$ – немонотонная функция в области возможных значений случайной величины X , то обратная функция неоднозначна.

Пусть, например, функция $y = \varphi(x)$ имеет два участка монотонности: убывание и возрастание (рис. 6.2). Тогда событию $\{A : Y < y\}$ можно поставить в соответствие вероятность $G(y)$. Поскольку при данном значении y уравнение $\varphi(x) = y$ имеет два решения $x_1 = \psi_1(y)$ и $x_2 = \psi_2(y)$, то этому же событию в терминах случайной

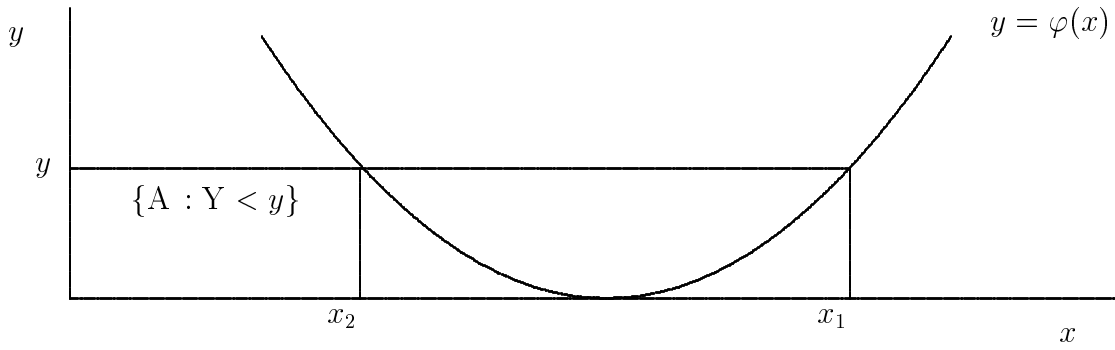


Рисунок 6.2 — К закону распределения функции случайного аргумента (немонотонный случай)

величины X отвечает два (по числу участков монотонности) события: $\{X > x_1\}$ и $\{X < x_2\}$, которым в совокупности соответствует вероятность $\Pr\{X > x_1 \text{ и } X < x_2\}$. Другими словами,

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x) dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx = \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} g(y) dy + \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} g(y) dy \quad (6.5)$$

в соответствии с законом о сохранении интегральной вероятности.

Дифференцируя (6.5) по переменной x и складывая получившиеся при этом дифференциальные вероятности, получим

$$g(y) = f(\psi_1(y)) |\psi_1'(y)| + f(\psi_2(y)) |\psi_2'(y)|. \quad (6.6)$$

Пример

Случайная величина X имеет нормальное распределение с плотностью

$$f(x) = (2\pi)^{-1/2} \exp(-x^2/2), \quad -\infty < x < \infty.$$

Требуется найти плотность распределения вероятностей $g(y)$ случайной величины $Y = X^2$.

В этом случае имеем $y = \varphi(x) = x^2$, т.е. $x = \psi(y) = \pm\sqrt{y}$ и $dx/dy = \pm 1/(2\sqrt{y})$. Поэтому $\psi_1'(y) = 1/(2\sqrt{y})$ и $\psi_2'(y) = -1/(2\sqrt{y})$.

Тогда из закона о сохранении дифференциальной вероятности вытекает

$$g(y) = f(\sqrt{y})/(2\sqrt{y}) + f(-\sqrt{y})/(2\sqrt{y}).$$

После преобразований находим

$$g(y) = (\sqrt{2\pi y})^{-1} \exp(-y/2), \quad 0 < y < \infty.$$

В общем случае функции $y = \varphi(x)$, имеющей несколько участков монотонности в области допустимых значений, плотность случайной величины Y определяется в

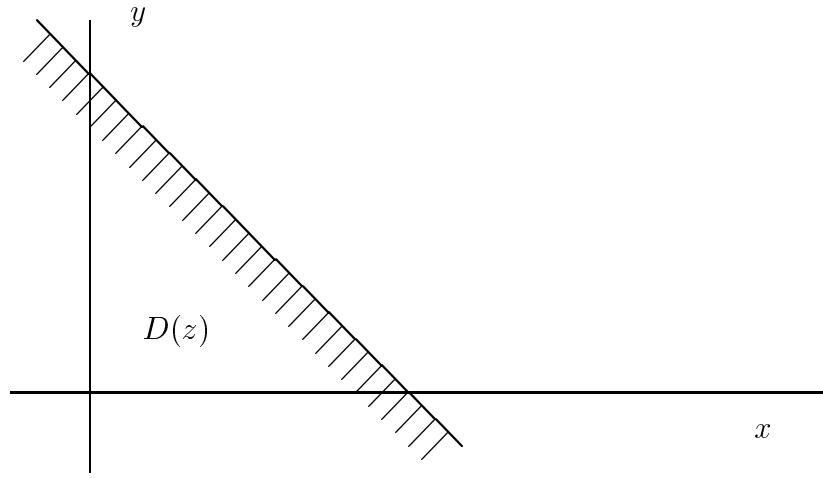


Рисунок 6.3 — К вероятности попадания в область $D(z)$

виде суммы такого количества слагаемых, сколько значений (при данном y) имеет обратная функция

$$g(y) = \sum_{i=1}^k f(\psi_i(y)) |\psi'_i(y)|, \quad (6.7)$$

где $\psi_1(y), \psi_2(y), \dots, \psi_k(y)$ — значения обратной функции для данного y .

Таким образом, необходимо каждый раз исследовать свойства функции прямого преобразования $y = \varphi(x)$.

6.3. Закон распределения немонотонной функции нескольких случайных аргументов

Для функции нескольких случайных величин удобнее искать не плотность распределения, а интегральную функцию распределения. В частности, для функции двух аргументов $Z = \varphi(X, Y)$ функция распределения

$$G(z) = \iint_{D(z)} f(x, y) dx dy, \quad (6.8)$$

где $f(x, y)$ — совместная плотность величин X, Y ; $D(z)$ — область на плоскости xOy , для которой $\varphi(x, y) \leq z$ (рис. 6.3).

Плотность $g(z)$ определяется дифференцированием $G(z)$:

$$g(z) = G'(z). \quad (6.9)$$

Плотность распределения суммы двух случайных величин $Z = X + Y$ выражается любой из формул:

$$g(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, z-x) dx \quad \text{или} \quad g(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(z-y, y) dy, \quad (6.10)$$

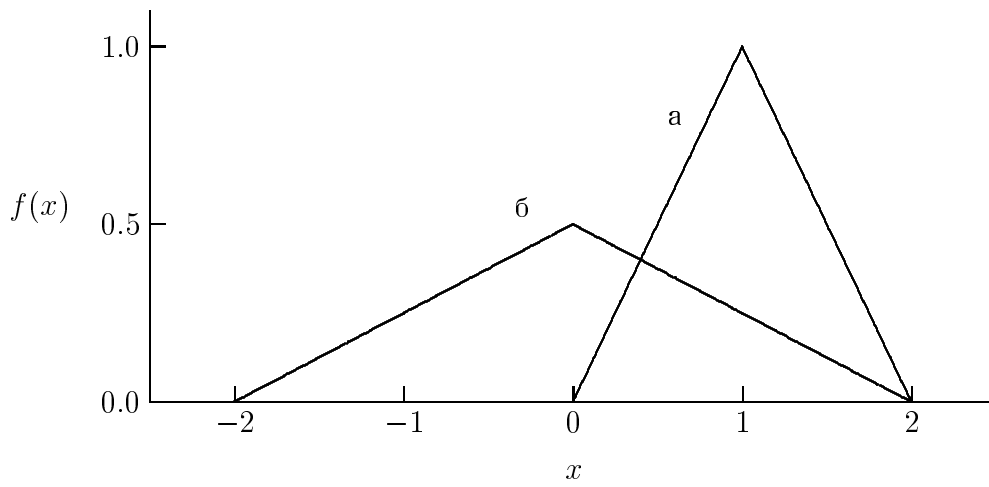


Рисунок 6.4 — Плотность $f(x)$ распределения Симпсона (треугольное распределение); а – случайные величины X_1 и X_2 определены на интервале $[0; 1]$; б – на интервале $[-1; 1]$

где $f(x, y)$ – совместная плотность распределения величин X, Y .

В частном случае, когда две случайные величины X, Y независимы, т.е. $f(x, y) = f_1(x) \cdot f_2(y)$, имеем

$$g(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) f_2(z - x) dx \quad \text{или} \quad g(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(z - y) f_2(y) dy. \quad (6.11)$$

В этом случае закон распределения суммы $g(z)$ называется *композицией законов* распределения слагаемых $f_1(x)$ и $f_2(y)$.

Характеристическая функция $q_z(t)$ композиции $Z = X + Y$ независимых случайных величин является произведением парциальных характеристических функций

$$q_z(t) = M[\exp(itZ)] = M[\exp(itX + itY)] = q_x(t) \cdot q_y(t). \quad (6.12)$$

6.4. Композиция двух равномерно распределенных случайных величин

Если заданы две независимые случайные величины X_1 и X_2 с равномерной плотностью распределения вероятностей на интервале $(0,1)$ каждая, то случайная величина $X = X_1 + X_2$ имеет *треугольное распределение* или *распределение Симпсона*.

Плотность треугольного распределения (рис. 6.4)

$$f_x(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ x & \text{при } 0 \leq x < 1, \\ 2 - x & \text{при } 1 \leq x < 2, \\ 0 & \text{при } x \geq 2; \end{cases} \quad (6.13)$$

такое её название связано с видом функции $f_x(x)$.

В том случае, когда независимые величины X_1 и X_2 равномерно распределены на произвольном интервале (α, β) каждая, их композиция $X = X_1 + X_2$ также имеет треугольное распределение с плотностью

$$f_x(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 2\alpha, \\ (x - 2\alpha)/(\beta - \alpha)^2 & \text{при } 2\alpha \leq x < (\alpha + \beta), \\ (2\beta - x)/(\beta - \alpha)^2 & \text{при } (\alpha + \beta) \leq x < 2\beta, \\ 0 & \text{при } x \geq 2\beta, \end{cases} \quad (6.14)$$

в частности, если $\alpha = -1$ и $\beta = 1$, то

$$f_x(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < -2, \\ (x + 2)/4 & \text{при } -2 \leq x < 0, \\ (2 - x)/4 & \text{при } 0 \leq x < 2, \\ 0 & \text{при } x \geq 2. \end{cases} \quad (6.15)$$

Если принять, что при осуществлении вычислений на ЭВМ погрешности округления случайны и распределены равномерно в последнем (отброшенном) разряде, то при суммировании погрешность результата имеет треугольное распределение.

6.5. Композиция нормальных случайных величин

Если случайные величины, подчиненные нормальному закону, подвергать любому линейному преобразованию, то будут получаться снова случайные величины, распределенные нормально.

В частности, если случайная величина X распределена нормально с параметрами m_x, σ_x , то случайная величина $Y = aX + b$ (где a, b неслучайны) распределена нормально с параметрами $m_y = am_x + b$, $\sigma_y = |a|\sigma_x$.

При композиции двух нормальных законов: $f_1(x)$ с параметрами m_x, σ_x и $f_2(y)$ с параметрами m_y, σ_y — получается снова нормальный закон для случайной величины $Z = X + Y$ с параметрами

$$m_z = m_x + m_y, \quad \sigma_z^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2. \quad (6.16)$$

При сложении двух нормально распределенных случайных величин X, Y с параметрами $m_x, \sigma_x, m_y, \sigma_y$ и коэффициентом корреляции r_{xy} получается случайная величина $Z = X + Y$, которая также распределена нормально, с параметрами

$$m_z = m_x + m_y, \quad \sigma_z^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2 + 2\sigma_x\sigma_y r_{xy}. \quad (6.17)$$

Линейная функция от нескольких независимых нормально распределенных случайных величин $X_1, X_2, \dots, X_n$

$$Z = \sum_{k=1}^n a_k X_k + b,$$

где $\{a_k\}$, b – неслучайные коэффициенты, также имеет нормальный закон распределения с параметрами

$$m_Z = \sum_{k=1}^n a_k m_{X_k} + b, \quad \sigma_Z^2 = \sum_{k=1}^n a_k^2 \sigma_{X_k}^2, \quad (6.18)$$

где m_{X_k} , σ_{X_k} – параметры случайной величины X_k ($k = 1, \dots, n$).

Характеристическая функция $q_Z(t)$ случайной величины Z

$$q_Z(t) = M \left[\exp \left(it \sum_{k=1}^n X_k \right) \right] = \exp \left(it \sum_{k=1}^n m_{X_k} - \frac{1}{2} t^2 \sum_{k=1}^n \sigma_{X_k}^2 \right). \quad (6.19)$$

Если слагаемые $X_1, X_2, \dots, X_n$ коррелированы, закон распределения линейной функции остается нормальным, но с параметрами

$$m_Z = \sum_{i=1}^n a_i m_{X_i} + b, \quad (6.20a)$$

$$\sigma_Z^2 = \sum_{i=1}^n a_i^2 \sigma_{X_i}^2 + 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n a_i a_j r_{X_i X_j} \sigma_{X_i} \sigma_{X_j}, \quad (6.20b)$$

здесь $r_{X_i X_j}$ – коэффициент корреляции величин X_i, X_j ($i, j = 1, \dots, n; j \neq i$).

Композицией двух нормальных законов на плоскости называют закон распределения случайного двухкомпонентного вектора с составляющими $X = X_1 + X_2$ и $Y = Y_1 + Y_2$, где (X_1, Y_1) и (X_2, Y_2) – два случайных двухкомпонентных вектора, все четыре компоненты у которых попарно некоррелированы между собой ($r_{X_1 X_2} = r_{X_1 Y_2} = r_{Y_1 X_2} = r_{Y_1 Y_2} = 0$).

При композиции двух нормальных законов на плоскости получают снова нормальный закон с параметрами:

$$m_X = m_{X_1} + m_{X_2}, \quad \sigma_X^2 = \sigma_{X_1}^2 + \sigma_{X_2}^2, \quad (6.21a)$$

$$m_Y = m_{Y_1} + m_{Y_2}, \quad \sigma_Y^2 = \sigma_{Y_1}^2 + \sigma_{Y_2}^2. \quad (6.21b)$$

Поэтому

$$K_{XY} = K_{X_1 Y_1} + K_{X_2 Y_2}, \quad (6.22a)$$

$$r_{XY} = (r_{X_1 Y_1} \sigma_{X_1} \sigma_{Y_1} + r_{X_2 Y_2} \sigma_{X_2} \sigma_{Y_2}) \left[(\sigma_{X_1}^2 + \sigma_{X_2}^2) (\sigma_{Y_1}^2 + \sigma_{Y_2}^2) \right]^{-1/2}. \quad (6.22b)$$

При проектировании случайной точки (X, Y) , распределенной на плоскости по нормальному закону, на ось Oz , проходящую через центр рассеивания и составляющую угол α с осью Ox , получают случайную точку Z , распределенную по нормальному закону с параметрами:

$$m_Z = m_X \cos \alpha + m_Y \sin \alpha; \quad (6.23a)$$

$$\sigma_Z^2 = \sigma_X^2 \cos^2 \alpha + \sigma_Y^2 \sin^2 \alpha + r_{XY} \sigma_X \sigma_Y \sin 2\alpha. \quad (6.23b)$$

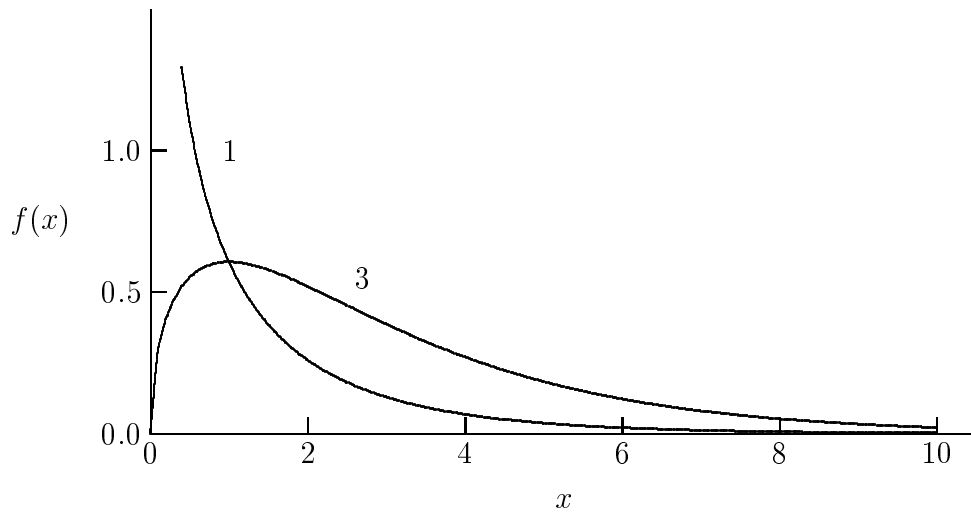


Рисунок 6.5 — Плотность распределения $f(x)$ закона χ^2 ; $n = 1, 3$

6.6. Распределение χ^2 (хи-квадрат)

Пусть $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ – независимые случайные величины, имеющие нормальное распределение с параметрами $(0, 1)$ каждая. Случайная величина

$$X = \sum_{k=1}^n Y_k^2 \quad (6.24)$$

имеет *распределение χ^2 с n степенями свободы*.

Её плотность распределения вероятностей (рис. 6.5)

$$f(x) = \frac{1}{2^{n/2} \Gamma(n/2)} x^{n/2-1} \exp(-x/2), \quad x \geq 0, \quad (6.25)$$

поэтому

$$M[X] = n, \quad D[X] = 2n. \quad (6.26)$$

Характеристическая функция этой случайной величины

$$q(\lambda) = M[\exp(i\lambda X)] = (1 - 2i\lambda)^{-n/2}, \quad (6.27)$$

отсюда следует, что композиция $X = X_1 + X_2$ двух случайных величин, имеющих распределение χ^2 с параметрами n_1 и n_2 соответственно, также распределена по закону χ^2 , но с параметром $n = n_1 + n_2$.

В практике обработки экспериментальных результатов распределение χ^2 имеет многочисленные применения.

Распределение χ^2 представляет собой частный случай так называемого *гамма-распределения*, плотность которого выражается формулой

$$f(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} \exp(-\beta x), \quad x \geq 0, \quad (6.28)$$

где α и β – положительные параметры.

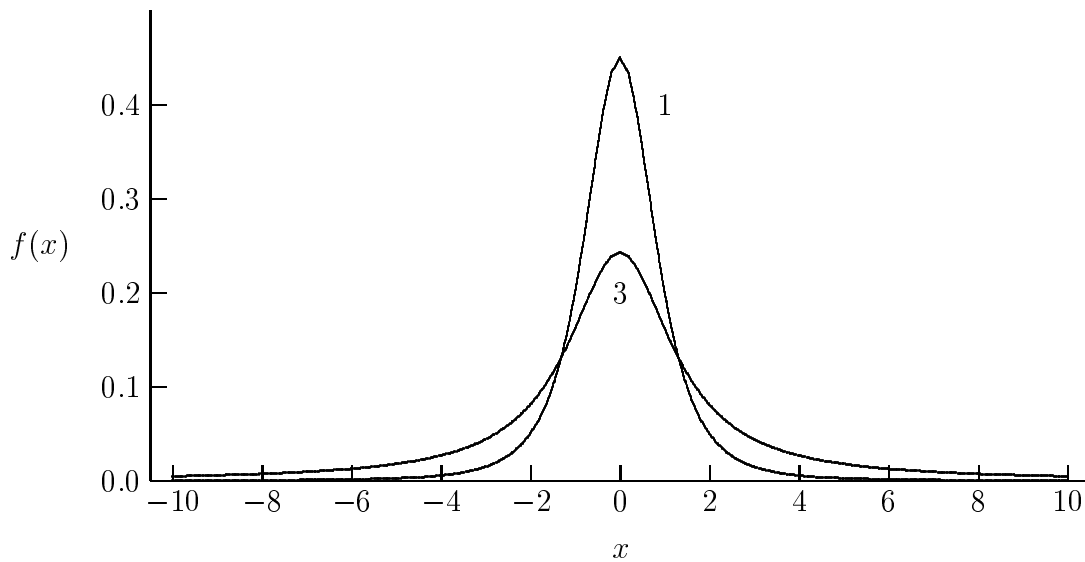


Рисунок 6.6 — Плотность $f(x)$ распределения Стюдента; $n = 1, 3$

6.7. Распределение Стюдента

Случайная величина X имеет *распределение Стюдента* (рис. 6.6) с n степенями свободы (или t -распределение), если

$$f(x) = \frac{\Gamma((n+1)/2)}{\sqrt{\pi n} \Gamma(n/2)} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-(n+1)/2}, \quad -\infty < x < \infty. \quad (6.29)$$

Её математическое ожидание $M[X] = 0$. Дисперсия случайной величины X равна $D[X] = n/(n-2)$, если $n > 2$ и $D[X] = \infty$ для $n \leq 2$.

При $n = 1$ распределение Стюдента совпадает с распределением Коши. Распределение Стюдента используется при проверке гипотез о соответствии статистических свойств полученных данных выбранному вероятностному закону.

6.8. Примеры

Пример 6.1

Случайная величина Y является линейной функцией случайной величины X : $Y = g(X) = aX + b$, где a и b – постоянные величины.

Найти плотность вероятности $f_Y(y)$ величины Y при известной плотности вероятности $f_X(x)$ случайной величины X .

Решение

Так как обратная функция $x = h(y) = (y - b)/a$ однозначна, то получаем

$$f_Y(y) = \frac{1}{|a|} f_X\left(\frac{y - b}{a}\right).$$

Если, например, величина X имеет равномерную плотность вероятностей в интервале $[x_1, x_2]$, то случайная величина Y будет распределена равномерно в интервале $[ax_1 + b, ax_2 + b]$.

Если величина X имеет нормальную плотность вероятности

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_X} \exp \left(-\frac{(x - m_X)^2}{2\sigma_X^2} \right),$$

то линейная функция также распределена по нормальному закону

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_Y} \exp \left(-\frac{(y - m_Y)^2}{2\sigma_Y^2} \right),$$

где $m_Y = am_X + b$, $\sigma_Y^2 = a^2\sigma_X^2$.

Таким образом, при линейном преобразовании случайной величины её плотность вероятности смещается на величину b , а масштабы вдоль координатных осей изменяются в a раз.

Пример 6.2

Случайная величина X распределена по закону Коши с плотностью распределения вероятностей

$$f_X(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}, \quad -\infty < x < \infty.$$

Найти плотность $g_Y(y)$ обратной величины $Y = 1/X$.

Решение

Учитывая, что обратная функция $x = 1/y$ однозначна, и решая задачу по правилам для монотонной функции, получим

$$g_Y(y) = \frac{1}{\pi(1+y^{-2})} \frac{1}{y^2}$$

или

$$g_Y(y) = \pi^{-1}(1+y^2)^{-1}.$$

Таким образом, величина, обратная величине, распределенной по закону Коши, также имеет распределение Коши.

Пример 6.3

Радиус круга R – случайная величина, распределенная по закону Релея

$$f_R(r) = \frac{r}{\sigma^2} \exp \left(-\frac{r^2}{2\sigma^2} \right), \quad r \geq 0.$$

Найти закон распределения площади S круга.

Решение

Функция $S = \pi R^2$ на участке $(0, \infty)$ возможных значений R монотонна, следовательно,

$$f_S(s) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp \left(-\frac{s}{2\pi\sigma^2} \right), \quad s \geq 0,$$

т.е. закон распределения площади круга есть показательный (экспоненциальный) закон с параметром $(2\pi\sigma^2)^{-1}$.

Пример 6.4

Случайная величина X распределена равномерно в интервале $[0; 1]$. Случайная величина Y связана с X монотонно возрастающей функциональной зависимостью $Y = \varphi(X)$.

Найти функцию распределения $G(y)$ и плотность $g(y)$ случайной величины Y .

Решение

Имеем $f(x) = 1$ при $x \in (0; 1)$. Обозначим через $\psi(y)$ функцию, обратную к функции $y = \varphi(x)$. Так как согласно условию $f(x) = 1$ и $\varphi(x)$ монотонно возрастает, то

$$g(y) = f[\psi(y)]\psi'(y) = \psi'(y),$$

Отсюда имеем $G(y) = \psi(y)$, т.е. искомая функция распределения есть обратная по отношению к функции φ (в области возможных значений величины Y).

Пример 6.5

Случайная величина X с равномерной плотностью вероятности

$$f_X(x) = 1/(b+a), \quad -a < x \leq b,$$

подвергается квадратичному преобразованию $Y = X^2$.

Определить :

- а) функцию распределения $F_X(x)$ случайной величины X ;
- б) функцию распределения $F_Y(y)$ и плотность распределения вероятностей $f_Y(y)$ случайной величины Y .

Решение

а) По определению

$$F_X(x) = \Pr(X < x) = \int_{-\infty}^x f_X(z) dz.$$

При $x \leq -a$ имеем $F_X(x) = \Pr\{X \leq -a\} = 0$.

При $-a < x \leq b$

$$F_X(x) = \int_{-a}^x f_X(z) dz = \frac{1}{b+a} z \Big|_{-a}^x = \frac{x+a}{b+a}.$$

При $x > b$ имеем $F_X(x) = 1$.

б) При квадратичном преобразовании $Y = X^2$ функция $y = \varphi(x) = x^2$ не принимает отрицательных значений. Поэтому $F_Y(y) = \Pr\{Y < y\} = 0$ при $y \leq 0$. На интервале $(-a, a)$ обратная функция $x = \psi(y)$ двузначна: $x_1 = \sqrt{y}$, $x_2 = -\sqrt{y}$. Событие $Y < y$ равносильно попаданию случайной величины X в интервал $(-\sqrt{y}, \sqrt{y})$, т.е.

$$\Pr\{Y < y\} = \Pr\{x_2 < X < x_1\} =$$

$$= \Pr\{-\sqrt{y} < X \leq \sqrt{y}\} = \Pr\{X < \sqrt{y}\} - \Pr\{X < -\sqrt{y}\}.$$

Следовательно, при $0 < y \leq a^2$

$$F_Y(y) = \int_{-a}^{\sqrt{y}} f_X(x) dx - \int_{-a}^{-\sqrt{y}} f_X(x) dx = \frac{1}{b+a} x \Big|_{-a}^{\sqrt{y}} - \frac{1}{b+a} x \Big|_{-a}^{-\sqrt{y}} = \frac{2\sqrt{y}}{b+a}.$$

На интервале (a, b) обратная функция $x_2 = \sqrt{y}$ однозначна. Поэтому

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= \Pr\{Y < y\} = \Pr\{-a < X < a\} + \Pr\{a < X < \sqrt{y}\} = \\ &= \frac{2a}{b+a} + \int_a^{\sqrt{y}} f_1(x) dx = \frac{2a}{b+a} + \frac{1}{b+a} x \Big|_a^{\sqrt{y}} = \frac{\sqrt{y} + a}{b+a}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{при } y \leq 0, \\ 2\sqrt{y}/(b+a) & \text{при } 0 < y \leq a^2, \\ (\sqrt{y} + a)/(b+a) & \text{при } a^2 < y \leq b^2, \\ 1 & \text{при } y > b^2. \end{cases}$$

Поэтому получим

$$f_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{при } y \leq 0, \\ 1/(\sqrt{y}(b+a)) & \text{при } 0 < y \leq a^2, \\ 1/(2\sqrt{y}(b+a)) & \text{при } a^2 < y \leq b^2, \\ 0 & \text{при } y > b^2. \end{cases}$$

Пример 6.6

Известна совместная плотность вероятностей $f_2(x_1, x_2)$ случайных величин X_1 и X_2 .

Найти двумерную плотность распределения вероятностей $f_2(y_1, y_2)$ случайных величин Y_1 и Y_2 , если $Y_1 = aX_1 + bX_2$, $Y_2 = cX_1 + dX_2$, где a, b, c, d — постоянные коэффициенты.

Решение

Если определитель системы, составленный из коэффициентов a, b, c, d , отличен от нуля, то система из двух линейных алгебраических уравнений

$$y_1 = ax_1 + bx_2, \quad y_2 = cx_1 + dx_2$$

имеет однозначное решение:

$$x_1 = a_1 y_1 + b_1 y_2, \quad x_2 = c_1 y_1 + d_1 y_2,$$

где коэффициенты a_1, b_1, c_1, d_1 выражаются через a, b, c, d .

В данном случае якобиан преобразования

$$\frac{D(x_1, x_2)}{D(y_1, y_2)} = \left| \frac{\partial y_1}{\partial x_1} \frac{\partial y_2}{\partial x_2} - \frac{\partial y_1}{\partial x_2} \frac{\partial y_2}{\partial x_1} \right|^{-1} = \frac{1}{|ad - bc|}.$$

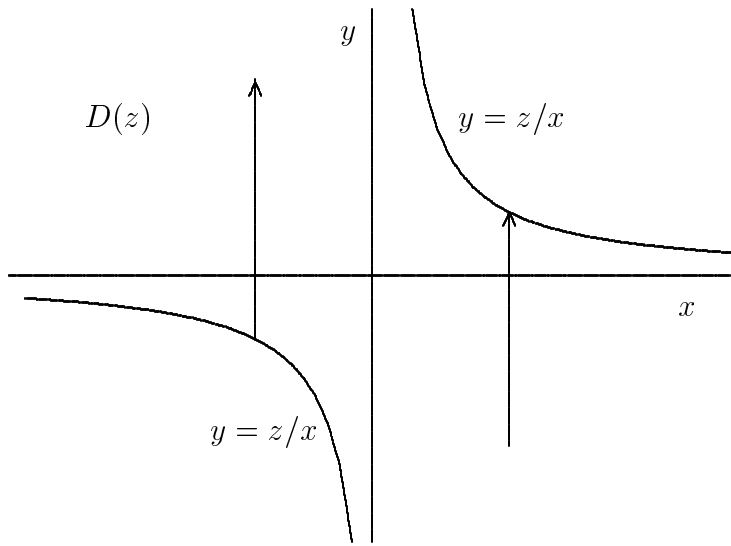


Рисунок 6.7 — Область $D(z)$, ограниченная на плоскости xOy гиперболой $y = z/x$; стрелками указаны пути интегрирования по y

Следовательно, получим

$$f_2(y_1, y_2) = \frac{1}{|ad - bc|} f_2(a_1 y_1 + b_1 y_2, c_1 y_1 + d_1 y_2).$$

Пример 6.7

Случайные величины X и Y имеют плотность распределения $f(x, y)$.

Найти закон распределения произведения $Z = XY$ случайных величин X и Y .

Решение

Воспользуемся выражением для интегральной функции распределения случайной величины Z

$$G(z) = \int \int_{D(z)} f(x, y) dx dy.$$

В этом выражении $D(z)$ — область на плоскости xOy , для которой выполняется условие $xy \leq z$ (рис. 6.7). Для данного фиксированного аргумента z границей области $D(z)$ служит гипербола $y = z/x$, а область, таким образом, локализована между её двумя ветвями. Удобно разбить плоскость xOy на две части: $x < 0$ и $x > 0$, после чего рассмотреть формирование области $D(z)$ в каждой из частей. При $x < 0$ переменная интегрирования y изменяется от $y = z/x$ до ∞ , соответственно при $x > 0$ имеем $-\infty < y \leq z/x$. Поэтому

$$G(z) = \int_{-\infty}^0 \int_{z/x}^{\infty} f(x, y) dx dy + \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{z/x} f(x, y) dx dy.$$

Плотность $g(z)$ определяется дифференцированием $G(z)$:

$$g(z) = - \int_{-\infty}^0 x^{-1} f(x, z/x) dx + \int_0^{\infty} x^{-1} f(x, z/x) dx.$$

Хотя в этом результате подинтегральные выражения имеют особенности при $x = 0$, плотность $g(z)$ нормирована на единицу.

Пример 6.8

Случайные величины X и Y являются независимыми и имеют плотности распределения вероятностей

$$f_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_x} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}\right), \quad f_2(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_y} \exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma_y^2}\right).$$

Найти закон распределения отношения $Z = Y/X$.

Решение

Функция распределения $F_z(z)$ случайной величины Z

$$F_z(z) = \iint_D f_1(x) f_2(y) dx dy,$$

где D – область на плоскости xOy , определяемая условием $(y/x) < z$. Если $x > 0$, то этому условию отвечает $-\infty < y \leq (zx)$. Если же $x < 0$, то $(zx) \leq y < \infty$. Поэтому

$$F_z(z) = \int_{-\infty}^0 dx \int_{zx}^{\infty} f_1(x) f_2(y) dy + \int_0^{\infty} dx \int_{-\infty}^{zx} f_1(x) f_2(y) dy.$$

Следовательно, плотность распределения вероятностей $f_z(z)$ случайного отношения Z

$$\begin{aligned} f_z(z) &= - \int_{-\infty}^0 x f_1(x) f_2(zx) dx + \int_0^{\infty} x f_1(x) f_2(zx) dx = \\ &= \int_0^{\infty} [x f_1(zx) f_2(x) + x f_1(-x) f_2(zx)] dx. \end{aligned}$$

Подставляя плотности $f_1(x)$ и $f_2(y)$, найдем после интегрирования:

$$f_z(z) = \frac{1}{\pi} \frac{(\sigma_y/\sigma_x)}{z^2 + (\sigma_y/\sigma_x)^2},$$

т.е. случайная величина $Z = Y/X$ распределена по закону Коши.

Пример 6.9

Пусть U и V – две независимые случайные величины, равномерно распределенные на интервале $[0; 1]$.

Найти преобразования $X = \varphi(U, V)$ и $Y = \psi(U, V)$, с помощью которых можно получить две независимые случайные величины, распределение которых нормально с математическим ожиданием, равным нулю, и с дисперсией σ^2 .

Решение

Рассмотрим следующее преобразование

$$X = \varphi(U, V) = \sigma \sqrt{-2 \ln(V)} \cos(2\pi U),$$

$$Y = \psi(U, V) = \sigma \sqrt{-2 \ln(V)} \sin(2\pi U).$$

Пусть $f_{UV}(u, v)$ и $f_{XY}(x, y)$ – совместные плотности распределения пар случайных величин (U, V) и (X, Y) . Поскольку

$$f_{UV}(u, v) du dv = f_{XY}(x, y) dx dy$$

и, согласно условию $f_{UV}(u, v) = 1$, то $f_{XY}(x, y) = |D(u, v)/D(x, y)|$.

Для вычисления якобиана $|D(u, v)/D(x, y)|$ величины $U = U(X, Y)$ и $V = V(X, Y)$ требуется выразить явно

$$U = (2\pi)^{-1} \arctg(Y/X), \quad V = \exp\left(-\frac{X^2 + Y^2}{2\sigma^2}\right).$$

Вычисляя якобиан, получим

$$f_{XY}(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2\sigma^2}\right) = f_X(x) \cdot f_Y(y),$$

где обозначено $f_X(x)$ – плотность распределения вероятностей случайной величины X

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right),$$

и аналогично для случайной величины Y

$$\rho_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma^2}\right).$$

Пример 6.10 (Закон Симпсона)

Независимые случайные величины X и Y равномерно распределены на интервале $[-1; 1]$.

Найти закон распределения случайной величины $Z = X + Y$.

Решение

Плотность распределения случайной величины

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < -1, \\ 0,5 & \text{при } -1 \leq x \leq 1, \\ 0 & \text{при } x > 1, \end{cases}$$

поэтому для характеристической функции $q_X(t)$ случайной величины X имеем

$$q_X(t) = M[e^{itX}] = \int_{-1}^1 \exp(itx) \frac{1}{2} dx = \frac{\exp(it) - \exp(-it)}{2it}.$$

Поскольку $\sin(\alpha) = [\exp(i\alpha) - \exp(-i\alpha)]/(2i)$, то

$$q_X(t) = \sin(t)/t,$$

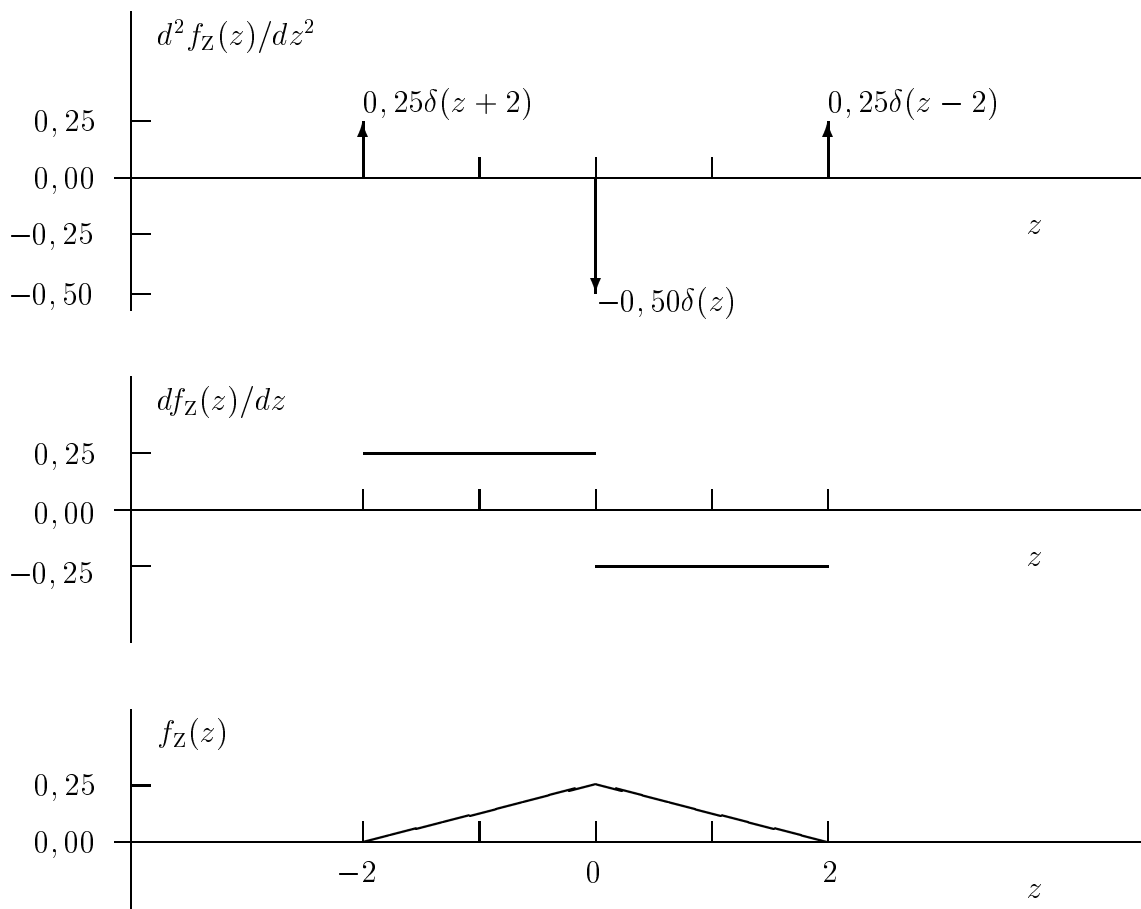


Рисунок 6.8 — К решению задачи о треугольном распределении

и аналогично для характеристической функции $q_Y(t)$ случайной величины Y . Поэтому

$$q_Z(t) = M_Z[e^{itZ}] = M_{X+Y}[e^{it(X+Y)}] = M_X[e^{itX}] \cdot M_Y[e^{itY}] = \frac{\sin^2(t)}{t^2}.$$

По найденной характеристической функции $q_X(t)$ восстановим плотность распределения

$$f_Z(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itz} q_Z(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itz} \frac{\sin^2(t)}{t^2} dt.$$

Имея в виду известное представление для δ -функции в виде интеграла Фурье,

$$\delta(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\alpha} dt,$$

запишем последний интеграл в виде

$$f_Z(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itz} \frac{\exp(2it) - 2 + \exp(-2it)}{-4t^2} dt.$$

С целью упростить подинтегральное выражение найдем вторую производную (рис. 6.8)

$$\frac{d^2}{dz^2} f_z(z) = \frac{1}{8\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (e^{it(2-z)} - 2e^{itz} + e^{-it(2+z)}) dt,$$

что дает после интегрирования

$$\frac{d^2}{dz^2} f_z(z) = \frac{1}{4} [\delta(z+2) - 2\delta(z) + \delta(z-2)].$$

Теперь можно вычислить первую производную

$$\frac{d}{dz} f_z(z) = \int_{-\infty}^z \frac{d^2}{dz'^2} f_z(z') dz' = \begin{cases} 0 & \text{при } z < -2, \\ 0,5 & \text{при } -2 \leq z \leq 0, \\ -0,5 & \text{при } 0 \leq z \leq 2, \\ 0 & \text{при } z > 2. \end{cases}$$

Интеграл от первой производной $d f_z(z)/dz$ дает искомое выражение (треугольное распределение Симпсона) для плотности распределения вероятностей.

Итак, получаем окончательно

$$f_z(z) = \int_{-\infty}^z \frac{d}{dz'} f_z(z') dz' = \begin{cases} 0 & \text{при } z < -2, \\ 0,25(2+z) & \text{при } -2 \leq z \leq 0, \\ 0,25(2-z) & \text{при } 0 \leq z \leq 2, \\ 0 & \text{при } z > 2. \end{cases}$$

Пример 6.11

Независимые случайные величины X_1 и X_2 подчинены закону Пуассона с параметрами λ_1 и λ_2 соответственно:

$$\Pr(X_1 = k) = \frac{\lambda_1^k}{k!} \exp(-\lambda_1), \quad \Pr(X_2 = k) = \frac{\lambda_2^k}{k!} \exp(-\lambda_2),$$

где $k = 0, 1, \dots$

Определить закон распределения случайной величины $Y = X_1 + X_2$.

Решение

Решим задачу двумя способами: 1) непосредственно используя законы распределения случайных величин; 2) с помощью аппарата характеристических функций.

1) Суммируя вероятности всех независимых исходов, благоприятствующих осуществлению события $\{Y = n\}$, можно записать

$$\begin{aligned} \Pr(Y = n) &= \sum_{k=0}^n \Pr(k) \Pr(n-k) = \sum_{k=0}^n \frac{\lambda_1^k}{k!} \exp(-\lambda_1) \frac{\lambda_2^{(n-k)}}{(n-k)!} \exp(-\lambda_2) = \\ &= \exp(-\lambda_1 - \lambda_2) \frac{\lambda_2^n}{n!} \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} (\lambda_1/\lambda_2)^k = \end{aligned}$$

$$= \exp(-\lambda_1 - \lambda_2) \frac{\lambda_2^n}{n!} (1 + \lambda_1/\lambda_2)^n = \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)^n}{n!} \exp(-\lambda_1 - \lambda_2).$$

2) Определим характеристическую функцию случайной величины X_1 :

$$q_{X_1}(v) = M[e^{ivk}] = \sum_{k=0}^{\infty} e^{ivk} \frac{\lambda_1^k}{k!} \exp(-\lambda_1) = \exp(-\lambda_1(e^{iv} - 1)).$$

Аналогично для случайной величины X_2 : $q_{X_2}(v) = \exp(-\lambda_2(e^{iv} - 1))$.

Тогда получим

$$q_Y(v) = q_{X_1}(v) \cdot q_{X_2}(v) = \exp(-(\lambda_1 + \lambda_2)(e^{iv} - 1)).$$

Таким образом, аддитивная случайная величина Y также подчиняется закону Пуассона с параметром $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$.

Этот результат можно обобщить на сумму нескольких пуассоновских случайных величин.

Пример 6.12

Случайная величина X подчиняется биномиальному закону распределения.

Определить математическое ожидание и дисперсию случайной величины $Y = \exp(aX)$, где a – заданный параметр.

Решение

Случайная величина X может принимать значения $0, 1, 2, \dots, i, \dots, n$. Вероятность того, что она примет значение i , определяется формулой $P_{i,n} = C_n^i p^i q^{n-i}$, где $q = 1 - p$.

Поэтому

$$M[Y] = \sum_{i=0}^n y_i P_{i,n} = \sum_{i=0}^n e^{ai} C_n^i p^i q^{n-i} = \sum_{i=0}^n C_n^i (pe^a)^i q^{n-i} = (q + pe^a)^n;$$

$$\begin{aligned} D[Y] &= \sum_{i=0}^n y_i^2 P_{i,n} - (M[Y])^2 = \sum_{i=0}^n C_n^i e^{2ai} p^i q^{n-i} - (M[Y])^2 = \\ &= \sum_{i=0}^n C_n^i (pe^{2a})^i q^{n-i} - (M[Y])^2 = (q + pe^{2a})^n - (q + pe^a)^{2n}. \end{aligned}$$

Пример 6.13 (Закон Эрланга)

Найти закон распределения композиции двух показательных законов с параметром λ ($\lambda > 0$), т.е. найти закон распределения суммы $Z = X_1 + X_2$ двух независимых случайных величин X_1 и X_2 , имеющих плотности $f_1(x_1) = \lambda \exp(-\lambda x_1)$ (при $x_1 > 0$) и $f_2(x_2) = \lambda \exp(-\lambda x_2)$ (при $x_2 > 0$).

Решение

По формуле (6.11) для композиции распределений имеем

$$g_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x_1) f_2(z - x_1) dx_1.$$

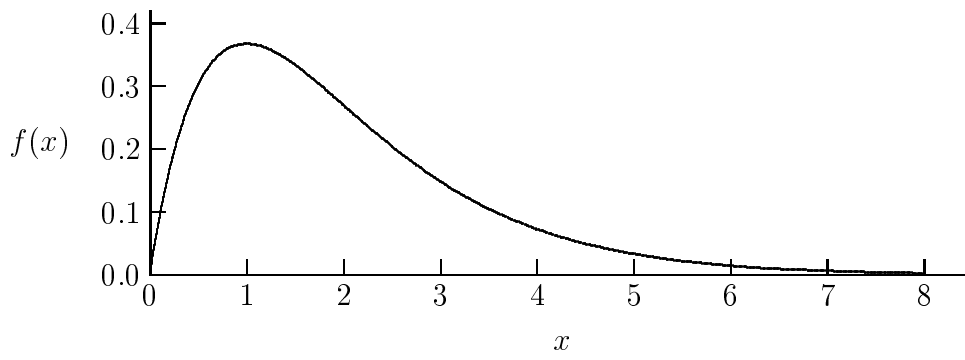


Рисунок 6.9 — Плотность распределения вероятностей $f(x)$ закона Эрланга 2-го порядка; $\lambda = 1,0$

Так как функции $f_1(x_1)$ и $f_2(x_2)$ равны нулю при отрицательных значениях аргументов, интеграл принимает вид

$$g_z(z) = \int_0^z f_1(x_1) f_2(z - x_1) dx_1.$$

Подставляя в интеграл плотности $f_1(x_1)$ и $f_2(x_2)$, найдем

$$g_z(z) = \lambda^2 \int_0^z \exp[-\lambda x_1 - \lambda(z - x_1)] dx_1 = \lambda^2 z \exp(-\lambda z), \quad z > 0.$$

Закон с этой плотностью называется *законом Эрланга 2-го порядка* (рис. 6.9). Соответственно, закон с плотностью

$$g_z(z) = \frac{\lambda^n z^{n-1}}{\Gamma(n)} \exp(-\lambda z), \quad z > 0, \quad n = 1, 2, \dots,$$

называется *законом Эрланга n-го порядка*.

Пример 6.14

На единичном отрезке наугад выбираются две точки А и В, после чего строится квадрат со стороной, равной длине отрезка АВ.

Определить закон распределения $f_s(s)$ площади квадрата S.

Решение

Пусть X и Y – координаты наугад выбранных точек, тогда случайная величина $S = (X-Y)^2$ – площадь квадрата. Будем искать её плотность распределения с помощью формулы

$$f_s(s) = M[\delta(s - (X - Y)^2)] = \int_0^1 \int_0^1 \delta[s - (x - y)^2] dx dy.$$

Учитывая симметрию этого выражения относительно x и y , запишем

$$f_s(s) = 2 \int_0^1 dy \int_0^y \delta([\sqrt{s} - (y - x)][\sqrt{s} + (y - x)]) dx.$$

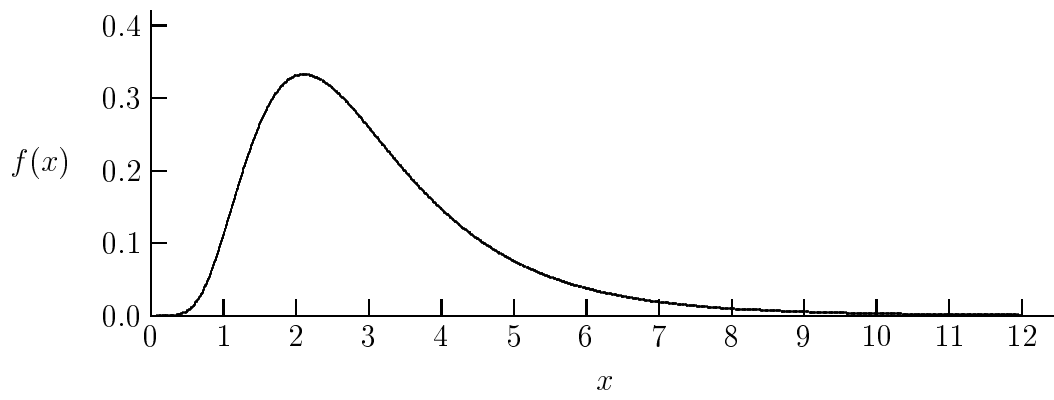


Рисунок 6.10 — Плотность распределения вероятностей $f(x)$ логнормального закона; $m = 1,0$; $\sigma = 0,5$

Второй сомножитель под δ -функцией ни для каких y и x не равен нулю, поэтому заменим в нем $(y - x)$ на $\sqrt{s}$

$$f_s(s) = 2 \int_0^1 dy \int_0^y \delta([\sqrt{s} - (y - x)] 2\sqrt{s}) dx = s^{-1/2} \int_0^1 dy \int_0^y \delta[\sqrt{s} - (y - x)] dx.$$

Внутренний интеграл по x равен единице, если $y \geq \sqrt{s}$, и нулю – в противном случае. Учитывая фильтрующие свойства δ -функции, найдем

$$f_s(s) = s^{-1/2} \int_{\sqrt{s}}^1 dy = s^{-1/2} - 1, \quad 0 < s \leq 1.$$

Пример 6.15 (Логарифмически нормальное распределение)

Натуральный логарифм некоторой случайной величины X распределен по нормальному закону с параметрами m и σ .

Найти плотность распределения вероятностей $g(x)$ величины X .

Решение

Обозначим нормально распределенную величину U . Имеем

$$U = \ln(X), \quad X = \exp(U),$$

$$f_U(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(u - m)^2}{2\sigma^2}\right).$$

Функция $\exp(u)$ монотонна, поэтому

$$g_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma x} \exp\left(-\frac{[\ln(x) - m]^2}{2\sigma^2}\right), \quad x > 0.$$

Такое распределение величины X называют *логарифмически нормальным* (логнормальным) (рис. 6.10).

Пример 6.16

Рассмотрим две независимые случайные величины X и Y , причем $Y > 0$, с функциями распределения $F_X(x)$ и $F_Y(y)$, а также плотностями распределения $f_X(x)$ и $f_Y(y)$. Образует на их основе новую случайную величину $T = X/Y$. Величина Y предполагается положительной, поэтому плотность $f_Y(y)$ сосредоточена на оси $(0, \infty)$. Тогда

$$F_T(t) = \Pr(T \leq t) = \Pr(X \leq tY) = \int_0^{\infty} F_X(ty) f_Y(y) dy.$$

Дифференцируя это равенство по t , находим, что отношение $T = X/Y$ обладает плотностью

$$f_T(t) = \int_0^{\infty} f_X(ty) y f_Y(y) dy.$$

Используя этот результат, приведем (без доказательства) несколько утверждений, которые оказываются полезными в теории оценивания.

Утверждение 1

Пусть X и Y – две независимые случайные величины, распределенные по экспоненциальному закону с параметрами λ и μ соответственно:

$$f_X(x) = \lambda \exp(-\lambda x), \quad x \geq 0,$$

$$f_Y(y) = \mu \exp(-\mu y), \quad y \geq 0.$$

Тогда отношение $T = X/Y$ обладает плотностью

$$f_T(t) = \frac{\lambda \mu}{(\mu + \lambda t)^2}.$$

Утверждение 2

Пусть X и Y – две независимые случайные величины, плотности распределения которых отвечают гамма-распределению с параметрами (μ, m) и (λ, n) соответственно:

$$f_X(x) = \frac{\mu^m}{\Gamma(m)} x^{m-1} \exp(-\mu x), \quad x \geq 0,$$

$$f_Y(y) = \frac{\lambda^n}{\Gamma(n)} y^{n-1} \exp(-\lambda y), \quad y \geq 0.$$

Тогда отношение $T = X/Y$ обладает плотностью

$$f_T(t) = \frac{(\mu/\lambda)^m \Gamma(m+n)}{\Gamma(m)\Gamma(n)} t^{m-1} [1 + (\mu/\lambda) t]^{-m-n}.$$

Утверждение 3

Пусть X – нормальная случайная величина с нулевым математическим ожиданием и дисперсией σ_X^2 , а Y – нормальная случайная величина с нулевым математическим ожиданием и дисперсией σ_Y^2 .

Тогда отношение их квадратов $T^2 = X^2/Y^2$ распределено по закону

$$\Pr(T^2 \leq t) = \frac{\sigma_x/\sigma_y}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{\tau} [1 + \tau (\sigma_x/\sigma_y)^2]},$$

а плотность распределения случайной величины T^2 определяется следующим образом:

$$f_{T^2}(t) = \frac{\sigma_x \sigma_y}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{t} (\sigma_x^2 t + \sigma_y^2)}.$$

Утверждение 4

Пусть X – нормальная случайная величина с математическим ожиданием m_x и дисперсией σ_x^2 , а Y – нормальная случайная величина с нулевым математическим ожиданием и дисперсией σ_y^2 .

Тогда случайное отношение $T = X^2/Y^2$ имеет плотность распределения

$$f_T(t) = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})\Gamma(\frac{1}{2})} t^{-1/2} (1+t)^{-(n+1)/2}.$$

Утверждение 5

Пусть $X_1, X_2, \dots, X_n, X_{n+1}$ – нормальные случайные величины с нулевым математическим ожиданием и одинаковой дисперсией σ^2 каждая.

Тогда случайное отношение их квадратов

$$T = X_{n+1}^2 \left(\sum_{m=1}^n X_m^2 \right)^{-1}$$

имеет плотность распределения

$$f_{T^2}(t) = \frac{\exp(-m_x/2)}{\sqrt{\pi t}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(m_x/2)^n}{\Gamma(n+1)} (1+t)^{-n-1}.$$

6.9. Задачи для решения

Задача 6.1

Случайная величина X распределена по показательному закону с плотностью распределения $f(x) = \lambda \exp(-\lambda x)$.

С помощью какого функционального преобразования можно превратить случайную величину X в случайную величину Y , распределенную по закону Коши: $g(y) = [\pi(1+y^2)]^{-1}$?

Ответ: $Y = \operatorname{ctg}[\pi \exp(-\lambda X)]$, ($X > 0$).

Задача 6.2

Дан случайный вектор (X, Y) с плотностью $f_{XY}(x, y)$.

Найти плотность вектора (U, V) , если $U = X + Y$, $V = X - Y$.

Ответ :

$$f_{uv}(u, v) = \frac{1}{2} f_{xy}((u+v)/2, (u-v)/2).$$

Задача 6.3

Случайная величина X задана плотностью распределения $f(x) = \cos x$ в интервале $[0, \pi/2]$; вне этого интервала $f(x) = 0$.

Найти математическое ожидание случайной величины $Y = X^2$.

Ответ : $M[Y] = M[X^2] = (\pi^2 - 8)/4$.

Задача 6.4

Доказать, что если случайные величины X_1 и X_2 независимы и $\varphi(x)$ – некоторая функция, то и случайные величины $Y_1 = \varphi(X_1)$ и $Y_2 = \varphi(X_2)$ также независимы.

Задача 6.5

Случайная величина X распределена равномерно в интервале $[0; 1]$. Какому функциональному преобразованию необходимо подвергнуть случайную величину X , чтобы получить случайную величину Y , распределенную по показательному закону $g(y) = \lambda \exp(-\lambda y)$, ($y > 0$, $\lambda > 0$) ?

Ответ : $Y = -\lambda^{-1} \ln(1-X)$ или $Y = -\lambda^{-1} \ln(X)$, ($0 < X < 1$).

Задача 6.6

Случайная величина X задана плотностью распределения $f(x)$.

Найти плотность случайных величин $Y = 2X$ и $Z = -2X$.

Ответ :

$$f_Y(y) = \frac{1}{2} f_X(y/2); \quad f_Z(z) = \frac{1}{2} f_X(-z/2).$$

Задача 6.7

Диаметр круга d измерен приближенно.

Рассматривая диаметр d как случайную величину X , распределенную равномерно в интервале $[a, b]$, найти математическое ожидание и дисперсию площади круга $S = \pi X^2/4$.

Ответ :

$$M[S] = \pi(b^2 + ab + a^2)/12;$$

$$D[S] = \pi^2(b-a)^2(4b^2 + 7ab + 4a^2)/720.$$

Задача 6.8

Дан график плотности $f_X(x)$ случайной величины X .

Построить на том же графике плотность распределения вероятностей $f_Y(y)$ случайной величины $Y = X + q$, а также плотность распределения вероятностей $f_Z(z)$ случайной величины $Z = X - q$, где q – неслучайная величина.

Написать выражения для $f_Y(x)$ и $f_Z(x)$.

Ответ : $f_Y(x) = f_X(x - q)$, $f_Z(x) = f_X(x + q)$.

Задача 6.9

Случайные величины X и Y независимы и имеют характеристические функции $q_X(t)$ и $q_Y(t)$ соответственно.

Найти характеристическую функцию случайной величины $Z = X - Y$.

Ответ: $q_Z(t) = q_X(t)q_Y^*(t)$.

Задача 6.10

Доказать, что если случайные величины X и Y независимы и нормально распределены с параметрами $m_X = m_Y = 0$, $\sigma_X = \sigma_Y = \sigma$, то случайные величины $U = X^2 + Y^2$ и $V = X/Y$ также независимы.

Задача 6.11

Доказать, что если случайная величина X равномерно распределена на $[0; 1]$, то случайные величины $U = \sin(2\pi X)$ и $V = \cos(2\pi X)$ имеют одинаковый закон распределения.

Задача 6.12

Система из двух случайных величин (X, Y) имеет плотность $f_{XY}(x, y)$.

Найти функцию распределения $F_Z(z)$ и плотность распределения $f_Z(z)$ максимальной из этих двух величин, $Z = \max(X, Y)$.

Ответ:

$$F_Z(z) = \int_{-\infty}^z \int_{-\infty}^z f_{XY}(x, y) dx dy,$$

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^z f_{XY}(z, y) dy + \int_{-\infty}^z f_{XY}(x, z) dx.$$

6.10. Задания для проверки

1. Сформулируйте закон распределения монотонной функции одного случайного аргумента.
2. Сформулируйте закон распределения вероятностей немонотонной функции одного случайного аргумента.
3. Сформулируйте теорему сохранения дифференциальной вероятности.
4. Раскройте содержательный смысл композиции законов распределения.
5. Сформулируйте закон распределения суммы двух случайных величин.
6. Сформулируйте закон распределения разности двух случайных величин.
7. Сформулируйте закон распределения композиции нормальных законов.
8. Укажите свойства результата линейного преобразования нормальной случайной величины.
9. Сформулируйте закон Симпсона (треугольное распределение).
10. Укажите свойства закона χ^2 .
11. Укажите свойства распределения Стьюдента.
12. Укажите свойства распределения Эрланга.

7. Предельные теоремы теории вероятностей

На практике важную роль имеют закономерности, происходящие с вероятностями, близкими к единице. Из них особую роль играют закономерности, возникающие в результате наложения большого числа независимых или слабо зависимых случайных факторов. Накопленный опыт указывает, что явления, имеющие вероятность, весьма близкую к единице, почти обязательно происходят. Поэтому одной из основных задач теории вероятностей является установление закономерностей, происходящих с вероятностями, близкими к единице (или к нулю).

Закономерности такого вида называют *предельными теоремами теории вероятностей*.

Предельные теоремы теории вероятностей образуют две группы:

1) *закон больших чисел* (этот закон обычно формулируется в форме теорем Я. Бернулли, Пуассона, Чебышева и Маркова);

2) *центральная предельная теорема* (эта теорема обычно формулируется в форме теоремы Лапласа и теоремы Ляпунова).

7.1. Закон больших чисел

Закон больших чисел имеет несколько форм, каждая из которых устанавливает ту или иную *устойчивость выборочных средних* при большом числе наблюдений.

1. Теорема Я. Бернулли (простейшая форма закона больших чисел)

При неограниченном увеличении числа N независимых опытов, в каждом из которых событие A появляется с вероятностью p , частота P_N^* события A сходится по вероятности к вероятности p этого события:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \Pr(|P_N^* - p| < \varepsilon) = 1, \quad (7.1)$$

где ε — сколь угодно малое положительное число.

2. Теорема Пуассона

При неограниченном увеличении числа N независимых опытов, в которых событие A появляется с вероятностями $p_1, p_2, \dots, p_N$, частота P_N^* события A сходится по вероятности к средней вероятности события:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \Pr\left(\left|P_N^* - \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N p_n\right| < \varepsilon\right) = 1. \quad (7.2)$$

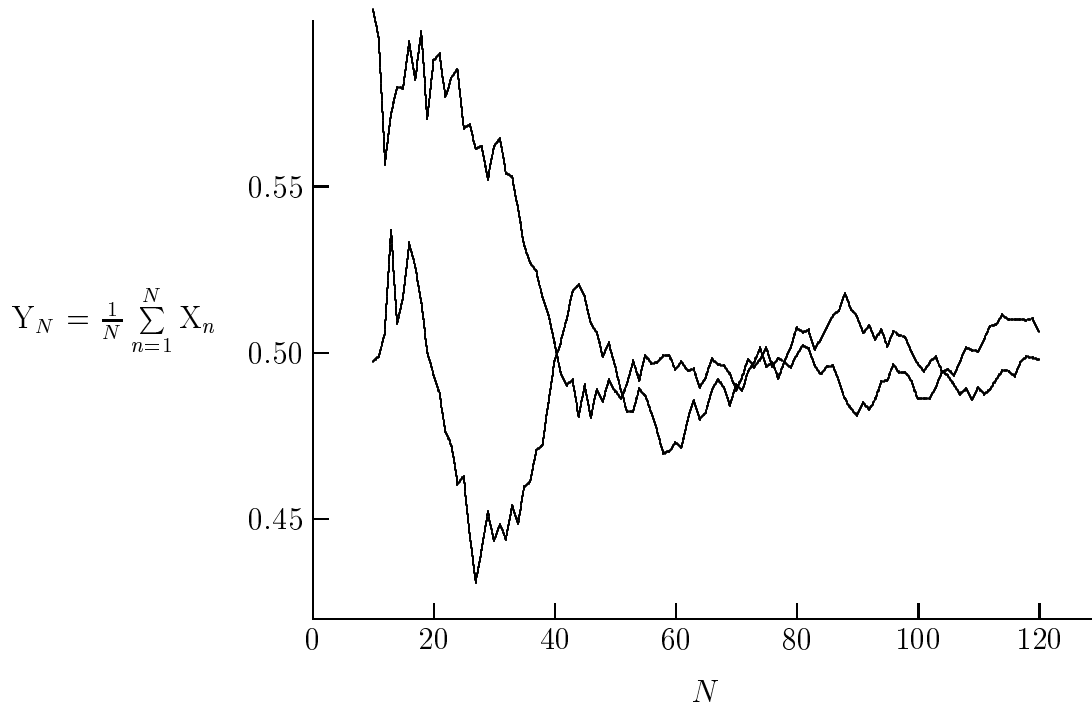


Рисунок 7.1 — Два примера динамики выборочного среднего арифметического $Y_N = N^{-1} \sum_{n=1}^N X_n$ с ростом числа опытов N ; независимые случайные величины $X_1, X_2, \dots, X_N$ равномерно распределены на $[0; 1]$

3. Теорема Чебышева (закон больших чисел)

При неограниченном увеличении числа N независимых опытов, в каждом из которых случайная величина X с математическим ожиданием m_x принимает какое-то (очередное) значение X_n , где $n = 1, 2, \dots, N$, среднее арифметическое этих значений сходится по вероятности к математическому ожиданию случайной величины X :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \Pr \left(\left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N X_n - m_x \right| < \varepsilon \right) = 1. \quad (7.3)$$

4. Теорема Маркова (закон больших чисел для разных условий опыта)

Если $X_1, X_2, \dots, X_N$ — независимые случайные величины с математическими ожиданиями $m_{x_1}, m_{x_2}, \dots, m_{x_N}$ и дисперсиями $D_{x_1}, D_{x_2}, \dots, D_{x_N}$, причем все дисперсии ограничены сверху одним и тем же числом L : $D_{x_n} \leq L$, где $n = 1, \dots, N$, то при неограниченном возрастании числа N среднее арифметическое наблюдаемых значений случайных величин сходится по вероятности к среднему арифметическому их математических ожиданий:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \Pr \left(\left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N X_n - \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N m_{x_n} \right| < \varepsilon \right) = 1. \quad (7.4)$$

Эту теорему еще часто называют *обобщенной теоремой Чебышева*.

Пусть X — случайная величина, равномерно распределенная на интервале $[0; 1]$, и N — число независимых опытов. Рассмотрим случайную величину

$$Y_N = N^{-1} \sum_{n=1}^N X_n$$

и изучим тенденцию сходимости с ростом величины N .

На рис. 7.1 показана эволюция выборочного среднего арифметического Y_N около идеального значения $p = 0,5$. Видно приближение (хотя и достаточно медленное) выборочного среднего к своему математическому ожиданию p .

7.2. Неравенство Маркова

Если у неотрицательной случайной величины X существует математическое ожидание m_x , то при любом положительном ξ имеет место неравенство

$$\Pr(X < \xi) \geq 1 - \frac{m_x}{\xi}. \quad (7.5)$$

Пример

Средний срок службы мотора 4 года.

Оценить снизу вероятность того, что данный мотор не прослужит более 20 лет.

Решение

Рассмотрим случайную величину X — срок службы мотора. Из условия примера следует, что $m_x = 4$. Требуется оценить снизу вероятность $\Pr(X < 20)$.

Эту вероятность можно рассматривать как левую часть неравенства Маркова с $\xi = 20$.

Тогда

$$\Pr(X < 20) \geq 1 - \frac{m_x}{\xi} = 1 - \frac{4}{20} = 0,8.$$

Пример

Сумма всех вкладов в некотором банке составляет 2000\$, а вероятность того, что случайно взятый вклад не превышает 100\$, равна 0,8.

Что можно сказать о числе вкладчиков данного банка?

Решение

Пусть X — величина случайно выбранного вклада, а N — число всех вкладчиков. Тогда из условия задачи следует, что $m_x = 2000/N$. Так как $\Pr(X < 100) = 0,8$, и по неравенству Маркова

$$\Pr(X < 100) \geq 1 - m_x/100,$$

то

$$0,8 \geq 1 - \frac{2000}{100 N}.$$

Отсюда

$$\frac{2000}{N \cdot 100} \geq 0,2; \quad 20 \geq N \cdot 0,2; \quad N \leq 100.$$

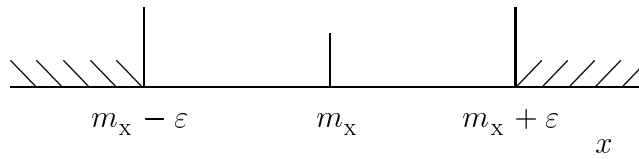


Рисунок 7.2 — К неравенству Чебышева; штрихами указана область выполнения события $|X - m_x| \geq \varepsilon$

7.3. Неравенство Чебышева

При оценке скорости сходимости по вероятности различных средних к постоянным величинам можно пользоваться неравенством Чебышева:

$$\Pr(|X - m_x| \geq \varepsilon) \leq D_x / \varepsilon^2, \quad (7.6)$$

где $\varepsilon > 0$ — заданная величина; m_x , D_x — математическое ожидание и дисперсия случайной величины X .

На рис. 7.2 показана область, отвечающая условию $|X - m_x| \geq \varepsilon$.

Пример

Для нормальной случайной величины X со средним m_x и дисперсией $D_x = \sigma^2$ при $\varepsilon = 3\sigma$ из неравенства Чебышева следует

$$\Pr(|X - m_x| \geq 3\sigma) \leq D_x / (3\sigma)^2 = 1/9.$$

Прямым вычислением (правило "трех сигм") получаем

$$\Pr(|X - m_x| \geq 3\sigma) \leq 0,0027.$$

Видно, что неравенство Чебышева дает относительно грубую оценку границы вероятности. Однако благодаря простоте получения этой оценки это неравенство часто применяют на практике.

7.4. Центральная предельная теорема

Центральная предельная теорема имеет различные формы, из которых приведем три.

1. Теорема Лапласа

Если производится N независимых опытов, в каждом из которых событие A имеет вероятность p , то при $N \rightarrow \infty$ закон распределения случайной величины X — числа появлений события — неограниченно приближается к нормальному закону с параметрами

$$m = Np, \quad \sigma = \sqrt{Npq}, \quad (q = 1 - p). \quad (7.7)$$

На основе этого можно вычислить вероятность попадания величины X на любой участок (α, β) . При достаточно большом N

$$\Pr(X \in (\alpha, \beta)) \approx \Phi\left(\frac{\beta - Np}{\sqrt{Npq}}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - Np}{\sqrt{Npq}}\right), \quad (7.8)$$

где $\Phi(x)$ – функция Лапласа

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x \exp(-t^2/2) dt. \quad (7.9)$$

Вместо формулы (7.8) часто пользуются выражением для вероятности попадания на участок не самой случайной величины X , а нормированной величины

$$Z = (X - m_x)/\sigma = (X - Np)/\sqrt{Npq} \quad (7.10)$$

с параметрами

$$m_z = 0, \quad \sigma_z = 1. \quad (7.11)$$

При достаточно большом N

$$\Pr\{Z \in (\alpha, \beta)\} \approx \Phi(\beta) - \Phi(\alpha). \quad (7.12)$$

2. Центральная предельная теорема для одинаково распределенных слагаемых

Если $X_1, X_2, \dots, X_N$ – одинаково распределенные независимые случайные величины с математическим ожиданием m_x и средним квадратическим отклонением σ_x , то их сумма

$$Y = \sum_{n=1}^N X_n$$

при достаточно большом N имеет приближенно нормальное распределение с параметрами

$$m_Y = Nm_x, \quad \sigma_Y = \sqrt{N}\sigma_x. \quad (7.13)$$

3. Теорема Ляпунова

Если $X_1, X_2, \dots, X_N$ — независимые случайные величины, имеющие математические ожидания $m_{x_1}, m_{x_2}, \dots, m_{x_N}$ и дисперсии $D_{x_1}, D_{x_2}, \dots, D_{x_N}$, причем выполняется ограничение

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N M[|X_n|^3] \left(\sum_{n=1}^N D_{x_n} \right)^{-3/2} = 0, \quad (7.14)$$

то случайная величина $Y = \sum_{n=1}^N X_n$ при достаточно большом N имеет приближенно нормальное распределение с параметрами

$$m_Y = \sum_{n=1}^N m_{x_n}, \quad \sigma_Y = \left(\sum_{n=1}^N D_{x_n} \right)^{1/2}. \quad (7.15)$$

Смысл ограничения (7.14) в том, чтобы случайные величины были сравнимы по порядку.

7.5. Примеры

Пример 7.1 (Неравенство Чебышева)

Рассмотрим случайную величину X с известными математическим ожиданием m_x и дисперсией D_x . Зададим константу ε и рассмотрим случайное событие $\{A: \text{случайная величина } X \text{ уклоняется от её математического ожидания } m_x \text{ более, чем на } \varepsilon\}$, или $\{A: |X - m_x| \geq \varepsilon\}$.

Для вероятности этого события имеем (рис. 7.2)

$$\Pr(A) = \Pr(|X - m_x| \geq \varepsilon) = \int_{|X - m_x| \geq \varepsilon} f_x(x) dx,$$

где $f_x(x)$ – плотность распределения случайной величины X .

В свою очередь для дисперсии D_x случайной величины X получим

$$D_x = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^2 f_x(x) dx \geq \int_{|X - m_x| \geq \varepsilon} (x - m_x)^2 f_x(x) dx.$$

Заменяя под интегралом величину $(x - m_x)^2$ на ε^2 , получим

$$D_x \geq \int_{|X - m_x| \geq \varepsilon} \varepsilon^2 f_x(x) dx = \varepsilon^2 \Pr(|X - m_x| \geq \varepsilon).$$

Итак, приходим к неравенству

$$\Pr(|X - m_x| \geq \varepsilon) \leq D_x / \varepsilon^2.$$

Пример 7.2 (Теорема Чебышева)

Рассмотрим выборку объемом N независимых случайных величин $X_1, X_2, \dots, X_N$ с одним и тем же законом распределения, характеризуемым параметрами m_x и D_x . Пусть Y_N – арифметическое выборочное среднее

$$Y_N = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N X_n.$$

Для случайной величины Y_N можно записать

$$m_y = M[Y_N] = M\left[\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N X_n\right] = m_x,$$

$$D_y = D[Y_N] = D\left[\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N X_n\right] = \frac{1}{N^2} \sum_{n=1}^N D[X_n] = \frac{1}{N} D_x.$$

Зададимся некоторой положительной величиной ε . Рассмотрим случайное событие $\{A: \text{случайная величина } Y_N \text{ уклоняется от математического ожидания } m_y \text{ более, чем на } \varepsilon\}$, или $\{A: |Y_N - m_y| \geq \varepsilon\}$.

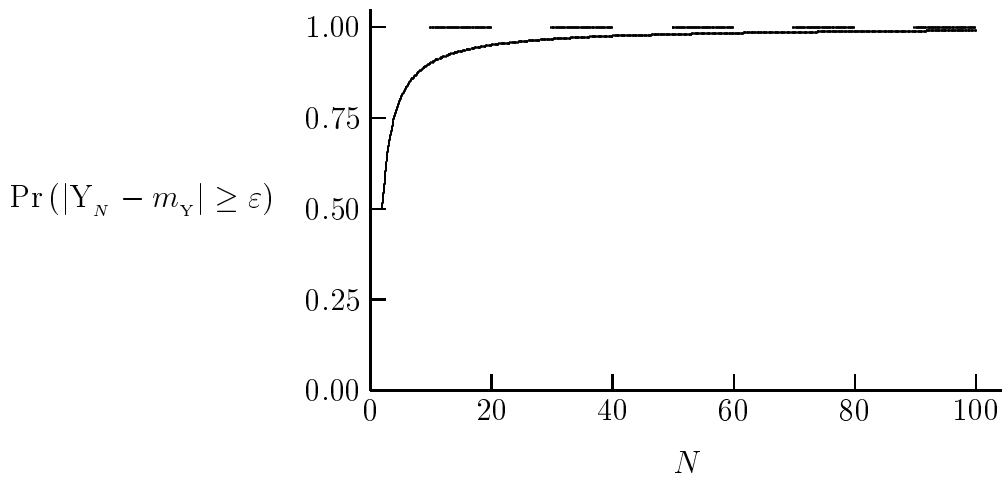


Рисунок 7.3 — К теореме Чебышева

Из неравенства Чебышева, записанного для случайной величины Y_N , имеем

$$\Pr(A) = \Pr(|Y_N - m_Y| \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} D_Y \leq \frac{1}{N\varepsilon^2} D_X.$$

Перейдем к противоположному событию

$$\Pr(|Y_N - m_Y| \leq \varepsilon) \geq \left(1 - \frac{1}{N\varepsilon^2} D_X\right).$$

Таким образом, каждому значению ε можно поставить в соответствие величину δ_N такую, что

$$\delta_N = \frac{1}{N\varepsilon^2} D_X.$$

Поскольку всегда выполняется

$$\Pr(|Y_N - m_X| \leq \varepsilon) \leq 1,$$

то можно записать двойное неравенство (рис. 7.3)

$$1 \geq \Pr(|Y_N - m_X| \leq \varepsilon) \geq \left(1 - \frac{1}{N\varepsilon^2} D_X\right).$$

Таким образом, для любому значению ε можно поставить в соответствие такую величину N (объем выборки), что вероятность $\Pr(A)$ рассматриваемого события A будет отличаться от единицы не более, чем на $D_X/(N\varepsilon^2)$. При этом $\Pr(A)$ *всегда* ограничена сверху единицей.

Тем самым гарантируется сходимость по вероятности выборочного среднего Y_N к математическому ожиданию m_X регистрируемой величины X .

Пример 7.3

Случайная величина ξ имеет математическое ожидание $M[\xi] = 1$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma = 0,2$. С помощью неравенства Чебышева оценить вероятность неравенства $\{0,5 \leq \xi \leq 1,5\}$.

Решение

Из неравенства Чебышева следует

$$\begin{aligned}\Pr\{0,5 \leq \xi \leq 1,5\} &= \Pr\{|X - M[\xi]| \leq 0,5\} \geq \\ &\geq 1 - \sigma^2/0,5^2 = 1 - 0,04/0,25 = 0,84.\end{aligned}$$

Пример 7.4

Математическое ожидание скорости ветра на данной высоте равно 25 км/час . Какие скорости ветра можно ожидать на этой высоте с вероятностью, не меньшей, чем $0,9$?

Решение

Пусть ξ – скорость ветра. Из неравенства Чебышева получаем

$$\Pr\{|\xi - 25| \leq \varepsilon\} \geq (1 - 4,5^2/\varepsilon^2) > 0,9.$$

Поэтому $\varepsilon > 14,2 \text{ км/час}$, следовательно, с вероятностью, большей, чем $0,9$, имеем $10,8 \leq \xi \leq 39,2 \text{ км/час}$.

Пример 7.5

Вероятность появления события в каждом из 625 независимых испытаний равна $0,8$.

Найти вероятность того, что относительная частота появления этого события отклонится от его вероятности по абсолютной величине не более, чем на $0,04$.

Решение

По условию $n = 625$; $p = 0,8$; $q = 0,2$; $\varepsilon = 0,04$. Требуется найти вероятность $\Pr\{|m/625 - 0,8| \leq 0,04\}$.

Воспользуемся формулой

$$\Pr\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \leq \varepsilon\right) \approx 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{n/pq}\right).$$

Подставляя данные примера, получим для искомой вероятности значение

$$2\Phi(2,5) \approx 0,9876.$$

Пример 7.6

В партии $n = 10000$ изделий. Каждое изделие независимо от других может быть бракованным с вероятностью $p = 0,1$.

Найти вероятность того, что число μ бракованных изделий заключено между $\mu_1 = 970$ и $\mu_2 = 1030$.

Решение

При $p = 0,1$ имеем $q = 1 - p = 0,9$. Значение $npq = 900$. Воспользуемся теоремой Лапласа. Вычтем $np = 1000$ из трех частей неравенства $\mu_1 < \mu < \mu_2$ и получившееся неравенство разделим почленно на $\sigma = (npq)^{1/2} = 30$:

$$(\mu_1 - np)/\sigma < (\mu - np)/\sigma < (\mu_2 - np)/\sigma.$$

Используя (7.12), получим, подставив данные примера,

$$\begin{aligned} \Pr\{(\mu_1 - np)/\sigma < (\mu - np)/\sigma < (\mu_2 - np)/\sigma\} &= \\ &= \Pr\{-1 < (\mu - 1000)/30 < 1\} \approx \Phi(1) - \Phi(-1). \end{aligned}$$

Учтем теперь, что функция Лапласа нечетна, $\Phi(-1) = -\Phi(1)$. Поэтому

$$\Pr\{970 < \mu < 1030\} \approx 2\Phi(1) = 0,6826.$$

Пример 7.7

Вероятность того, что деталь нестандартна, равна $p = 0,1$.

Найти вероятность того, что среди случайно отобранных 400 деталей относительная частота появления нестандартных деталей отклонится от вероятности $p = 0,1$ по абсолютной величине не более, чем на 0,03.

Решение

По условию $n = 400$; $p = 0,1$; $q = 0,9$; $\varepsilon = 0,03$. Пусть m – число бракованных изделий. Требуется найти вероятность события $|m/n - p| \leq \varepsilon$.

Рассмотрим вероятность этого события

$$\Pr\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \leq \varepsilon\right) = \Pr\{-\varepsilon n < (m - pn) < \varepsilon n\}.$$

Разделим все части второго неравенства на σ . Тогда получим

$$\Pr\left(\left|\frac{m - np}{\sigma}\right| \leq \frac{\varepsilon n}{\sigma}\right) \approx 2\Phi(\varepsilon n/\sigma).$$

Для данных примера $\sigma = (npq)^{1/2} = 6$, поэтому искомая вероятность

$$\Pr\left(\left|\frac{m}{400} - 0,1\right| \leq 0,03\right) \approx 2\Phi(2) = 0,9544.$$

Полученный результат означает, что если взять достаточно большое число проб по 400 деталей в каждой, то примерно в 95,44 % этих проб отклонение относительной частоты от постоянной вероятности $p = 0,1$ по абсолютной величине не превысит 0,03.

Пример 7.8

Вероятность того, что деталь нестандартна, равна $p = 0,1$.

Определить, сколько деталей необходимо отобрать, чтобы с вероятностью, равной 0,9544, можно было утверждать, что относительная частота появления нестандартных деталей (среди отобранных) отклонится от постоянной вероятности не более, чем на 0,03.

Решение

По условию примера $p = 0,1$; $q = 0,9$; $\varepsilon = 0,03$. Таким образом, имеем $\Pr(|m/n - 0,1| \leq 0,03) = 0,9544$. Требуется найти n .

Воспользуемся формулой

$$\Pr(|m/n - p| \leq \varepsilon) \approx 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{n/pq}\right).$$

В силу условия

$$2\Phi\left(0,03\sqrt{\frac{n}{0,1 \cdot 0,9}}\right) = 2\Phi(0,1\sqrt{n}) = 0,9544.$$

Поэтому для отыскания числа n получаем уравнение $0,1\sqrt{n} = 2$. Отсюда искомое число деталей составляет $n = 400$.

Полученный результат означает: если взять достаточно большое число проб по 400 деталей, то в 95,44% этих проб относительная частота появления нестандартных деталей будет отличаться от постоянной вероятности $p = 0,1$ по абсолютной величине не более, чем на 0,03; т.е. относительная частота будет заключена в границах от 0,07 (поскольку $0,1 - 0,03 = 0,07$) до 0,13 (так как $0,1 + 0,03 = 0,13$).

Другими словами, число нестандартных деталей в 95,44% проб будет заключено от 28 (7% от 400) до 52 (13% от 400).

Если взять лишь одну пробу из 400 деталей, то с большой уверенностью можно ожидать, что в этой пробе будет нестандартных деталей не менее 28 и не более 52. Возможно, хотя и маловероятно, что нестандартных деталей окажется меньше 28, либо больше 52.

Пример 7.9

Вероятность появления события в каждом из n независимых испытаний равна 0,8.

Сколько нужно провести испытаний, чтобы с вероятностью 0,9 можно было ожидать, что событие появится не менее 75 раз?

Решение

По условию $p = 0,8$; $q = 0,2$; $\alpha = 75$; $\beta = n$, где n – искомое число испытаний. Воспользуемся теоремой Лапласа

$$\Pr\{n \in (\alpha, \beta)\} \approx \Phi\left(\frac{\beta - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - np}{\sqrt{npq}}\right).$$

Подставляя данные примера, получим

$$0,9 \approx \Phi\left(\frac{n - 0,8n}{\sqrt{0,16n}}\right) - \Phi\left(\frac{75 - 0,8n}{\sqrt{0,16n}}\right),$$

или

$$0,9 \approx \Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{2}\right) - \Phi\left(\frac{75 - 0,8n}{0,4\sqrt{n}}\right).$$

Очевидно, число испытаний $n > 75$, поэтому $\sqrt{n} > \sqrt{75} \approx 8,66$.

Поскольку функция Лапласа – монотонно возрастающая и $\Phi(4) \approx 0,5$, то можно принять, что $\Phi(0,5\sqrt{n}) = 0,5$.

Следовательно,

$$\Phi\left(\frac{75 - 0,8n}{0,4\sqrt{n}}\right) \approx -0,4.$$

По таблице функций Лапласа найдем, что $\Phi(1,28) = 0,4$.

Учтем теперь, что функция Лапласа нечетная. Это дает (вместо знака $\approx$ пишем знак $=$)

$$\frac{75 - 0,8n}{0,4\sqrt{n}} = -1,28.$$

Это выражение можно рассматривать как квадратное уравнение относительно $\sqrt{n}$. В результате решения получим $\sqrt{n} = 10$.

Следовательно, искомое число испытаний $n = 100$.

Пример 7.10

Игральная кость бросается n раз. Пусть m — число появления "тройки" в этих бросаниях игральной кости. Рассмотрим два противоположных события $A: \{|m/n - 1/6| \leq 0,01\}$ и $B: \{|m/n - 1/6| \geq 0,01\}$.

Сколько раз нужно бросать игральную кость, чтобы вероятность $\Pr(A)$ была не меньше вероятности $\Pr(B)$?

Решение

Воспользуемся формулой

$$\Pr\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \leq \varepsilon\right) \approx 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{n/pq}\right).$$

По условию $p = 1/6$; $q = 5/6$; $\varepsilon = 0,01$.

Вероятность события, противоположного событию A , т.е. события B , равна

$$\Pr(B) = 1 - 2\Phi(\varepsilon\sqrt{n/pq}).$$

Согласно условию должно иметь место неравенство

$$2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{n/pq}\right) \geq 1 - 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{n/pq}\right),$$

или $\Phi\left(\varepsilon\sqrt{n/pq}\right) \geq 0,25$.

По табл. 4.3 найдем $\Phi(0,67) = 0,2486$ и $\Phi(0,68) = 0,2517$.

Выполнив линейную интерполяцию, получим $\Phi(0,6745) = 0,25$. Учитывая, что функция Лапласа — монотонно возрастающая, найдем $\varepsilon\sqrt{n/pq} \geq 0,6745$.

Отсюда получим для искомого числа бросаний игральной кости:

$$n \geq pq \left(\frac{0,6745}{\varepsilon}\right)^2 \approx 632.$$

Пример 7.11 (Оценка значений определенных интегралов)

Требуется найти значение определенного интеграла

$$J = \int_a^b f(x) dx. \quad (1)$$

Решение

Пусть выборка $x_1, x_2, \dots, x_N$ – последовательность реализаций случайной величины X , равномерно распределенной на интервале $[a, b]$. С целью найти оценку $\hat{J}_N$ интеграла (1)

$$\hat{J}_N = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(x_n) \quad (2)$$

рассмотрим величину, связанную с выборкой объемом N ,

$$Y_N = \frac{J - \hat{J}_N}{\sqrt{D[\hat{J}_N]}}.$$

В соответствии с теоремой Лапласа для больших объемов выборки N имеем $Y_N \rightarrow Y$, где Y – нормальная случайная величина с плотностью распределения вероятностей

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right).$$

Для дисперсии $D[\hat{J}_N]$ имеем

$$D[\hat{J}_N] = \frac{1}{N} D_1, \quad (3)$$

где D_1 – дисперсия случайной величины $\hat{J}_1$, т.е. измерения за один раз.

Воспользуемся формулой

$$\Pr(|Y_N| \leq \varepsilon) = 2\Phi(\varepsilon),$$

где $\Phi(x)$ – функция Лапласа. Иначе

$$\Pr\left(\frac{|J - \hat{J}_N|}{\sqrt{D[\hat{J}_N]}} \leq \varepsilon\right) = 2\Phi(\varepsilon). \quad (4)$$

Введем *относительную погрешность* δ оценки интеграла

$$\delta = \frac{|J - \hat{J}_N|}{J}, \quad (5)$$

Из формулы (4) имеем

$$\Pr\left(\delta \frac{J}{\sqrt{D[\hat{J}_N]}} \leq \varepsilon\right) = 2\Phi(\varepsilon).$$

Теперь запишем приближенно

$$\Pr\left(\delta \frac{\hat{J}_N}{\sqrt{D[\hat{J}_N]}} \leq \varepsilon\right) \approx 2\Phi(\varepsilon). \quad (6)$$

Пусть требуемая вероятность q рассматриваемого события равна $q = 0,9$, тогда $2\Phi(\varepsilon) = 0,9$ и $\Phi(\varepsilon) = 0,45$. Из таблиц функции Лапласа найдем, что $\varepsilon = 1,65$, откуда

$$\delta \sqrt{N} \frac{\hat{J}_N}{\sqrt{D[\hat{J}_1]}} \approx 1,65.$$

Таким образом, для верхней границы неравенства получим

$$\delta \sqrt{N} = 1,65 C, \quad (7)$$

где $C = \sqrt{D[\hat{J}_1]}/\hat{J}_N$ – постоянная величина, связанная с конкретным интегралом J .

Пусть теперь δ_1 и δ_2 – две различные относительные погрешности (т.е. точности оценивания), а N_1 и N_2 – связанные с ними объемы выборок. Тогда

$$\delta_1^2/\delta_2^2 = N_2/N_1. \quad (8)$$

Если, например, $\delta_2 = \delta_1/10$, то

$$N_2 = N_1 \frac{\delta_1^2}{\delta_2^2} = 100N_1.$$

Таким образом, требуемый объем выборки N увеличивается обратно пропорционально квадрату требуемой точности δ оцениваемого интеграла.

7.6. Задачи для решения

Задача 7.1

Число X солнечных дней в году для данной местности является случайной величиной со средним значением 100 дней и среднеквадратичным отклонением 20 дней.

Оценить сверху вероятность событий: $\{A: X \geq 150\}$ и $\{B: X \geq 200\}$.

Ответ: $P(A) \leq 0,16$; $P(B) \leq 0,04$.

Задача 7.2

Используя неравенство Чебышева, оценить сверху вероятность следующего события $\{|X - M[X]| < 0,2\}$, если $D[X] = 0,004$.

Ответ:

$$\Pr\{|X - M[X]| < 0,2\} > (1 - 0,004/0,04) = 0,9.$$

Задача 7.3

Оценить вероятность того, что отклонение любой случайной величины от её математического ожидания будет по абсолютной величине не более трех средних квадратических отклонений этой величины (правило "трех сигм").

Ответ :

$$\Pr\{|\xi - M[\xi]| \leq 3\sigma\} \geq 1 - \sigma^2/(9\sigma^2) = 8/9.$$

Задача 7.4

В устройстве складывается 1000 чисел, каждое из которых округлено с точностью до 0,001. Предполагается, что ошибки округления независимы и равномерно распределены в интервале $[-0,005; 0,005]$.

Найти интервал, в котором с вероятностью 0,998 заключена суммарная ошибка.

Ответ: Искомый интервал равен $[-0,0283; 0,0283]$.

Задача 7.5

Устройство состоит из 10 независимо работающих элементов. Вероятность отказа каждого элемента за время T равна 0,05.

С помощью неравенства Чебышева оценить сверху вероятность того, что абсолютная величина разности X между числом отказавших элементов и средним числом (математическим ожиданием) отказов за время T окажется: а) меньше двух; б) не меньше двух.

Ответ: $M[X] = 0,5$; $D[X] = 0,475$.

а) $\Pr\{|X - 0,5| < 2\} \geq 1 - 0,475 / 4 = 0,88$;

б) $\Pr\{|X - 0,5| > 2\} \leq 1 - 0,88 = 0,12$.

Задача 7.6

Пусть случайная величина η распределена по закону Пуассона с параметром λ . Рассмотрим случайную величину $\xi = (\eta - \lambda)/\sqrt{\lambda}$.

Доказать, что при $\lambda \rightarrow \infty$ распределение случайной величины ξ стремится к нормальному закону с параметрами $M[\xi] = 0$ и $D[\xi] = 1$.

Задача 7.7

Случайная величина η является средней арифметической 10000 независимых, одинаково распределенных случайных величин, среднее квадратическое отклонение каждой из которых равно двум.

Какое максимальное отклонение величины η от её математического ожидания можно ожидать с вероятностью, не меньшей, чем 0,9544?

Ответ: Пусть α — искомое максимальное отклонение. Тогда

$$\Pr\left(\left|\frac{1}{10000} \sum_{k=1}^{10000} (\xi_k - M[\xi_k])\right| \leq \alpha\right) = 0,9544.$$

Поэтому $\alpha = 0,04$.

Задача 7.8

В осветительную сеть параллельно включено 20 ламп. Вероятность того, что за время T лампа будет включена, равна 0,8.

Пользуясь неравенством Чебышева, оценить вероятность того, что абсолютная величина разности между числом включенных ламп X и средним числом (математическим ожиданием) включенных ламп за время T окажется: а) меньше трех; б) не меньше трех.

Ответ:

а) $\Pr\{|X - 16| < 3\} \geq 0,36$;

б) $\Pr\{|X - 16| \geq 3\} \leq 0,64$.

Задача 7.9

В эксперименте с подбрасыванием монеты выполнено n испытаний.

Сколько раз нужно подбрасывать монету, чтобы с вероятностью не меньше, чем 0,997, можно было бы утверждать, что число m появлений герба будет удовлетворять неравенству $0,499n \leq m \leq 0,501n$?

Ответ: $n = 83300000$.

Задача 7.10

Средний расход электроэнергии составил $50 \text{ кВт}\cdot\text{ч}$ в день.

Оценить вероятность того, что расход электроэнергии не будет превышать $120 \text{ кВт}\cdot\text{ч}$ в день.

Ответ: $P \geq 0,583$.

Задача 7.11

В партии из $n = 22500$ изделий каждое изделие независимо от других может быть бракованным с вероятностью $p = 1/5$.

Найти вероятность того, что число μ бракованных изделий заключено между 4380 и 4560.

Ответ:

$$\Pr\{4380 < \mu < 4560\} \approx 0,3413 + 0,4772 = 0,8185.$$

Задача 7.12

Среднее квадратическое отклонение ошибки измерения угла составляет $\sigma = 2^\circ$, математическое ожидание равно нулю.

Найти вероятность того, что ошибка данного измерения угла будет более 5° .

Ответ: $P = 0,16$.

7.7. Задания для проверки

1. Укажите роль предельных теорем теории вероятностей.
2. Сформулируйте закон больших чисел.
3. Сформулируйте центральную предельную теорему теории вероятностей.
4. Раскройте содержательный смысл неравенства Маркова.
5. Раскройте содержательный смысл неравенства Чебышева.
6. Раскройте содержательный смысл теоремы Ляпунова.
7. Предложите интерпретацию теоремы Я.Бернулли.
8. Предложите интерпретацию теоремы Чебышева.
9. Раскройте содержательный смысл теоремы Лапласа.
10. Постройте пример практического применения центральной предельной теоремы теории вероятностей.

8. Случайные процессы

8.1. Случайные функции

Функция $X(t)$ называется *случайной*, если её значение при любом аргументе t является случайной величиной.

Примеры случайных функций:

$V(t)$ – напряжение электропитания ЭВМ в зависимости от времени t ;

$T(h)$ – температура атмосферного воздуха в данном пункте в данный момент в зависимости от высоты h над землей;

$N(t)$ – число отказов ЭВМ, происшедших за время от 0 до t .

Понятие случайной функции является обобщением понятия случайной величины. Так как случайную величину X можно рассматривать как функцию элементарного события $\omega: X = \varphi(\omega)$ ($\omega \in \Omega$), где Ω – пространство элементарных событий, то случайную функцию $X(t)$ можно представить в виде

$$X(t) = \varphi(t, \omega), \quad \omega \in \Omega, \quad (8.1)$$

где t – неслучайный аргумент.

Реализацией случайной функции $X(t)$ называется конкретный вид, который она принимает в результате опыта (когда осуществлялось элементарное событие ω). Например, записывая с помощью какого-либо прибора напряжение питания ЭВМ в зависимости от времени на участке $[0, t]$, получим реализацию $\varphi(t)$ случайной функции $V(t)$.

Ряд проведенных опытов, исход каждого из которых – случайная функция $X(t)$, дает совокупность реализаций $x_1(t), x_2(t), \dots, x_N(t)$ этой случайной функции. Реализации неизбежно отличаются друг от друга из-за случайных причин. Для фиксированного момента времени t случайная функция $X(t)$ превращается в обычную случайную величину. Эта случайная величина называется *сечением* случайной функции.

Если рассмотреть ряд сечений случайной функции во временных точках $t_1, t_2, \dots, t_m$, то получится m -мерный случайный вектор. На практике, если значения случайной функции регистрируются с каким-то интервалом при значениях аргумента $t_1, t_2, \dots, t_N$, имеем дело именно с N -мерным случайным вектором.

Случайную функцию $X(t)$, аргументом которой является время, обычно называют *случайным процессом*. Случайный процесс, протекающий в физической системе S , состоит в том, что с течением времени t система S случайным образом меняет свое состояние. Если состояние системы S в момент t описывается одной скалярной случайной величиной $X(t)$, то имеем дело со *скалярной случайной функцией*

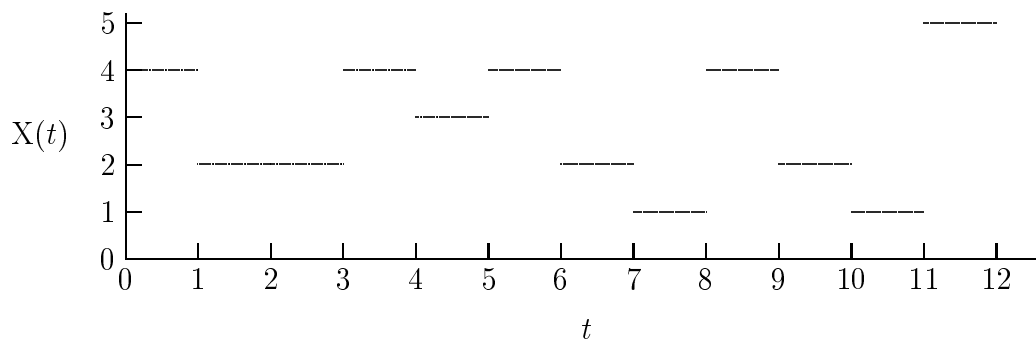


Рисунок 8.1 — Реализации процесса $X(t)$ типа 1а. Пять равновероятных состояний: 1, 2, 3, 4, 5

(скалярным случайным процессом) $X(t)$. Если состояние системы S в момент t описывается несколькими случайными величинами $X_1(t), X_2(t), \dots, X_j(t)$, то мы имеем дело с *векторной случайной функцией* $V(t)$ (векторным случайным процессом) с j составляющими: $X_1(t), X_2(t), \dots, X_j(t)$.

8.2. Виды случайных процессов

Случайные процессы делятся на классы по ряду признаков. Случайный процесс, протекающий в системе S , называется *процессом с дискретным временем*, если переходы системы S из одного состояния в другое возможны только в определенные, заранее известные моменты времени $t_1, t_2, \dots$.

Примеры процесса с дискретным временем:

а) ЭВМ, которая меняет свои состояния в определенные моменты времени $t_1, t_2, \dots$, задаваемые тактом её работы;

б) техническое устройство, осматриваемое в моменты $t_1, t_2, \dots$ и переводимое в результате осмотра из одной категории в другую.

Случайный процесс с дискретным временем называется также *случайной последовательностью*. Если состояние системы S описывается одной случайной величиной X , то случайный процесс представляет собой последовательность случайных величин $X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n), \dots$.

Случайный процесс, протекающий в системе S , называется *процессом с непрерывным временем*, если переходы из состояния в состояние могут происходить в любые, случайные моменты времени, непрерывно заполняющие ось $0t$ (или её участок). Примеры случайного процесса с непрерывным временем — изменение напряжения электропитания ЭВМ $V(t)$ или функционирование технического устройства, которое в случайные моменты времени выходит из строя и восстанавливается.

Случайный процесс, протекающий в системе S , называется *процессом с дискретными состояниями*, если число возможных состояний системы S конечно или счетно (рис. 8.1 и 8.2).

Примеры:

а) техническое устройство, состоящее из двух узлов; возможные состояния системы: s_1 — оба узла исправны; s_2 — неисправен первый узел, исправен второй; s_3

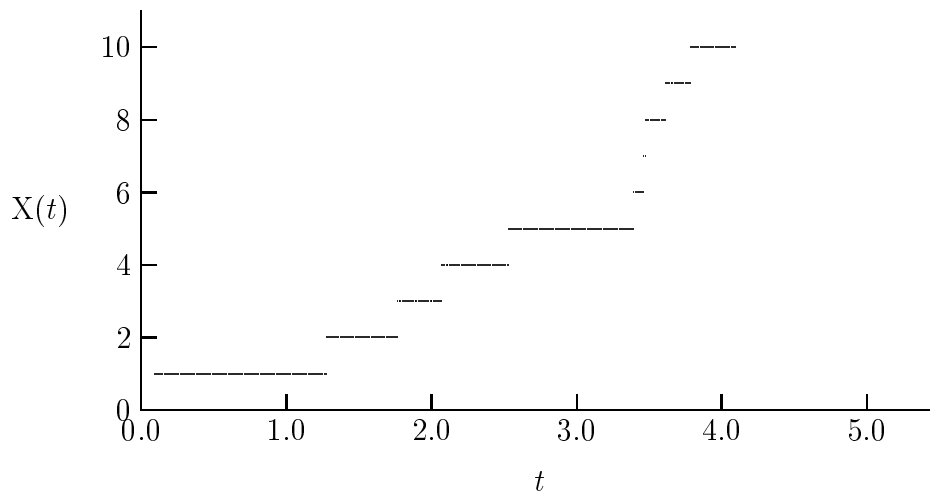


Рисунок 8.2 — Реализации процесса $X(t)$ типа 1б

– исправен первый узел, неисправен второй; s_4 – неисправны оба узла;

б) передача сообщений по радио; случайный процесс $X(t)$ – количество неправильно переданных символов до момента t . Этот случайный процесс принимает только счетное множество состояний $\{0, 1, \dots, n, \dots\}$ и ”подскакивает” на единицу в момент приема очередного неправильно переданного символа.

Случайный процесс, протекающий в системе S , называется *процессом с непрерывными состояниями*, если множество возможных состояний системы S несчетно (рис. 8.3 и 8.4).

Примеры :

а) процесс вывода космического корабля в заданное положение относительно Земли;

б) напряжение электропитания ЭВМ $V(t)$.

По указанным выше признакам случайные процессы делятся на следующие :

1а) процессы с дискретными состояниями и дискретным временем;

1б) процессы с дискретными состояниями и непрерывным временем;

2а) процессы с непрерывными состояниями и дискретным временем;

2б) процессы с непрерывными состояниями и непрерывным временем.

Примеры процесса типа 1а. Некто купил m билетов выигрышного займа, которые могут выигрывать и погашаться в известные моменты времени (тиражи) $t_1, t_2, \dots$; случайный процесс $X(t)$ – количество билетов, выигравших до момента t . Другой пример – состояние оперативной памяти ЭВМ; все возможные состояния оперативной памяти могут быть перечислены и их изменения могут происходить в дискретные моменты времени в соответствии с тактом работы ЭВМ.

Примеры процесса типа 1б. Прибор может находиться в четырех состояниях : s_1 – не включен и исправен; s_2 – включен и исправен; s_3 – не включен и неисправен; s_4 – включен и неисправен.

Пример процесса типа 2а. В моменты времени $t_1, t_2, \dots, t_N$ наблюдаются значения $X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_N)$ непрерывной случайной величины X . Последовательность значений этой величины – процесс $X(t)$ с непрерывными состояниями и дискретным

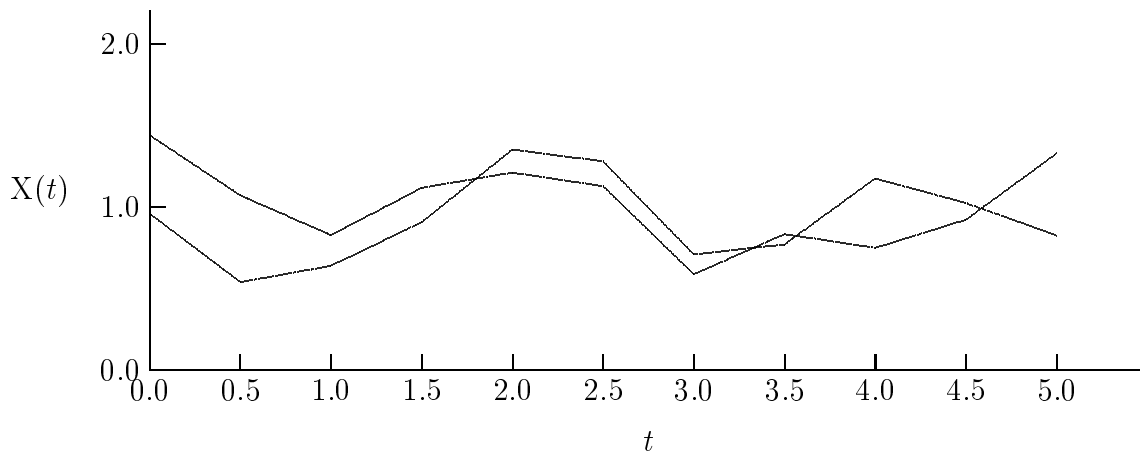


Рисунок 8.3 — Реализации процесса $X(t)$ типа 2а

временем. Например, если температура воздуха T измеряется дважды в сутки, то последовательность зарегистрированных значений T представляет собой случайный процесс с непрерывными состояниями и дискретным временем.

Пример процесса типа 2б. Процесс $V(t)$ изменения напряжения в электросети питания ЭВМ в любой момент времени t .

8.3. Свойства случайных функций

Рассмотрим ряд характеристик скалярной случайной функции $X(t)$.

Одномерным законом распределения случайной функции $X(t)$ называется закон распределения сечения $X(t)$ этой функции для любого значения аргумента t . Если случайная величина $X(t)$ непрерывна, то этот закон представляет собой плотность распределения сечения $X(t)$ и обозначается $f(x, t)$. Если случайная величина $X(t)$ дискретна, то одномерный закон распределения случайной функции $X(t)$ представляет собой ряд вероятностей $\Pr(x_i, t)$ того, что в момент t случайная величина $X(t)$ приняла значение x_i . Для смешанной случайной величины $X(t)$ одномерный закон распределения задается функцией распределения $F(x, t) = \Pr\{X(t) < x\}$. Так как функция распределения является наиболее общей формой закона распределения, пригодной для любых случайных величин, можно и для одномерного закона распределения пользоваться общей записью $F(x, t)$.

Двумерным законом распределения случайной функции $X(t)$ называется совместный закон распределения двух её сечений $[X(t_1) \text{ и } X(t_2)]$ для любых значений t_1 и t_2 , представляющий собой функцию четырех аргументов: x_1, x_2, t_1, t_2 .

Соответственно можно рассмотреть *n -мерный закон распределения*, зависящий от $2n$ аргументов.

Случайная функция $X(t)$ называется *нормальной*, если совместное распределение любого числа n её сечений, взятых в произвольные моменты времени $t_1 < t_2 < \dots < t_n$, есть n -мерный нормальный закон.

Математическим ожиданием случайной функции $X(t)$ называется неслучайная функция $m_X(t)$, которая при каждом значении аргумента t представляет собой

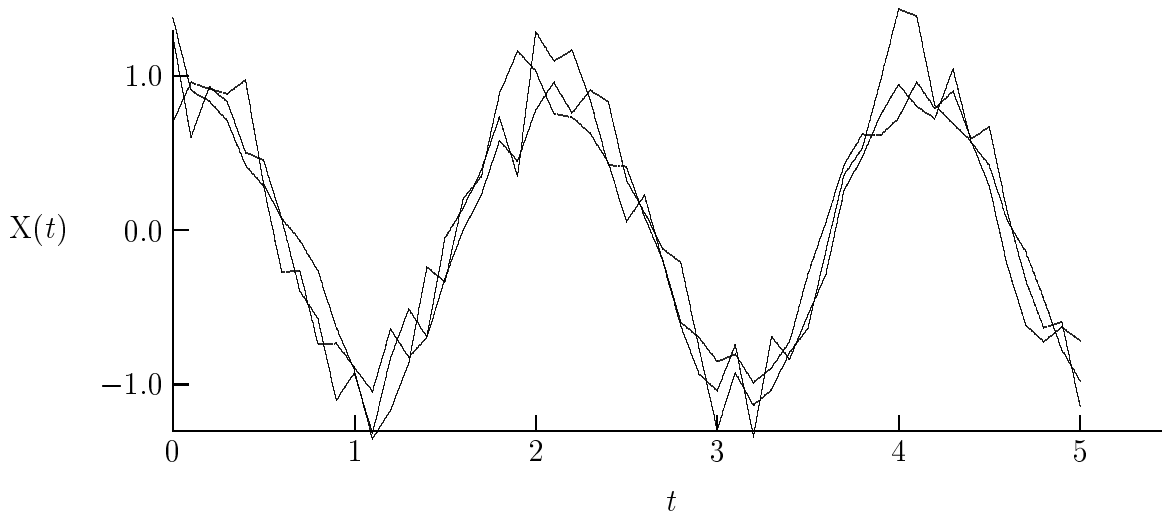


Рисунок 8.4 — Реализации процесса $X(t)$ типа 26

математическое ожидание соответствующего сечения случайной функции

$$m_x(t) = M[X](t). \quad (8.2)$$

Корреляционной (или автокорреляционной) *функцией* случайной функции $X(t)$ называется неслучайная функция двух аргументов $K_x(t, t')$, которая при каждой паре значений аргументов t, t' равна корреляционному моменту соответствующих сечений случайной функции:

$$K_x(t, t') = M[(X(t) - m_x(t))(X(t') - m_x(t'))]. \quad (8.3)$$

При $t' = t$ корреляционная функция превращается в дисперсию случайной функции:

$$K_x(t, t) = D_x(t) = D[X](t) = \sigma^2(t). \quad (8.4)$$

Основные свойства корреляционной функции:

- 1) $K_x(t, t') = K_x(t', t)$, т.е. функция $K_x(t, t')$ не меняется при замене t на t' (симметричность);
- 2) $|K_x(t, t')| \leq \sigma(t)\sigma(t')$;
- 3) функция $K_x(t, t')$ — положительно определенная, т.е.

$$\int_{(B)} \int_{(B)} K_x(t, t') \varphi(t) \varphi(t') dt dt' \geq 0, \quad (8.5)$$

где $\varphi(t)$ — любая положительная функция, (B) — любая область интегрирования, одинаковая для обоих аргументов.

Для нормальной случайной функции характеристики $m_x(t)$, $K_x(t, t')$ являются исчерпывающими и определяют собой закон распределения любого числа сечений.

Нормированной корреляционной функцией случайной функции $X(t)$ называется функция

$$r_x(t, t') = \frac{K_x(t, t')}{\sigma_x(t) \sigma_x(t')} = \frac{K_x(t, t')}{\sqrt{D_x(t) D_x(t')}}, \quad (8.6)$$

т.е. коэффициент корреляции сечений $X(t)$ и $X(t')$.

При $t = t'$ всегда имеем $r_x(t, t') = 1$.

Случайный процесс $X(t)$ называется *процессом с независимыми приращениями*, если для любых значений аргумента $t_1 < t_2 < t_3 < \dots < t_k < t_{k+1}$ случайные величины – приращения функции $X(t)$

$$\begin{aligned} U_1 &= X(t_2) - X(t_1), \\ U_2 &= X(t_3) - X(t_2), \\ &\vdots \\ U_k &= X(t_{k+1}) - X(t_k) \end{aligned} \quad (8.7)$$

независимы.

Нормальный случайный процесс с независимыми приращениями называется *винеровским случайным процессом*, если его математическое ожидание равно нулю, а дисперсия приращения пропорциональна длине отрезка, на котором она достигается:

$$m_x(t) = 0, \quad D_x[U_k] = a(t_k - t_{k+1}), \quad (8.8)$$

где $a > 0$ – постоянный коэффициент.

При прибавлении к случайной функции $X(t)$ неслучайного слагаемого $\varphi(t)$ к её математическому ожиданию прибавляется то же неслучайное слагаемое, а корреляционная функция не меняется.

При умножении случайной функции $X(t)$ на неслучайный множитель её математическое ожидание умножается на тот же множитель $\varphi(t)$, а корреляционная функция – на $\varphi(t)\varphi(t')$.

Если случайную функцию $X(t)$ подвергают некоторому преобразованию A_t , то получается другая случайная функция $Y(t) = A_t\{X(t)\}$.

Преобразование L_t называется *линейным однородным*, если

$$L_t\left\{\sum_{n=1}^N X_n(t)\right\} = \sum_{n=1}^N L_t\{X_n(t)\}, \quad (8.9)$$

т.е. преобразование суммы может производиться почленно, далее

$$L_t\{\beta X_n(t)\} = \beta L_t\{X_n(t)\}, \quad (8.10)$$

т.е. множитель β , не зависящий от аргумента t , по которому производится преобразование, можно выносить за знак преобразования.

Если случайная функция $Y(t)$ связана со случайной функцией $X(t)$ линейным преобразованием $Y(t) = L_t\{X(t)\}$, то её математическое ожидание $m_Y(t)$ получают из $m_X(t)$ тем же линейным преобразованием:

$$m_Y(t) = L_t\{m_X(t)\}, \quad (8.11)$$

а для нахождения корреляционной функции $K_Y(t, t')$ необходимо дважды подвергнуть функцию $K_X(t, t')$ соответствующему линейному однородному преобразованию: один раз по t , другой раз по t' :

$$K_Y(t, t') = L_t L_{t'}\{K_X(t, t')\}. \quad (8.12)$$

Взаимной корреляционной функцией $R_{XY}(t, t')$ двух случайных функций $X(t)$ и $Y(t)$ называется функция

$$R_{XY}(t, t') = M[(X(t) - m_X(t))(Y(t') - m_Y(t'))]. \quad (8.13)$$

Из определения взаимной корреляционной функции вытекает, что

$$R_{XY}(t, t') = R_{YX}(t', t). \quad (8.14)$$

Случайные функции $X(t)$ и $Y(t)$ называются *некоррелированными*, если $R_{XY}(t, t') = 0$.

Если $Z(t) = X(t) + Y(t)$, то

$$m_Z(t) = m_X(t) + m_Y(t), \quad (8.15)$$

и

$$K_Z(t, t') = K_X(t, t') + K_Y(t, t') + R_{XY}(t, t') + R_{YX}(t', t). \quad (8.16)$$

Если случайные функции $X(t)$ и $Y(t)$ некоррелированы, то

$$K_Z(t, t') = K_X(t, t') + K_Y(t, t'). \quad (8.17)$$

Если $Z(t) = \sum_{n=1}^N X_n(t_n)$, где $X_1(t)$, $X_2(t)$, ..., $X_N(t)$ — некоррелированные случайные функции, то

$$m_Z(t) = \sum_{n=1}^N m_{X_n}(t), \quad (8.18)$$

$$K_Z(t, t') = \sum_{n=1}^N K_{X_n}(t, t'). \quad (8.19)$$

Стационарной случайной функцией $X(t)$ называется случайная функция, математическое ожидание которой постоянно, $m_X = \text{const}$, а корреляционная функция зависит только от разности её аргументов: $K_X(t, t') = k_X(\tau)$, где $\tau = t - t'$.

Из симметричности корреляционной функции $K_X(t, t')$ следует, что $k_X(\tau) = k_X(-\tau)$, т.е. *корреляционная функция стационарной случайной функции есть четная функция аргумента*.

Дисперсия стационарной случайной функции постоянна:

$$D_X = K_X(t, t) = k_X(0) = \text{const}. \quad (8.20)$$

Корреляционная функция стационарной случайной функции обладает свойством

$$|k_X(\tau)| \leq D_X. \quad (8.21)$$

Нормированная корреляционная функция стационарной случайной функции

$$r_X(\tau) = k_X(\tau) / D_X = k_X(\tau) / k_X(0). \quad (8.22)$$

Спектральной плотностью стационарной случайной функции $X(t)$ называется предел отношения дисперсии, приходящейся на данный интервал частот, к длине

этого интервала, когда последняя стремится к нулю. Спектральная плотность $S_x(\omega)$ и корреляционная функция $k_x(\tau)$ связаны преобразованиями Фурье.

В действительной форме эта связь имеет вид

$$S_x(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} k_x(\tau) \cos(\omega\tau) d\tau. \quad (8.23)$$

В комплексной форме преобразования Фурье, связывающие спектральную плотность $S_x^*(\omega)$ и корреляционную функцию $k_x(\tau)$, имеют вид:

$$S_x^*(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} k_x(\tau) \exp(-i\omega\tau) d\tau, \quad (8.24a)$$

$$k_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_x^*(\omega) \exp(i\omega\tau) d\omega. \quad (8.24b)$$

Как $S_x^*(\omega)$, так и $S_x(\omega)$ — действительные, неотрицательные функции; $S_x^*(\omega)$ — четная функция, определенная на интервале $(-\infty, \infty)$; а $S_x(\omega)$ определена на интервале $(0, \infty)$ и на этом интервале $S_x^*(\omega) = 0,5S_x(\omega)$.

Если взаимная корреляционная функция $R_{xy}(t, t')$ двух стационарных случайных функций $X(t)$ и $Y(t')$ есть функция только $\tau = t - t'$, то такие случайные функции называются *стационарно связанными*. В этом случае между взаимной корреляционной функцией $R_{xy}(\tau)$ и взаимной спектральной плотностью $S_{xy}(\omega)$ существуют соотношения

$$R_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau} S_{xy}^*(\omega) d\omega, \quad (8.25a)$$

$$S_{xy}^*(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\tau} R_{xy}(\tau) d\tau. \quad (8.25b)$$

Эти соотношения называют *формулами Винера–Хинчина*.

8.4. Белый шум

Белым шумом (или белым шумом в широком смысле) называется случайная функция $X(t)$, любые два различных (сколь угодно близких) сечения которой некоррелированы и корреляционная функция которой пропорциональна дельта-функции:

$$K_x(t, t') = G(t) \delta(t - t'). \quad (8.26)$$

Величина $G(t)$ называется *интенсивностью белого шума*.

Стационарным белым шумом называется белый шум с постоянной интенсивностью: $G(t) = G = \text{const}$.

Корреляционная функция стационарного белого шума имеет следующий вид $k_x(\tau) = G\delta(\tau)$, поэтому его спектральная плотность постоянна:

$$S_x^*(\omega) = G/2\pi. \quad (8.27)$$

Дисперсия стационарного белого шума $D_x = G\delta(0)$, т.е. бесконечна.

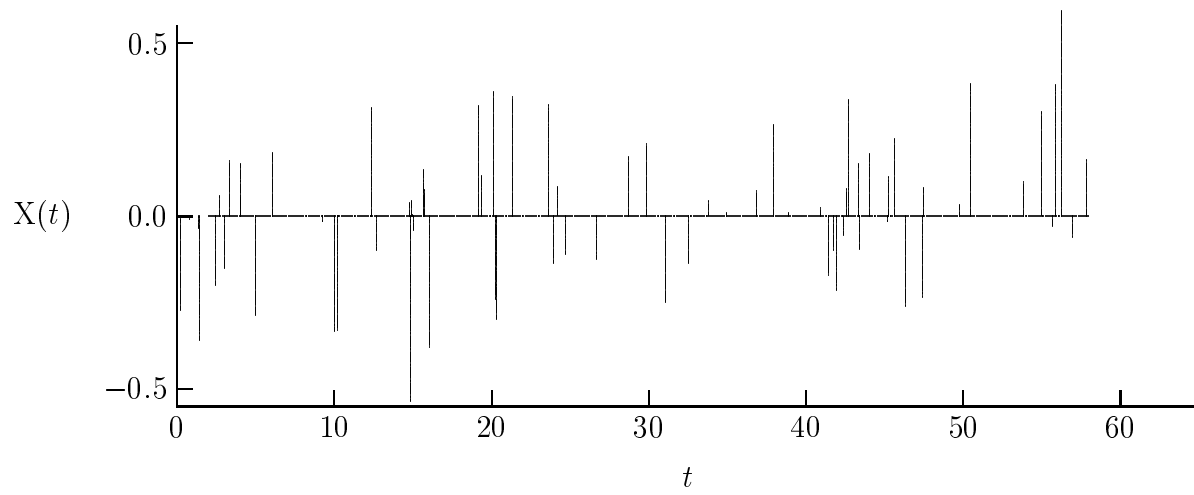


Рисунок 8.5 — Пример дробового шума $X(t)$; $\sigma = 1,0$; $\lambda = 0,8$

8.5. Дробовой шум

Дробовой шум $X(t)$ строится следующим образом. Он представляет собой последовательность δ -импульсов вида $a_k \delta(t - t_k)$.

Амплитуды этих импульсов распределены по нормальному закону с дисперсией σ^2 и нулевым средним.

Временные интервалы $\tau_k = t_k - t_{k-1}$ распределены по показательному закону, $f(\tau) = \lambda^{-1} \exp(-\tau/\lambda)$; таким образом, в единицу времени в среднем происходит $M[\tau] = \lambda$ импульсов, а мощность дробового шума $W = \lambda \sigma^2$.

Пример реализации дробового шума приведен на рис. 8.5.

В пределе $\lambda \rightarrow 0$, но при условии, что $W = \text{const}$, дробовой шум переходит в белый.

8.6. Эргодичность и марковские случайные процессы

Если на вход стационарной линейной системы L поступает стационарная случайная функция $X(t)$, то спустя некоторое время, достаточное для затухания переходного процесса, случайная функция $Y(t)$ на выходе линейной системы также будет стационарной. Спектральные плотности входного и выходного сигналов связаны соотношением

$$S_x^*(\omega) = S_x(\omega) |\Phi(i\omega)|, \quad (8.28)$$

где $\Phi(i\omega)$ – амплитудно-частотная характеристика линейной системы.

Говорят, что стационарная функция $X(t)$ обладает эргодическим свойством, если её характеристики $[m_x, k_x(t)]$ могут быть определены как соответствующие средние по времени для одной достаточно продолжительной реализации. Достаточным условием эргодичности стационарной случайной функции (по математическому ожиданию) является стремление к нулю её корреляционной функции при $\tau \rightarrow \infty$:

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} k_x(\tau) = 0. \quad (8.29)$$

В зависимости от того, непрерывное или дискретное множество значений принимают случайная величина $\xi(t)$ и её параметр t в области задания процесса $[0, T]$, различают четыре основных вида марковских случайных процессов:

1а – марковские цепи (дискретный процесс с дискретным временем);

1б – марковские последовательности (непрерывный процесс с дискретным временем);

2а – дискретный марковский процесс (дискретный процесс с непрерывным временем);

2б – непрерывнозначный марковский процесс (непрерывный процесс с непрерывным временем).

Определяющее свойство всех видов марковских процессов состоит в следующем. Случайный процесс $\xi(t)$ называется марковским, если для любых n моментов времени $t_1 < t_2 < \dots < t_n$ из отрезка $[0, T]$ условная функция распределения "последнего" значения $\xi(t_n)$ при фиксированных значениях $\xi(t_1), \xi(t_2), \dots, \xi(t_{n-1})$ зависит только от $\xi(t_{n-1})$, т.е. при заданных значениях $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ справедливо соотношение

$$\Pr\{\xi(t_n) \leq \xi_n | \xi(t_1) = \xi_1, \dots, \xi(t_{n-1}) = \xi_{n-1}\} = \Pr\{\xi(t_n) \leq \xi_n | \xi(t_{n-1}) = \xi_{n-1}\}. \quad (8.30)$$

Для трех моментов времени эта формула принимает вид

$$\Pr\{\xi(t_i) \leq \xi_i | \xi(t_k) = \xi_k, \xi(t_j) = \xi_j\} = \Pr\{\xi(t_i) \leq \xi_i | \xi(t_j) = \xi_j\}. \quad (8.31)$$

Поэтому говорят, что характерное свойство марковских процессов состоит в следующем: если точно известно состояние марковского процесса в настоящий момент времени t_j , то будущее состояние (при t_i) не зависит от прошлого состояния (при t_k).

Область значений непрерывнозначного марковского процесса $\xi(t)$ и область его определения $[0, T]$ есть непрерывные множества. Для непрерывнозначного марковского процесса диффузионного типа плотность вероятности перехода удовлетворяет уравнению Фоккера-Планка-Колмогорова. Это уравнение имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial t} f(\xi, t) = \frac{\partial}{\partial \xi} [a(\xi, t) f(\xi, t)] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} [b(\xi, t) f(\xi, t)]. \quad (8.32)$$

Коэффициенты сноса $a(\xi, t)$ и диффузии $b(\xi, t)$ определяются по исходному стохастическому дифференциальному уравнению, описывающему поведение рассматриваемой системы:

$$a(\xi, t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} M[(\xi(t + \Delta t) - \xi(t)) \xi(t)], \quad (8.33)$$

$$b(\xi, t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} M[(\xi(t + \Delta t) - \xi(t))^2 \xi(t)]. \quad (8.34)$$

Если стохастическое дифференциальное уравнение имеет вид

$$\frac{d\xi}{dt} = h(\xi, t) + g(\xi, t)n(t), \quad \xi(t_0) = \xi_0, \quad (8.35)$$

где $h(\xi, t)$ и $g(\xi, t)$ – детерминированные функции своих аргументов, $n(t)$ – гауссовский белый шум с нулевым математическим ожиданием и корреляционной функцией

$$M[n(t_1) n(t_2)] = 0,5 N_0 \delta(t_1 - t_2), \quad (8.36)$$

то коэффициенты сноса $a(\xi, t)$ и диффузии $b(\xi, t)$

$$a(\xi, t) = h(\xi, t) + \frac{1}{4} \frac{\partial b(\xi, t)}{\partial \xi}, \quad b(\xi, t) = 0,5 N_0 g^2(\xi, t). \quad (8.37)$$

8.7. Примеры

Пример 8.1

Найти корреляционную функцию $R_\xi(\tau)$ и спектральную плотность $S_\xi(\omega)$ для стационарного случайного сигнала $\xi(t) = A_m \sin(\omega_0 t + \varphi)$, где A_m и ω_0 – постоянные амплитуда и угловая частота; φ – случайная начальная фаза, равномерно распределенная на интервале $[-\pi, \pi]$.

Решение

По определению корреляционной функции имеем

$$R_\xi(\tau) = M[\xi(t)\xi(t+\tau)] - m_\xi^2.$$

Поскольку

$$m_\xi = M[\xi(t)]_\varphi = \int_{-\pi}^{\pi} A_m \sin(\omega_0 t + \varphi) f_1(\varphi) d\varphi = 0,$$

то

$$\begin{aligned} R_\xi(\tau) &= M[\xi(t)\xi(t+\tau)]_\varphi = A_m^2 \int_{-\pi}^{\pi} \sin(\omega_0 t + \varphi) \sin(\omega_0 t + \omega_0 \tau + \varphi) f_1(\varphi) d\varphi = \\ &= \frac{A_m^2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(\omega_0 t + \varphi) \sin(\omega_0 t + \omega_0 \tau + \varphi) d\varphi. \end{aligned}$$

После интегрирования находим

$$R_\xi(\tau) = \frac{1}{2} A_m^2 \cos(\omega_0 \tau).$$

Спектральная плотность вычисляется по формуле Винера–Хинчина

$$S_\xi(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\tau} R_\xi(\tau) d\tau = \frac{A_m^2}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [\exp(i\omega_0\tau - i\omega\tau) + \exp(-i\omega_0\tau + i\omega\tau)] d\tau.$$

Учитывая, что $(2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\tau} d\tau = \delta(\omega)$, окончательно получаем

$$S_{\xi}(\omega) = \frac{1}{2} A_m^2 [\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)],$$

т.е. в спектре присутствуют две частоты: $\omega = \omega_0$ и $\omega = -\omega_0$.

Пример 8.2

Найти одномерную $f_1(\xi; t)$ и двумерную $f_2(\xi_1, \xi_2; t_1, t_2)$ плотности распределения вероятностей процесса $\xi(t) = \alpha \cos(\omega t) + \beta \sin(\omega t)$, где ω – постоянная угловая частота; α и β – взаимно независимые гауссовские случайные величины с нулевыми математическими ожиданиями $m_{\alpha} = m_{\beta} = 0$ и дисперсиями $D_{\alpha} = D_{\beta} = \sigma^2$.

Решение

Случайная величина $\xi = \xi(t)$ при любом фиксированном значении t представляет собой линейную комбинацию гауссовских случайных величин и в силу этого также является гауссовской.

Таким образом, для определения плотностей распределения вероятностей $f_1(\xi; t)$ и $f_2(\xi_1, \xi_2; t_1, t_2)$ процесса $\xi(t)$ необходимо определить его математическое ожидание $m_{\xi}(t)$ и корреляционную функцию $R_{\xi}(t_1, t_2)$.

Найдем математическое ожидание

$$m_{\xi}(t) = M[\xi(t)] = M[\alpha \cos(\omega t) + \beta \sin(\omega t)] = 0$$

(поскольку по условию $M[\alpha] = m_{\alpha} = 0$, $M[\beta] = m_{\beta} = 0$).

Для искомой корреляционной функции получаем

$$R_{\xi}(t_1, t_2) = M[(\alpha \cos(\omega t_1) + \beta \sin(\omega t_1))(\alpha \cos(\omega t_2) + \beta \sin(\omega t_2))].$$

Учитывая, что по условию $M[\alpha\beta] = M[\beta\alpha] = 0$, окончательно получаем

$$R_{\xi}(t_1, t_2) = \sigma^2 \cos(\omega t_1 - \omega t_2) = R_{\xi}(\tau), \quad \tau = t_1 - t_2.$$

Таким образом, искомые плотности распределения вероятностей имеют вид

$$f_1(\xi; t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} \exp\left(-\frac{\xi^2}{2\sigma^2}\right),$$

$$f_2(\xi_1, \xi_2; t_1, t_2) = \frac{1}{2\pi\sigma^2\sqrt{1 - \cos^2(\omega\tau)}} \exp\left(-\frac{\xi_1^2 - 2\xi_1\xi_2\cos(\omega\tau) + \xi_2^2}{2\sigma^2(1 - \cos^2(\omega\tau))}\right).$$

Пример 8.3

Определить, обладает ли функция

$$R(\tau) = \sigma^2 \exp(-\alpha|\tau|) \left(\text{ch}(\omega_0\tau) + \frac{\alpha}{\omega_0} \text{sh}(\omega_0|\tau|) \right), \quad \alpha > 0, \quad \omega_0 > 0$$

свойствами корреляционной функции.

Решение

Для ответа на поставленный вопрос необходимо проверить выполнение следующих условий :

$$1) R(0) > 0; \quad 2) R(t) = R(-t); \quad 3) |R(\tau)| \leq R(0);$$

$$4) S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \geq 0.$$

Положительный ответ относительно выполнения условий 1 и 2 следует непосредственно из анализа выражения для $R(\tau)$.

Для проверки выполнения условия 3 представим функцию $R(\tau)$ в виде

$$R(\tau) = \frac{\sigma^2}{2} \left[e^{-(\alpha-\omega)\tau} (1 + \alpha/\omega_0) + e^{-(\alpha+\omega)\tau} (1 - \alpha/\omega_0) \right], \quad \tau \geq 0.$$

Так как $R(0) = D = \sigma^2$, для выполнения условия 3 необходимо, чтобы выражение в больших скобках по модулю не было больше 2. Можно показать, что при $\alpha < \omega_0$ это условие не выполняется, так как при $\tau \rightarrow \infty$ и $\alpha < \omega_0$ значение $\exp[-(\alpha - \omega_0)\tau]$ неограниченно возрастает. В случае $\alpha = \omega_0$ функция $R(\tau) \equiv 1$, и только при $\alpha > \omega_0$ условие 3 выполняется. К такому же выводу приводит анализ выражения для $R(\tau)$ при $\tau < 0$.

В соответствии с формулами Винера-Хинчина получим после интегрирования и приведения подобных членов:

$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau = \frac{1}{2\pi} \frac{4\alpha(\alpha^2 - \omega_0^2)}{[(\alpha - \omega_0)^2 + \omega_0^2][(\alpha + \omega_0)^2 + \omega_0^2]}.$$

Отсюда следует, что условие 4 выполняется также при $\alpha > \omega_0$.

Следовательно, анализируемая функция $R(\tau)$ обладает всеми свойствами корреляционных функций при $\alpha > \omega_0$.

Пример 8.4 (Процесс Винера)

Необходимо найти основные характеристики непрерывного марковского процесса $\lambda(t)$, заданного стохастическим дифференциальным уравнением

$$d\xi / dt = n(t), \quad \xi(0) = 0, \quad (*)$$

где $n(t)$ – гауссовский белый шум с нулевым математическим ожиданием и дельтаобразной корреляционной функцией

$$M[n(t)n(t')] = \frac{1}{2} \sigma^2 \delta(t - t').$$

Решение

Найдем сначала коэффициенты сноса и диффузии для процесса $\xi(t)$. Отметим, что решение уравнения (*) при начальном условии $\xi(0) = 0$ можно записать в виде

$$\xi(t) = \int_0^t n(x) dx.$$

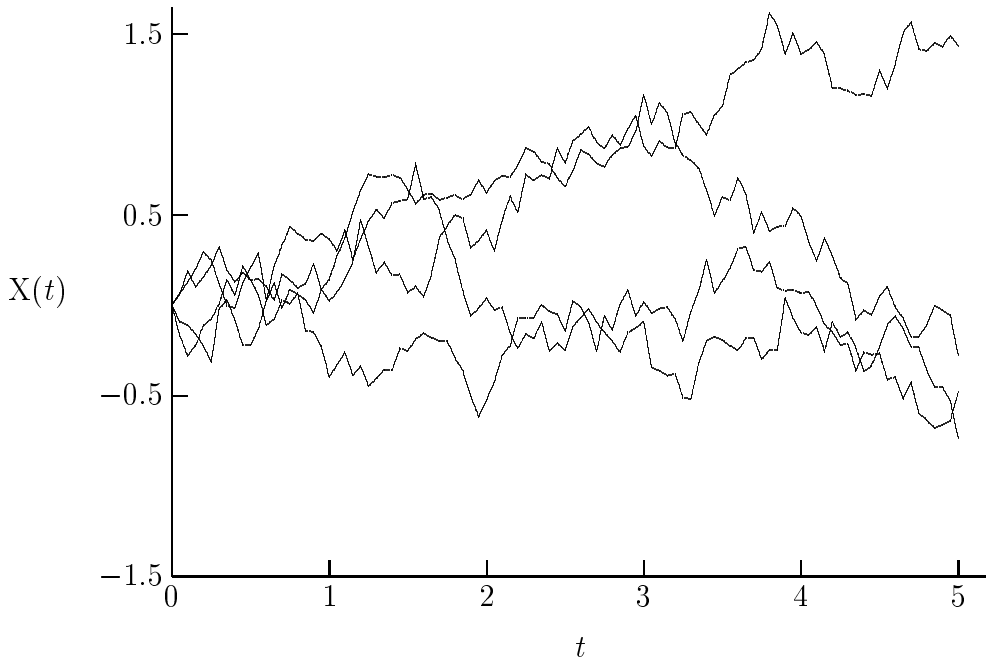


Рисунок 8.6 — Реализации процесса Винера $X(t)$; $N_0 = 0,1$

Приращение процесса за малый временной интервал Δt равно

$$\xi(t + \Delta t) - \xi(t) = \int_t^{t+\Delta t} n(x) dx.$$

Отсюда находим для математического ожидания условного приращения

$$M[\xi(t + \Delta t) - \xi(t) | \xi(t)] = 0$$

и для коэффициента сноса $a(\xi) = 0$.

Для среднего квадрата условного приращения можем написать

$$M[(\xi(t + \Delta t) - \xi(t))^2 | \xi(t)] = \int_t^{t+\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} M[n(x)n(y)] dx dy = \frac{1}{2} \sigma^2 \Delta t.$$

Поэтому $b(\xi) = \sigma^2/2$.

Уравнение Фоккера-Планка-Колмогорова принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial t} f(\xi, t) = \frac{1}{4} \sigma^2 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} f(\xi, t).$$

Можно убедиться (например, непосредственной проверкой), что плотность вероятности перехода $f(\xi, t | \xi_0, 0)$, являющаяся фундаментальным решением этого дифференциального уравнения в частных производных, при заданном начальном условии $\xi_0 = 0$ дается выражением

$$f(\xi, t | \xi_0, 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t} \sigma} \exp\left(-\frac{\xi^2}{2\sigma^2 t}\right).$$

Это есть нормальная нестационарная плотность распределения вероятностей с нулевым математическим ожиданием и дисперсией $\sigma^2 t$.

Случайный процесс, обладающий указанными свойствами, называется *процессом Винера*.

Пример реализации процесса Винера показан на рис. 8.6.

Пример 8.5 (Процесс Орнштейна-Уленбека)

Необходимо найти основные характеристики непрерывного нормального марковского процесса $\lambda(t)$, заданного стохастическим дифференциальным уравнением

$$d\xi / dt = -\nu\xi + n(t), \quad \xi(0) = \xi_0, \quad (*)$$

где ν — постоянная положительная величина (декремент), $n(t)$ — гауссовский белый шум с нулевым математическим ожиданием и дельтаобразной корреляционной функцией, $M[n(t)n(t')] = \sigma^2 \delta(t - t')$.

Решение

Найдем сначала коэффициенты сноса и диффузии для процесса $\xi(t)$. Отметим, что решение уравнения (*) при начальном условии $\xi(0) = \xi_0$ можно записать в виде

$$\xi(t) = \xi_0 \exp(-\nu t) + \int_0^t \exp(-\nu t + \nu \tau) n(\tau) d\tau.$$

Приращение процесса за малый временной интервал Δt равно

$$\xi(t + \Delta t) - \xi(t) = \int_t^{t+\Delta t} [-\nu\xi(\tau) + n(\tau)] d\tau.$$

Отсюда находим математическое ожидание условного приращения

$$M[(\xi(t + \Delta t) - \xi(t)) | \xi(t)] = -\nu \int_t^{t+\Delta t} \xi(\tau) d\tau,$$

а также выражение для коэффициента сноса $a(\xi)$:

$$a(\xi) = -\nu \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} \xi(\tau) d\tau = -\nu\xi(t).$$

Для среднего квадрата условного приращения можем написать

$$\begin{aligned} & M [(\xi(t + \Delta t) - \xi(t))^2 | \xi(t)] = \\ &= \int_t^{t+\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} M [(-\nu\xi(\tau) + n(\tau))(-\nu\xi(\tau') + n(\tau'))] d\tau d\tau' = \nu^2 \left(\int_t^{t+\Delta t} \xi(\tau) d\tau \right)^2 + \sigma^2 \Delta t. \end{aligned}$$

Поэтому

$$b(\xi) = \nu^2 \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} (\xi(t)\Delta t)^2 + \sigma^2 = \sigma^2.$$

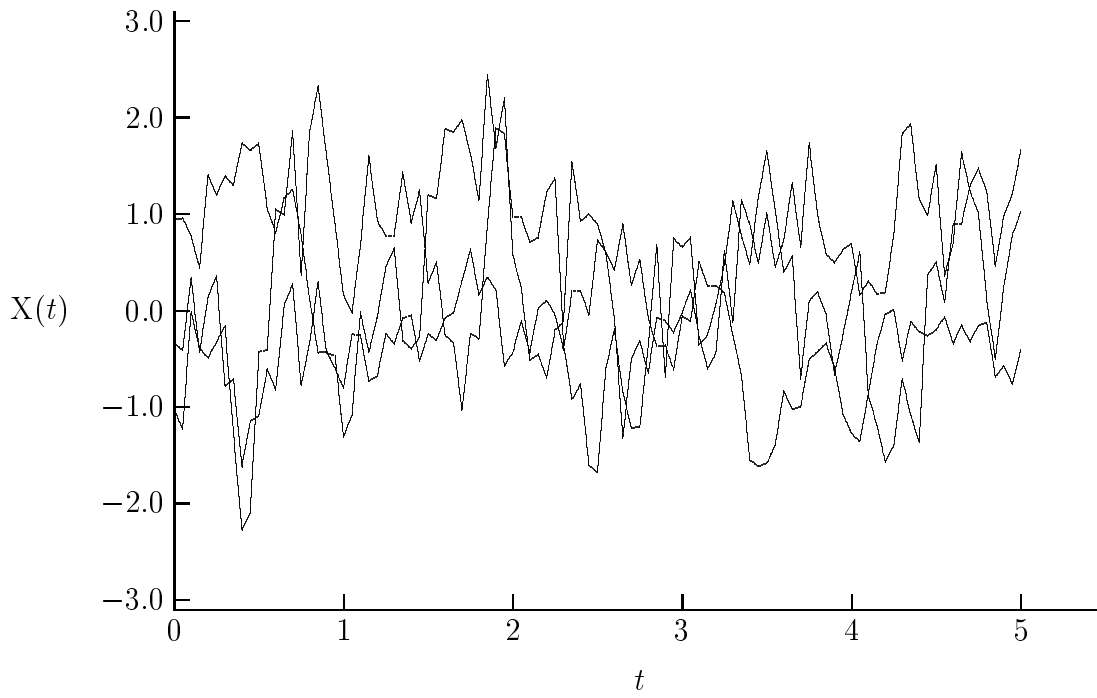


Рисунок 8.7 — Три реализации нормального марковского процесса Орнштейна-Уленбека $X(t)$; $\nu = 2,303$; $\sigma = 1,0$

Уравнение Фоккера-Планка-Колмогорова принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial t} f(\xi, t) = \nu \frac{\partial}{\partial \xi} (\xi f) + \frac{1}{4} \sigma^2 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} f(\xi, t).$$

Можно убедиться (например, непосредственной проверкой), что плотность вероятности перехода $f(\xi, t | \xi_0, 0)$, являющаяся фундаментальным решением этого дифференциального уравнения в частных производных, при заданном начальном условии $f_0(\xi) = \delta(\xi - \xi_0)$ дается выражением

$$f(\xi, t | \xi_0, 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(1 - e^{-2\nu t})} \sigma} \exp \left(-\frac{(\xi - \xi_0 e^{-\nu t})^2}{2\sigma^2(1 - e^{-2\nu t})} \right).$$

Найденное выражение является нормальной нестационарной плотностью распределения вероятностей с условным математическим ожиданием и условной дисперсией

$$\begin{aligned} M[\xi | \xi_0] &= \xi_0 \exp(-\nu t), \\ M[\xi^2 | \xi_0] &= \xi_0^2 \exp(-2\nu t) + \sigma^2[1 - \exp(-2\nu t)]. \end{aligned}$$

Полагая $t \rightarrow \infty$, получаем стационарную плотность вероятности

$$f_{\text{st}}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} \exp \left(-\frac{\xi^2}{2\sigma^2} \right).$$

Если плотность вероятности начальной координаты ξ_0 совпадает со стационарной плотностью вероятности, т.е. $f_0(\xi) = f_{\text{st}}(\xi)$, то нетрудно проверить, что переходный процесс отсутствует и стационарное состояние имеет место, начиная с начального момента времени $t = 0$.

Если найденные выше условные средние доусреднить по всем возможным начальным значениям при $t = 0$, то получим $M[\xi(t)] = 0$ и $D[\xi^2(t)] = \sigma^2$.

Случайный процесс, обладающий указанными свойствами, называется *нормальным марковским процессом* или *процессом Орнштейна-Уленбека*.

Пример реализации процесса Орнштейна-Уленбека показан на рис. 8.7.

Пример 8.6 (Интегральные квадратичные функционалы)

Опираясь на заданные случайные процессы, можно строить *интегральные квадратичные функционалы*. Эти функционалы, являясь случайными величинами, имеют плотность распределения вероятностей, или, что эквивалентно, соответствующую производящую функцию.

В общем случае интегральный квадратичный функционал $J[\xi(t)]$, определенный на случайном процессе $\xi(t)$, имеет вид

$$J = \int_0^T \xi^2(t) dt, \quad (1)$$

где T – временной интервал рассмотрения. Производящая функция распределения вероятностей случайных значений функционала $J[\xi(t)]$ следующая

$$Q_J(\lambda) = M_J[\exp(-\lambda J)] = M \left[\exp \left(-\lambda \int_0^T \xi^2(t) dt \right) \right], \quad (2)$$

где λ – производящий параметр. Как это видно из (2), соответствующее усреднение необходимо выполнить в пространстве функций – пространстве всех возможных реализаций случайного процесса $\xi(t)$ на интервале $[0, T]$.

Сформулируем утверждения о производящих функциях для двух процессов – процесса Винера и процесса Орнштейна-Уленбека.

1. Случай процесса Винера.

Пусть $\xi(t)$ – процесс Винера с интенсивностью σ^2 . Тогда

$$Q_J(\lambda) = \left(\frac{1}{\text{ch}(\sqrt{\lambda\sigma^2 T})} \right)^{1/2}. \quad (3)$$

2. Случай процесса Орнштейна-Уленбека.

Пусть $\xi(t)$ – процесс Орнштейна-Уленбека с интенсивностью σ^2 и декрементом ν . Тогда

$$Q_J(\lambda) = \left(\frac{4\rho\nu \exp(\nu T)}{(\rho + \nu)^2 \exp(\rho T) - (\rho - \nu)^2 \exp(-\rho T)} \right)^{1/2}. \quad (4)$$

где $\rho = \sqrt{\nu^2 + 2\lambda\nu\sigma^2}$.

Плотности распределения $f_J(J)$ вероятностей случайных значений функционала $J[\xi(t)]$ можно определить, согласно (2), путем обратного преобразования Лапласа из производящий функций (3) или (4).

Пример 8.7 (Нормальное марковское поле)

1. Двумерные случайные поля

Случайные поля давно стали предметом изучения и применения в самых различных областях.

Из всего многообразия возможных вариантов и моделей двумерных случайных полей вещественное нормальное марковское двумерное поле (НМД-поле) $H(x, y)$, пожалуй, чаще всего используется, если отсутствуют дополнительные априорные факторы, поскольку является удобным объектом анализа и важным в прикладном отношении. Любые его ортогональные сечения являются стационарным процессом Орнштейна-Уленбека (ОУ-процесс).

Определяющим свойством рассматриваемого стационарного НМД-поля является его корреляционная функция

$$K_{xy} = K_{xy}(x, y; x', y') = M[H(x, y)H(x', y')] = pq\sigma^2, \quad (1)$$

с парциальными корреляторами

$$p = \exp(-\nu|x - x'|), \quad q = \exp(-\mu|y - y'|), \quad (2)$$

где $h = h(x, y)$ – реализация гауссовского двумерного поля $H(x, y)$ в прямоугольной области $\{x \in [0, a], y \in [0, b]\}$ на плоскости xOy ; $\sigma^2 = M[H^2(x, y)]$ – интенсивность НМД-поля; ν и μ – декременты затухания поля по оси x и y соответственно.

Обобщением известных конструкций – переходных плотностей вероятностей для нормального марковского процесса (процесса Орнштейна-Уленбека) – может служить переходная плотность распределения вероятностей для амплитуды $h(x, y)$ НМД-поля

$$f_H(h(x, y) | h(x', y), h(x, y'), h(x', y')) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(1-p^2)(1-q^2)\sigma^2}} \exp\left\{-Q(x, y)\right\}, \quad (3a)$$

где

$$Q(x, y) = -\frac{[h(x, y) - ph(x', y) - qh(x, y') + pqh(x', y')]^2}{2(1-p^2)(1-q^2)\sigma^2}.$$

Устремляя $x' \rightarrow -\infty$ или $y' \rightarrow -\infty$, получим граничные переходные плотности распределения вероятностей

$$f_H(h(x, y) | h(x', y)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(1-p^2)\sigma}} \exp\left\{-\frac{[h(x, y) - ph(x', y)]^2}{2(1-p^2)\sigma^2}\right\}, \quad (3b)$$

$$f_H(h(x, y) | h(x, y')) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(1-q^2)\sigma_H}} \exp\left\{-\frac{[h(x, y) - qh(x, y')]^2}{2(1-q^2)\sigma^2}\right\}, \quad (3c)$$

которые служат переходными плотностями для парциальных ОУ-процессов, а при $x' \rightarrow -\infty$ и $y' \rightarrow -\infty$ получим вершинную плотность распределения вероятностей равновесного вида

$$f_H(h(x, y)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{h^2(x, y)}{2\sigma^2}\right\} \quad (3d)$$

для случайной величины – реализации $h(x, y)$ поля $H(x, y)$ в точке с координатами (x, y) , и поэтому из соотношений (2–3) следует корреляционная функция (1).

2. Уравнение движения для амплитуды НМД-поля

Расположим на плоскости декартову систему координат с началом в точке $(0; 0)$.

Динамику случайного поля $H(x, y)$ в прямоугольнике $\{x \in [0, a], y \in [0, b]\}$ с вершиной в $(0, 0)$ можно описать с помощью уравнения, обобщающего уравнение Ланжевена для процесса Орнштейна-Уленбека,

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \nu\right) \left(\frac{\partial}{\partial y} + \mu\right) h(x, y) = \sigma u(x, y), \quad (4)$$

где $u(x, y)$ – случайное поле, обладающее свойствами гауссовского двумерного белого шума с единичной интенсивностью.

В качестве граничных условий к (4) используем два нормальных стохастических процесса, описываемых уравнениями Ланжевена,

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \nu\right) h(x, 0) = \sigma u(x, 0); \quad (5a)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial y} + \mu\right) h(0, y) = \sigma u(0, y), \quad (5b)$$

реализующиеся вдоль осей x и y соответственно, а начальным условием к ним будут вершинные значения случайной величины

$$h(0, 0) = \sigma u(0, 0). \quad (5c)$$

Решение уравнения (4) с условиями (5) следующее :

$$h(x, 0) = h(0, 0) \exp(-\nu x) + \sigma \int_0^x \exp[-\nu(x - x')] u(x', 0) dx', \quad (6a)$$

$$h(0, y) = h(0, 0) \exp(-\mu y) + \sigma \int_0^y \exp[-\mu(y - y')] u(0, y') dy', \quad (6b)$$

$$\begin{aligned} h(x, y) &= h(0, 0) \exp(-\nu x - \mu y) + \\ &+ \sqrt{2\nu} \sigma \exp(-\mu y) \int_0^x \exp[-\nu(x - x')] u(x', 0) dx' + \\ &+ \sqrt{2\mu} \sigma \exp(-\nu x) \int_0^y \exp[-\mu(y - y')] u(0, y') dy' + \\ &+ \sqrt{4\nu\mu} \sigma \int_0^x \int_0^y \exp[-\nu(x - x') - \mu(y - y')] u(x', y') dx' dy'. \end{aligned} \quad (6c)$$

Здесь видно, что марковское свойство выполняется вдоль осей x и y .

3. Алгоритм генерации НМД-поля

На основе решения (5) можно построить числовой алгоритм генерации НМД-поля. Этот иерархический алгоритм генерации значений в узлах случайного нормального стационарного марковского поля в прямоугольной области плоскости удобно представить следующими 4 шагами:

Шаг 1.

Генерация значения в вершине :

$$h_{00} = \sigma u_{00}. \quad (7, a)$$

Шаг 2.

Генерация значений процесса вдоль x -границы прямоугольника :

$$h_{j+1,0} = ph_{j,0} + \sqrt{(1-p^2)} \sigma u_{j+1,0}, \quad j > 0. \quad (7, b)$$

Шаг 3.

Генерация значений процесса вдоль y -границы прямоугольника :

$$h_{0,k+1} = qh_{0,k} + \sqrt{(1-q^2)} \sigma u_{0,k+1}, \quad k > 0. \quad (7, c)$$

Шаг 4.

Последовательное (слева-направо и послойно) заполнение значениями внутренних узлов прямоугольника ($j > 0, k > 0$) :

$$h_{j+1,k+1} = ph_{j,k+1} + qh_{j+1,k} - pqh_{j,k} + \sqrt{(1-p^2)(1-q^2)} \sigma u_{j+1,k+1}. \quad (7, d)$$

В выражениях (7) $p = \exp(-\nu\Delta_x)$, $q = \exp(-\mu\Delta_y)$, где ν и μ – парциальные декременты, а Δ_x и Δ_y – шаги узлов по осям x и y соответственно.

Отметим, что при выбранных шагах Δ_x , Δ_y (иначе, количестве шагов $N_x = a/\Delta_x$, $N_y = b/\Delta_y$, соответствующих заданным размерам прямоугольника a и b) интенсивность в числовом алгоритме необходимо перенормировать так, чтобы энергия НМД-поля, приходящаяся на единицу площади, совпадала с заданной при любом числе шагов.

Из (7) можно получить для значения $h_{j,k}$ в любом (j, k) -узле

$$M[h_{j,k}] = 0, \quad M[h_{j,k}^2] = \sigma = const, \quad (8)$$

если с помощью (7b–7d) последовательно понижать значения j -индекса, а затем k -индекса и, наконец, с помощью (7a) найти безусловное равновесное среднее.

Таким образом, алгоритм (7) генерации значений случайного поля в прямоугольнике на плоскости является стационарным.

На рис. 8.8 приведены три реализации случайного НМД-поля, отвечающие трем значениям декремента μ . На рисунке хорошо видна динамика формирования флуктуаций НМД-поля по обеим координатам.

Аналогично можно построить иерархические алгоритмы генерации значений нормального марковского поля третьего и более высоких порядков.

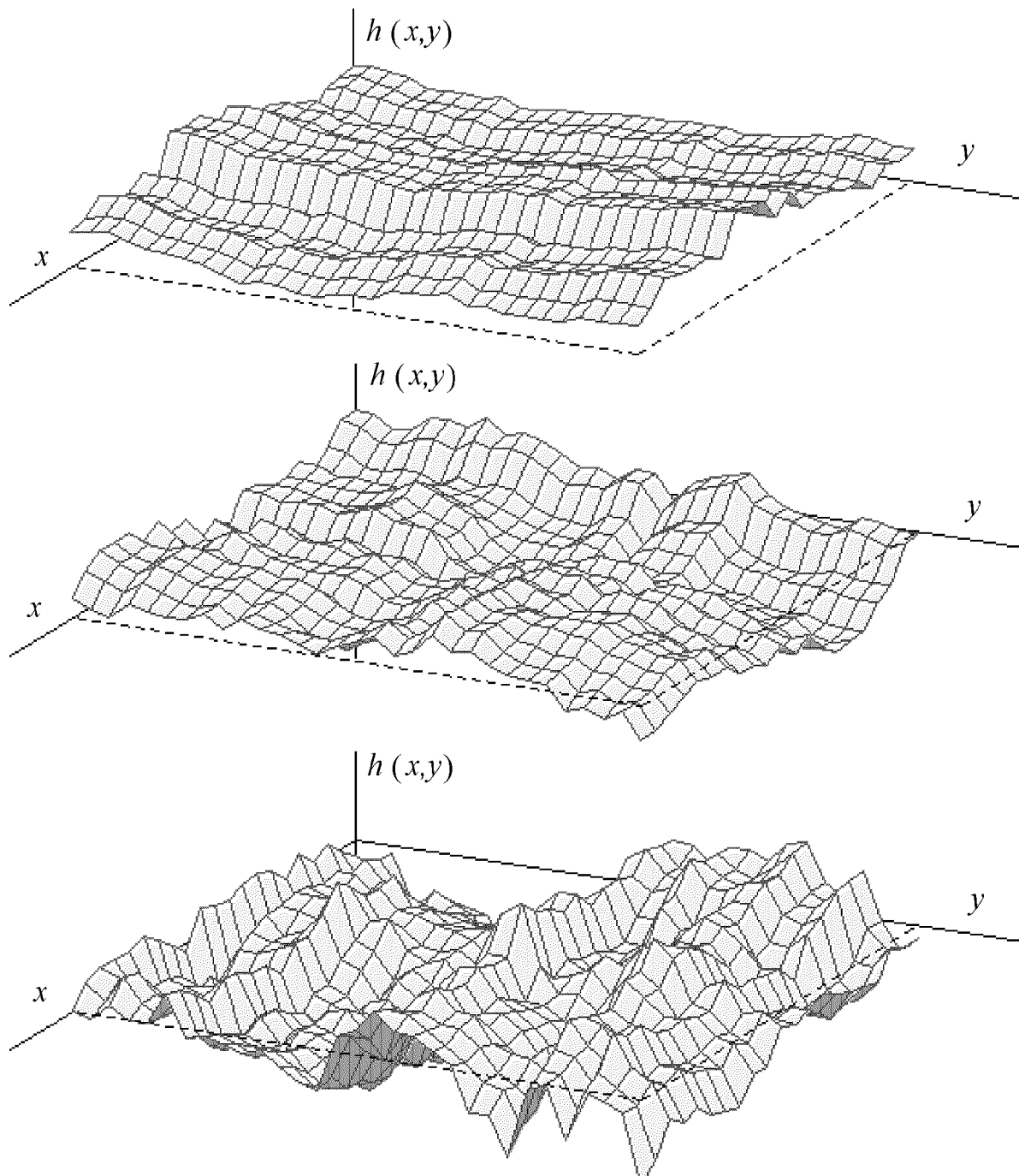


Рисунок 8.8 — Три реализации $h(x, y)$ случайного НМД-поля $H(x, y)$ в прямоугольнике $\{x \in [0, a], y \in [0, b]\}$ с вершиной в $(0, 0)$. Параметры: $a = 1$; $b = 1$; $\sigma^2 = 1$; $\nu = 1$; $\mu = 0,1$ (сверху), $\mu = 1,0$ (посередине), $\mu = 10,0$ (снизу); общее число пространственных узлов одинаковое

8.8. Задачи для решения

Задача 8.1

Случайные процессы $\xi(t)$ и $\eta(t)$ характеризуются математическими ожиданиями $m_\xi(t)$ и $m_\eta(t)$.

Найти математическое ожидание $m_\zeta(t)$ суммарного случайного процесса $\zeta(t) = \xi(t) \pm \eta(t)$.

Ответ: $m_\zeta(t) = m_\eta(t) \pm m_\xi(t)$.

Задача 8.2

Случайные процессы $\xi(t)$ и $\eta(t)$ заданы математическими ожиданиями $m_\xi(t)$ и $m_\eta(t)$, корреляционными $R_\xi(t_1, t_2)$ и $R_\eta(t_1, t_2)$, а также взаимными корреляционными функциями $R_{\xi\eta}(t_1, t_2)$ и $R_{\eta\xi}(t_1, t_2)$.

Определить: а) математическое ожидание $m_\zeta(t)$ суммарного случайного процесса $\zeta(t) = \xi(t) \pm \eta(t)$; б) корреляционную функцию $R_\zeta(t_1, t_2)$ суммарного (разностного) случайного процесса $\zeta(t) = \xi(t) \pm \eta(t)$.

Ответ:

$$m_\zeta(t) = m_\eta(t) \pm m_\xi(t);$$

$$R_\zeta(t_1, t_2) = R_\xi(t_1, t_2) + R_\eta(t_1, t_2) \pm R_{\xi\eta}(t_1, t_2) \pm R_{\eta\xi}(t_1, t_2).$$

Задача 8.3

Определить корреляционную функцию $K_x(t_1, t_2)$ случайного процесса $X(t)$, если $X(t) = \sum_{j=1}^k [A_j \cos(\omega_j t) + B_j \sin(\omega_j t)]$, где ω_j – заданные числа, а вещественные случайные величины A_j и B_j взаимно не связаны, имеют нулевые математические ожидания и дисперсии, определяемые равенствами $D[A_j] = D[B_j] = \sigma^2$, ($j = 1, 2, \dots, k$).

Ответ: $K_x(t_1, t_2) = \sum_{j=1}^k \sigma^2 \cos(\omega_j t_1 - \omega_j t_2).$

Задача 8.4

Определить, удовлетворяют ли условиям непрерывности и дифференцируемости стационарные случайные процессы $\xi(t)$ с корреляционными функциями вида:

1) $R_\xi(t) = \sigma^2 \exp(-\alpha|\tau|)$;

2) $R_\xi(t) = \sigma^2 \exp(-\alpha|\tau|) \cos(\omega_0 \tau)$;

3) $R_\xi(t) = \sigma^2 \exp(-\alpha|\tau|) \left(\cos(\omega_0 \tau) + \frac{\alpha}{\omega_0} \sin(\omega_0 |\tau|) \right)$.

Ответ: Процессы $\xi(t)$ с корреляционными функциями вида 1 и 2 непрерывны, но не дифференцируемы; процесс $\xi(t)$ с корреляционной функцией 3 непрерывен и дифференцируем.

Задача 8.5

Случайный процесс $\xi(t)$ задан корреляционной функцией

$$R(t) = \exp(-\alpha|\tau|) \left(\operatorname{ch}(\omega_0 \tau) + \frac{\alpha}{\omega_0} \operatorname{sh}(\omega_0 |\tau|) \right), \quad \alpha > \omega_0 > 0.$$

Определить корреляционную функцию $R_\eta(\tau)$ и спектральную плотность $S_\eta(\omega)$ случайного процесса $\eta(t) = d\xi(t)/dt$.

Ответ :

$$R_{\eta}(\tau) = (\alpha^2 - \omega^2) \exp(-\alpha|\tau|) \left(\operatorname{ch}(\omega_0\tau) - \frac{\alpha}{\omega} \operatorname{sh}(\omega_0\tau) \right);$$

$$S_{\eta}(\omega) = 4\alpha\omega^2(\alpha^2 - \omega^2)[(\alpha - \omega)^2 + \omega^2][(\alpha + \omega)^2 + \omega^2]^{-1}.$$

Задача 8.6

Случайный процесс $\eta(t)$ получается посредством дифференцирования стационарного случайного колебания $\xi(t)$:

$$\eta(t) = d\xi(t) / dt.$$

Определить корреляционную функцию $R_{\eta}(t)$ процесса $\eta(t)$ для тех случаев, когда функция $R_{\xi}(t)$ колебания $\xi(t)$ задана выражениями :

$$1) R_{\xi}(t) = \sigma_{\xi}^2 \exp(-\alpha|\tau|);$$

$$2) R_{\xi}(t) = \sigma_{\xi}^2 \exp(-\alpha|\tau|)(1 + \alpha\tau);$$

$$3) R_{\xi}(t) = \sigma_{\xi}^2 \exp(-\alpha|\tau|) \left(\cos(\omega_0\tau) + \frac{\alpha}{\omega_0} \sin(\omega_0\tau) \right).$$

Ответ :

$$1) R_{\eta}(t) = \alpha^2 \sigma^2 \exp(-\alpha|\tau|) \left(1 - \frac{2}{\alpha} \delta(\tau) \exp(-\alpha|\tau|) \right);$$

$$2) R_{\eta}(t) = \alpha^2 \sigma^2 \exp(-\alpha|\tau|)(1 - \alpha|\tau|);$$

$$3) R_{\eta}(t) = (\alpha^2 + \omega^2) \sigma^2 \exp(-\alpha|\tau|) \left(\cos(\omega_0\tau) - \frac{\alpha}{\omega_0} \sin(\omega_0\tau) \right).$$

Задача 8.7

Чисто диффузионный случайный процесс $v(t)$ задан стохастическим дифференциальным уравнением

$$\frac{dv}{dt} = n(t), \quad v(0) = v_0,$$

где $n(t)$ – гауссовский белый шум с нулевым математическим ожиданием и корреляционной функцией дельтаобразного вида.

Записать для процесса $v(t)$ уравнение Фоккера-Планка-Колмогорова и получить его фундаментальное решение.

Ответ :

$$\frac{d}{dt} f(v, t) = \frac{1}{4} \sigma^2 \frac{d^2}{dt^2} f(v, t),$$

$$f(v, t) = (\pi \sigma^2 t)^{-1/2} \exp \left(-\frac{(v - v_0)^2}{\sigma^2 t} \right).$$

Задача 8.8

Записать уравнение Фоккера-Планка-Колмогорова и получить его фундаментальное решение для случайного процесса $\lambda(t)$, заданного уравнением

$$\frac{d\lambda}{dt} + \mu = n(t), \quad \lambda(0) = \lambda_0,$$

где μ – постоянная величина; $n(t)$ – гауссовский белый шум.

Ответ :

$$\frac{d}{dt} f(\lambda, t) = \mu \frac{d}{d\lambda} f(\lambda, t) + \frac{1}{4} \sigma^2 \frac{d^2}{dt^2} f(\lambda, t),$$

$$f(\lambda, t) = (\pi \sigma^2 t)^{-1/2} \exp \left(-\frac{(\lambda - \lambda_0 - \mu t)^2}{\sigma^2 t} \right).$$

Задача 8.9

Получить выражение для стационарной плотности вероятности марковского случайного процесса $\lambda(t)$, заданного стохастическим дифференциальным уравнением

$$\frac{d\lambda}{dt} = -\gamma\lambda + \sigma/4\lambda + n(t),$$

где $\lambda > 0$ и $\gamma > 0$ – постоянные величины; $n(t)$ – гауссовский белый шум.

Ответ :

$$f_{st}(\lambda) = \frac{\lambda}{\sigma^2} \exp(-\lambda^2 / 2\sigma^2).$$

Задача 8.10

Стационарный случайный процесс $\xi(t)$ имеет корреляционную функцию

$$R_\xi(t) = \sigma^2 \exp(-\alpha^2 t^2).$$

Найти спектральную плотность $S_\xi(\omega)$ случайного процесса $\xi(t)$.

Ответ :

$$S_\xi(\omega) = \sqrt{\pi} \alpha^{-1} \sigma^2 \exp(-\omega^2 / 4 \alpha^2).$$

8.9. Задания для проверки

1. Сформулируйте определение случайного процесса.
2. Укажите роль случайных процессов в решении практических задач. Постройте пример применения.
3. Перечислите основные виды случайных процессов.
4. Сформулируйте определение марковского случайного процесса.
5. Сформулируйте определение эргодического случайного процесса.
6. Раскройте содержательный смысл корреляционной функции.
7. Раскройте содержательный смысл спектральной плотности.
8. Сформулируйте определение пуассоновского процесса.
9. Сформулируйте определение дробового шума.
10. Сформулируйте определение белого шума.
11. Раскройте содержательный смысл стохастических дифференциальных уравнений.
12. Сформулируйте определение процесса Винера.
13. Сформулируйте определение процесса Орнштейна-Уленбека.
14. Сформулируйте определение случайного поля.

Приложение

П.1. Фонд заданий для самостоятельной работы

Задача 1

Случайная величина Z имеет показательное распределение с параметром λ .
Найти вероятность P события $\{|Z - M[Z]|^2 < D[Z]\}$.

Задача 2

Случайная величина X имеет плотность распределения вероятностей

$$f_X(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } 0 \leq x \leq 1, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Случайная величина Y имеет плотность распределения вероятностей

$$f_Y(y) = \begin{cases} 0,5 & \text{при } 0 \leq y \leq 2, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Найти распределение вероятностей случайной величины $Z = XY$.

Задача 3

Случайная величина X равномерно распределена на $[0; 1]$.

Полагая параметры p и q заданными, найти коэффициент корреляции случайных величин $Y = pX$ и $Z = qX^2$.

Задача 4

Случайная величина X равномерно распределена на $[0; 1]$.

Найти коэффициент корреляции случайных величин: $Y = (X - 1/2)$ и $Z = (X - 1/2)^2$.

Задача 5

Случайная величина X равномерно распределена на $[0; 1]$.

Найти коэффициент корреляции случайных величин $Y = \cos(\pi X/2)$ и $Z = \sin(\pi X/2)$.

Задача 6

Элементы (3×3) -матрицы являются независимыми случайными величинами. Каждый из матричных элементов имеет математическое ожидание, равное нулю, и дисперсию, равную σ^2 .

Найти математическое ожидание и дисперсию определителя этой матрицы.

Задача 7

Найти эксцесс экспоненциального распределения, полагая его параметр заданным.

Задача 8

Случайные величины $X_1, X_2, \dots, X_N$ независимы. Каждая из них принимает три значения: $-1, 0, 1$. Известно, что

$$\begin{aligned}\Pr\{X_n = 1\} &= \Pr\{X_n = -1\} = 1/4, \\ \Pr\{X_n = 0\} &= 1/2 \quad (n = 1, 2, \dots, N).\end{aligned}$$

Найти математическое ожидание и дисперсию величины $Z = \sum_{n=1}^N X_n$.

Задача 9

Случайная величина X равномерно распределена на $[0; 1]$.

Требуется найти коэффициент корреляции двух случайных величин $Y = \sqrt{X}$ и $Z = 1/\sqrt{X}$.

Задача 10

Случайная величина X равномерно распределена на $[0; 1]$. Случайная величина Y принимает два значения: 0 и 1 , при этом $\Pr(Y = 0) = 0,5$ и $\Pr(Y = 1) = 0,5$.

Найти закон распределения случайной величины $Z = X + Y$.

Задача 11

В области $\{(x^2 + y^2) \leq 1\}$ система случайных величин (X, Y) имеет плотность совместного распределения $f(x, y) = 3(x^2 + y^2)^2/\pi$.

Найти плотность распределения вероятностей $f_Z(z)$ случайной величины $Z = (X^2 + Y^2)^{1/2}$.

Задача 12

Случайные величины X и Y независимы и имеют нормальное распределение с параметрами $(0, \sigma^2)$.

Найти функцию распределения случайной величины $Z = X^2 + Y^2$.

Задача 13

Случайная величина Z имеет нормальное распределение $\mathcal{N}(t, \infty)$.

Найти $M[\cos(Z)]$, $D[\cos(Z)]$.

Задача 14

Случайная величина Z имеет нормальное распределение $\mathcal{N}(t, \infty)$.

Найти $M[\cos(Z^2)]$, $M[\sin(Z^2)]$.

Задача 15

В опыте одновременно бросают N шестигранных игральных костей.

Найти математическое ожидание и дисперсию суммы чисел выпавших очков.

Задача 16

Плоскость разграфлена параллельными прямыми, находящимися друг от друга на расстоянии h . На плоскость наугад брошен круг диаметром D , причем $D < h$.

Найти вероятность события:

- $\{A: \text{круг пересечет какую-нибудь прямую}\};$
- $\{B: \text{круг не пересечет ни одной из прямых}\}.$

Задача 17

Случайные величины X и Y независимы и нормально распределены с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией.

Выяснить, являются ли независимыми две случайные величины $U = X + Y$ и $V = X - Y$.

Задача 18

На интервале $[0; a]$ случайно выбрана точка A . После этого на том же интервале случайно выбрана точка B .

Найти плотность распределения случайной величины X , равной модулю длины отрезка AB .

Задача 19

Плотность распределения случайной величины X задана формулой

$$f_X(x) = \begin{cases} Ax^2, & \text{если } 0 \leq x \leq 2, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Найти: постоянную A , функцию распределения $F_X(x)$. Определить значения вероятностей $\Pr\{X > 0,5\}$ и $\Pr\{0,25 < X < 0,75\}$.

Задача 20

Случайная величина X определена в интервале $[0; 2]$ и имеет плотность распределения вероятностей $f_X(x) = Ax$.

Найти постоянную A и вычислить $\Pr\{(X - m_X) \leq 0.3\}$.

Задача 21

На плоскости заданы два круга радиусом R . Центр первого круга находится в точке (R, R) . Центр второго круга находится в начале координат.

Найти вероятность того, что точка, наугад брошенная в первый круг, попадет также и во второй.

Задача 22

Оба корня уравнения $x^2 + px + q = 0$ имеют случайные значения с постоянной плотностью распределения в интервале $[-1; 1]$ каждый.

Определить плотности распределения вероятностей $f_P(p)$ и $f_Q(q)$ случайных коэффициентов p и q .

Задача 23

Случайные величины X и Y имеют плотность распределения вероятностей $f_X(x) = a\pi^{-1}/(a^2 + x^2)$ и $f_Y(y) = b\pi^{-1}/(b^2 + y^2)$.

Найти закон распределения случайной величины $Z = X + Y$.

Задача 24

В области $x \geq 0$ случайная величина X имеет плотность распределения вероятностей $f_X(x) = Ax^6 \exp(-x)$.

Найти: постоянную A , математическое ожидание и дисперсию случайной величины X .

Задача 25

В партии из 5 деталей имеется 3 дефектных. Наугад отобраны 3 детали.

Составить ряд распределения случайной величины X — числа стандартных деталей среди отобранных, найти $M[X]$ и $D[X]$.

Задача 26

Случайные величины X и Y независимы и нормально распределены с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией.

Выяснить, являются ли независимыми две случайные величины $U = 2X + Y$ и $V = X - 2Y$.

Задача 27

Случайная величина X задана интегральной функцией распределения

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ x^2 & \text{при } 0 \leq x < 1, \\ 1 & \text{при } x \geq 1. \end{cases}$$

Найти вероятность того, что в результате четырех независимых испытаний величина X ровно три раза примет значение в интервале $[0, 25; 0, 75]$.

Задача 28

Диаметр круга измерен приближенно.

Считая, что его величина равномерно распределена на отрезке $[a, b]$, найти закон распределения вероятностей случайной площади.

Задача 29

Случайная величина X имеет плотность распределения $f_X(x) = \exp(-x)$ при $x \geq 0$ и $f_X(x) = 0$ при $x < 0$.

Рассматривается случайная величина $Y = X[1 - \exp(-\lambda X)]$, где $\lambda > 0$. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины Y .

Задача 30

В круге $x^2 + y^2 = R^2$ плотность распределения вероятностей $f_{XY}(x, y)$ случайных величин X и Y следующая: $f_{XY}(x, y) = A[R - (x^2 + y^2)^{1/2}]$, вне круга она равна нулю.

Найти: а) постоянную A ; б) вероятность попадания случайной точки (X, Y) в круг радиусом $r = 2$ с центром в начале координат, если $R = 4$.

Задача 31

Плотность распределения вероятностей $f(x, y)$ двумерной системы случайных величин (X, Y) постоянна в единичном квадрате ($0 \leq x \leq 1$; $0 \leq y \leq 1$) и равна 1.

Определить, являются ли случайные величины X и Y независимыми.

Задача 32

Центр круга радиусом R находится в точке $(0, 0)$. Центр квадрата со стороной $2h$ совпадает с точкой $(0, 0)$, а стороны его параллельны координатным осям.

Найти вероятность того, что точка, наугад брошенная в круг, попадет также и в квадрат.

Задача 33

Случайные величины X и Y независимы и распределены равномерно: X в интервале $[a, b]$, Y — в интервале $[c, d]$.

Найти дисперсию случайной величины $Z = XY$.

Задача 34

Случайные величины $X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6$ независимы, положительны и одинаково распределены.

Доказать, что

$$M\left[(X_1 + X_2 + X_3)(X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + X_6)^{-1}\right] = \frac{1}{2}.$$

Задача 35

Задано интегральное распределение вероятностей $F_X(x)$ случайной величины X . Случайная величина Y связана с величиной X соотношением $Y = 6X - 6$.

Найти интегральное распределение вероятностей $G_Y(y)$ случайной величины Y .

Задача 36

Найти характеристическую функцию дискретной случайной величины X , подчиняющейся закону

$$\Pr\{X = a\} = a^m(1 + a)^{-m-1}, \quad a > 0, \quad m = 0, 1, 2, \dots,$$

и по ней определить $M[X]$ и $D[X]$.

Задача 37

Случайная величина Z нормальна с нулевым математическим ожиданием и заданной дисперсией σ^2 .

Найти значение дисперсии, при котором вероятность $\Pr\{p \geq Z \geq q\}$ будет наибольшей (параметры p и q заданы и положительны, $p \geq q$).

Задача 38

Среди 25 билетов 2 "хороших". Два студента по очереди берут по одному билету. Найти вероятность того, что:

- а) первый студент взял "хороший" билет;
- б) второй студент взял "хороший" билет;
- в) оба студента взяли "хорошие" билеты.

Задача 39

В группе 6 мужчин и 4 женщины. Наугад выбирают 7 человек.

Найти вероятность того, что среди них окажутся 3 женщины.

Задача 40

Система нормальных случайных величин (X, Y) имеет следующие параметры: математические ожидания m_X и m_Y ; среднеквадратичные отклонения σ_X и σ_Y ; коэффициент корреляции r .

Найти линейное преобразование случайных величин (X, Y) к независимым случайным величинам (U, V) и определить дисперсии новых случайных величин.

Задача 41

Задано интегральное распределение вероятностей $F_X(x)$ случайной величины X . Случайная величина Y связана с величиной X соотношением $Y = 2 + X/3$.

Найти интегральное распределение вероятностей $G_Y(y)$ случайной величины Y .

Задача 42

Буквы В, Е, Н, Р, О, О, С, Т, Т, Ь, Я располагают наугад.

Найти вероятность того, что случайно получится слово ВЕРОЯТНОСТЬ.

Задача 43

Совместная плотность распределения вероятностей случайных величин (X, Y) равна

$$f_{XY}(x, y) = 2(1 + x + y)^{-3}, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0.$$

Найти закон распределения случайной величины $U = X + Y$.

Задача 44

Координаты случайной точки (X, Y) на плоскости образуют систему с плотностью распределения вероятностей

$$f_{XY}(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_X^2} - \frac{y^2}{2\sigma_Y^2}\right).$$

Найти плотность распределения $f_\Phi(\varphi)$ случайной фазы $\Phi = \arctg(Y/X)$ точки с координатами (X, Y) .

Задача 45

Дана случайная величина X с плотностью распределения $f_X(x)$.

Найти плотность распределения величины $Y = (R^2 - X^2)^{1/2}$.

Задача 46

Дана случайная величина X с плотностью распределения $f_X(x)$.

Найти плотность распределения величины $Y = \arctg(X)$.

Задача 47

Случайная величина X распределена по закону Пуассона с параметром λ . Известно, что $Y = X^2$.

Найти $M[Y]$, $D[Y]$.

Задача 48

Дана случайная величина X с плотностью распределения $f_X(x)$.

Найти плотность распределения величины $Y = \exp(-X^2)$.

Задача 49

Случайная величина $Y = X^m$, а случайная величина X равномерно распределена на интервале $[-1, 1]$.

Считая целочисленный параметр $m > 0$ заданным, найти коэффициент корреляции между случайными величинами X и Y .

Задача 50

Дана случайная величина X с плотностью распределения $f_X(x)$.

Найти плотность распределения величины $Y = \operatorname{tg}(X)$.

Задача 51

Найти закон распределения случайной величины, которому соответствует характеристическая функция $q(t) = \cos^2(t)$.

Задача 52

Дана случайная величина X с плотностью распределения $f_X(x)$.

Найти плотность распределения величины $Y = 1/(1+X)$.

Задача 53

В семье 10 детей.

Найти (считая вероятности рождения мальчиков и девочек равными 0,5) вероятность того, что в семье: а) 5 мальчиков и 5 девочек; б) число мальчиков от 3 до 8.

Задача 54

Найти закон распределения случайной величины, которому соответствует характеристическая функция $q(t) = \cos(t)$.

Задача 55

Найти закон распределения случайной величины, которому соответствует характеристическая функция $q(t) = t^{-1} \sin(t)$.

Задача 56

Найти закон распределения случайной величины, которому соответствует характеристическая функция $q(t) = (1-p)/[1-p \exp(it)]$ с параметром p .

Задача 57

Случайные величины X и Y независимы и имеют плотности распределения вероятностей:

$$\begin{aligned} f_X(x) &= (2/\pi)(1-x^2)^{1/2}, & -1 < x < 1, \\ f_Y(y) &= y \exp(-y^2/2), & y \geq 0. \end{aligned}$$

Найти закон распределения случайной величины $Z = XY$.

Задача 58

Найти закон распределения случайной величины, которому соответствует характеристическая функция $q(t) = (3 + \cos(t))/4$.

Задача 59

Отрезок длиной d разламывается в наугад выбранной точке.

Найти функцию распределения случайной величины — площади прямоугольника, стороны которого равны получившимся частям отрезка.

ЗАДАЧИ ПОВЫШЕННОЙ ТРУДНОСТИ

Задача 1

Кусок проволоки длиной 20 см был согнут в наугад выбранной точке (точка сгиба равномерно распределена по куску). После этого, перегнув проволоку еще в двух местах (не ломая), сделали прямоугольную рамку.

Найти вероятность того, что площадь рамки не превышает 21 см².

Задача 2

Найти плотность распределения вероятностей суммы $Z = X + Y$ двух определенных на всей числовой оси независимых случайных величин X и Y , подчиняющихся законам

$$f_X(x) = \left(\pi \operatorname{ch}(x) \right)^{-1} \text{ и } f_Y(y) = \left(\pi \operatorname{ch}(y) \right)^{-1}.$$

Задача 3

Случайная величина X распределена по закону χ^2 с k степенями свободы. Случайная величина Y распределена по закону χ^2 с j степенями свободы.

Найти закон распределения случайной величины $Z = X + Y$.

Задача 4

Случайная величина X имеет непрерывную функцию распределения вероятностей $F_X(x)$. Найти плотность распределения $f_Y(y)$ вероятностей случайной величины $Y = F_X(X)$.

Задача 5

Случайные величины X_1, X_2, X_3 независимы и нормально распределены с математическим ожиданием $m = 0$ и дисперсией $D = 1$ каждая.

Найти плотность распределения вероятностей $f_Y(y)$ случайной величины $Y = (X_1 + X_2 X_3)(1 + X_1^2)^{-1/2}$.

Задача 6

На окружности радиусом R случайно выбирается точка A . Закон распределения её азимута – равномерный. После этого независимо выбирается точка B . Закон распределения её азимута также равномерный.

Найти закон распределения случайной длины хорды AB .

Задача 7

Найти характеристическую функцию случайной величины X , имеющей плотность распределения вероятностей

$$f(x) = \frac{1}{(m+1)!} b^m x^{m-1} \exp(-bx), \quad x \geq 0,$$

с заданными m – целым и b – положительным параметрами.

Задача 8

Монета бросается N раз. Найти наивероятнейшее число появления герба. Рассмотреть пример, когда $N = 10$ и $N = 20$.

Задача 9

Над плоскостью xOy на высоте h подвешен точечный источник света, излучение которого равномерно направлено во все стороны. На плоскости размещена фотобумага, регистрирующая излучение.

Найти закон распределения степени почернения фотобумаги.

Задача 10

Случайная величина X равномерно распределена на интервале $[\alpha, \beta]$, а случайная величина Y равномерно распределена на интервале $[\gamma, \delta]$.

Найти закон распределения случайной величины $Z = X + Y$.

Задача 11

Найти характеристическую функцию гипергеометрического распределения.

Задача 12

На глобусе выбрана случайно точка. Найти вероятность следующих событий:

- а) координаты точки находятся между 90-м и 180-м градусами восточной долготы;
- б) координаты точки находятся между 45-м и 90-м градусами северной широты;
- в) координаты точки находятся между 90-м и 180-м градусами восточной долготы, а также между 45-м и 90-м градусами северной широты.

Задача 13

Система независимых случайных величин Z_1, Z_2, Z_3, Z_4 имеет нормальную плотность с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией каждая.

Найти плотности распределения следующих комбинаций этих величин:

- а) $Y = Z_1 + Z_2 + Z_3 + Z_4$;
- б) $Y = Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2$;
- в) $Y = Z_4 (Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2)^{-1/2}$;
- г) $Y = \frac{1}{3}(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2) Z_4^{-2}$.

Задача 14

Рассматривается система случайных величин (X, Y, Z) . Она имеет плотность распределения

$$f_{XYZ}(x, y, z) = 6(1 + x + y + z)^{-4}, \quad 0 \leq x, y, z < \infty.$$

Найти плотность распределения суммы $S = X + Y + Z$.

Задача 15

Система из двух случайных величин (X, Y) имеет совместную плотность $f_{XY}(x, y)$.

Найти плотность распределения $f_Z(z)$ минимальной из этих двух величин $Z = \min(X, Y)$.

Задача 16

Случайные величины X и Y определены на всей числовой оси и имеют плотность распределения

$$f_{XY}(x, y) = \frac{1}{2\pi} (1 + x^2 + y^2)^{-3/2}.$$

Найти плотность распределения случайной величины $Z = X + Y$.

Задача 17

Случайная величина X имеет плотность распределения вероятностей

$$f(x) = 0,5 \exp(-|x|), \quad -\infty < x < \infty;$$

независимая от неё случайная величина Y распределена так же.

Найти функцию распределения композиции этих случайных величин.

Задача 18

Найти закон распределения композиции двух независимых случайных величин, распределенных по закону Коши.

Задача 19

Случайная величина X имеет плотность распределения вероятностей

$$f_X(x) = \pi^{-1} [1 + x^2]^{-1}, \quad -\infty < x < \infty;$$

независимая от неё случайная величина Y имеет тот же закон распределения.

Найти плотность распределения отношения $Z = X/Y$.

Задача 20

Отрезок длины L вращается в пространстве таким образом, что все его возможные ориентации равноправны.

Найти закон распределения длины проекции этого отрезка на выделенную плоскость.

Задача 21

Система неотрицательных случайных величин (X, Y) имеет плотность распределения $f_{XY}(x, y)$, $0 \leq x, y < \infty$.

Найти плотность распределения $f_Z(z)$ случайной величины Z , являющейся одним из решений уравнения $Z^2 + 2(X/Y)Z - 1 = 0$.

Задача 22

Случайные величины X и Y описываются нормальными законами с параметрами (m_X, σ_X) и (m_Y, σ_Y) соответственно.

Найти закон распределения случайной величины $Z = X/Y$,

Задача 23

На плоскости задан отрезок длиной L , вращающийся случайным образом так, что все направления его одинаково вероятны.

Определить математическое ожидание и дисперсию длины проекции отрезка на ось абсцисс.

Список литературы

У ч е б н и к и

1. Вентцель Е.С. *Теория вероятностей*. — М.: Наука, 1964.
2. Колмогоров А.Н. *Основные понятия теории вероятностей*. — М.: Наука, 1974.
3. Гнеденко Б.В. *Курс теории вероятностей*. — М.: Наука, 1963.
4. Прохоров Ю.В., Розанов Ю.А. *Теория вероятностей*. — М.: Наука, 1967.
5. Пугачев В.С. *Теория вероятностей и математическая статистика*. — М.: Наука, 1979.
6. Тихонов В.И., Миронов М.А. *Марковские процессы*. — М.: Сов. радио, 1977.
7. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. *Теория вероятностей и ее инженерные приложения*. — М.: Наука, 1988.
8. Смирнов Н.В., Дунин-Барковский И.В. *Курс теории вероятностей и математической статистики для технических приложений*. — М.: Наука, 1965.
9. Гмурман В.Е. *Теория вероятностей и математическая статистика*. — М.: Высш. шк., 2000.
10. Крамер Г. *Математические методы статистики*. — М.: Мир, 1975.

З а д а ч н и к и и п о с о б и я

11. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. *Прикладные задачи теории вероятностей*. — М.: Радио и связь, 1983.
12. Гмурман В.Е. *Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике*. — М.: Высш. шк., 2000.
13. Горяинов В.Т., Журавлев А.Г., Тихонов В.И. *Статистическая радиотехника. Примеры и задачи*. — М.: Сов. радио, 1980.
14. *Руководство для инженеров по решению задач теории вероятностей* / Под ред. А.А.Свешникова. — Л.: Судпромгиз, 1962.
15. Емельянов Г.В., Скитович В.П. *Задачник по теории вероятностей и математической статистике*. — Л.: Изд-во ЛГУ, 1967.
16. Мазманишвили А.С. *Теория вероятностей: Учебное пособие*. — Харьков: ХГПУ, 1994.
17. Зубков А.М., Севастьянов Б.А., Чистяков В.П. *Сборник задач по теории вероятностей*. — М.: Наука, 1989.

18. Корольюк В.С., Портенко Н.И., Скороход А.В., Турбин А.Ф. *Справочник по теории вероятностей и математической статистике*. — М.: Наука, 1985.
19. Корн Г., Корн Т. *Справочник по математике*. — М.: Наука, 1983.
20. Абрамович М., Стиган И. *Справочник по специальным функциям*. — М.: Наука, 1979.

Дополнительная литература

21. Чебышев П.Л. *Теория вероятностей*. — М.-Л.: Изд-во АН СССР, 1936.
22. Феллер В. *Введение в теорию вероятностей и ее применение*. — М.: Мир, 1984. — Т.1; 1984. — Т.2.
23. Анго А. *Математика для электро- и радиоинженеров*. — М.: Наука, 1965.
24. Чандрасекар С. *Стохастические проблемы в физике и астрономии*. — М.: ИЛ, 1947.
25. Секей Г. *Парадоксы в теории вероятностей и математической статистике*. — М.: Мир, 1990.
26. Кендалл М., Моран П. *Геометрические вероятности*. — М.: Наука, 1972.
27. Борель Э. *Вероятность и достоверность*. — М.: Физматгиз, 1961.
28. Мостеллер Ф. *Пятьдесят занимательных вероятностных задач с решениями*. — М.: Наука, 1971.

Навчальне видання

МАЗМАНІШВІЛІ Олександр Сергійович

ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ

Навчальний посібник до практичних занять

Російською мовою

Роботу до видання рекомендував О.В. Горілий

Редактор О.І. Шпильова

План 2010, поз. 66

Підп. до друку 20.10.2009	Формат 60×94 1/16	Папір офсетн.
Друк – ризографія.	Гарнітура Times New Roman.	Ум. друк. арк. 12,0.
Обл.–вид. арк. 15,0.	Наклад 200 прим.	Зам. №
		Ціна договірна

Видавничий центр НТУ "ХПІ", 61002, Харків, вул. Фрунзе, 21
Свідоцтво про реєстрацію ДК № 116 від 10.07.2000

Друкарня НТУ "ХПІ", 61002, Харків, вул. Фрунзе, 21

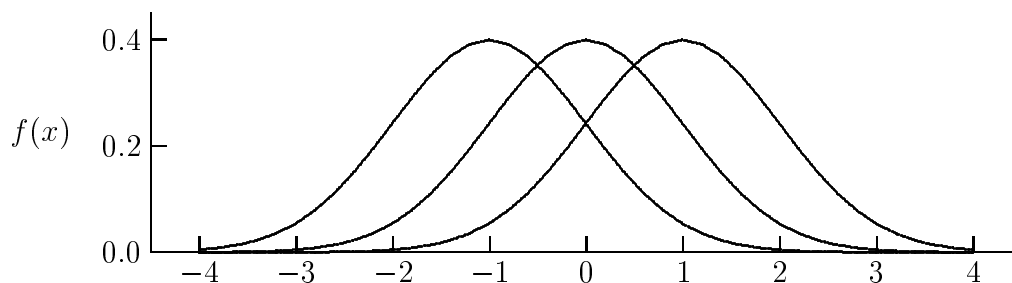
МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
"ХАРЬКОВСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ"

А.С. МАЗМАНИШВИЛИ

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ К ПРАКТИЧЕСКИМ ЗАНЯТИЯМ



нормальной случайной величины; $m = -1; 0; 1$; $\sigma = 1,0$

Харьков НТУ "ХПИ" 2010