Практичне заняття № 4.

Випадкові величини. Числові характеристики випадкових величин.

Основні числові характеристики:

математичне сподівання дискретної випадкової величини:

$$m_x = M[X] = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i \; ; \qquad (1)$$

математичне сподівання Неперервної випадкової величини:

$$m_x = M[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\, dx; \qquad (2)$$

дисперсія дискретної випадкової величини:

$$D_x = D[X] = \sum_{i=1}^{n} (x_i - m_x)^2 p_i \qquad (3)$$

дисперсія неперервної випадкової величини:

$$D_x = D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx - (M(X))^2 \qquad (4)$$

середнє квадратичне відхилення

$$\sigma_x = \sqrt{D(X)} \qquad (5)$$

другий початковий момент дискретної випадкової величини:

$$\alpha_2 = M[X^2] = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i \; ; \qquad (6)$$

другий початковий момент Неперервної випадкової величини:

$$\alpha_2 = M[X^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x)\, dx. \qquad (7)$$

Формула зв'язку дисперсії з другим початковим моментом і математичним очікуванням:

$$D_x = \alpha_2 - m_x^2. \qquad (8)$$

Приклад 1. Схожість насіння оцінюється ймовірністю 0,8. Розглядається випадкова величина X – число насінин, що зійшли, серед п'яти посіяних. Визначити закон розподілу у вигляді ряду розподілу. Побудувати графік інтегральної функції розподілу $F(x)$. Знайти математичне сподівання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення σ_x випадкової величини X.

Розв'язання. Випадкова величина *X* в умовах цієї задачі може при- ймати одне з числових значень: 0, 1, 2, 3, 4, 5. Для побудови ряду розподі- лу залишається визначити тільки відповідні ймовірності. У різних задачах ця ймовірності визначаються за різними методиками, розглянутими в попередніх розділах курсу. В умовах даної задачі найбільш доцільним способом визначення шуканих імовірностей є формула Бернуллі

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m},$$

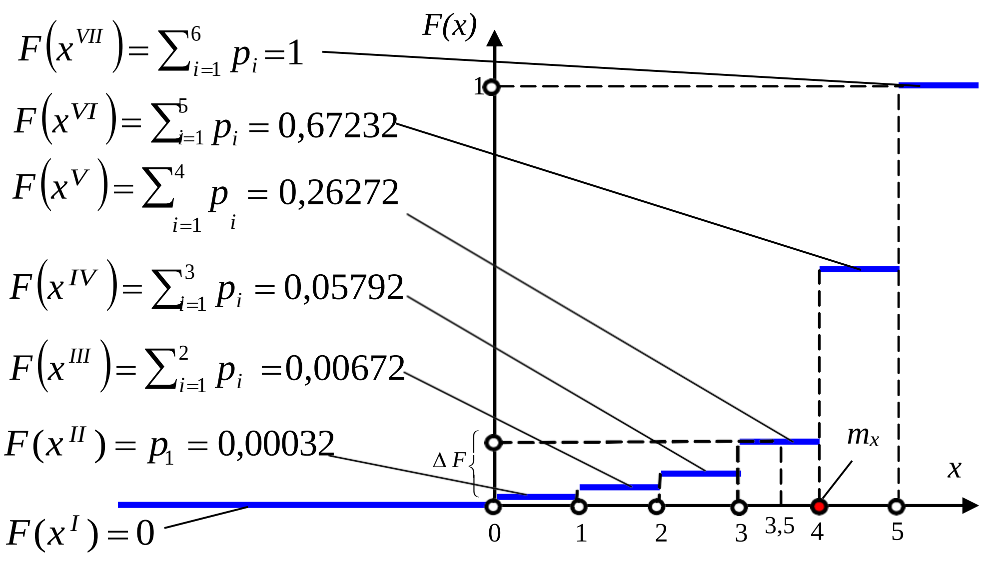
в якій n = 5; p = 0,8. Підставляючи замість k послідовно всі можливі значення

випадкової величини, отримаємо відповідні ймовірності: для $x_1 = 0$ – $p_1 = 0{,}00032$; для $x_2 = 1$ – $p_2 = 0{,}0064$; для $x_3 = 2$ – $p_3 = 0{,}0512$; для $x_4 = 3$ – $p_4 = 0{,}2048$; для $x_5 = 4$ – $p_5 = 0{,}4096$; для $x_6 = 5$ – $p_6 = 0{,}32768$. Шуканий ряд розподілу має вигляд:

xi	0	1	2	3	4	5
pi	0,00032	0,0064	0,0512	0,2048	0,4086	0,32768

Ряд розподілу містить вичерпну інформацію про випадкову величину, тому його можна використовувати для знаходження відповідей на решту питань задачі. Зокрема – для побудови графіка інтегральної функції *F(x).*

При побудові графіка *F(x)* вісь абсцис розбивається можливими значеннями випадкової величини на $(n+1)$ діапазон: 1-й діапазон – $x^I \le 0$; 2-й – $0 < x^{II} \le 1$; 3-й – $1 < x^{III} \le 2$; 4-й – $2 < x^{IV} \le 3$; 5-й – $3 < x^{V} \le 4$; 6-й – $4 < x^{VI} \le 5$; 7-й – $3 < x^{VII}$. У кожному з таких діапазонів функція *F(x)* має постійне значення (рис.1).



Математичне сподівання *mx* випадкової величини *X* визначається за формулою (3) при *n* = 6:

$$m_x = \sum_{i=1}^{6} x_i p_i \; = x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3 + x_4 p_4 + x_5 p_5 + x_6 p_6 =$$

$$= 0 \cdot 0{,}00032 + 1 \cdot 0{,}0064 + 2 \cdot 0{,}0512 + 3 \cdot 0{,}2048 +$$

$$+ 4 \cdot 0{,}4096 + 5 \cdot 0{,}32768 = 4 .$$

Математичне сподівання m_x є числовою характеристикою випадкової величини *X*, лежить в області визначення останньою і зображається крапкою на осі абсцис (див. рис.1).

Дисперсія D_x випадкової величини *X* визначається по формулі (4) при *n* = 6:

$$D_x = (0-4)^2\, 0{,}00032 + (1-4)^2\, 0{,}0064 + (2-4)^2\, 0{,}0512 +$$

$$+ (3-4)^2\, 0{,}2048 + (4-4)^2\, 0{,}4096 + (5-4)^2\, 0{,}32768 = 0{,}8.$$

Середнє квадратичне відхилення випадкової величини X визначається по формулі (5): $\sigma_x = \sqrt{D_x} = \sqrt{0{,}8} \approx 0{,}8944$.

Ймовірність попадання випадкової величини в заданий інтервал значень від *x1* = -5 до x_2 = 2,7 можна визначити двома способами:

а) за допомогою графіка інтегральної функції *F(x):*

$P(-5 < X < 3{,}5) = F\,(3{,}5) - F\,(-5) = 0{,}26272 - 0 = 0{,}26272$. На рис.1 цій ймовірності відповідає відрізок ΔF .

б) за допомогою основних теорем теорії ймовірності як ймовірність складної події:

$$P(-5 < X < 3{,}5) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) =$$

$$= 0{,}00032 + 0{,}0064 + 0{,}0512 + 0{,}2048 = 0{,}26272 .$$