Неперервна випадкова величина. Функція розподілу. Щільність розподілу ймовірностей. Числові характеристики неперервної випадкової величини.

Означення. **Випадковою величиною** називають таку величину, яка внаслідок випробування може набути лише одного числового значення, яке зумовлене результатом експерименту.

Отже, ***випадковою величиною***, пов'язаною з певним дослідом, називають величину, яка під час кожного проведенням досліду може набувати того чи того числового значення, залежно від випадку.

Між випадковими подіями і випадковими величинами є тісний зв'язок. Випадкова подія – це якісна характеристика випадкового результату досліду, а випадкова величина – його кількісна характеристика. Випадкові величини за певними властивостями поділяються на ***дискретні*** та ***неперервні***.

Означення. **Неперервною випадковою величиною** (НВВ) називають величину, яка може набувати будь-якого числового значення з певного обмеженого інтервалу (a,b) або необмеженого інтервалу $(-\infty,\ +\infty)$. Наприклад, випадкова величина X – час безвідмовної роботи приладу, неперервна, оскільки її можливе значення $t>0$.

Означення. Співвідношення, яке встановлює зв'язок між можливими значеннями випадкової величини і ймовірностями, з якими приймають ці значення, називають **законом розподілу ймовірностей випадкової величини**.

Закон розподілу неперервної випадкової величини може бути заданий графічно або аналітично $p_k = f(x_k)$ (за допомогою формули). Табличне задання неможливе, оскільки ймовірність отримати будь-яке значення неперервної величини дорівнює нулю, що пов'язано не з неможливістю самої події (потрапляння в певну точку на числовій осі), а з нескінченно великою кількістю можливих випадків.

З огляду на це для неперервних випадкових величин (як, зрештою, і для дискретних) визначають імовірність потрапляння в деякий інтервал числової осі.

Імовірність потрапляння випадкової величини X в інтервал $[a, b]$ визначають як імовірність події $P(a \le X < b)$.

Для кількісного оцінювання закону розподілу випадкової величини (дискретної або неперервної) задають ***функцію розподілу ймовірностей випадкової величини,*** котру визначають як імовірність того, що випадкова величина X набуде значення, меншого від певного фіксованого числа x і позначають $F(x) = P(X < x)$ або $F(x) = P(-\infty < X < x)$.

Функцію розподілу $F(x)$ називають ***інтегральною функцією*** розподілу ймовірностей випадкової величини.

Знаючи функцію розподілу $F(x)$, можна обчислити ймовірність потрапляння випадкової величини у деякий інтервал $[a, b)$:

$$P(a < X < b) = F(b) - F(a). \tag{3.1}$$

Дійсно, випадкова подія $(X < b)$ – об'єднання двох несумісних подій $(X < a)$ і $(a \le X < b)$.

Отже, за теоремою додавання ймовірностей несумісних подій маємо:

$$P(X < b) = P(X < a) + P(a \le X < b),$$

звідки

$$P(a \le X < b) = P(X < b) - P(X < a),$$

або, враховуючи позначення, $P(a \le X < b) = F(b) - F(a)$.

Властивості функцій розподілу

1. $0 \le F(x) \le 1$.

2. Функція розподілу неспадна: якщо $x_1 < x_2$, то $F(x_1) \le F(x_2)$.

3. Функція розподілу неперервна зліва: $\lim\limits_{x \to x_1 - 0} F(x) = F(x_1)$.

4. Імовірність потрапляння випадкової величини X у проміжок $[a,\ b)$:

$$P\left(a \le X < b\right) = F(b) - F(a). \qquad (3.3)$$

5. $P(X \ge x) = 1 - F(x)$.

6. $F(-\infty) = 0, \quad F(+\infty) = 1$.

Зауваження. Неперервна випадкова величина X, що набуває значення в інтервалі $(a,\ b)$, має незліченну кількість можливих значень, тому набуття X певних значень, наприклад, $X = a$ або $X = b$, – події з нульовою ймовірністю. Це означає, що $P(X = a) = 0$ та $P(X = b) = 0$. З огляду на це справедливі

$$P(a < X < b) = P(a \le X < b) = P(a < X \le b) = P(a \le X \le b).$$

Тоді, згідно з зауваженням, для такої *неперервної випадкової величини* $F(x) = 0$ за $x \le a$; $F(x) = 1$ за $x \ge b$.

Графік її функції розподілу наведено на рис. 3.1.

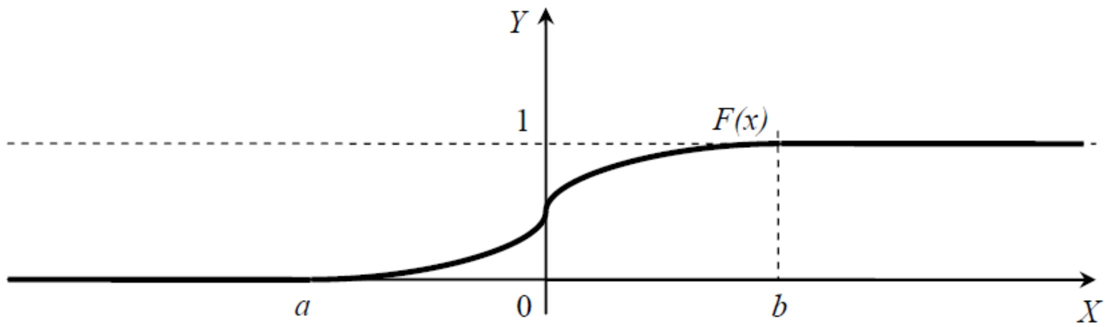

Рис. 3.1. Неперервна функція розподілу

Приклад 2. Нехай функцію розподілу деякої неперервної випадкової величини X задано у вигляді

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0; \\ a(1-\cos x), & 0<x\le \pi; \\ 1, & x>\pi. \end{cases}$$

Визначити значення коефіцієнта a.

Розв'язання. Значення коефіцієнта обчислимо, користуючись властивостями функції розподілу.

Оскільки функція неперервна зліва, то за $x=\pi$ маємо $a(1-\cos\pi)=1$, звідки $a=\dfrac{1}{2}$. З другого боку, $F(\pi)-F(0)=1$, тобто $a(1-\cos\pi)-a(1-\cos 0)=1$ і, відповідно, $2a=1$, $a=\dfrac{1}{2}$.

Закон розподілу ймовірностей неперервних випадкових величин може бути заданий також і ***щільністю розподілу.***

Нехай неперервна випадкова величина X задана неперервною і диференційовною функцією розподілу $F(x)$. Імовірність потрапляння цієї випадкової величини в деякий інтервал $(x,\ x+\Delta x)$ знайдемо на підставі співвідношення (3.3):

$$P(x < X < x+\Delta x) = F(x+\Delta x) - F(x),$$

тобто як приріст функції розподілу на цьому інтервалі.

Відношення $\dfrac{P(x < X < x+\Delta x)}{\Delta x}$ виражає середню ймовірність, яка припадає на одиницю довжини інтервалу.

Перейшовши до границі за $\Delta x \to 0$, отримаємо:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} = F'(x).$$

Означення. **Диференціальною функцією розподілу** або **щільністю розподілу ймовірностей** неперервної випадкової величини називають

$$f(x) = F'(x). \tag{3.4}$$

Назва *щільність ймовірностей* випливає з рівності

$$f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{P(X < x+\Delta x) - P(X < x)}{\Delta x}.$$

Властивості диференціальних функцій розподілу

1. $f(x) \ge 0, x \in R.$

2. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1.$

3. $P(a \le X < b) = \int\limits_a^b f(x)dx.$

4. Якщо всі можливі значення випадкової величини належать інтервалу $(a,\ b)$, то $\int\limits_a^b f(x)dx = 1.$

За відомою диференціальною функцією розподілу $f(x)$ знаходять інтегральну функцію розподілу $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt.$

Геометричне тлумачення щільності розподілу випливає із формули $P\left(a \le X < b\right) = \int\limits_a^b f(x)dx$: імовірність попадання випадкової величини X на проміжок $[a,\ b)$ обчислюють як площу криволінійної трапеції, обмеженої зверху графіком функції $y = f(x)$, знизу – відрізком $\left[a, b\right]$ осі абсцис, зліва і справа – відрізками прямих $x = a,\ x = b$.

Означення. **Математичним сподіванням** *неперервної випадкової величини X*, яка задана щільністю розподілу $f(x)$, називають

$$M(X) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx, \tag{3.6}$$

якщо цей інтеграл абсолютно збіжний. Якщо можливі значення неперервної випадкової величини X належать проміжку $\left[a,\ b\right]$, то

$$M(X) = \int\limits_a^b xf(x)dx. \tag{3.7}$$

Властивості математичного сподівання

1. Математичне сподівання сталої величини – стала $M(C) = C$.

2. $M(CX) = CM(X)$.

3. $M(X+Y) = M(X) + M(Y)$.

Наслідки : *а*) $M(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) = M(X_1) + M(X_2) + \ldots + M(X_n)$;

б) $M(X - Y) = M(X) - M(Y)$.

4. Математичне сподівання добутку двох незалежних випадкових величин $M(XY) = M(X)M(Y)$.

Означення. **Дисперсією** випадкової величини називають математичне сподівання квадрата різниці випадкової величини і її математичного сподівання:

$$D(X) = M(X - M(X))^2. \tag{3.8}$$

Теорема. Дисперсія випадкової величини дорівнює різниці між математичним сподіванням квадрата цієї величини і квадратом її математичного сподівання:

$$D(X) = M(X^2) - \left(M(X)\right)^2. \tag{3.9}$$

2) для неперервної випадкової величини

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx - (M(X))^2; \tag{3.11}$$

якщо її можливі значення належать відрізку $[a, b]$, тоді

$$D(X) = \int_{a}^{b} x^2 f(x)dx - (M(X))^2. \tag{3.12}$$

Розмірність дисперсії не збігається з розмірністю випадкової величини. Для того, щоб розмірності були однаковими, вводять поняття ***середнього квадратичного відхилення (стандартного відхилення)***.

Означення. **Середнім квадратичним відхиленням** випадкової величини називають

$$\sigma_{\tilde{o}} = \sigma(\tilde{O}) = \sqrt{D(X)}. \tag{3.13}$$

Властивості дисперсії

1. $D(C) = 0,\ C$ – стала величина.

2. $D(CX) = C^2 D(X)$.

3. Дисперсія суми незалежних випадкових величин дорівнює сумі їх дисперсій:

$$D(X + Y) = D(X) + D(Y).$$

Наслідок. Дисперсія різниці двох незалежних випадкових величин дорівнює сумі їх дисперсій:

$$D(X - Y) = D(X) + D(Y).$$

Приклад 3. Знайти числові характеристики випадкової величини X, яка задана функцією розподілу $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ \dfrac{x^2}{25}, & 0<x\le 5;\\ 1, & x>5.\end{cases}$

Розв'язання. Спочатку знайдемо диференціальну функцію розподілу, тобто щільність розподілу ймовірності за формулою $f(x)=F'(x)$:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{25}x, & 0<x\le 5;\\ 0, & x\notin(0,\ 5].\end{cases}$$

За формулою $M(X)=\int_a^b xf(x)dx$ знаходимо математичне сподівання:

$$M(X)=\int_0^5 x\cdot\frac{2}{25}xdx=\frac{2}{25}\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_0^5=\frac{2}{75}\left(5^3-0\right)=\frac{10}{3}.$$

Для дисперсії використовуємо формулу $D(X)=\int_a^b x^2 f(x)dx-(M(X))^2$:

$$D(X)=\int_0^5 x^2\cdot\frac{2}{25}xdx-\left(\frac{10}{3}\right)^2=\frac{2}{25}\cdot\frac{x^4}{4}\Big|_0^5-\frac{100}{9}=\frac{25}{18}.$$

Середнє квадратичне відхилення $\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\sqrt{\dfrac{25}{18}}=\dfrac{5}{3\sqrt{2}}=\dfrac{5\sqrt{2}}{6}\approx 1{,}17.$