2.1. ПОНЯТИЕ ПРОИЗВОДНОЙ

Пусть функция $y=f(x)$ определена на интервале (a,b). Разность $\Delta x = x - x_0$ называется ***приращением аргумента в точке*** $x_0 \in (a,b)$. Разность $\Delta f(x_0) = f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$ называется ***приращением функции в точке*** x_0.

Если существует конечный предел $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0)$, то он называется ***производной функции*** $f(x)$ ***в точке*** x_0.

Отыскание производной называется ***дифференцированием функции***.

Формулы дифференцирования основных элементарных функций

1. $(x^n)' = n\cdot x^{n-1}$	2. $(a^x)' = a^x\cdot\ln a$
3. $(e^x)' = e^x$	4. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x\cdot\ln a}$
5. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$	6. $(\sin x)' = \cos x$
7. $(\cos x)' = -\sin x$	8. $(\mathrm{tg}\, x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$
9. $(\mathrm{ctg}\, x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x} = -\mathrm{cosec}^2 x$	10. $(\mathrm{arctg}\, x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$
11. $(\mathrm{arcctg}\, x) = -\dfrac{1}{1+x^2}$	12. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
13. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	14. $(\mathrm{sh}\, x)' = \left(\dfrac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \mathrm{ch}\, x$
15. $(\mathrm{ch}\, x)' = \left(\dfrac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 = \mathrm{sh}\, x$	16. $(\mathrm{th}\, x)' = \left(\dfrac{\mathrm{sh}\, x}{\mathrm{ch}\, x}\right)' = \dfrac{1}{\mathrm{ch}^2 x}$
17. $(\mathrm{cth}\, x)' = \left(\dfrac{\mathrm{ch}\, x}{\mathrm{sh}\, x}\right)' = \dfrac{1}{\mathrm{sh}^2 x}$	

Основные правила дифференцирования

Пусть $C = \mathrm{const}$; $U = U(x)$; $V = V(x) -$ функции, имеющие производные. Тогда

1. $(C)' = 0$	2. $(CU)' = CU'$
3. $(U \pm V)' = U' \pm V'$	4. $(U \cdot V)' = U' \cdot V + U \cdot V'$
5. $\left(\dfrac{U}{V}\right)' = \dfrac{U'V - UV'}{V^2}$	

6. Если $y = f(U)$ и $U = U(x)-$ дифференцируемые функции, то сложная функция $y = f(U(x))$ также дифференцируема, причем $y'_x = y'_U \cdot U'_x$.

Исходя из определения производной, найти производные следующих функций.

ПРИМЕР 2.1. $y = \sqrt{2x-1}$.

Решение. Найдем приращение функции $\Delta y = y(x+\Delta x) - y(x) = \sqrt{2(x+\Delta x)-1} - \sqrt{2x-1}$. Тогда $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{\sqrt{2x+2\Delta x-1} - \sqrt{2x-1}}{\Delta x}$ и

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{2x+2\Delta x-1} - \sqrt{2x-1}}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left(\sqrt{2x+2\Delta x-1} - \sqrt{2x-1}\right)\left(\sqrt{2x+2\Delta x-1} + \sqrt{2x-1}\right)}{\Delta x\left(\sqrt{2x+2\Delta x-1} + \sqrt{2x-1}\right)} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2}{\sqrt{2x+2\Delta x-1} + \sqrt{2x-1}} = \frac{1}{\sqrt{2x-1}}.$$

Таким образом $y' = \dfrac{1}{\sqrt{2x-1}}$.

ПРИМЕР 2.2. $y = -\mathrm{ctg} x - x$.

Решение. Найдем приращение функции $\Delta y = -\mathrm{ctg}(x+\Delta x) - (x+\Delta x) + \mathrm{ctg}\, x + x = \mathrm{ctg}\, x - \mathrm{ctg}(x+\Delta x) - \Delta x$.

Воспользуемся формулой $\mathrm{ctg}\,\alpha - \mathrm{ctg}\,\beta = \dfrac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta}$. Тогда

$$\Delta y = \frac{\sin(x+\Delta x - x)}{\sin x \sin(x+\Delta x)} - \Delta x = \frac{\sin \Delta x}{\sin x \sin(x+\Delta x)} - \Delta x,$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\frac{\sin\Delta x}{\Delta x}}{\sin x\sin(x+\Delta x)}-1 \quad \text{и} \quad \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\frac{\sin\Delta x}{\Delta x}}{\sin x\sin(x+\Delta x)}-1\right)=$$

$=\dfrac{1}{\sin^2 x}-1$. Итак $y'=\dfrac{1}{\sin^2 x}-1$.

ПРИМЕР 2.3. $y=x^2-4x+3$.

Решение. Найдем приращение функции $\Delta y=(x+\Delta x)^2-4(x+\Delta x)+$ $+3-x^2+4x-3=2x\,\Delta x+\Delta x^2-4\,\Delta x$.

Тогда $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{2x\,\Delta x+\Delta x^2-4\,\Delta x}{\Delta x}$ и

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2x\,\Delta x+\Delta x^2-4\,\Delta x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(2x+\Delta x-4)=2x-4.$$

Следовательно $y'=2x-4$.

2.2. ПРОИЗВОДНАЯ НЕЯВНО ЗАДАННОЙ ФУНКЦИИ. ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ ПРОИЗВОДНАЯ

Если функция задана неявным уравнением $F(x,y)=0$, т.е. не разрешенным относительно y, то для нахождения производной y'_x надо продифференцировать по x обе части этого уравнения, учитывая, что y есть функция от x, и затем разрешить полученное уравнение относительно y'_x.

Найти производные y'_x следующих функций:

ПРИМЕР 2.4. $x^2-y^2-9=0$.

Решение. Так как y является функцией x, то y^2 сложная функция. Следовательно $\left(y^2\right)'=2y\cdot y'_x$. Продифференцировав по x обе части данного уравнения, получим

$\left(x^2-y^2-9\right)'=(0)' \Rightarrow \left(x^2\right)'-\left(y^2\right)'=0 \Rightarrow 2x-2y\,y'=0,$ таким образом $y'=\dfrac{x}{y}$.

ПРИМЕР 2.5. $x^3+\ln y-x^2e^y=0$.

Решение. Дифференцируя по x обе части уравнения, получим

$$\left(x^3\right)'+(\ln y)'-\left(x^2e^y\right)'=0 \Rightarrow 3x^2+\frac{y'}{y}-x^2e^y\,y'-2x\,e^y=0.$$

Отсюда $y' = \dfrac{\left(2x\,e^{y} - 3x^{2}\right)y}{1 - x^{2}y\,e^{y}}$.

ПРИМЕР 2.6. $\sin(x\,y) + \cos(x\,y) = \mathrm{tg}\,(x + y)$.

<u>Решение.</u> Продифференцируем обе части данного уравнения по x, получим

$$(\sin(xy))' + (\cos(xy))' = (\mathrm{tg}(x+y))' \;\Rightarrow\; \cos(x \cdot y)(x\,y)' - \sin(xy)(xy)' =$$

$$= \frac{1}{\cos^{2}(x+y)}(x+y)' \;\Rightarrow\; \cos(xy)(y + xy') - \sin(xy)(y + xy') =$$

$$= \frac{1}{\cos_{2}(x+y)}(1 + y') \;\Rightarrow\; \cos(xy)\cdot y - \sin(xy)\cdot y - \frac{1}{\cos^{2}(x+y)} =$$

$$= y'\left(-x\cos(xy) + x\sin(xy) + \frac{1}{\cos^{2}(x+y)}\right).$$ Отсюда

$$y' = \frac{\cos^{2}(x+y)(\cos(xy)\cdot y - \sin(xy)\cdot y) - 1}{\cos^{2}(x+y)\cdot(-\cos(xy)\cdot x + \sin(xy)\cdot x) + 1}.$$

ПРИМЕР 2.7. $e^{\varphi-2} + r\varphi - 3r - 2 = 0$. Найти $\left(\dfrac{dr}{d\varphi}\right)\Bigg|_{\varphi=2}$.

<u>Решение.</u> Дифференцируя по φ, и считая r функцией φ, найдем

$$e^{\varphi-2} + \varphi\frac{dr}{d\varphi} + r - 3\frac{dr}{d\varphi} = 0 \quad \text{отсюда} \quad \frac{dr}{d\varphi} = \frac{e^{\varphi-2} + r}{3 - \varphi}.$$

Подставляя данные по условию значение $\varphi = 2$ в исходное уравнение найдем соответствующее значение $r\big|_{\varphi=2} = -1$. Искомое частное значение производной $\dfrac{dr}{d\varphi}$ при $\varphi = 2$ будет равно $\left(\dfrac{dr}{d\varphi}\right)\Bigg|_{\varphi=2} = \dfrac{e^{0} - 1}{3 - 2} = 0$.

Логарифмическая производная функции $f\left((x) > 0\right)$ есть производная от логарифма данной функции $\ln f(x)$:

$$[\ln(f(x))]' = \frac{f'(x)}{f(x)}.$$

Вычисление логарифмической производной называется логарифмическим дифференцированием. Логарифмическое дифференцирование применяется при вычислении производной показательно-степенной функции

$$y = [f(x)]^{\varphi(x)},$$

где $f(x)$ и $\varphi(x)$ имеют производные в точке x_0 и $f(x) > 0$, а также при нахождении производной произведения и частного нескольких функций.

Найти производные y' от следующих функций.

ПРИМЕР 2.8. $y = (\sin 3x)^{\sqrt{x}}$.

Решение. Найдем логарифм данной функции $\ln y = \ln\left((\sin 3x)^{\sqrt{x}}\right)$ или $\ln y = \sqrt{x} \cdot \ln(\sin 3x)$. Дифференцируя обе части этого равенства, получим $(\ln y)' = \left(\sqrt{x}\ln(\sin 3x)\right)' \Rightarrow \dfrac{y'}{y} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\ln(\sin 3x) + \sqrt{x} \cdot \dfrac{3\cos 3x}{\sin 3x}$. Отсюда

$$y' = y\left(\frac{\ln(\sin 3x)}{2\sqrt{x}} + 3\sqrt{x}\,\mathrm{ctg}\,3x\right) \Rightarrow y' = (\sin 3x)^{\sqrt{x}}\left(\frac{\ln(\sin 3x)}{2\sqrt{x}} + 3\sqrt{x}\,\mathrm{ctg}\,3x\right)$$

ПРИМЕР 2.9. $y = \dfrac{\sqrt[3]{6x-1} \cdot \sqrt{2x+1}}{\sqrt[5]{15x-4}}$.

Решение. Прологарифмируем данное равенство

$$\ln y = \ln\left(\frac{(6x-1)^{\frac{1}{3}} \cdot (2x+1)^{\frac{1}{2}}}{(15x-4)^{\frac{1}{5}}}\right) \Rightarrow \ln y = \ln(6x-1)^{\frac{1}{3}} + \ln(2x+1)^{\frac{1}{2}} -$$

$$-\ln(15x-4)^{\frac{1}{5}} \Rightarrow \ln y = \frac{1}{3}\ln(6x-1) + \frac{1}{2}\ln(2x+1) - \frac{1}{5}\ln(15x-4).$$

Дифференцируя обе части последнего равенства, получим

$$\frac{y'}{y} = \frac{6}{3(6x-1)} + \frac{2}{2(2x+1)} - \frac{15}{5(15x-4)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y' = y\left(\frac{2}{6x+1} + \frac{1}{2x+1} - \frac{3}{15x-4}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y' = \frac{\sqrt[3]{6x-1}\cdot\sqrt{2x+1}}{\sqrt[5]{15x-4}}\left(\frac{2}{6x-1} + \frac{1}{2x+1} - \frac{3}{15x-4}\right).$$

ПРИМЕР 2.10. $x^y = y^x$.

Решение. Прологарифмируем обе части данного уравнения (по основанию e), затем дифференцируем по y, рассматривая x как функцию y:

$$y\ln x = x\ln y;$$

$$y'\ln x + y(\ln x)' = x'\ln y + x(\ln y)';$$

$1\cdot \ln x + y\cdot \dfrac{x'}{x} = x'\cdot \ln y + x\cdot \dfrac{1}{y}$. Отсюда найдем:

$x'\left(\dfrac{y}{x} - \ln y\right) = \dfrac{x}{y} - \ln x$; $x' = \dfrac{dx}{dy} = \dfrac{x(x - y\ln x)}{y(y - x\ln y)}$.

2.3. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ ЗАДАННЫХ ПАРАМЕТРИЧЕСКИ

Если функция y аргумента x задана параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t) \end{cases}$$

то производная функции y по переменной x, т.е. y'_x вычисляется по формуле:

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}.$$

Найти производные от y по x для функций, заданных параметрически.

ПРИМЕР 2.11. $\begin{cases} x = 1 - t^2, \\ y = t - t^3. \end{cases}$

Решение. Найдем $x'_t = -2t$ и $y'_t = 1 - 3t^2$. Следовательно $y'_x = \dfrac{1-3t^2}{-2t}$.

ПРИМЕР 2.12. $\begin{cases} x = a\cdot \cos t, \\ y = a\cdot \sin t. \end{cases}$

Решение. Найдем $x'_t = -a\cdot \sin t$; $y'_t = a\cdot \cos t$. Тогда $y'_x = -\dfrac{a\cdot \cos t}{a\cdot \sin t} = -\mathrm{ctg} t$.

ПРИМЕР 2.13. $\begin{cases} x = \arcsin t, \\ y = \ln\left(1 - t^2\right). \end{cases}$

Решение. Найдем $x'_t = \dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$; $y'_t = -\dfrac{2t}{1-t^2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad y'_x = -\frac{2t\sqrt{1-t^2}}{\left(1-t^2\right)} = -\frac{2t}{\sqrt{1-t^2}}.$$

ПРИМЕР 2.14. $\begin{cases} x = k\sin t + \sin kt \\ y = k\cos t + \cos kt \end{cases}$. Найти $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{t=0}$. Каков геометрический смысл результата?

Решение. Найдем производные от x и от y по параметру t:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = k\cos t + k\cos kt \\ \frac{dy}{dt} = -k\sin t - k\sin kt \end{cases}$$

Искомая производная от y по x находится как отношение производных от y и от x по t:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = -\frac{k(\sin t + \sin kt)}{k(\cos t + \cos kt)} = \frac{-2\sin\frac{t+kt}{2}\cdot\cos\frac{t-kt}{2}}{2\cos\frac{t+kt}{2}\cos\frac{t-kt}{2}} = -\mathrm{tg}\frac{k+1}{2}\cdot t.$$

При $t=0$ получим $\frac{dy}{dx}=0$. Согласно геометрическому значению производной в точке $(0;k+1)$, где $t=0$, касательная к графику данной функции параллельна оси Ox.

ПРИМЕР 2.15. $\begin{cases} x = \alpha^2 + 2\alpha \\ y = \ln(\alpha+1) \end{cases}$. Найти $\frac{d^2y}{dx^2}$.

Решение. Найдем производные от x и от y по параметру α:

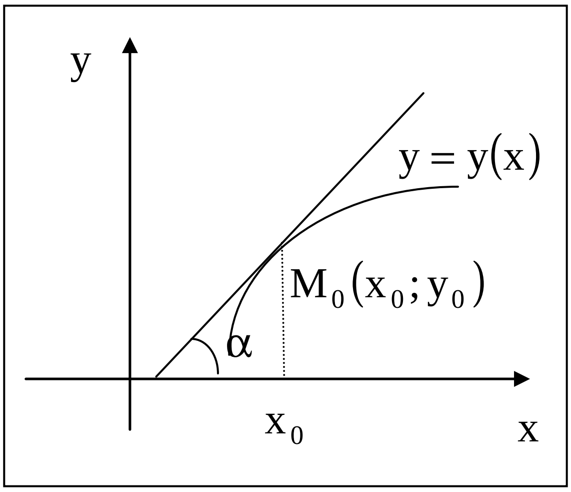
$\begin{cases} \frac{dx}{d\alpha} = 2\alpha + 2 \\ \frac{dy}{d\alpha} = \frac{1}{\alpha+1} \end{cases}$. Найдем искомую производную от y по x:

$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\alpha} : \frac{dx}{d\alpha} = \frac{1}{2(\alpha+1)^2} = \frac{1}{2}(\alpha+1)^{-2}$. Далее находим производную от y' по α, а затем искомую вторую производную от y по x как отношение производных от y' и от x по α:

$$\frac{dy'}{d\alpha} = -(\alpha+1)^{-3}; \quad y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dy'}{d\alpha} : \frac{dx}{d\alpha} = -\frac{(\alpha+1)^{-3}}{2(\alpha+1)} = -\frac{1}{2(\alpha+1)^4}.$$

2.4. ПРИЛОЖЕНИЯ ПРОИЗВОДНОЙ К ЗАДАЧАМ ГЕОМЕТРИИ И МЕХАНИКИ

Производная функции $y = y(x)$ при данном значении аргумента $x = x_0$ равна угловому коэффициенту касательной, проведенной к графику этой функции в точке с абсциссой x_0.



$$\operatorname{tg}\alpha = y'(x_0)$$

Уравнение прямой, касательной к графику $y = y(x)$ в точке $M_0(x_0; y_0)$ имеет вид

$$y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0).$$

Если $y(x)$ имеет в точке $M_0(x_0; y_0)$ бесконечную производную, то уравнение касательной к графику этой функции в указанной точке имеет вид $x = x_0$.

Уравнение нормали, т.е. прямой, проходящей через точку $M_0(x_0; y_0)$ перпендикулярно к касательной, имеет вид

$$y - y_0 = -\frac{1}{y'(x_0)}(x - x_0).$$

Если при прямолинейном движении точки задан закон движения $S = S(t)$, тогда скорость движения в момент $t = t_0$ есть производная от пути по времени:

$$V = S'(t_0).$$

ПРИМЕР 2.16. Составить уравнение касательной и нормали к параболе $y = 2x^2 - 6x + 3$ в точке $M_0(1;-1)$.

Решение. Найдем производную функции $y = 2x^2 - 6x + 3$ при $x = 1$. Имеем $y' = 4x - 6$ отсюда $y'(1) = -2$.

В результате получим искомые уравнения касательной $y + 1 = -2(x - 1)$ или $2x + y - 1 = 0$ и уравнение нормали $y + 1 = \frac{1}{2}(x - 1)$ или $x - 2y - 3 = 0$.

ПРИМЕР 2.17. Зависимость пути от времени при прямолинейном движении точки задана уравнением $S = \frac{1}{5}t^5 + \frac{2}{\pi}\sin\frac{\pi t}{8}$, где $t-$ время в секундах; $S-$ путь в метрах.

Определить скорость движения в конце 2-й секунды.

Решение. Найдем производную от пути по времени $S' = t^4 + \frac{1}{4}\cos\frac{\pi t}{8}$.

При $t = 2$ имеем $S' = 16 + \frac{1}{4}\cos\frac{\pi}{4} = 16 + \frac{\sqrt{2}}{8} \approx 16{,}18$.

Следовательно, искомая скорость $V \approx 16{,}18$ м/с.

ПРИМЕР 2.18. Составить уравнения касательной и нормали к циклоиде $x = t - \sin t$; $y = 1 - \cos t$ в точке, где $t = \frac{\pi}{2}$.

Решение. Подставляя в уравнения циклоиды $t = \frac{\pi}{2}$, находим координаты точек касания: $x = \frac{\pi}{2} - 1$; $y = 1$. Найдем производные по x от y из уравнений циклоиды как от функции, заданной параметрически:

$$y' = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\sin t}{1 - \cos t} = \frac{2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}}{2\sin^2\frac{t}{2}} = \operatorname{ctg}\frac{t}{2}$$

и вычислим ее значение для точки касания $y'_0 = y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$. Подставляя x_0, y_0 и y'_0 в уравнение касательной и нормали получим уравнение касательной $2x - 2y - \pi + 4 = 0$ и уравнение нормали $2x + 2y - \pi = 0$.

ПРИМЕР 2.19. Составить уравнение касательной и нормали к кривой $y = \left|x^3 - 1\right|$ в ее угловой точке.

Решение. Найдем производную y' и затем угловую точку данной кривой из условия, что для этой точки производная y' не существует, но существуют различные односторонние производные:

$y' = \left|x^3 - 1\right|' = \pm 3x^2$, где плюс соответствует интервалу $x > 1$, в котором $x^3 - 1 > 0$, а минус – интервалу $x < 1$, где $x^3 - 1 < 0$. Отсюда заключаем, что точка, где $x = 1$ является угловой, в этой точке кривая имеет две односторонние касательные с угловыми коэффициентами: $k_1 = \lim\limits_{\Delta x \to -0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = y'_{(-)}(1) = -3$ и $k_2 = \lim\limits_{\Delta x \to +0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = y'_{(+)}(1) = 3$. Пользуясь общими уравнениями касательной и нормали получим: уравнение касательных $3x - y - 3 = 0$ и $3x + y - 3 = 0$ и уравнения нормали $x + 3y - 1 = 0$ и $x - 3y - 1 = 0$.

ПРИМЕР 2.20. Точка движется по кубической параболе $12y = x^3$. Какая из ее координат изменяется быстрее?

Решение. Считая в уравнении параболы y сложной функцией от времени t и дифференцируя его по t, получим $12\dfrac{dy}{dt} = 3x^2\dfrac{dx}{dt}$.

Отсюда найдем отношение скоростей ординаты и абсциссы:

$\dfrac{dy}{dt} : \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{x^2}{4}$. При $|x| < 2$ это отношение будет меньше 1, при $|x| = 2$ - равно 1, и при $|x| > 2$ оно будет больше 1. Следовательно:

1) при $-2 < x < 2$ ордината изменяется медленнее абсциссы;
2) при $x = \pm 2$ скорости изменения абсциссы и ординаты одинаковы;
3) при $x < -2$ и $x > 2$ ордината изменятся быстрее абсциссы.

ПРИМЕР 2.21. Резервуар, имеющий форму полушара, с внутренним радиусом R (м), наполняется водой со скоростью Q м/с. Определить скорость повышения уровня воды в резервуаре в момент, когда он будет равен 0,5R.

Решение. Обозначим через h уровень воды в м. и через V ее объем в $м^3$. Найдем зависимость между переменными h и V, пользуясь формулой для объема шарового сегмента:

$V = \pi h^2\left(R - \dfrac{h}{3}\right)$. Дифференцируя это равенство по времени t, найдем зависимость между скоростями изменения переменных h и V

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dh}\cdot\frac{dh}{dt} = \pi\left[2h\left(R - \frac{h}{3}\right) - \frac{1}{3}h^2\right]\frac{dh}{dt} = \pi\left(2\pi Rh - h^2\right)\frac{dh}{dt}.$$