2.1 НЕПОСРЕДСТВЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ

2.1.1 Основные определения

Отыскание функции $F(x)$ по известному ее дифференциалу $f(x)dx$, называется ***интегрированием***, а искомая функция $F(x)$ - ***первообразной функцией*** от функции $f(x)$.

Всякая непрерывная функция $f(x)$ имеет бесконечное множество первообразных функций, которые отличаются друг от друга постоянным слагаемым

$$(F(x)+C)' = F'(x) = f(x)$$

Выражение $F(x)+C$ называется ***неопределенным интегралом*** от функции $f(x)$ и обозначается

$$\int f(x)dx = F(x)+C$$

Справедливость результата интегрирования можно проверить путем дифференцирования.

2.1.2 Свойства неопределенного интеграла

1. $d\int f(x)dx = f(x)dx$, $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$
2. $\int k f(x)dx = k\int f(x)dx$ (k - постоянный множитель)
3. $\int [f_1(x) \pm f_2(x)]dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx$
4. Если $\int f(x)dx = F(x)+C$, а $u(x)$ - дифференцируемая функция, то $\int f(u)du = F(u)+C$

2.1.3 Таблица неопределенных интегралов

Таблица 2.1

Таблица неопределенных интегралов

1 $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1)$**,** $\int dx = x + C$	**2** $\int \frac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert + C$
3 $\int dx = x + C$	**4** $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (a > 0, a \neq 1)$
5 $\int e^x dx = e^x + C$	**6** $\int \sin x\, dx = -\cos x + C$

7 $\int \cos x\,dx = \sin x + C$	**8** $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg}\, x + C$
9 $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg}\, x + C$	**10** $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a}\mathrm{arctg}\frac{x}{a} + C$
11 $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{a+x}{a-x}\right\rvert + C$	**12** $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$
13 $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln\left\lvert x + \sqrt{x^2 + a^2}\right\rvert + C$	**14** $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \ln\left\lvert x + \sqrt{x^2 - a^2}\right\rvert + C$
15 $\int \mathrm{tg}\, x\,dx = -\ln\lvert\cos x\rvert + C$	**16** $\int \mathrm{ctg}\, x\,dx = \ln\lvert\sin x\rvert + C$
17 $\int \mathrm{sh}\, x dx = \mathrm{ch}\, x + C$	**18** $\int \mathrm{ch}\, x dx = \mathrm{sh}\, x + C$
19 $\int \frac{dx}{\mathrm{sh}^2 x} = -\mathrm{cth}\, x + C$	**20** $\int \frac{dx}{\mathrm{ch}^2 x} = \mathrm{th}\, x + C$

2.1.4 Метод непосредственного интегрирования

Метод непосредственного интегрирования, связан с приведением подынтегрального выражения к табличной форме путем преобразований и применения свойств неопределенного интеграла.

Рассмотрим примеры на применение формулы (1)

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

Пример 2.1 Вычислить интегралы:

Решение.

1) $\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C$

2) $\int \sqrt{x^3} dx = \int x^{3/2} dx = \frac{x^{5/2}}{5/2} + C = \frac{2}{5} x^{5/2} + C = \frac{2}{5} x^2 \sqrt{x} + C$

3) $\int \frac{dx}{x^4} = \int x^{-4} dx = -\frac{x^{-3}}{3} + C = -\frac{1}{3x^3} + C$

4) $\int 2x\sqrt{x} dx = 2\int x^{3/2} dx = 2\frac{x^{5/2}}{5/2} + C = \frac{4}{5} x^2 \sqrt{x} + C.$

5) $\int \left(2x - 3\sqrt{x}\right) dx = 2\int x dx - 3\int x^{1/2} dx = x^2 - 3\frac{x^{3/2}}{3/2} + C = x^2 - 2x^{3/2} + C =$

$= x^2 - 2x\sqrt{x} + C.$

6) $\int \frac{\sqrt[3]{x}+x}{\sqrt[4]{x}}dx = \int \frac{x^{1/3}}{x^{1/4}}dx + \int \frac{x}{x^{1/4}}dx = \int x^{1/12}dx + \int x^{3/4}dx = \frac{12}{13}x^{13/12} + \frac{4}{7}x^{7/4} +$

$+C = \frac{12}{13}x\sqrt[12]{x} + \frac{4}{7}x\sqrt[4]{x^3} + C$

Пример 2.2 Вычислить интегралы, применив формулы $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$**,** $\int e^x dx = e^x + C$

Решение.

1) $\int 3^x dx = \frac{3^x}{\ln 3} + C$

2) $\int \left(\sqrt{2}\right)^x dx = \frac{\left(\sqrt{2}\right)^x}{\ln\sqrt{2}} + C = \frac{2\left(\sqrt{2}\right)^x}{\ln 2} + C$

3) $\int 2^{3x}dx = \int 8^x dx = \frac{8^x}{\ln 8} + C$

4) $\int 4^x \cdot e^x\, dx = \int (4e)^x dx = \frac{(4e)^x}{\ln(4e)} + C = \frac{(4e)^x}{\ln 4 + 1} + C$

5) $\int \frac{32^x - 2^x}{4^x}dx = \int \frac{32^x}{4^x}dx - \int \frac{2^x}{4^x}dx = \int 8^x dx - \int \left(\frac{1}{2}\right)^x dx = \frac{8^x}{\ln 8} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^x}{\ln 2} + C$

При вычислении интегралов от тригонометрических функций используются тригонометрические формулы:

$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$, $\operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1$, $\operatorname{ctg}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} - 1$,

$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$,

$\sin\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)]$,

$\sin\alpha \cdot \sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$,

$\cos\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)]$,

$\sin^3 x = \sin^2 x \sin x = \left(1 - \cos^2 x\right)\sin x = \sin x - \cos^2 x \sin x$,

$$1+\cos x = 2\cos^2\frac{x}{2},\ 1-\cos x = 2\sin^2\frac{x}{2},$$

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2},\ \operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}$$ и другие.

Пример 2.3 Вычислить интегралы, применяя известные тригонометрические формулы и табличные интегралы 6-12.

Решение.

1) $$\int \operatorname{tg}^2 x\,dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}dx = \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}dx = \underbrace{\int \frac{dx}{\cos^2 x}}_{\text{интеграл 8}} - \int \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x}dx = \operatorname{tg} x -$$

$$- \underbrace{\int dx}_{\text{интеграл 1}} = \operatorname{tg} x - x + C$$

2) $$\int \frac{dx}{1-\cos 2x} = \int \frac{dx}{2\sin^2 x} = \frac{1}{2}\underbrace{\int \frac{dx}{\sin^2 x}}_{\text{интеграл 9}} = -\frac{1}{2}\operatorname{ctg} x + C$$

3) $$\int (\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x)dx = \int \frac{\pi}{2}dx = \frac{\pi}{2}\int dx = \frac{\pi}{2}x + C$$

4) $$\int 5\cos^2\frac{x}{2}dx = \frac{5}{2}\int (1+\cos x)dx = \frac{5}{2}\left(\int dx + \int \cos x\,dx\right) = \frac{5}{2}(x+\sin x) + C$$

5) $$\int \frac{\cos 9x + \cos 7x}{\cos 8x}dx = \int \frac{2\cos\frac{9x+7x}{2}\cdot\cos\frac{9x-7x}{2}}{\cos 8x}dx =$$

$$= 2\int \frac{\cos 8x\cdot\cos x}{\cos 8x}dx = 2\int \cos x\,dx = 2\sin x + C$$

6) $$\int \frac{1-\sin^2 x}{\sin x}dx = \int \frac{dx}{\sin x} - \int \sin x\,dx = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + \cos x + C$$

Пример 2.4 Вычислить интегралы, применяя табличные интегралы 3, 4, 12-14.

Решение.

1) $$\int \frac{dx}{10+x^2} = \underbrace{\int \frac{dx}{\left(\sqrt{10}\right)^2 + x^2}}_{\text{интеграл 10}} = \frac{1}{\sqrt{10}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{10}} + C$$

2) $$\int \frac{dx}{\sqrt{5-x^2}} = \underbrace{\int \frac{dx}{\sqrt{\left(\sqrt{5}\right)^2 - x^2}}}_{\text{интеграл 12}} = \arcsin\frac{x}{\sqrt{5}} + C$$

3) $\int \frac{dx}{\sqrt{3-2x^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{dx}{\sqrt{\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2 - x^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin \frac{x}{\sqrt{\frac{3}{2}}} + C$

4) $\int \frac{dx}{9-x^2} = \underbrace{\int \frac{dx}{3^2 - x^2}}_{\text{интеграл 11}} = \frac{1}{6} \ln \left| \frac{x+3}{x-3} \right| + C$

5) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm 16}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm 16} \right| + C$

2.2 ИНВАРИАНТНОСТЬ ФОРМУЛ ИНТЕГРИРОВАНИЯ. МЕТОДЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

Свойство (4) для неопределенных интегралов из п. 2.1.2 расширяет таблицу простейших интегралов, каждый из которых может быть записан в виде $\int du = u + C$, $\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq 1)$, $\int \mathrm{Cos}\, u\, du = \mathrm{Sin}\, u + C$ и т.д., где во всех формулах под ***u*** понимается не только независимая переменная, но и произвольная функция любой независимой переменной, дифференцируемая в некотором промежутке. Рассмотрим два метода интегрирования, основанные на свойстве инвариантности формул интегрирования.

2.2.1 Метод введения функции под знак дифференциала

Из дифференциального исчисления известно, что дифференциал функции f(x) вычисляется по формуле $d[f(x)] = f'(x)\,dx$. Использование этой формулы в обратном порядке, т.е.

$$\boxed{f'(x)\,dx = d[f(x)]}$$

называется ***введением функции под знак дифференциала***. Таким образом, для известных функций справедливы следующие формулы:

$dx = d(x \pm C)$, $\quad dx = \frac{1}{a} d(a \cdot x + b)$, где a, b, c = Const,

$e^x dx = d(e^x)$, $\quad a^x dx = \frac{1}{\ln a} d(a^x)$, $\quad \mathrm{Sin}\, x\, dx = -d(\mathrm{Cos}\, x)$,

$\mathrm{Cos}\, x\, dx = d(\mathrm{Sin}\, x)$, $\quad \frac{dx}{\mathrm{Cos}^2 x} = d(\mathrm{tg}\, x)$, $\quad \frac{dx}{\mathrm{Sin}^2 x} = -d(\mathrm{ctg}\, x)$,

$\frac{dx}{x} = d(\ln x)$, $\quad \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = d(\arcsin x)$, $\quad \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -d(\arccos x)$,

$$\frac{dx}{1+x^2} = d(\operatorname{arctg} x), \qquad \frac{dx}{1+x^2} = -d(\operatorname{arcctg} x) \qquad \text{и другие}$$

Тогда определенные типы нетабличных интегралов можно свести к табличным, т.е. $\int f(x)\cdot f'(x)dx = \underbrace{\int f(x)\, d[f(x)]}_{\text{табличный интеграл}}$

Пример 2.5 Применяя формулу, $\boxed{}$
найти следующие интегралы:

Решение.

$$\int (x+3)^5 dx = \begin{vmatrix} n=5 \\ dx = d(x+3) \end{vmatrix} = \int (x+3)^5 d(x+3) = \frac{(x+3)^{5+1}}{5+1} + C =$$

$$= \frac{(x+3)^6}{6} + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x-3}} = \int (x-3)^{-1/2} dx = \int (x-3)^{-1/2} d(x-3) = 2\cdot(x-3)^{1/2} + C =$$

$$= 2\cdot\sqrt{x-3} + C$$

$$\int \frac{2x+5}{(x^2+5x+3)^2} dx = \int (\underbrace{x^2+5x+3}_{u})^{-2}\cdot \underbrace{(2x+5)dx}_{du} =$$

$$= \int (\underbrace{x^2+5x+3}_{u})^{-2}\cdot d(\underbrace{x^2+5x+3}_{u}) = \frac{(x^2+5x+3)^{-1}}{-1} = -\frac{1}{x^2+5x+3} + C.$$

$$\int \frac{dx}{(5x-2)^2} = \int (5x-2)^{-2} dx = \frac{1}{5}\cdot\int (5x-2)^{-2} 5dx = \left| dx = \frac{1}{5}\cdot 5dx = \frac{1}{5} d(5x-2) \right| =$$

$$= \frac{1}{5}\cdot\int (\underbrace{5x-2}_{u})^{-2} \underbrace{d(5x-2)}_{du} = \frac{1}{5}\cdot\frac{(5x-2)^{-1}}{-1} + C = -\frac{1}{5\cdot(5x-2)} + C$$

$$\int \sin^2 x \cdot \underbrace{\cos x\, dx}_{d(\sin x)} = \int \underbrace{\sin^2 x}_{u^2} \cdot \underbrace{d(\sin x)}_{du} = \frac{\sin^3 x}{3} + C.$$

Пример 2.6 Применяя формулу,
найти следующие интегралы:

$$\boxed{\int \frac{du}{u} = \int d(\ln u) = \ln|u| + C}$$

Решение.

1). $\displaystyle \int \frac{dx}{x+1} = \int \frac{d\,\overbrace{(x+1)}^{u}}{\underbrace{x+1}_{u}} = \ln|x+1| + C.$

2). $\int \frac{2x\,dx}{x^2+1} = \int \frac{d\,(\overbrace{x^2+1}^{u})}{\underbrace{x^2+1}_{u}} = \ln\,(x^2+1) + C.$

3). $\int \frac{x\,dx}{x^2+1} = \frac{1}{2} \cdot \int \frac{d\,(\overbrace{x^2+1}^{u})}{\underbrace{x^2+1}_{u}} = \frac{1}{2} \cdot \ln\,(x^2+1) + C.$

4). $\int \frac{4x^2}{8x^3+19}dx = \frac{1}{6} \cdot \int \frac{6 \cdot 4x^2}{8x^3+19}dx = \frac{1}{6} \cdot \int \frac{d\,(\overbrace{8x^3+19}^{u})}{\underbrace{8x^3+19}_{u}} = \frac{1}{6} \cdot \ln\left|8x^3+19\right| + C.$

5). $\int \frac{\mathrm{Sin}\,x}{1+\mathrm{Cos}\,x}dx = \int \frac{-d\,(\mathrm{Cos}\,x+1)}{\underbrace{1+\mathrm{Cos}\,x}_{u}} = -\ln\,(1+\mathrm{Cos}\,x) + C.$

6). $\int \frac{e^x dx}{5+e^x} = \int \frac{d\,(e^x+5)}{e^x+5} = \ln\,(e^x+5) + C.$

Пример 2.7 Применяя формулу, найти следующие интегралы:

$$\boxed{\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C}$$

Решение.

1). $\int 3^x dx = \frac{3^x}{\ln 3} + C.$

2). $\int 3^{2x} dx = \left| \begin{array}{l} \text{представим } dx \text{ в виде} \\ dx = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot dx = \frac{1}{2} \cdot d\,(2x) \end{array} \right| = \frac{1}{2} \cdot \int 3^{\overbrace{2x}^{u}} d\,(\underbrace{2x}_{u}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3^{2x}}{\ln 3} + C.$

3). $\int 2^{5x+4} dx = \left| \begin{array}{l} \text{представим } dx \text{ в виде} \\ dx = \frac{1}{5} \cdot 5 \cdot dx = \frac{1}{5} \cdot d\,(5x+4) \end{array} \right| = \frac{1}{5} \cdot \int 2^{\overbrace{5x+4}^{u}} \cdot d\,(\underbrace{5x+4}_{u}) =$

$= \frac{1}{5} \cdot \frac{2^{5x+4}}{\ln 2} + C.$

4). $$\int e^{\operatorname{Sin}x}\cdot\underbrace{\operatorname{Cos}x\,dx}_{d(\operatorname{Sin}x)}=\int e^{\overbrace{\operatorname{Sin}x}^{u}}\cdot d(\underbrace{\operatorname{Sin}x}_{u})=e^{\operatorname{Sin}x}+C.$$

5). $$\int\frac{e^{\operatorname{tg}x}dx}{\operatorname{Cos}^2x}=\left|\frac{dx}{\operatorname{Cos}^2x}=d(\operatorname{tg}x)\right|=\int e^{\operatorname{tg}x}\cdot d(\operatorname{tg}x)=e^{\operatorname{tg}x}+C.$$

Рассмотрим примеры на внесение функции под знак дифференциала с использованием других табличных интегралов.

Пример 2.8 Найти интегралы:

Решение.

1). $$\int\frac{dx}{(1+x^2)\cdot\operatorname{arctg}x}=\left|\frac{dx}{1+x^2}=d(\operatorname{arctg}x)\right|=\int\frac{d(\overbrace{\operatorname{arctg}x}^{u})}{\underbrace{\operatorname{arctg}x}_{u}}=\ln\left|\operatorname{arctg}x\right|+C.$$

2). $$\int\frac{\arcsin^2x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}=\left|\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=d(\arcsin x)\right|=\int(\underbrace{\arcsin x}_{u})^2\cdot d(\underbrace{\arcsin x}_{u})=$$

$$=\frac{\arcsin^3x}{3}+C.$$

3). $$\int\frac{dx}{\operatorname{Sin}x}=\int\frac{dx}{2\cdot\operatorname{Sin}\frac{x}{2}\cdot\operatorname{Cos}\frac{x}{2}}=\int\frac{dx}{\frac{\operatorname{Sin}\frac{x}{2}}{\operatorname{Cos}\frac{x}{2}}\cdot2\cdot\operatorname{Cos}^2\frac{x}{2}}=$$

$$=\left|\begin{array}{l}\text{умножили и разделили знаменатель}\\ \text{на }\operatorname{Cos}\frac{x}{2},\quad \dfrac{dx}{2\cdot\operatorname{Cos}^2\frac{x}{2}}=d(\operatorname{tg}\frac{x}{2})\end{array}\right|=\int\frac{d(\operatorname{tg}\frac{x}{2})}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}=\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+C.$$

4). $$\int\operatorname{Sin}5x\,dx=\left|dx=\frac{1}{5}\cdot5\,dx=\frac{1}{5}d(5x)\right|=\frac{1}{5}\cdot\int\operatorname{Sin}\underbrace{5x}_{u}\,d(\underbrace{5x}_{u})=-\frac{1}{5}\operatorname{Cos}5x+C.$$

5). $$\int\operatorname{Cos}(3x-7)\,dx=\left|dx=\frac{1}{3}\cdot3\,dx=\frac{1}{3}d(3x-7)\right|=$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\int\operatorname{Cos}(\underbrace{3x-7}_{u})\,d(\underbrace{3x-7}_{u})=\frac{1}{3}\cdot\operatorname{Sin}(3x-7)+C.$$

6). $$\int \operatorname{tg} 2x\,dx = \int \frac{\operatorname{Sin} 2x\,dx}{\operatorname{Cos} 2x} = -\frac{1}{2}\cdot\int \frac{d(\operatorname{Cos} 2x)}{\operatorname{Cos} 2x} = -\frac{1}{2}\cdot \ln\left|\operatorname{Cos} 2x\right| + C.$$

7). $$\int \frac{2x\,dx}{9+x^4} = \int \frac{d(\overbrace{x^2}^{u})}{3^2+(\underbrace{x^2}_{u})^2} = \left|\int \frac{du}{a^2+u^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{u}{a} + C\right| = \frac{1}{3}\cdot \operatorname{arctg}\frac{x^2}{3} + C.$$

8). $$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \left|x\,dx = -\frac{1}{2}d(1-x^2)\right| = -\frac{1}{2}\int \frac{d(\overbrace{1-x^2}^{u})}{\underbrace{\sqrt{1-x^2}}_{u}} =$$

$$= -\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\sqrt{1-x^2} + C = -\sqrt{1-x^2} + C.$$

Рассмотренные выше интегралы можно найти методом замены переменной.

2.2.2 Интегрирование методом подстановки

Если интеграл $\int f(x)\,dx$ не может быть найден непосредственно по формулам (1 – 18), то введением новой независимой переменной во многих случаях удается преобразовать подынтегральное выражение так, что интеграл становится табличным. Замена переменной интегрирования и составляют суть метода подстановки.

Замена переменной производится с помощью подстановок двух видов:

1) $x = \varphi(t)$, где t – новая переменная, $\varphi(t)$ - непрерывно дифференцируемая функция. Тогда $\int f(x)\,dx = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,dt$.
Функцию $\varphi(t)$ стараются выбирать таким образом, чтобы правая часть формулы приобрела более удобный для интегрирования вид;

2) $t = \psi(x)$, где t – новая переменная. Тогда $\int f[\psi(x)]\psi'(x)\,dx = \int f(t)\,dt$.

Пример 2.9 Используя подстановку $x = \varphi(t)$ $(dx = \varphi'(t)\,dt)$, найти интегралы.

Решение.

1) $\int \frac{\cos\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}}dx = \left| \begin{array}{l} \text{используем подстановку } x = t^3, \\ \text{тогда} \quad dx = 3\cdot t^2\,dt \end{array} \right| = \int \frac{\cos\sqrt[3]{t^3}}{\sqrt[3]{t^6}}3t^2\,dt =$

$= 3\cdot\int\frac{\cos t}{t^2}t^2\,dt = 3\cdot\int\cos t\,dt = 3\cdot\sin t + C = 3\cdot\sin\sqrt[3]{x} + C.$

Этот пример можно решить, применяя внесение функции под знак дифференциала. Так как $\frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} = 3\cdot d(\sqrt[3]{x})$, то

$$\int \frac{\cos\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}}dx = 3\cdot\int\cos\underbrace{\sqrt[3]{x}}_{u}\cdot d(\underbrace{\sqrt[3]{x}}_{u}) = 3\cdot\sin\sqrt[3]{x} + C.$$

2)

$$\int\frac{dx}{x\cdot\sqrt{1+x^2}} = \left| \begin{array}{l} \text{используем подстановку } x = \frac{1}{t}, \\ \text{тогда} \quad dx = -\frac{dt}{t^2} \end{array} \right| = \int\frac{-\frac{dt}{t^2}}{\frac{1}{t}\cdot\sqrt{1+\frac{1}{t^2}}} =$$

$$= -\int\frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} = -\ln\left|t+\sqrt{1+t^2}\right| + C = -\ln\left|\frac{1}{x}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right| + C =$$

$$= -\ln\left|\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{x}\right| + C = \ln\left|\frac{x}{x+\sqrt{x^2+1}}\right| + C$$

Пример 2.10 Используя подстановку $t = \psi(x)$ найти интегралы:

Решение.

1)

$$\int\frac{x^2}{8+x^3}dx = \left| \begin{array}{l} t = 8+x^3 \\ dt = 3\cdot x^2\,dx \\ \frac{1}{3}dt = x^2dx \end{array} \right| = \frac{1}{3}\cdot\int\frac{dt}{t} = \frac{1}{3}\cdot\ln|t| + C = \frac{1}{3}\cdot\ln\left|8+x^3\right| + C$$

2)

$$\int\frac{e^x dx}{\sqrt{9-e^{2x}}} = \left| \begin{array}{l} t = e^x \\ dt = e^x dx \end{array} \right| = \underbrace{\int\frac{dt}{\sqrt{9-t^2}}}_{\substack{\text{табличный} \\ \text{интеграл 4}}} = \arcsin\frac{t}{3} + C = \arcsin\frac{e^x}{3} + C$$

3)

$$\int\frac{\cos x\,dx}{4+\sin^2 x} = \left| \begin{array}{l} t = \sin x \\ dt = \cos x\cdot dx \end{array} \right| = \underbrace{\int\frac{dt}{4+t^2}}_{\substack{\text{табличный} \\ \text{интеграл 3}}} = \frac{1}{2}\cdot\operatorname{arctg}\frac{t}{2} + C = \frac{1}{2}\cdot\operatorname{arctg}\frac{\sin x}{2} + C$$

4) $$\int (x+3)^5 dx = \left| \begin{matrix} t = x+3 \\ dt = dx \end{matrix} \right| = \int t^5 dt = \frac{t^6}{6} + C = \frac{(x+3)^6}{6} + C$$

5) $$\int \frac{dx}{\sqrt{x-3}} = \left| \begin{matrix} t = x-3 \\ dt = dx \end{matrix} \right| = \int \frac{dt}{\sqrt{t}} = \int t^{-1/2} dt = \frac{t^{1/2}}{1/2} + C = 2 \cdot \sqrt{t} + C = 2 \cdot \sqrt{x-3} + C.$$

6) $$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^3+1}} = \left| \begin{matrix} t^2 = x^3 + 1 \\ 2t\,dt = 3x^2 dx \\ \frac{2t}{3} dt = x^2 dx \end{matrix} \right| = \frac{2}{3} \cdot \int \frac{t\,dt}{t} = \frac{2}{3} \cdot t + C = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{x^3+1} + C$$

7) $$\int e^{\operatorname{Sin} x} \operatorname{Cos} x\, dx = \left| \begin{matrix} t = \operatorname{Sin} x \\ dt = \operatorname{Cos} x\, dx \end{matrix} \right| = \int e^t dt = e^t + C = e^{\operatorname{Sin} x} + C$$

Выбор удачной подстановки имеет большое значение и достигается практикой интегрирования. В дальнейших параграфах будут даны рекомендации для замены переменных в зависимости от типа подынтегральной функции.

2.3 ИНТЕГРИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ, СОДЕРЖАЩИХ КВАДРАТНЫЙ ТРЕХЧЛЕН

$(x \pm a)^2 = x^2 \pm 2xa + a^2$ - полный квадрат суммы (разности)

Пример 2.11 Выделить полные квадраты в следующих квадратных трехчленах:

Решение.

1) $x^2 + 6x + 5 = \underbrace{x^2 + 2 \cdot 3x + 9} - 9 + 5 = (x+3)^2 - 4$

2) $2x^2 - 3x + 1 = 2\left[x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{2} \right] = 2\left[\underbrace{x^2 - 2 \cdot \frac{3}{4}x + \frac{9}{16}} - \frac{9}{16} + \frac{1}{2} \right] =$

$= 2\left[\left(x - \frac{3}{4} \right)^2 - \frac{1}{16} \right]$

3) $9 + 6x - 3x^2 = -3\left[x^2 - 2x - 3\right] = -3\left[(x-1)^2 - 4\right] = 3\left[4 - (x-1)^2\right]$

1 Интеграл $\int \frac{\mathbf{dx}}{\mathbf{ax^2+bx+c}}$ находится путем выделения полного квадрата из квадратного трехчлена, стоящего в знаменателе. В результате получается один из двух табличных интегралов:

$$\int \frac{dt}{t^2+k^2}=\frac{1}{k}\operatorname{arctg}\frac{t}{k}+C,\ \int \frac{dt}{t^2-k^2}=\frac{1}{2k}\ln\left|\frac{k-t}{k+t}\right|+C.$$

Пример 2.12 Найти интеграл $\int \frac{dx}{x^2+4x+8}$.

Решение.

$$\int \frac{dx}{x^2+4x+8}=\left|x^2+4x+8=(x+2)^2+4\right|=\int \frac{dx}{(x+2)^2+4}=$$

$$=\int \frac{d(x+2)}{(x+2)^2+4}=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+2}{2}+C$$

При нахождении интеграла вместо внесения функции под знак дифференциала $dx=d(x+2)$ можно применить метод замены переменной:

$$\int \frac{dx}{x^2+4x+8}=\left|\begin{matrix}x^2+4x+8=(x+2)^2+4\\ x+2=t,\ dx=dt\end{matrix}\right|=\int \frac{dt}{t^2+2^2}=$$

$$=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{t}{2}+C=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+2}{2}+C$$

2 Для нахождения интеграла $\int \frac{\mathbf{Ax+B}}{\mathbf{ax^2+bx+c}}\mathbf{dx}$ следует выделить в числителе дроби производную знаменателя и разложить полученный интеграл на сумму двух интегралов: первый из них $\int \frac{d(ax^2+bx+c)}{ax^2+bx+c}$ подстановкой $ax^2+bx+c=t$ сводится к табличному интегралу $\int \frac{dt}{t}=\ln|t|$, а второй интеграл – это интеграл, рассмотренный в пункте 1 этого же параграфа.

Пример 2.13 Найти интеграл $\int \frac{x-2}{2x^2+5x+6}dx$

Решение.

Вычислим производную $\left(2x^2+5x+6\right)'=4x+5$. Выделяя в числителе производную квадратного трехчлена, получим $x-2=\frac{1}{4}(4x+5)-\frac{5}{4}-2=\frac{1}{4}(4x+5)-\frac{13}{4}$

Следовательно $\int\frac{x-2}{2x^2+5x+6}dx=\int\frac{\frac{1}{4}(4x+5)-\frac{13}{4}}{2x^2+5x+6}dx=\frac{1}{4}\int\frac{\overbrace{(4x+5dx}^{d(2x^2+5x+6)}}{2x^2+5x+6}-$

$$-\frac{13}{4}\int\frac{dx}{2x^2+5x+6}=\frac{1}{4}\ln\left(2x^2+5x+6\right)-\frac{13}{8}\int\frac{dx}{x^2+\frac{5}{2}x+3}=$$

$$\left|\begin{array}{l}\text{выделим полный квадрат в знаменателе}\\ x^2+\frac{5}{2}+3=\underbrace{x^2+2\cdot x\cdot\frac{5}{4}+\frac{25}{16}}-\frac{25}{16}+3=\left(x+\frac{5}{4}\right)^2+\frac{23}{16}=\left(x+\frac{5}{4}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{23}}{4}\right)^2\end{array}\right|$$

$$=\frac{1}{4}\ln\left(2x^2+5x+6\right)-\frac{13}{8}\int\frac{d\left(x+\frac{5}{4}\right)}{\underbrace{\left(x+\frac{5}{4}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{23}}{4}\right)^2}_{\text{табличный интеграл}}}=$$

$$=\frac{1}{4}\ln\left(2x^2+5x+6\right)-\frac{13}{8}\cdot\frac{4}{\sqrt{23}}\operatorname{arctg}\frac{x+\frac{5}{4}}{\frac{\sqrt{23}}{4}}+C=$$

$$=\frac{1}{4}\ln\left(2x^2+5x+6\right)-\frac{13}{2\sqrt{23}}\operatorname{arctg}\frac{4x+5}{\sqrt{23}}+C$$

3 Интеграл $\int\frac{\mathbf{dx}}{\sqrt{\mathbf{ax^2+bx+c}}}$ находится с помощью выделения

полного квадрата из подкоренного выражения и сводится к табличным интегралам вида $\int\frac{dt}{\sqrt{t^2\pm k^2}}=\ln\left|t+\sqrt{t^2\pm k^2}\right|+C$,

$$\int\frac{dt}{\sqrt{k^2-t^2}}=\arcsin\frac{t}{k}+C.$$

Пример 2.14 Найти интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{3-x-2x^2}}$

Решение.

Выделяя из квадратного трехчлена полный квадрат, имеем

$$3-x-2x^2=-2\left(x^2+\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}\right)=-2\left(\underbrace{x^2+2\cdot\frac{1}{4}x+\frac{1}{16}}-\frac{1}{16}-\frac{3}{2}\right)=$$

$$=-2\left[\left(x+\frac{1}{4}\right)^2-\frac{25}{16}\right]=2\left[\frac{25}{16}-\left(x+\frac{1}{4}\right)^2\right]$$

Вычисляем интеграл

$$\int\frac{dx}{\sqrt{3-x-2x^2}}=\int\frac{dx}{\sqrt{2\left[\frac{25}{16}-\left(x+\frac{1}{4}\right)^2\right]}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\underbrace{\int\frac{d\left(x+\frac{1}{4}\right)}{\sqrt{\left(\frac{5}{4}\right)^2-\left(x+\frac{1}{4}\right)^2}}}_{\text{табличный интеграл}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\frac{x+\frac{1}{4}}{\frac{5}{4}}+C=\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\frac{4x+1}{5}+C$$

4 Для нахождения интеграла $\int\frac{\mathbf{Ax+B}}{\sqrt{\mathbf{ax^2+bx+c}}}\mathbf{dx}$ следует выделить в числителе производную подкоренного выражения и разложить полученный интеграл на сумму двух интегралов: первый из них $\int\frac{d\left(ax^2+bx+c\right)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ сводится к табличному $\int\frac{dt}{\sqrt{t}}=2\sqrt{t}$, а второй – это интеграл, рассмотренный в пункте 3 этого же параграфа.

Пример 2.15 Найти интеграл $\int\frac{-4x+3}{\sqrt{4x^2+8x+9}}dx$

Решение.

Выделим в числителе производную квадратного трехчлена, стоящего в знаменателе под знаком корня:

$$\left(4x^2+8x+9\right)'=8x+8;\ -4x+3=-\frac{1}{2}(8x+8)+4+3=-\frac{1}{2}(8x+8)+7$$

Тогда

$$\int\frac{-4x+3}{\sqrt{4x^2+8x+9}}dx=\int\frac{-\frac{1}{2}(8x+8)+7}{\sqrt{4x^2+8x+9}}dx=-\frac{1}{2}\int\frac{\overbrace{(8x+8)dx}^{d\left(4x^2+8x+9\right)}}{\sqrt{4x^2+8x+9}}+$$

$$+7\int\frac{dx}{\sqrt{4x^2+8x+9}}=-\frac{1}{2}2\sqrt{4x^2+8x+9}+\frac{7}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+\frac{9}{4}}}=$$

$$\left|\begin{array}{l}\text{выделим полный квадрат в знаменателе под знаком корня}\\ x^2+2x+\frac{9}{4}=\underbrace{x^2+2x+1}-1+\frac{9}{4}=(x+1)^2+\frac{5}{4}=(x+1)^2+\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2\end{array}\right|$$

$$=-\sqrt{4x^2+8x+9}+\frac{7}{2}\underbrace{\int\frac{d(x+1)}{\sqrt{(x+1)^2+\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2}}}_{\text{табличный интеграл}}=$$

$$=-\sqrt{4x^2+8x+9}+\frac{7}{2}\ln\left|x+1+\sqrt{(x+1)^2+\frac{5}{4}}\right|+C$$

2.4 ИНТЕГРИРОВАНИЕ ПО ЧАСТЯМ

Формула интегрирования по частям имеет вид

$$\boxed{\int u\,dv=uv-\int v\,du}$$

Применение этой формулы предполагает, что в правой части интеграл $\int v\,du$ может быть найден легче, чем исходный интеграл. Прежде всего надо установить какая функция принимается равной u и что относится к dv.

1 При нахождении интегралов вида

$$\boxed{\int P_n(x)e^{ax}\,dx,\ \int P_n(x)\sin ax\,dx,\ \int P_n(x)\cos ax\,dx}$$

принимаем $u=P_n(x)-$ многочлен степени n,

$$dv=\begin{cases} e^{ax}\,dx \\ \sin ax\,dx \\ \cos ax\,dx \end{cases}$$

Пример 2.16 Найти интеграл $\int x^2\cdot\sin x\,dx$

Решение.

Так как $P_2(x)=x^2$ – многочлен второй степени, формулу интегрирования по частям надо применить последовательно два раза.

$$\int \underbrace{x^2}_{u}\underbrace{\sin x\,dx}_{dv}=\left|\begin{matrix} x^2=u, \quad 2xdx=du \\ \sin xdx=dv,\ v=\int\sin xdx=-\cos x\end{matrix}\right|=$$

$$=-x^2\cos x+2\int\underbrace{x}_{u}\underbrace{\cos xdx}_{dv}=\left|\begin{matrix} x=u,\ dx=du \\ \cos xdx=dv,\ \ v=\int\cos xdx=\sin x\end{matrix}\right|=$$

$$=-x^2\cos^2 x+2\left[x\sin x-\int\sin x\,dx\right]=-x^2\cos x+2x\sin x+2\cos x+C.$$

2 При нахождении интегралов вида

$$\boxed{\begin{matrix}\int P_n(x)\ln ax\,dx,\ \int P_n(x)\arcsin ax\,dx,\ \int P_n(x)\arccos ax\,dx, \\ \int P_n(x)\mathrm{arctg}\,ax\,dx,\ \int P_n(x)\mathrm{arcctg}\,ax\,dx.\end{matrix}}$$

принимаем $dv=P_n(x)dx$,

$$u=\begin{cases}\ln ax \\ \arcsin ax \\ \arccos ax \\ \mathrm{arctg}ax \\ \mathrm{arcctg}\,ax\end{cases}$$

Пример 2.17 Найти интегралы

Решение.

$$1)\ \int x\underbrace{\mathrm{arctg}x}_{u}dx=\left|\begin{matrix} u=\mathrm{arctg}x,\ \ du=\dfrac{dx}{1+x^2} \\ dv=xdx,\quad v=\int xdx=\dfrac{x^2}{2}\end{matrix}\right|=$$

$$=\frac{x^2}{2}\mathrm{arctg}x-\frac{1}{2}\int\frac{x^2}{x^2+1}dx=\frac{x^2}{2}\mathrm{arctg}x-\frac{1}{2}\int\left(1-\frac{1}{x^2+1}\right)dx=$$

$$=\frac{x^2}{2}\mathrm{arctg}x-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+1}=\frac{x^2}{2}\mathrm{arctg}x-\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{arctg}x+C$$

$$2)\ \int\frac{\overbrace{\ln x}^{u}}{x^3}dx=\left|\begin{array}{l}\ln x=u,\quad \dfrac{dx}{x}=du\\ dv=\dfrac{dx}{x^3},\quad v=\int x^{-3}dx=-\dfrac{1}{2x^2}\end{array}\right|=$$

$$=-\frac{\ln x}{2x^2}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x\cdot x^2}=-\frac{\ln x}{2x^2}-\frac{1}{4x^2}+C$$

3 Интегралы, в которых двукратное применение формулы интегрирования по частям приводит к исходному интегралу

$$\boxed{\int e^{ax}\sin bx\,dx,\quad \int e^{ax}\cos bx\,dx}$$

Выбор u и dv в таких интегралах произволен.

Пример 2.18 Найти интеграл $\int e^x\sin x\,dx$

Решение.

$$J_1=\int\underbrace{e^x}_{u}\underbrace{\sin xdx}_{dv}=\left|\begin{array}{l}e^x=u,\quad e^xdx=du\\ \sin xdx=dv,\quad v=\int\sin xdx=-\cos x\end{array}\right|=$$

$$=-e^x\cos x+\int\underbrace{e^x}_{x}\underbrace{\cos xdx}_{dv}=\left|\begin{array}{l}e^x=u,\quad e^xdx=du\\ dv=\cos xdx,\quad v=\int\cos xdx=\sin x\end{array}\right|=$$

$$=-e^x\cos x+\left[e^x\sin x-\int e^x\sin x\,dx\right]=$$

$$=-e^x\cos x+e^x\sin x-\int\underbrace{e^x\sin xdx}_{J_1}$$

Получили равенство $J_1=e^x(\sin x-\cos x)-J_1$. Перенесем последнее слагаемое $-J_1$ из правой части в левую, $2J_1=e^x(\sin x-\cos x)$,

$$J_1=\int e^x\sin x\,dx=\frac{1}{2}e^x(\sin x-\cos x)+C$$

4 Интегралы от дробно-рациональных функций

Рассмотрим нетрадиционное применение формулы интегрирования по частям на примере.

Пример 2.19 Найти интеграл $\int\frac{x^2\,dx}{(1+x^2)^2}$