МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Харківський національний автомобільно-дорожній університет

До друку дозволяю
Заступник ректора
__________ І.П. Гладкий

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

з дисципліни **«Вища математика»**
для студентів денної форми навчання освітньо-кваліфікаційного рівня бакалавр зі спеціальності
015.13 «Професійна освіта (метрологія, стандартизація та сертифікація)»
015.20 «Професійна освіта (транспорт)»

Затверджено Радою
Факультету
Компьютерных
технологий та
мехатроніки протокол
№ ___ від

Укладач: ст. викладач каф. Інформатики
та прикладної математики Козачок Л.М.

Харків
2016

1.1. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

Понятие множества является одним из основных неопределяемых понятий математики. Под ***множеством*** понимают совокупность некоторых объектов, объединенных в одно целое по какому-либо признаку. Так, можно говорить о множестве студентов университета, о множестве корней уравнения $x^2 - 5x + 6 = 0$, о множестве целых чисел и т.д.

Объекты, из которых состоит множество, называют его ***элементами.*** Множество принято обозначать заглавными буквами латинского алфавита $A, B, \ldots, X, Y, \ldots, \ldots$, а их элементы – малыми буквами $a, b, \ldots, x, y, \ldots$

Если элемент x принадлежит множеству X, то записывают $x \in X$; запись $x \overline{\in} X$ или $x \notin X$ означает, что элемент x не принадлежит множеству X.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Множество, не содержащее ни одного элемента, называется пустым и обозначается символом $\varnothing$.

Множество задается двумя способами: перечислением и описанием. Например, запись $A = \{2,4,10\}$ означает, что множество A состоит из трех чисел 2,4 и 10; запись $X = \{x: \ 0 \le x \le 3\}$ означает, что множество X состоит из всех действительных чисел, удовлетворяющих неравенству $0 \le x \le 3$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2. Множество A называется подмножеством множества B, если каждый элемент множества A является элементом множества B. Символически это обозначают так: $A \subset B$. $(A$ содержится в $B)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.3. Два множества A и B называются равными, если они состоят из одних и тех же элементов, и пишут $A = B$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.4. Объединением или суммой множеств A и B называется множество, состоящее из элементов, каждый из которых принадлежит хотя бы одному их этих множеств. Объединение множеств обозначают $A \bigcup B$ (или $A + B$). Кратко можно записать $A \bigcup B = \{x : x \in A$ или $x \in B\}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.5. Пересечением или произведением множеств A и B называется множество, состоящее из элементов, каждый из которых принадлежит множеству A и множеству B. Пересечение множеств обозначают $A \bigcap B$ (или $A \cdot B$). Кратко можно записать $A \bigcap B = \{x : x \in A$ и $x \in B\}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.6. Разностью множеств A и B называется множество, каждый элемент которого является элементом множества A и не является элементом множества B. Разность множеств обозначают A / B. По определению $A / B = \{x : x \in A$ и $x \notin B\}$.

Множества, элементами которых являются числа, называются числовыми. Примерами числовых множеств являются:

$N = \{1,2,3,\ldots,n,\ldots\}$ – множество натуральных чисел;

$Z = \{0,\pm1,\pm2,\ldots,\pm n,\ldots\}$ – множество целых чисел;

$Q = \left\{\dfrac{m}{n}, m \in Z, n \in N\right\}$ – множество рациональных чисел;

$R-$ множество действительных чисел. Множество R содержит рациональные и иррациональные числа. Всякое рациональное число выражается или конечной десятичной дробью, или бесконечной периодической дробью. Так, $\frac{1}{2}=0{,}5;\ \frac{1}{3}=0{,}333\ldots -$ рациональные числа.

Иррациональное число выражается бесконечной непериодической десятичной дробью. Так, $\sqrt{2}=1{,}4142356\ldots,\ \pi=3{,}1415926\ldots -$ иррациональные числа.

Введем некоторые наиболее часто встречающиеся подмножества множества действительных чисел R. Пусть a и $b-$ действительные числа, причем $a<b$. Тогда

$[a;b]=\{x: a\le x\le b\}-$ отрезок (сегмент, замкнутый промежуток);

$(a;b)=\{x: a<x<b\}-$ интервал (открытый промежуток);

$[a;b)=\{x: a\le x<b\}$,

$(a;b]=\{x: a<x\le b\}$ - полуоткрытые интервалы;

$(-\infty;b]=\{x: x\le b\}, [a;+\infty)=\{x: x\ge a\}$,

$(-\infty;\infty)=\{x: -\infty<x<+\infty\}=R$ - бесконечные интервалы.

Пусть x_0- любое действительное число.

<u>ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.7.</u> Окрестностью точки x_0 называется любой интервал $(a;b)$, содержащий точку x_0. В частности, интервал $(x_0-\varepsilon;\ x_0+\varepsilon)$, где $\varepsilon>0$, называется $\varepsilon-$ окрестностью точки x_0. Число x_0 называется центром, а число $\varepsilon-$ радиусом.

Если $x\in(x_0-\varepsilon; x_0+\varepsilon)$, то выполняется неравенство $x_0-\varepsilon<x<x_0+\varepsilon$, или, что то же, $|x-x_0|<\varepsilon$. Выполнение последнего означает попадание точки x в $\varepsilon-$ окрестность точки x_0.

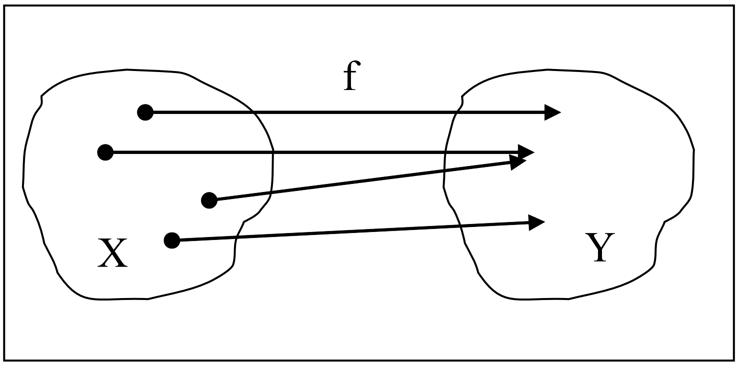
1.2. ФУНКЦИЯ

1.2.1. Понятие функции

Понятие функции является одним из основных понятий математики. С помощью этого понятия выявляются зависимости (связи) между элементами двух множеств.

<u>ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.8.</u> Пусть даны два непустых множества X и Y. Соответствие f, которое каждому элементу $x\in X$ сопоставляет один единственный элемент $y\in Y$, называется функцией и записывается $y=f(x),\ x\in X$ или $f: X\to Y$.

Говорят еще, что функция f отображает множество X на множество Y.



Множество X называется областью определения функции f и обозначается $D(f)$. Множество всех $y \in Y$ называется множеством значений функции f и обозначается $E(f)$.

1.2.2. Числовые функции. Способы задания функций

Пусть задана функция $f : X \to Y$. Если элементами множеств X и Y являются действительные числа, то функцию f называют ***числовой функцией.*** В дальнейшем мы будем изучать только числовые функции и их записывать: $y = f(x)$.

Переменная x называется аргументом или независимой переменной, а $y -$ функцией или зависимой переменной.

Пусть каждой паре чисел x и y, где $y = f(x)$, поставлена в соответствие точка (x, y) координатной плоскости. Множество всех точек (x, y) плоскости таких, что $x \in D(f)$ и $y \in E(f)$, называется ***графиком функции.***

В зависимости от характера соответствия f различают функции, заданные таблично, графически и аналитически.

Табличный способ задания функции заключается в перечислении значений аргумента и соответствующих значений функции. Такой способ задания функции особенно часто встречается в различных справочниках. Например, таблицы значений тригонометрических функций, логарифмические таблицы и т.д.

На практике часто приходится пользоваться таблицами значений функций, полученных опытным путем или в результате наблюдений.

При графическом способе задается график функции (рис 1.1). Преимуществом графического задания является его наглядность, недостатком – его неточность. Следует заметить, что далеко не всякая линия является графиком функции (рис. 1.2).

При аналитическом способе функция задается в виде одной или нескольких формул или уравнений.

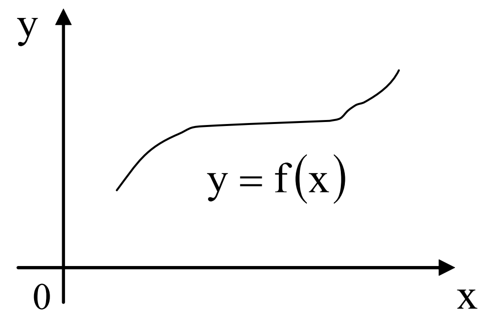


Рис. 1.1

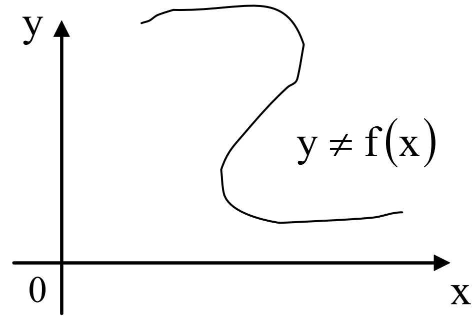


Рис. 1.2

Например, $y = x^3$; $y = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{при } x < 0; \\ x - 1 & \text{при } x \geq 0; \end{cases}$ $\quad y^2 - 4x + 5 = 0$.

Рассмотрим простейшие свойства функций.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.9. Функция $y = f(x)$ называется ***периодической***, если существует такое число $T > 0$, что для всех x из области определения, числа $x \pm T$ также принадлежат области определения, справедливо равенство $f(x \pm T) = f(x)$.

При этом наименьшее из чисел T называют ***периодом*** функции. Если $T -$ период функции, то всякое число nT, где $n = \pm 1; \pm 2, \ldots$ также является периодом.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.10. Функция $y = f(x)$, область определения которой симметрична относительно нуля и для каждого x из области определения $f(-x) = f(x)$, называется ***четной***; ***нечетной*** – если $\forall x \in D(f)$ выполняется равенство $f(-x) = -f(x)$.

График четной функции симметричен относительно оси ординат, а нечетной – симметричен относительно начала координат.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.11. Пусть функция $y = f(x)$ определена в области D. Если для любых $x_1, x_2 \in X \subset D(f)$, удовлетворяющих неравенству $x_1 < x_2$, выполняется неравенство $f(x_1) < f(x_2)$, то функция называется ***возрастающей*** на множестве X; если же $f(x_1) \leq f(x_2)$, то функция называется ***неубывающей*** на множестве X; если $f(x_1) > f(x_2)$, то функция называется ***убывающей*** на множестве X; если же $f(x_1) \geq f(x_2)$, то функция называется ***невозрастающей*** на множестве X.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.12. Функции только возрастающие (неубывающие) или только убывающие (невозрастающие) на множестве X называются ***монотонными*** на этом множестве.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.13. Функция $y = f(x)$ называется ***ограниченной*** на множестве X, если существует такое число $M > 0$, что для всех $x \in X$ выполняется неравенство $|f(x)| \le M$.

Например, функция $y = \sin x$ является ограниченной на всей числовой прямой $(|\sin x| \le 1)$, а функция $y = 2x + 5$ не ограничена на R.

1.2.3. Основные элементарные функции и их графики

1. Степенная функция $y = x^{\alpha}$, $\alpha \in R$.

Графики степенных функций, соответствующих различным показателям степени, представлены на рис. 1.3.

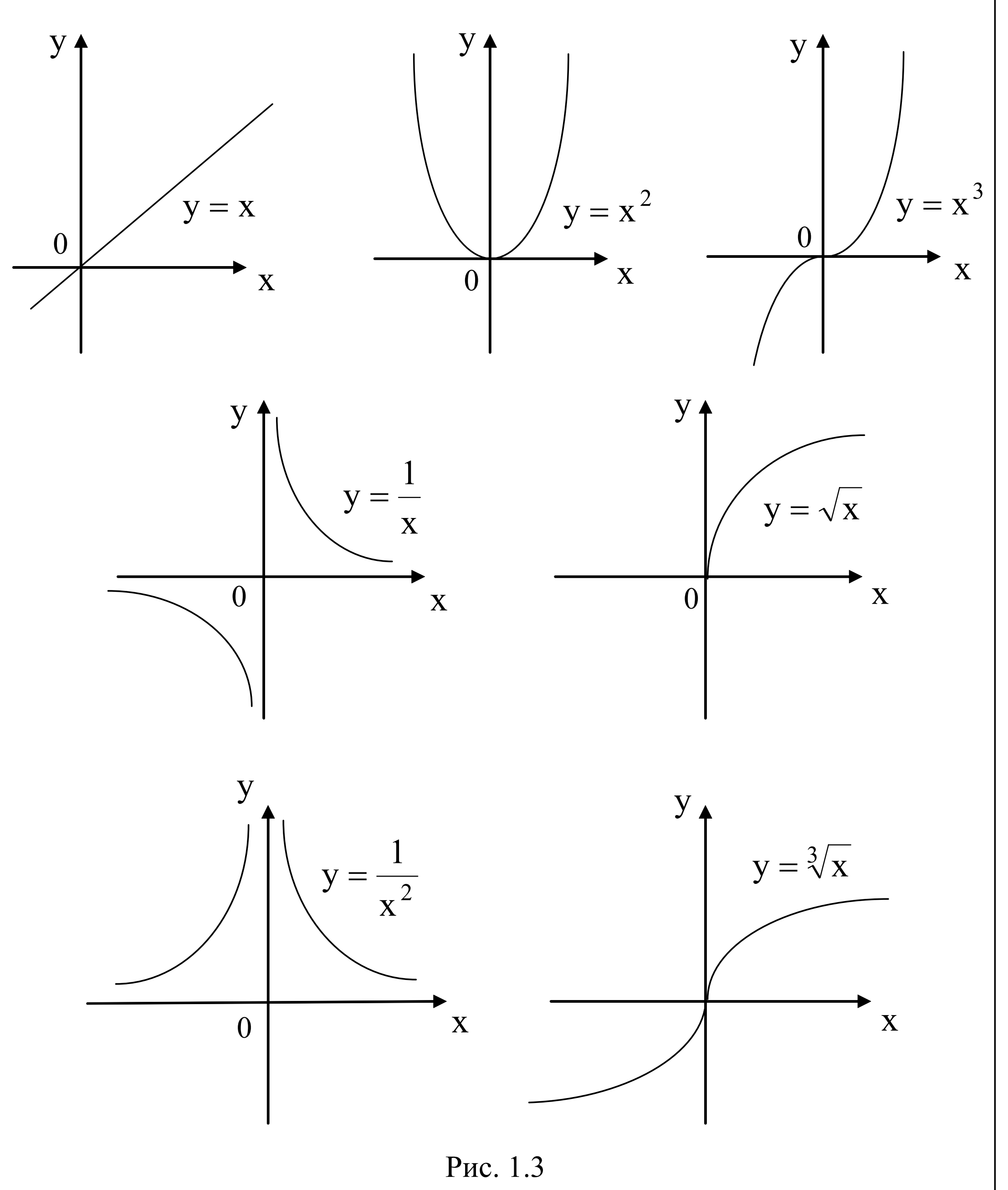


Рис. 1.3

2. Показательная функция $y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$;

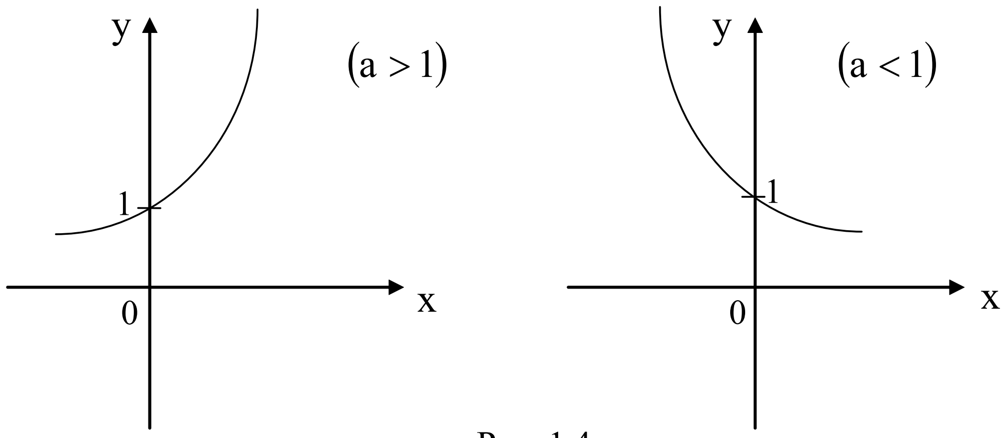


Рис. 1.4

3. Логарифмическая функция $y = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$;

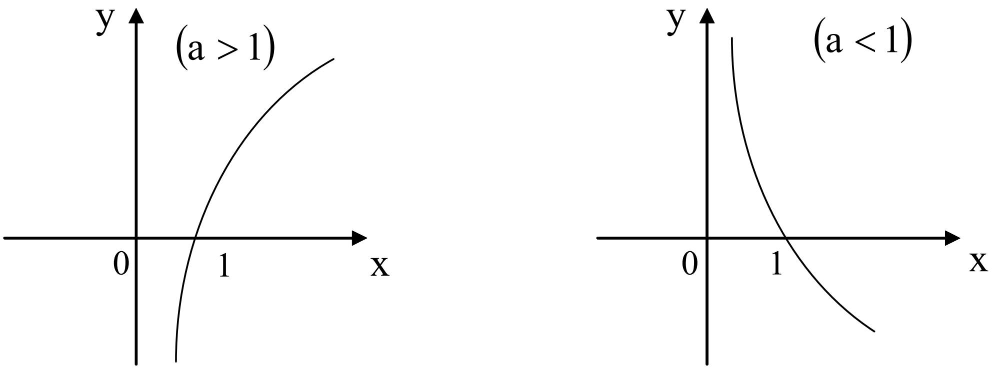


Рис. 1.5

4. Тригонометрические функции $y = \sin x$, $y = \cos x$,

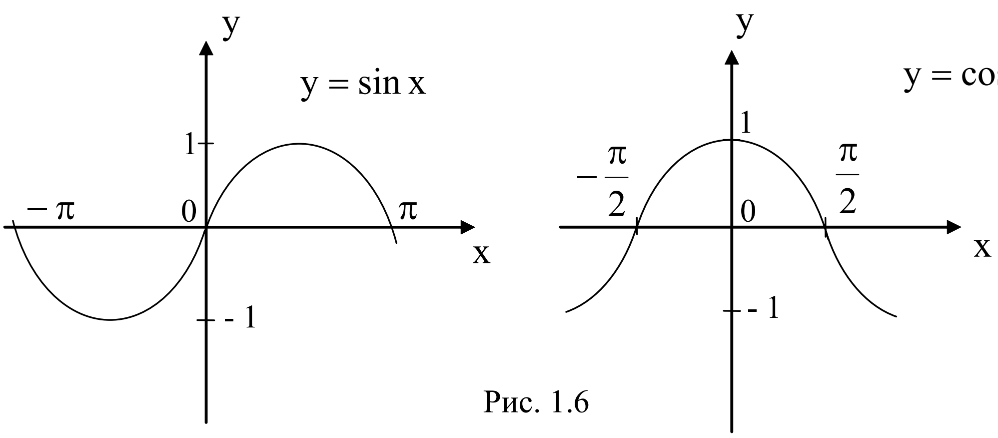


Рис. 1.6

$y = \operatorname{tg} x,\ y = \operatorname{ctg} x$

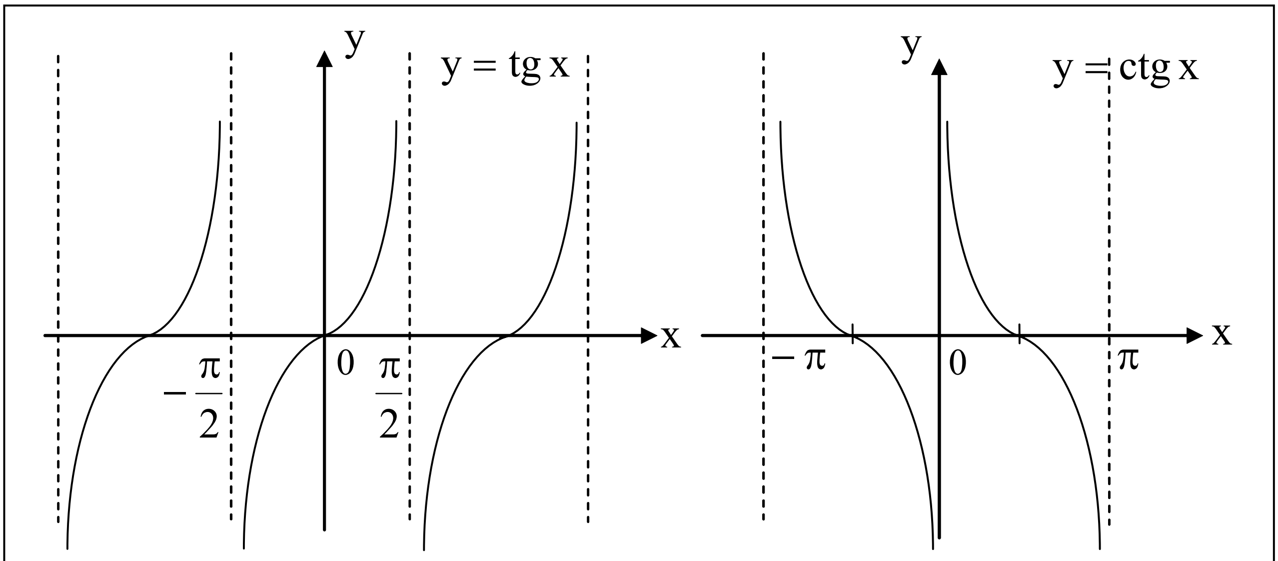


Рис. 1.7

5. Обратные тригнометрические функции

$$y = \arcsin x, \quad D(f) = [-1;1], \quad E(f) = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right];$$

$$y = \arccos x, \quad D(f) = [-1;1], \quad E(f) = [0;\pi];$$

$$y = \operatorname{arctg} x, \quad D(f) = R, \quad E(f) = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right);$$

$$y = \operatorname{arcctg} x, \quad D(f) = R, \quad E(f) = (0;\pi).$$

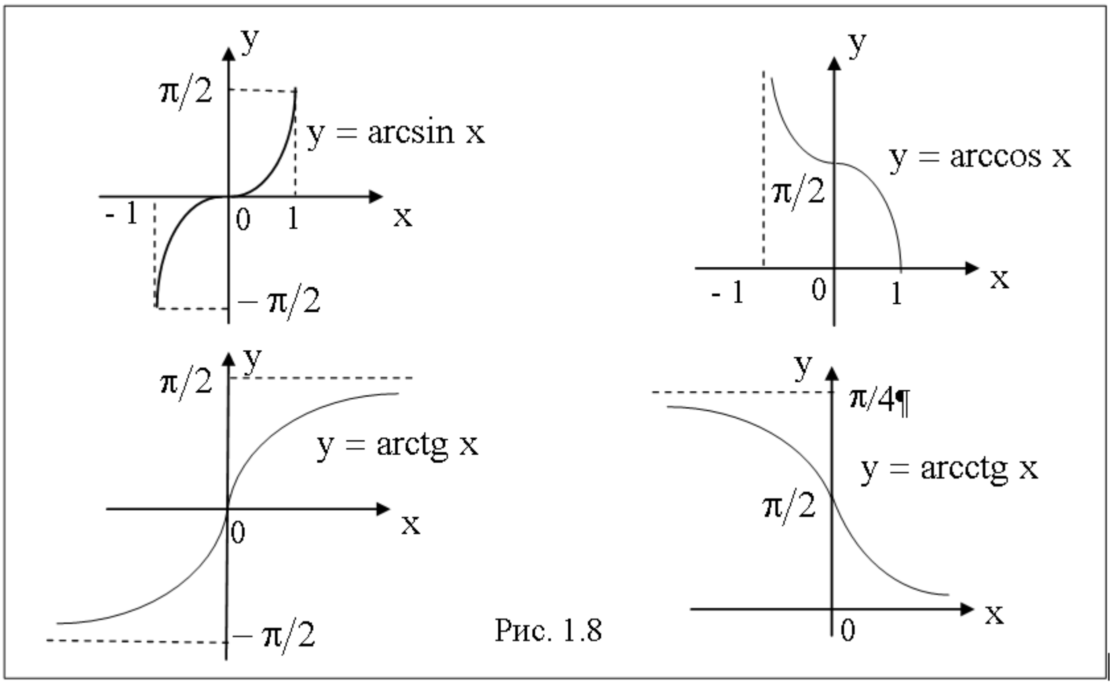


Рис. 1.8

Функция, задаваемая одной формулой, составленной из основных элементарных функций и постоянных величин с помощью конечного числа арифметических операций сложения, вычитания, умножения, деления и операций взятия функции от функции, называется ***элементарной функцией***.

Примерами элементарных функций являются:

$y = ax + b$ - линейная функция $a, b \in R$;

$y = ax^2 + bx + c$ - квадратичная функция $a, b, c \in R$;

$y = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$ - целая рациональная функция или многочлен степени n $a_0, \ldots, a_n \in R,\ n \in N$;

$$y = \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \ldots + b_m},\ a_0, a_n, b_0, \ldots, b_m \in R, \qquad n, m \in N -$$

дробно-рациональная функция; частным случаем дробно-рациональной функции является дробно-линейная функция $y = \frac{ax + b}{cx + d}$, $a, b, c, d \in R$.

Примерами неэлементарных функций могут служить

$$y = \operatorname{sign} x = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}, \qquad y = |x| = \begin{cases} x, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

1.2.4. Обратная функция

Пусть задана функция $y = f(x)$ с областью определения D и множеством значений E. Тогда каждому значению $x \in D$ соответствует единственное значение $y \in E$. Пусть, в свою очередь, каждому значению $y \in E$ соответствует единственное значение $x \in D$, тогда мы получаем новую функцию $x = \varphi(y)$ с областью определения E и множеством значений D (рис. 1.9).

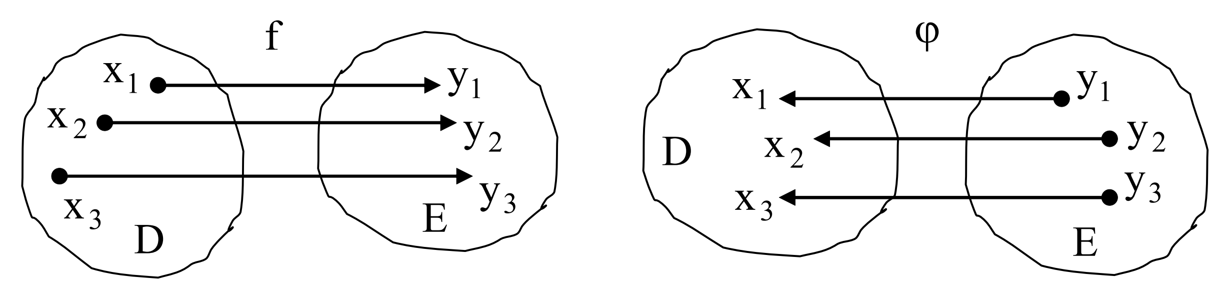


Рис. 1.9

Такая функция $\varphi(y)$ называется обратной к функции $f(x)$.

Из определения вытекает, что для функции $y = f(x)$ существует обратная функция тогда и только тогда, когда соответствие f между множествами D и E является взаимно однозначным. Отсюда следует, что любая строго монотонная функция имеет обратную.

Чтобы найти функцию $x = \varphi(y)$, обратную к функции $y = f(x)$, достаточно решить уравнение $f(x) = y$ относительно x (если это возможно).

ПРИМЕР 1.1. Для функции $y = 3x + 5$ обратной функцией является $x = \frac{1}{3}y - \frac{5}{3}$.

ПРИМЕР 1.2. Для функции $y = x^2$, $x \in [0;+\infty)$ обратной функцией является $x = \sqrt{y}$, $y \in [0;+\infty)$; заметим, что для функции $y = x^2$, заданной в промежутке $(-\infty;\infty)$, обратной не существует, так как одному значению y соответствуют два значения x.

Графики взаимно обратных функций $y = f(x)$ и $x = \varphi(y)$ симметричны относительно прямой $y = x$.

1.3. ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0, кроме, быть может, самой точки x_0.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.14. Число A называется ***пределом функции*** $y = f(x)$ в точке x_0 (или при $x \to x_0$), если для любого сколь угодно малого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\delta > 0$, что для всех $x \neq x_0$, удовлетворяющих неравенству $|x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Это определение предела дано на «языке $\varepsilon - \delta$», его коротко можно записать так:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0, \ \forall x : |x - x_0| < \delta, \ x \neq x_0 \ \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Предел функции записывают $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$.

Геометрический смысл предела функции заключается в следующем: число $A = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, если для любой $\varepsilon -$ окрестности точки A найдется такая $\delta -$ окрестность точки x_0, что для всех $x \neq x_0$ из этой $\delta -$ окрестности соответствующие значения функции $f(x)$ лежат в $\varepsilon -$ окрестности точки A (рис. 1.10)

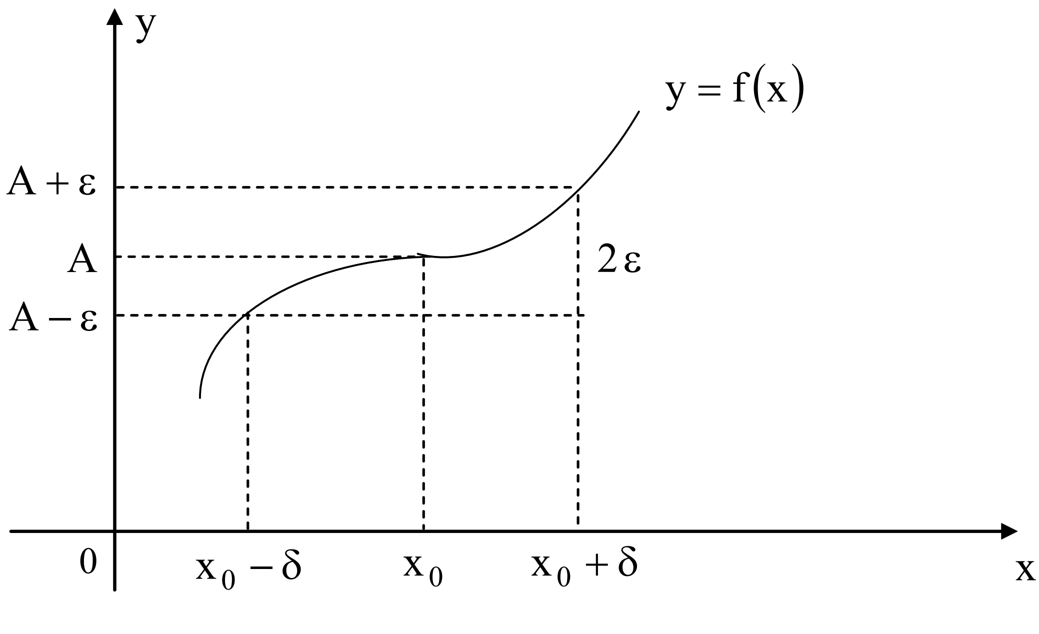


Рис. 1.10

ПРИМЕР 1.3. Доказать, что $\lim\limits_{x\to 2}(3x+5)=11$.

Решение. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$ и найдем $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для всех x, удовлетворяющих неравенству $|x-2| < \delta$, выполняется неравенство $|(3x+5)-11| < \varepsilon$, то есть $|x-2| < \dfrac{\varepsilon}{3}$. Взяв $\delta = \dfrac{\varepsilon}{3}$, видим, что для всех x, удовлетворяющих неравенству $|x-2| < \delta$ $\left(\delta = \dfrac{\varepsilon}{3}\right)$,

выполняется неравенство $|(3x+5)-11| < \varepsilon$, следовательно, $\lim\limits_{x\to 2}(3x+5)=11$.

В определении предела функции $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ считается, что x стремится к x_0 любым способом: оставаясь меньшим, чем x_0 (слева от x_0) или большим, чем x_0 (справа от x_0). Однако встречаются случаи, когда способ приближения аргумента x к x_0 существенно влияет на значение предела функции. Поэтому вводят понятие односторонних пределов.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.15. Число A_1 называется пределом функции $y = f(x)$ слева в точке x_0, если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется число $\delta > 0$ такое, что для всех $x \in (x_0-\delta; x_0)$ выполняется неравенство $|f(x)-A_1| < \varepsilon$. Предел слева записывают так: $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = A_1$ или коротко $f(x_0-0) = A_1$.

Аналогично определяется предел функции в точке x_0 справа. Число A_2 называется пределом функции $y = f(x)$ справа в точке x_0, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что для всех $x \in (x_0; x_0 + \delta)$ выполняется неравенство $|f(x) - A_2| < \varepsilon$. В этом случае пишут $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = A_2$ или коротко $f(x_0 + 0) = A_2$.

Пределы функции в точке x_0 слева и справа называют ***односторонними пределами***.

Очевидно, что если существует $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, то существуют и оба односторонних предела, причем $A_1 = A_2 = A$.

Справедливо и обратное утверждение: если существуют оба предела $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = A_1$, $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = A_2$ и они равны, то существует предел $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A = A_1 = A_2$.

Если же $A_1 \neq A_2$, то предел $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ не существует.

Рассмотрим теперь поведение функции $y = f(x)$ при неограниченном по абсолютной величине увеличении аргумента x, то есть при $x \to -\infty$, $x \to +\infty$, $x \to \infty$.

<u>ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.16.</u> Пусть функция $y = f(x)$ определена в промежутке $(-\infty; \infty)$. Число A называется пределом функции $f(x)$ при $x \to \infty$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое число $M = M(\varepsilon) > 0$, что для всех значений x, удовлетворяющих неравенству $|x| > M$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$. В этом случае пишут $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = A$. Коротко это определение можно записать так:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists M > 0, \ |x| > M \ \Rightarrow \ |f(x) - A| < \varepsilon \ \Leftrightarrow \ \lim_{x \to \infty} f(x) = A.$$

Если $x \to +\infty$, то пишут $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = A$, если же $x \to -\infty$, то пишут $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = A$.

<u>ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.17.</u> Функция $y = f(x)$ называется ***бесконечно большой*** (б.б.ф.) при $x \to x_0$ или говорят, что функция стремится к бесконечности при $x \to x_0$, если для любого числа $M > 0$ существует число $\delta = \delta(M) > 0$, такое, что для всех x, удовлетворяющих неравенству $|x - x_0| < \delta$, $x \neq x_0$, выполняется неравенство $|f(x)| > M$. Или коротко

$\forall M>0\ \exists\delta>0,\ \forall x:|x-x_0|<\delta,\ x\neq x_0\ \Rightarrow\ |f(x)|>M$.

Записывают $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$.

Если $f(x)$ стремится к бесконечности при $x\to x_0$ и принимает лишь положительные значения, то пишут $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$; если же принимает лишь отрицательные значения, то $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=-\infty$.

<u>ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.18</u>. Функция $y=f(x)$, заданная на всей числовой прямой, называется ***бесконечно большой*** при $x\to\infty$, если для любого числа $M>0$ найдется такое число $N=N(M)>0$, что при всех x, удовлетворяющих неравенству $|x|>N$, выполняется неравенство $|f(x)|>M$. Коротко:

$\forall M>0\ \exists\ N>0,\ \forall x:\ |x|>N\Rightarrow|f(x)|>M \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$.

ПРИМЕР 1.4. Функция $y=\dfrac{1}{x+3}$ есть б.б.ф. при $x\to-3$: $\lim\limits_{x\to-3-0}\dfrac{1}{x+3}=-\infty,\ \lim\limits_{x\to-3+0}\dfrac{1}{x+3}=+\infty$.

ПРИМЕР 1.5. Функция $y=x^3$ является б.б.ф. при $x\to\infty$, причем $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3=+\infty,\ \lim\limits_{x\to-\infty} x^3=-\infty$.

1.4. БЕСКОНЕЧНО МАЛЫЕ ФУНКЦИИ И ИХ СВОЙСТВА

<u>ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.19.</u> Функция $y=f(x)$ называется бесконечно малой (б.м.ф.) при $x\to x_0$, если

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=0. \qquad (1.1)$$

По определению предела функции равенство (1.1) означает:

$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0,\ \forall x:|x-x_0|<\delta,\ x\neq x_0\ \Rightarrow\ |f(x)|<\varepsilon$.

Принято б.м. функции обозначать малыми буквами греческого алфавита $\alpha(x)$, $\beta(x)$ и т.д.

Теорема 1.1. Пусть $\alpha(x),\beta(x),\ldots,\gamma(x)-$ бесконечно малые функции при $x\to x_0$. Тогда:

1) алгебраическая сумма конечного числа бесконечно малых функций есть бесконечно малая функция, то есть

$\lim\limits_{x\to x_0}[\alpha(x)+\beta(x)+\ldots+\gamma(x)]=0$;

2) произведение ограниченной функции на бесконечно малую функцию есть функция бесконечно малая, то есть

$\lim\limits_{x \to x_0} [f(x) \cdot \alpha(x)] = 0$, где функция $f(x)$ ограничена при $x \to x_0$;

3) произведение конечного числа бесконечно малых функций есть бесконечно малая функция, то есть

$\lim\limits_{x \to x_0} [\alpha(x) \cdot \beta(x) \cdot \ldots \cdot \gamma(x)] = 0$;

4) частное от деления бесконечно малой функции на функцию, имеющую отличный от нуля предел, есть функция бесконечно малая, то есть

$\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{f(x)} = 0$, где $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A \neq 0$.

Доказательство:

1) Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ – две б.м.ф. при $x \to x_0$. Это значит, что

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_1 > 0, \ \forall x : |x - x_0| < \delta_1, \ x \neq x_0 \ \Rightarrow |\alpha(x)| < \frac{\varepsilon}{2}. \qquad (1.2)$$

$$\text{и } \exists \delta_2 > 0, \ \forall x : |x - x_0| < \delta_2, \ x \neq x_0 \Rightarrow |\beta(x)| < \frac{\varepsilon}{2}. \qquad (1.3)$$

Пусть δ – наименьшее из чисел δ_1 и δ_2. Тогда для всех x, удовлетворяющих неравенству $|x - x_0| < \delta$, выполняются оба неравенства (1.2) и (1.3). Следовательно, имеет место соотношение

$|\alpha(x) + \beta(x)| \leq |\alpha(x)| + |\beta(x)| < \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

Таким образом,

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0, \ \forall x : |x - x_0| < \delta, \ x \neq x_0 \Rightarrow |\alpha(x) + \beta(x)| < \varepsilon$.

Это значит, что $\lim\limits_{x \to x_0} [\alpha(x) + \beta(x)] = 0$, то есть $\alpha(x) + \beta(x)$ – б.м.ф. при $x \to x_0$.

Аналогично проводится доказательство для любого конечного числа б.м.ф.

2) Пусть функция $f(x)$ ограничена при $x \to x_0$. Тогда существует такое число $M > 0$, что для всех x из δ_1 – окрестности точки x_0 выполняется неравенство.

$$|f(x)| \leq M. \qquad (1.4)$$

Пусть $\alpha(x)-$ б.м.ф. при $x \to x_0$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$, а значит, и $\dfrac{\varepsilon}{M} > 0$ найдется такое число $\delta_2 > 0$, что при всех x, удовлетворяющих неравенству $|x - x_0| < \delta_2$, выполняется неравенство

$$|\alpha(x)| < \frac{\varepsilon}{M}. \tag{1.5}$$

Обозначим через δ наименьшее из чисел δ_1 и δ_2. Тогда для всех x, удовлетворяющих неравенству $|x - x_0| < \delta,\ x \neq x_0$, выполняются оба неравенства (1.4) и (1.5) . Следовательно,

$|f(x) \cdot \alpha(x)| = |f(x)| \cdot |\alpha(x)| < \dfrac{\varepsilon}{M} \cdot M = \varepsilon$. А это означает, что произведение $f(x)\cdot\alpha(x)$ при $x \to x_0$ является бесконечно малой функцией.

Аналогичным образом доказываются остальные утверждения теоремы.

Теорема 1.2. Если $\alpha(x)-$ бесконечно малая функция при $x \to x_0$, то $\dfrac{1}{\alpha(x)}-$ бесконечно большая функция и наоборот: если $f(x)-$ бесконечно большая функция при $x \to x_0$, то $\dfrac{1}{f(x)}-$ бесконечно малая функция.

Доказательство. Пусть $\alpha(x)-$ б.м.ф. при $x \to x_0$, то есть $\lim\limits_{x\to x_0} \alpha(x) = 0$. Тогда $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0,\ \forall\, x : |x - x_0| < \delta,\ x \neq x_0\ \Rightarrow$

$\Rightarrow\ |\alpha(x)| < \varepsilon, \Rightarrow \dfrac{1}{|\alpha(x)|} > \dfrac{1}{\varepsilon}$, то есть $\left|\dfrac{1}{\alpha(x)}\right| > M$, где $M = \dfrac{1}{\varepsilon}$. А это означает, что функция $\dfrac{1}{\alpha(x)}$ является бесконечно большой.

Аналогично доказывается обратное утверждение.

Теорема 1.3. (о связи между функцией и ее пределом). Если функция $f(x)$ в точке x_0 имеет предел равный A, то ее можно представить как сумму числа A и бесконечно малой функции $\alpha(x)$, т.е. если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$, то $f(x) = A + \alpha(x)$.

Обратно: если $f(x) = A + \alpha(x)$, то $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$.

<u>*Доказательство.*</u> Пусть $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$. Тогда $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$, $\forall x : |x - x_0| < \delta, \ x \neq x_0 \ \Rightarrow \ |f(x) - A| < \varepsilon \Rightarrow |(f(x) - A) - 0| < \varepsilon$, это

означает, что функция $f(x) - A$ имеет предел, равный нулю, то есть является б.м.ф., которую обозначим через $\alpha(x) : f(x) - A = \alpha(x) \Rightarrow \Rightarrow f(x) = A + \alpha(x)$.

Пусть теперь $f(x) = A + \alpha(x)$, где $\alpha(x) -$ б.м.ф. при $x \to x_0$, то есть $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0, \ \forall x : |x - x_0| < \delta, \ x \neq x_0 \ \Rightarrow |\alpha(x)| < \varepsilon$. Так как по условию $f(x) = A + \alpha(x)$, то $\alpha(x) = f(x) - A$. Тогда $|\alpha(x)| = |f(x) - A| < \varepsilon$ для всех x, удовлетворяющих неравенству $|x - x_0| < \delta, \ x \neq x_0$. А это и означает, что $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$. Теорема доказана полностью.

<u>*Замечание.*</u> Теоремы 1.1, 1.2, 1.3 были рассмотрены для случая, когда $x \to x_0$, но они справедливы и для случая, когда $x \to \infty$.

1.5. ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ О ПРЕДЕЛАХ

Рассмотрим теоремы, которые облегчают нахождение пределов функции. Формулировка и доказательства теорем для случаев $x \to x_0$ и $x \to \infty$ аналогичны. В приводимых теоремах будем считать, что пределы $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ и $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x)$ существуют.

Теорема 1.4. Предел постоянной величины равен самой постоянной.

<u>*Доказательство.*</u> Пусть $y = C$, требуется доказать, что $\lim\limits_{x \to x_0} C = C$. Из определения предела следует, что $C -$ предел в том случае, если $\forall \varepsilon > 0$: $|y - C| < \varepsilon$. Но так как $y = C$, то $|C - C| = 0 < \varepsilon$, следовательно, $\lim\limits_{x \to x_0} C = C$.

Теорема 1.5. Предел суммы (разности) двух функций равен сумме (разности) их пределов: $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x) \pm \varphi(x)] = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \pm \lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x)$.

<u>*Доказательство.*</u> Пусть $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ и $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = B$. Тогда по теореме 1.3 о связи функции с ее пределом можно записать $f(x) = A + \alpha(x)$, $\varphi(x) = B + \beta(x)$. Следовательно, $f(x) + \varphi(x) = A + B + \alpha(x) + \beta(x)$. Здесь $\alpha(x) + \beta(x) -$ б.м.ф. как сумма б.м.ф. Тогда снова по второй части теоремы 4.3 можно записать: $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x) + \varphi(x)] = A + B = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) + \lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x)$.

В случае разности функций доказательство аналогично. Теорема справедлива и для алгебраической суммы любого конечного числа функций, имеющих предел.

Теорема 1.6. Предел произведения двух функций равен произведению их пределов: $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\cdot\varphi(x)]=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\cdot\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)$.

Доказательство. Так как $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$, $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=B$, то согласно теореме 1.3 имеем $f(x)=A+\alpha(x)$, $\varphi(x)=B+\beta(x)$, где $\alpha(x),\beta(x)-$ б.м.ф. Следовательно, $f(x)\cdot\varphi(x)=(A+\alpha(x))(B+\beta(x))$, то есть

$f(x)\cdot\varphi(x)=A\,B+(A\cdot\beta(x)+B\cdot\alpha(x)+\alpha(x)\cdot\beta(x))$. Выражение в скобках является б.м.ф. (теорема 1.1). Поэтому по теореме 1.3

$$\lim_{x\to x_0}f(x)\cdot\varphi(x)=A\cdot B=\lim_{x\to x_0}f(x)\cdot\lim_{x\to x_0}\varphi(x).$$

Отметим, что теорема справедлива для произведения любого конечного числа функций.

Следствие 1.1. Постоянный множитель можно вынести за знак предела

$$\lim_{x\to x_0}C\cdot f(x)=C\cdot\lim_{x\to x_0}f(x).$$

Теорема 1.7. Предел дроби равен пределу числителя, деленному на предел знаменателя, если предел знаменателя не равен нулю:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to x_0}f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)},\quad \lim_{x\to x_0}\varphi(x)\neq 0.$$

Доказательство. Из равенств $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ и $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=B\neq 0$ следуют соотношения $f(x)=A+\alpha(x)$, $\varphi(x)=B+\beta(x)$. Тогда

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\frac{A+\alpha(x)}{B+\beta(x)}=\frac{A}{B}+\left(\frac{A+\alpha(x)}{B+\beta(x)}-\frac{A}{B}\right)=\frac{A}{B}+\frac{B\cdot\alpha(x)-A\cdot\beta(x)}{B^2+B\cdot\beta(x)}.$$

Второе слагаемое есть б.м.ф. как частное от деления б.м.ф. на функцию, имеющую отличный от нуля предел (теорема 1.1). Поэтому по теореме 1.3.

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\frac{A}{B}=\frac{\lim\limits_{x\to x_0}f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)}.$$

Теорема 1.8. (о пределе промежуточной функции).

Если в окрестности точки x_0 выполняются неравенства $\varphi(x)\le f(x)\le\psi(x)$ и $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to x_0}\psi(x)=A$, то $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$.

Доказательство. Из равенств

$$\lim_{x\to x_0}\varphi(x)=\lim_{x\to x_0}\psi(x)=A \tag{1.6}$$

вытекает, что для любого $\varepsilon>0$ существуют числа δ_1 и $\delta_2>0$ такие, что:

$$|\varphi(x)-A|<\varepsilon,\ \forall x:|x-x_0|<\delta_1,\ x\neq x_0. \tag{1.7}$$

$$|\psi(x)-A|<\varepsilon,\ \forall x:|x-x_0|<\delta_2,\ x\neq x_0. \tag{1.8}$$

$$-\varepsilon<\varphi(x)-A<\varepsilon. \tag{1.9}$$

$$-\varepsilon<\psi(x)-A<\varepsilon. \tag{1.10}$$

Пусть $\delta-$ наименьшее из чисел δ_1 и δ_2. Тогда в $\delta-$окрестности точки x_0 выполняются оба неравенства (1.9) и (1.10). Из неравенств $\varphi(x)\le f(x)\le\psi(x)$ находим $\varphi(x)-A\le f(x)-A\le\psi(x)-A$.

Из последнего неравенства с учетом неравенств (1.9) и (1.10) следуют неравенства $-\varepsilon<f(x)-A<\varepsilon$ или $|f(x)-A|<\varepsilon$. Мы доказали, что $\forall\varepsilon>0\ \exists\,\delta>0,\forall x:|x-x_0|<\delta\ \Rightarrow\ |f(x)-A|<\varepsilon$, то есть $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$.

ПРИМЕР 1.6. Найти $\lim\limits_{x\to 1}\left(6x^2+7x-4\right)$.

Решение. $\lim\limits_{x\to 1}\left(6x^2+7x-4\right)=\lim\limits_{x\to 1}6x^2+\lim\limits_{x\to 1}7x-\lim\limits_{x\to 1}4=$
$=6\lim\limits_{x\to 1}x\cdot\lim\limits_{x\to 1}x+7\lim\limits_{x\to 1}x-4=6\cdot1\cdot1+7\cdot1-4=9$.

Из решения видно, что нахождение предела этой функции свелось к подстановке в данное выражение предельного значения аргумента. Сказанное остается справедливым и в более общем случае. Если рассмотреть целую рациональную функцию (многочлен) вида

$$P_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n,\ (a_0\neq 0),$$

то ее предел при $x\to x_0$ равен значению многочлена в этой точке, то есть

$\lim\limits_{x\to x_0}P_n(x)=P_n(x_0)$ (рекомендуем показать это самостоятельно).

Пользуясь этим, легко убедиться, что предел всякой дробно-рациональной функции равен: $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\dfrac{P_n(x_0)}{Q_m(x_0)}$, если только знаменатель не обращается в нуль, то есть $Q_m(x_0)\neq 0$.

ПРИМЕР 1.7. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{4x^3-2x+5}{6x^4-3x^3+6x-1}=\dfrac{4\cdot1-2\cdot1+5}{6\cdot1-3\cdot1+6\cdot1-1}=\dfrac{7}{8}$.

Будем говорить, что предел отношения двух функций $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ есть неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$ или $\dfrac{\infty}{\infty}$, если числитель и знаменатель дроби одновременно стремятся к нулю или к бесконечности. Раскрыть эти неопределенности – значит вычислить предел отношения $\dfrac{f(x)}{g(x)}$, если он существует или установить, что этот предел не существует.

ПРИМЕР 1.8. $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^2+6x+8}{x^3+8}=\left|\dfrac{0}{0}\right|=\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{(x+2)(x+4)}{(x+2)(x^2-2x+4)}=$

$=\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x+4}{x^2-2x+4}=\dfrac{-2+4}{(-2)^2-2(-2)+4}=\dfrac{1}{6}$.

Здесь мы сократили на множитель $x+2$, который при $x\to-2$ стремится к нулю. Однако из определения предела следует, что аргумент x стремится к своему предельному значению, но никогда с ним не совпадает, поэтому $x+2\neq0$ и сокращение правомерно.

Из рассмотренного примера следует правило: чтобы раскрыть неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$ при $x\to x_0$ функции, заданной в виде отношения двух многочленов, необходимо в числителе и знаменателе выделить множитель $x-x_0$ и дробь на него сократить.

При вычислении пределов отношения двух многочленов при $x\to\infty$ для раскрытия неопределенности вида $\dfrac{\infty}{\infty}$ надо числитель и знаменатель

дроби разделить на x в старшей степени.

ПРИМЕР 1.9. Найти предел $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+3x-5}{3x^2+4x-1}$

<u>Решение.</u> $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+3x-5}{3x^2+4x-1}=\left|\dfrac{\infty}{\infty}\right|=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+\dfrac{3}{x}-\dfrac{5}{x^2}}{3+\dfrac{4}{x}-\dfrac{1}{x^2}}=$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}1+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3}{x}-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5}{x^2}}{\lim\limits_{x\to\infty}3+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4}{x}-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}}=\frac{1+0-0}{3+0-0}=\frac{1}{3}.$$

ПРИМЕР 1.10. Найти предел дробно-рациональной функции

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+b_2x^{m-2}+\ldots+b_m},\ \left(a_0,b_0\neq 0\right).$$

<u>Решение.</u> $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+b_2x^{m-2}+\ldots+b_m}=$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^n\left(a_0+\frac{a_1}{x}+\frac{a_2}{x^2}+\ldots+\frac{a_n}{x^n}\right)}{x^m\left(b_0+\frac{b_1}{x}+\frac{b_2}{x^2}+\ldots+\frac{b_m}{x^m}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}x^{n-m}\cdot\lim_{x\to\infty}\frac{a_0+\frac{a_1}{x}+\frac{a_2}{x^2}+\ldots+\frac{a_n}{x^n}}{b_0+\frac{b_1}{x}+\frac{b_2}{x^2}+\ldots+\frac{b_m}{x^m}}=\begin{cases}0, & n<m\\ \frac{a_0}{b_0}, & n=m\\ \infty, & n>m.\end{cases}$$

При вычислении этого предела учтено, что

$$\lim_{x\to\infty}x^{n-m}=\begin{cases}0, & \text{если } n<m,\\ 1, & \text{если } n=m,\\ \infty, & \text{если } n>m\end{cases}\quad \text{и}\quad \lim_{x\to\infty}\frac{a_0+\frac{a_1}{x}+\ldots+\frac{a_n}{x^n}}{b_0+\frac{b_1}{x}+\ldots+\frac{b_m}{x^m}}=\frac{a_0}{b_0}.$$

Следует отметить, что еще использованы свойства бесконечно малых и бесконечно больших функций.

1.6. ПЕРВЫЙ ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫЙ ПРЕДЕЛ

При вычислении пределов выражений, содержащих тригонометрические функции, часто используют предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1. \qquad (1.11)$$

Данное равенство называют ***первым замечательным пределом***. Читается так:

Теорема 1.9. Предел отношения синуса бесконечно малой дуги к самой дуге, выраженной в радианах, равен единице.

Доказательство.

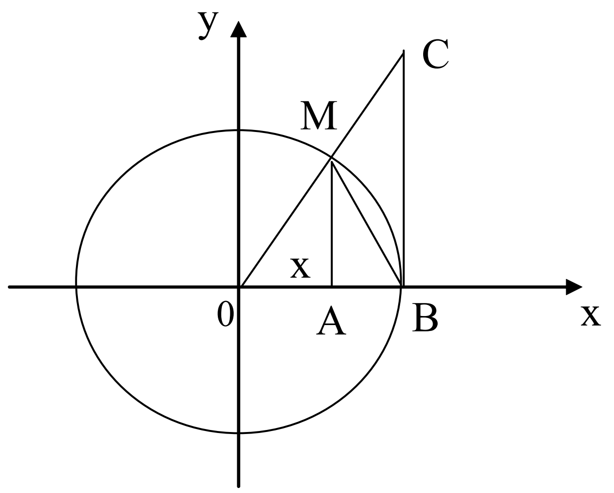


Рис. 1.11

Возьмем круг радиуса 1 (рис. 1.11), обозначим радианную меру центрального угла MOB через x. Пусть $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Из рисунка видно, что $|AM| = \sin x,\ |BC| = \operatorname{tg} x,\ \cup MB = x$.

Рассмотрим площади трех фигур: треугольника MOB, кругового сектора MOB, треугольника COB.

Очевидно, что $S_{\Delta MOB} < S_{\text{сек}\, MOB} < S_{\Delta COB}$.

$\frac{1}{2} \cdot |OB| \cdot |MA| < \frac{|OB|^2 \cdot x}{2} < \frac{1}{2} \cdot |OB| \cdot |BC|$. Отсюда

$$\frac{1}{2}\sin x < \frac{1}{2}x < \frac{1}{2}\operatorname{tg} x. \qquad (1.12)$$

Разделив все члены неравенства (1.12) на $\frac{1}{2}\sin x > 0$, получим

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x} \quad \text{или} \quad \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1. \qquad (1.13)$$

Неравенство (1.13) мы получили в предположении $x > 0$; замечая, что $\cos(-x) = \cos x$ и $\frac{\sin(-x)}{-x} = \frac{\sin x}{x}$, заключаем, что оно верно и при $x < 0$. Но $\lim\limits_{x \to 0} \cos x = 1$ и $\lim\limits_{x \to 0} 1 = 1$. Следовательно, функция $\frac{\sin x}{x}$ заключена между двумя функциями, имеющими один и тот же предел, равный 1; таким образом, на основании теоремы 1.8 предыдущего параграфа

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

ПРИМЕР 1.11. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x}{x}$

<u>Решение.</u> $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}\cdot\dfrac{1}{\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\cos x}=1\cdot\dfrac{1}{1}=1.$

ПРИМЕР 1.12. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\alpha x}{x}$

<u>Решение.</u>

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin\alpha x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\alpha\cdot\sin\alpha x}{\alpha\cdot x}=\alpha\lim_{\substack{x\to 0\\(\alpha x\to 0)}}\frac{\sin\alpha x}{\alpha x}=\alpha\cdot 1=\alpha\ (\alpha=\mathrm{const}).$$

ПРИМЕР 1.13. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\alpha x}{\sin\beta x}$

<u>Решение.</u> $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\alpha x}{\sin\beta x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\alpha}{\beta}\cdot\dfrac{\dfrac{\sin\alpha x}{\alpha x}}{\dfrac{\sin\beta x}{\beta x}}=\dfrac{\alpha}{\beta}\cdot\dfrac{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\alpha x}{\alpha x}}{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\beta x}{\beta x}}=\dfrac{\alpha}{\beta}\cdot\dfrac{1}{1}=\dfrac{\alpha}{\beta}$

$(\alpha,\beta=\mathrm{const})$

ПРИМЕР 1.14. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x}$

<u>Решение</u>. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2\dfrac{x}{2}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\dfrac{x}{2}}{\dfrac{x}{2}}\cdot\sin\dfrac{x}{2}=$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin\dfrac{x}{2}}{\dfrac{x}{2}}\cdot\lim_{x\to 0}\sin\frac{x}{2}=1\cdot 0=0.$$

ПРИМЕР 1.15. Найти предел $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\cos\dfrac{\pi x}{2}}{1-x}$

Решение. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\cos\dfrac{\pi x}{2}}{1-x}=\begin{vmatrix}1-x=t, & x=1-t\\ x\to 1 \;\;\Rightarrow & t\to 0\end{vmatrix}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi}{2}t\right)}{t}=$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\sin\frac{\pi t}{2}}{t}=\frac{\pi}{2}\lim_{t\to 0}\frac{\sin\frac{\pi t}{2}}{\frac{\pi t}{2}}=\frac{\pi}{2}\cdot 1=\frac{\pi}{2}.$$

1.7. ВТОРОЙ ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫЙ ПРЕДЕЛ

Рассмотрим последовательность чисел

$\{x_n\}=\left\{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\right\}$, где $n=1,2,3,\ldots\ (n\in N)$.

Установлено, что эта последовательность монотонно возрастает и является ограниченной: $2\le\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n<3,\quad \forall n\in N$. Следовательно, при $n\to\infty$ существует предел $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$, заключенный между числами 2 и 3. Этот предел обозначают буквой e:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e.$$

Число $e-$ иррациональное число, его приближенное значение равно $2{,}72\ (e=2{,}718281\ldots)$.

Теорема 1.10. Функция $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$ при $x\to\infty$ стремится к пределу e:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e. \qquad (1.14)$$

Доказательство. 1. Пусть $x\to+\infty$. Каждое значение x заключено между двумя положительными целыми числами: $n\le x<n+1$. Отсюда следует $\dfrac{1}{n+1}<\dfrac{1}{x}\le\dfrac{1}{n}\ \Rightarrow\ 1+\dfrac{1}{n+1}<1+\dfrac{1}{x}\le 1+\dfrac{1}{n}$, поэтому

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n} < \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} \le \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Если $x \to +\infty$, то очевидно, и $n \to \infty$. Найдем пределы переменных величин, между которыми заключена функция $\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}$:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) =$$
$$= e\cdot 1 = e.$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)} = \frac{e}{1} = e.$$

Следовательно, по теореме 1.8 (о пределе промежуточной функции)

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e. \tag{1.15}$$

2. Пусть теперь $x \to -\infty$. Введем новую переменную $t = -(x+1)$ или $x = -(t+1)$. При $x \to -\infty$ будет $t \to +\infty$. Тогда

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = \lim_{t\to+\infty}\left(1-\frac{1}{t+1}\right)^{-t-1} = \lim_{t\to+\infty}\left(\frac{t}{t+1}\right)^{-t-1} =$$
$$= \lim_{t\to+\infty}\left(\frac{t+1}{t}\right)^{t+1} = \lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}\cdot\left(1+\frac{1}{t}\right) = e\cdot 1 = e,$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e. \tag{1.16}$$

Из равенств (1.15) и (1.16) вытекает равенство (1.14), теорема доказана.

<u>*Замечание.*</u> Если в равенстве (1.14) положить $\frac{1}{x} = \alpha$, то при $x \to \infty$ имеем $\alpha \to 0$ и мы получаем

$$\lim_{x\to 0}(1+\alpha)^{1/\alpha} = e. \tag{1.17}$$

Равенства (1.14) и (1.17) называют ***вторым замечательным пределом.***

ПРИМЕР 1.16. Найти предел $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{3x}$

<u>Решение</u>. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{3x} = \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\cdot\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} =$

$= \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\cdot\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\cdot\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e\cdot e\cdot e = e^3.$

ПРИМЕР 1.17. Найти предел $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{x}$

<u>Решение</u>. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{x} = \left|\begin{array}{l} x = 3t, \\ x\to\infty \Rightarrow t\to\infty \end{array}\right| = \lim\limits_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{3t} = e^3.$

ПРИМЕР 1.18. Найти предел $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x+3}\right)^{2x+7}$

<u>Решение.</u>

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x+3}\right)^{2x+7} = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+3-1}{x+3}\right)^{2x+7} = \lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x+3}\right)^{2x+7} =$$

$$= \left|\begin{array}{l} t = -\frac{1}{x+3},\ \ x = -\frac{1}{t}-3 \\ x\to\infty\ \Rightarrow\ t\to 0 \end{array}\right| = \lim_{t\to 0}(1+t)^{2\left(-\frac{1}{t}-3\right)+7} =$$

$$= \lim_{t\to 0}(1+t)^{-\frac{2}{t}+1} = \frac{\lim\limits_{t\to 0}(1+t)}{\lim\limits_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}\cdot\lim\limits_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}} = \frac{1}{e\cdot e} = e^{-2}.$$

1.8. СРАВНЕНИЕ БЕСКОНЕЧНО МАЛЫХ ФУНКЦИЙ. ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ БЕСКОНЕЧНО МАЛЫЕ

Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ – бесконечно малые функции при $x\to x_0$, то есть $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$ и $\lim\limits_{x\to x_0}\beta(x)=0$.

<u>**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.20**</u>. Если $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = A\neq 0$, то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются ***бесконечно малыми одного порядка.***

ПРИМЕР 1.19. Функции $\alpha = x^2$ и $\beta = 3x^2$ при $x \to 0$ являются б.м.ф. одного порядка: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{3x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{3} \neq 0$.

<u>**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.21**</u>. Если $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$, то $\alpha(x)$ называют ***б.м.ф. более высокого порядка***, чем $\beta(x)$.

ПРИМЕР 1.20. Функция $\alpha = 3x^4$ при $x \to 0$ есть б.м.ф. более высокого порядка, чем $\beta = x^3$, так как $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3x^4}{x^3} = \lim\limits_{x\to 0} 3x = 0$.

В этом случае говорят, что б.м.ф. $\alpha(x)$ стремится к нулю быстрее, чем $\beta(x)$.

<u>**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.22.**</u> Если $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \infty$, то $\alpha(x)$ называется ***б.м.ф. более низкого порядка***, чем $\beta(x)$.

ПРИМЕР 1.21. Сравнить функции $\alpha(x) = \sin x$ и $\beta(x) = x^2$ при $x \to 0$.

<u>Решение.</u> $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} \cdot \dfrac{1}{x} = \infty$, следовательно $\alpha(x) -$ б.м.ф. более низкого порядка, чем $\beta(x)$.

<u>**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.23.**</u> Если $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$, то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются ***эквивалентными бесконечно малыми***, это обозначается так: $\alpha \sim \beta$.

ПРИМЕР 1.22. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$, следовательно, $\sin x \sim x$ при $x \to 0$.

ПРИМЕР 1.23. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$, следовательно, $\operatorname{tg} x \sim x$ при $x \to 0$.

ПРИМЕР 1.24.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x} = \left| \begin{array}{l} x = \sin t \\ x \to 0 \;\Rightarrow\; t \to 0 \end{array} \right| = \lim_{t\to 0} \frac{\arcsin \sin t}{\sin t} = \lim_{t\to 0} \frac{t}{\sin t} =$$

$$= \frac{1}{\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\sin t}{t}} = 1,$$ следовательно $\arcsin x \sim x$ при $x \to 0$.

Теорема 1.11. Предел отношения двух бесконечно малых функций не изменится, если их заменить эквивалентными бесконечно малыми, то есть , если $\alpha \sim \alpha_1$, $\beta \sim \beta_1$ и $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = A$, то $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)} = A$.

Доказательство. $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{\alpha}{\beta} = \lim\limits_{x\to x_0} \left(\frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\alpha_1}{\alpha_1} \cdot \frac{\beta_1}{\beta_1} \right) =$

$= \lim\limits_{x\to x_0} \frac{\alpha}{\alpha_1} \cdot \lim\limits_{x\to x_0} \frac{\beta_1}{\beta} \cdot \lim\limits_{x\to x_0} \frac{\alpha_1}{\beta_1} = 1 \cdot 1 \cdot \lim\limits_{x\to x_0} \frac{\alpha_1}{\beta_1} = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{\alpha_1}{\beta_1}$.

ПРИМЕР 1.25. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{\sin 5x}$

Решение. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{\sin 5x} = \begin{vmatrix} \sin 3x \sim 3x \\ \sin 5x \sim 5x \end{vmatrix} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{3x}{5x} = \frac{3}{5}$.

ПРИМЕР 1.26. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\mathrm{tg}^2\, 2x}{\sin^2 \frac{x}{2}}$

Решение. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\mathrm{tg}^2\, 2x}{\sin^2 \frac{x}{2}} = \begin{vmatrix} \mathrm{tg}\, 2x \sim 2x \\ \sin \frac{x}{2} \sim \frac{x}{2} \end{vmatrix} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{(2x)^2}{\left(\frac{x}{2}\right)^2} = 16$.

ПРИМЕР 1.27. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x \cdot \arcsin x}{\mathrm{tg}\, x}$

Решение. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x \cdot \arcsin x}{\mathrm{tg}\, x} = \begin{vmatrix} \arcsin x \sim x \\ \mathrm{tg}\, x \sim x \end{vmatrix} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x \cdot x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} x = 0$.

1.9. НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ

1.9.1. Непрерывность функции в точке

Пусть функция $y = f(x)$ определена в точке x_0 и в некоторой ее окрестности.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.24. Функция $y = f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если существует предел $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ и он равен значению функции в этой точке, то есть

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0). \tag{1.18}$$

Так как $\lim\limits_{x \to x_0} x = x_0$, то равенство (1.18) можно записать в виде

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f\left(\lim_{x \to x_0} x\right) = f(x_0). \tag{1.19}$$

Это означает, что при нахождении предела непрерывной функции под знаком функции можно перейти к пределу, то есть в функцию $f(x)$ вместо аргумента x подставить его предельное значение x_0.

Пользуясь определением предела, можно сформулировать определение непрерывности функции на «языке $\varepsilon - \delta$».

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.25. Функция $f(x)$ называется ***непрерывной в точке*** x_0, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для всех x, удовлетворяющих неравенству $|x - x_0| < \delta$ выполняется неравенство

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon. \tag{1.20}$$

Обозначим $\Delta x = x - x_0$ и назовем приращением аргумента, тогда разность $\Delta y = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ называют приращением функции $f(x)$ в точке x_0.

Очевидно, приращения Δx и Δy могут быть как положительными, так и отрицательными числами.

Так как при $x \to x_0$ $\Delta x \to 0$, то равенство (1.20) означает

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0. \tag{1.21}$$

Полученное равенство является еще одним определением непрерывности функции в точке.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.26. Функция $f(x)$ называется ***непрерывной в точке*** x_0, если бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции.

ПРИМЕР 1.28. Показать, что функция $y = x^2$ непрерывна в любой точке $x \in R$.

Решение. $\Delta y = (x + \Delta x)^2 - x^2 = x^2 + 2x\,\Delta x + \Delta x^2 - x^2 =$

$= 2x\,\Delta x + \Delta x^2$.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0}\left(2x\,\Delta x + \Delta x^2\right) = 2x \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x + \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x = 0.$$

Отсюда, согласно определению 1.26, следует непрерывность функции $y = x^2$ на всей числовой оси.

ПРИМЕР 1.29. Исследовать на непрерывность функцию $y = \sin x$.

Решение. Функция $y = \sin x$ определена при всех $x \in R$.

Возьмем произвольную точку x и найдем приращение Δy:

$$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2\sin\frac{\Delta x}{2} \cdot \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right).$$

Тогда $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim\limits_{\Delta x \to 0} 2\sin\frac{\Delta x}{2} \cdot \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = 0$, так как $\left|\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\right| \le 1$, то есть функция $\cos(x + \Delta x)$ ограничена и $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \sin\frac{\Delta x}{2} = 0$, а произведение ограниченной функции на бесконечно малую есть б.м.ф.

Следовательно, функция $y = \sin x$ непрерывна в любой точке x.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.27. Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке x_0 справа (слева), если

$$\lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0) \quad \left(\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0)\right). \tag{1.22}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.28. Функция $f(x)$ непрерывна в интервале (a, b), если она непрерывна в каждой точке этого интервала; непрерывна на отрезке $[a, b]$, если она непрерывна в интервале (a, b) и в точке $x = a$ непрерывна справа $\left(\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = f(a)\right)$, а в точке $x = b$ непрерывна слева $\left(\lim\limits_{x \to b-0} f(x) = f(b)\right)$.

1.9.2. Точки разрыва функции и их классификация

Из первого определения непрерывности, то есть из равенства (1.18) следует, что для непрерывности функции $f(x)$ в точке x_0 необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

1) функция $f(x)$ определена в точке x_0 и некоторой ее окрестности;

2) функция $f(x)$ имеет предел при $x \to x_0$;

3) предел функции в точке x_0 равен значению функции в этой точке.

Точки, в которых нарушается хотя бы одно из условий, называются ***точками разрыва этой функции***.

Если $x = x_0 -$ точка разрыва функции $y = f(x)$, то в этой точке не выполняется по крайней мере одно из приведенных выше условий.

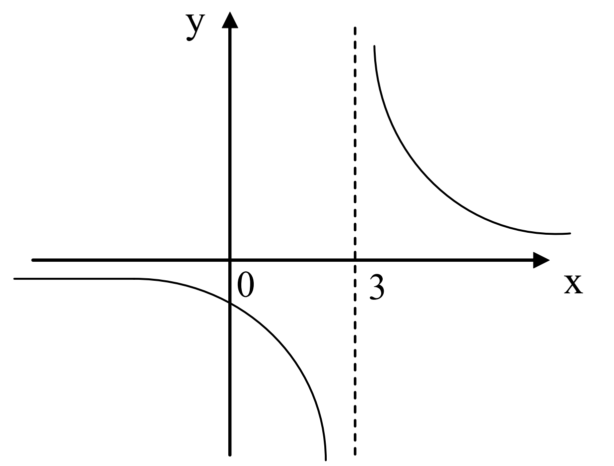


Рис. 1.12

ПРИМЕР 1.30. Функция определена в окрестности точки x_0, но не определена в самой точке x_0.

Решение. Функция $y = \dfrac{1}{x-3}$ не определена в точке $x_0 = 3$, следовательно, $x_0 = 3 -$ точка разрыва (рис. 1.12).

ПРИМЕР 1.31 Функция определена в точке x_0 и ее окрестности, но не существует предел $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$.

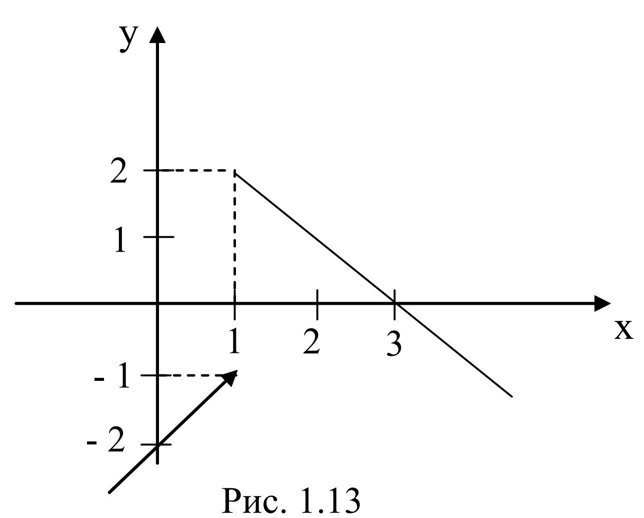


Рис. 1.13

Решение.

$$f(x)=\begin{cases} x-2, & \text{если } x<1 \\ 3-x, & \text{если } x\ge 1 \end{cases}$$

Функция определена в точке $x_0 = 1$, $f(1) = 2$, однако эта функция не имеет предела при $x \to 1$: $\lim\limits_{x\to 1-0} f(x) = -1$,

$\lim\limits_{x\to 1+0} f(x) = 2$.

Точка $x_0 = 1 -$ точка разрыва (рис. 1.13).

ПРИМЕР 1.32. Функция определена в точке x_0 и ее окрестности, существует предел $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, но этот предел не равен значению функции в точке x_0 $\left(\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \ne f(x_0)\right)$

Решение. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & \text{если } x\ne 0 \\ 0, & \text{если } x=0 \end{cases}$

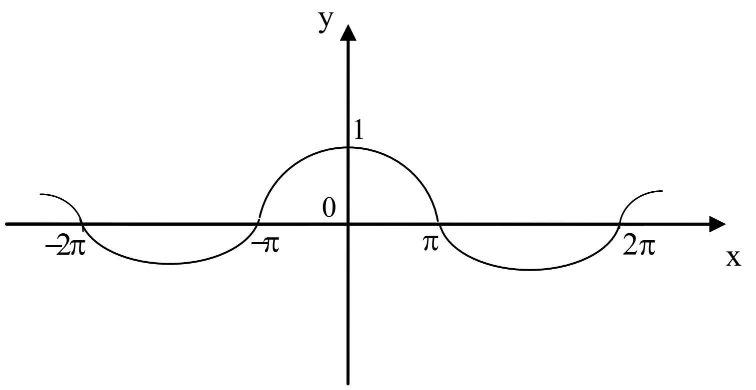


Рис. 1.14

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$, а $f(x_0) = f(0) = 0$

Точка $x_0 = 0 -$ точка разрыва (рис. 1.14).

Все точки разрыва функции подразделяются на точки разрыва первого и второго рода.

<u>ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.29</u>. Точка разрыва x_0 называется ***точкой разрыва первого рода*** функции $y = f(x)$, если в этой точке существуют конечные односторонние пределы, то есть

$\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = A_1$ и $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = A$. При этом:

1) если $A_1 = A_2$, то x_0 называется ***точкой устранимого разрыва***.

2) если $A_1 \neq A_2$, то x_0 называется ***точкой конечного разрыва***; величину $|A_1 - A_2|$ называют ***скачком функции*** в точке разрыва.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.30. Точка разрыва x_0 называется ***точкой разрыва второго рода*** функции $y = f(x)$, если в этой точке по крайней мере один из односторонних пределов не существует или равен бесконечности.

ПРИМЕР 1.33. Дана функция $f(x) = \dfrac{|x+2|}{x+2}$. Найти точки разрыва и выяснить их характер.

Решение. Функция определена и непрерывна на всей числовой оси, кроме точки $x = -2$. Очевидно, что $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+2}{x+2} = 1 & \text{при } x > -2, \\ \dfrac{-(x+2)}{x+2} = -1 & \text{при } x < -2. \end{cases}$

Следовательно, $\lim\limits_{x \to -2-0} f(x) = -1$ и $\lim\limits_{x \to -2+0} f(x) = 1$. Поэтому в точке $x = -2$ функция имеет разрыв первого рода (рис. 1.15). Скачок функции в этой точке равен $|1 - (-1)| = 2$.

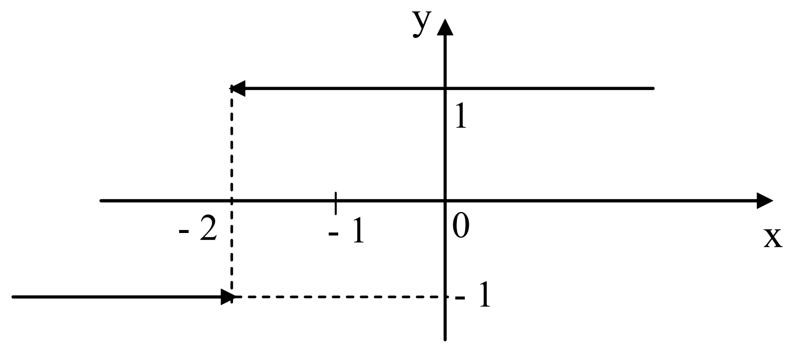


Рис. 1.15

ПРИМЕР 1.34. Исследовать на непрерывность функцию $y = \operatorname{arcctg}\dfrac{1}{x}$.

Решение. Функция определена, а следовательно, и непрерывна на всей числовой оси, кроме точки $x = 0$. Найдем в этой точке односторонние пределы: $\lim\limits_{x \to 0-} \operatorname{arcctg}\dfrac{1}{x} = \operatorname{arcctg}(-\infty) = \pi$, $\lim\limits_{x \to 0+} \operatorname{arcctg}\dfrac{1}{x} = \operatorname{arcctg}(+\infty) = 0$.

Функция в точке $x = 0$ терпит разрыв первого рода (рис. 1.16), величина скачка в этой точке равна $|\pi - 0| = \pi$.

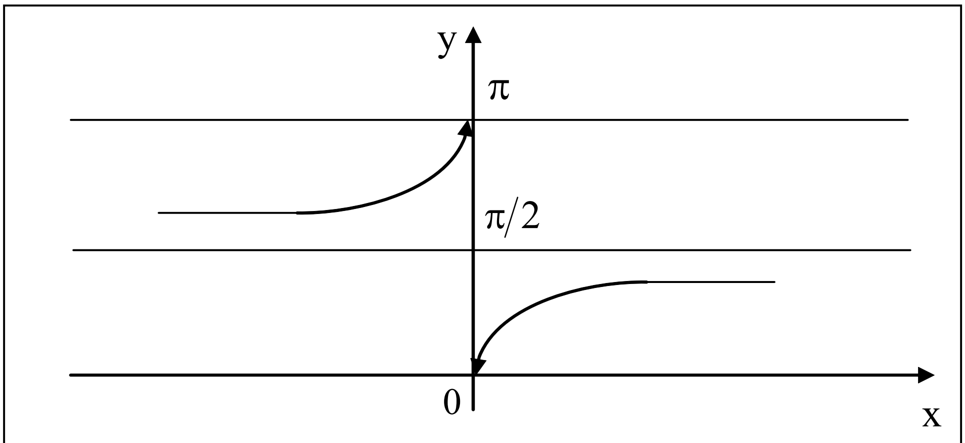


Рис. 1.16

ПРИМЕР 1.35. Найти точки разрыва функции $y = 2^{\frac{1}{x-1}}$ и выяснить их характер.

<u>Решение.</u> Функция не определена при $x = 1$.

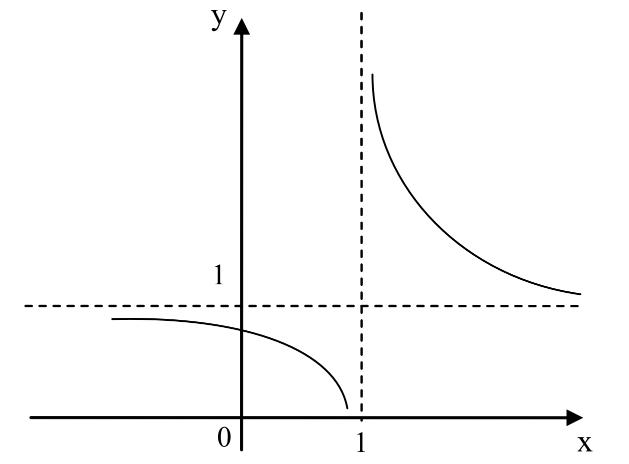


Рис. 1.17

$$\lim_{x \to 1-0} 2^{\frac{1}{x-1}} = 2^{-\infty} = \frac{1}{2^{+\infty}} = 0,$$

$$\lim_{x \to 1+0} 2^{\frac{1}{x-1}} = 2^{+\infty} = +\infty,$$

следовательно, $x = 1-$ точка разрыва функции второго рода (рис. 1.17). Здесь учтено, что

$$\lim_{x \to +\infty} 2^{\frac{1}{x-1}} = 2^0 = 1 \text{ и}$$

$$\lim_{x \to -\infty} 2^{\frac{1}{x-1}} = 2^0 = 1.$$

1.9.3. Основные теоремы о непрерывных функциях

Теорема 1.12. Пусть функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны в точке x_0, тогда в этой точке непрерывны функции:

1. $f(x) \pm \varphi(x)$;
2. $f(x) \cdot \varphi(x)$
3. $\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$, если $\varphi(x_0) \neq 0$.

Доказательство. Доказательство следует непосредственно из соответствующих теорем о пределах. Пусть функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны в некоторой точке $x = x_0$, это значит, что $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = \varphi(x_0)$.

Докажем, например, непрерывность функции $\psi(x) = f(x) \cdot \varphi(x)$.

Имеем

$\lim\limits_{x \to x_0} \psi(x) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \cdot \varphi(x) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = f(x_0) \cdot \varphi(x_0) = \psi(x_0)$, что и доказывает непрерывность функции $f(x) \cdot \varphi(x)$ в точке x_0. Аналогичным образом доказываются остальные утверждения теоремы.

***Теорема 1.13* (о непрерывности сложной функции).** Пусть функция $u = \varphi(x)$ непрерывна в точке x_0, а функция $y = f(u)$ непрерывна в соответствующей точке $u_0 = \varphi(x_0)$. Тогда сложная функция $y = f[\varphi(x)]$ непрерывна в точке x_0.

Доказательство. Из непрерывности функции $u = \varphi(x)$ следует $\lim\limits_{x \to x_0} u = \lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = \varphi(x_0) = u_0$, то есть при $x \to x_0$ имеем $u \to u_0$. Тогда в силу непрерывности функции $y = f(u)$ получим

$$\lim_{x \to x_0} f[\varphi(x)] = \lim_{u \to u_0} f(u) = f(u_0) = f[\varphi(x_0)].$$

Это и доказывает, что сложная функция $y = f[\varphi(x)]$ непрерывна в точке x_0.

Пользуясь приведенными выше теоремами, можно доказать, что ***всякая элементарная функция непрерывна в каждой точке, в которой она определена.***

Рассмотрим некоторые из них.

ПРИМЕР 1.36. Целая рациональная функция (многочлен)

$P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_n$, где $n \in N$,

$a_0, a_1, \ldots, a_n \in R$, непрерывна в каждой точке числовой прямой, как сумма непрерывных функций $a_0 x^n, a_1 x^{n-1}, \ldots, a_n$.

ПРИМЕР 1.37. Дробно-рациональная функция $R(x)=\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, где $P_n(x), Q_m(x)-$ многочлены, непрерывна во всех точках, в которых знаменатель отличен от нуля, как частное двух непрерывных функций.

Непрерывность тригонометрической функции $y=\sin x$ нами уже доказана, аналогичным образом можно показать непрерывность функции $y=\cos x$. А тригонометрические функции $y=\operatorname{tg} x$ и $y=\operatorname{ctg} x$ непрерывны, как отношение двух непрерывных функций $\sin x$ и $\cos x$, во всех точках, в которых их знаменатель отличен от нуля.

1.9.4. Свойства функций, непрерывных на отрезке

Функции, непрерывные на отрезке, имеют ряд важных свойств. Мы сформулируем их в виде теорем, не приводя доказательств.

Теорема 1.14. Если функция $y=f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то она достигает на этом отрезке своего наибольшего и наименьшего значений.

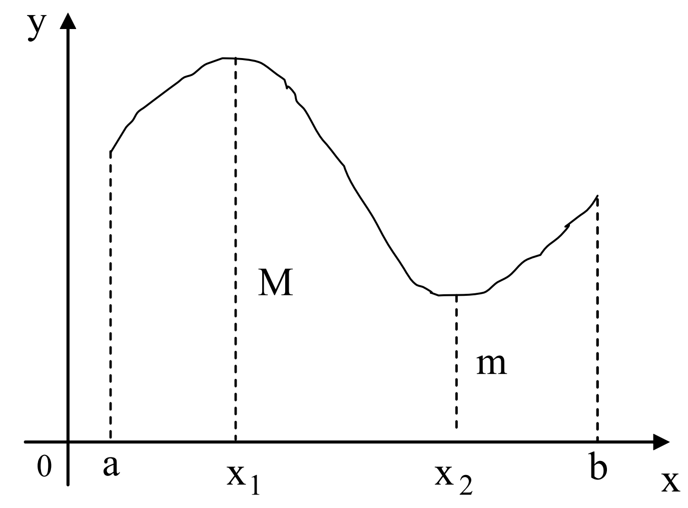


Рис. 1.18

Функция принимает наибольшее значение M в точке x_1, а наименьшее $m-$ в точке x_2 (рис. 1.18). Для любого $x\in[a,b]$ имеет место неравенство $m\le f(x)\le M$.

Из данной теоремы вытекает следующее следствие.

<u>*Следствие 1.2.*</u> Если функция непрерывна на отрезке, то она ограничена на этом отрезке.

Теорема 1.15. Если функция $y=f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ и на его концах принимает значения разных знаков, то внутри отрезка $[a,b]$ найдется хотя бы одна точка c, в которой данная функция обращается в нуль, то есть $f(c)=0$.

На графике $f(a)<0$, $f(b)>0$, $f(c)=0$ (рис. 1.19).

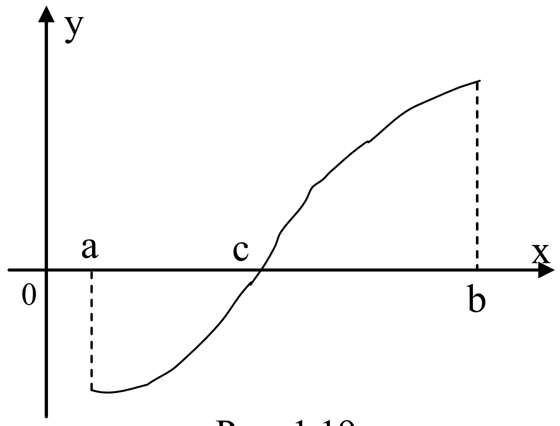


Рис. 1.19

Теорема 1.16. Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и на его концах принимает разные значения $f(a) = A$ и $f(b) = B$ $(A \neq B)$, то для любого числа C, заключенного между A и B, найдется внутри отрезка $[a, b]$ точка c такая, что $f(c) = C$.

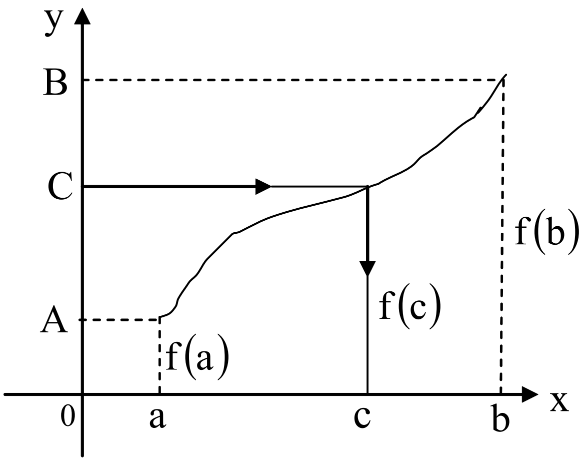


Рис. 1.20

Данная теорема утверждает, что непрерывная на $[a, b]$ функция принимает все промежуточные значения между A и B (рис. 1.20).