МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Харківський національний автомобільно-дорожній університет

До друку дозволяю
Заступник ректора
__________ І.П. Гладкий

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ
з дисципліни **«Вища математика»**
для студентів денної форми навчання освітньо-кваліфікаційного рівня бакалавр зі спеціальності
015.13 «Професійна освіта (метрологія, стандартизація та сертифікація)»
015.20 «Професійна освіта (транспорт)»

Затверджено Радою Факультету Компьютерных технологий та мехатроники протокол № ___ від

Укладач: ст. викладач каф. прикладної математики Козачок Л.М.

Харків
2016

ВВЕДЕНИЕ

Аналитическая геометрия как наука занимается изучением свойств геометрических объектов средствами алгебры. Основным методом этой науки является метод координат, позволяющий определять положение точки в некотором пространстве с помощью чисел-координат этой точки.

Так как в геометрии ее объекты (линии, поверхности, фигуры) определяются как множества точек, обладающих некоторым общим геометрическим свойством, то метод координат позволил описывать эти объекты, используя связи между числами - координатами точек объектов, т.е. средствами алгебры.

1.1. ПЛОСКАЯ ЛИНИЯ И ЕЕ УРАВНЕНИЕ В $\mathbf{R}^2$

В геометрии плоская линия ℓ определяется как множество точек плоскости (геометрическое место точек), обладающих некоторым общим для всех точек линии свойством. Например, окружность радиуса R есть множество всех точек плоскости, удаленных на расстояние R от некоторой точки O этой плоскости.

Введем аналитическое определение плоской линии. Пусть на плоскости введена декартова система координат. Выберем на этой плоскости произвольную точку $M(x;y)$. Рассмотрим вместе со множеством точек координатной плоскости множество уравнений вида $F(x,y)=0$. Будем говорить, что числа $x=x_0, y=y_0$ удовлетворяют уравнению $F(x,y)=0$, если $F(x_0,y_0)\equiv 0$ и ему не удовлетворяют, если $F(x_0,y_0)\neq 0$. Например числа $x_0=1, y_0=5$ удовлетворяют уравнению $5x-y=0$ и не удовлетворяют уравнению $3x+y+2=0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Уравнение $F(x,y)=0$, связывающее между собой переменные x и y называют ***уравнением плоской линии*** ℓ в выбранной системе координат, если координаты x и y любой точки $\overline{M}$ этой линии ему удовлетворяют , а координаты всех точек , не лежащих на ней , ему не удовлетворяют .

Множество всех точек координатной плоскости , координаты которых удовлетворяют уравнению $F(x,y)=0$, будем называть плоской линией (плоской кривой) .

Заметим, что это множество точек может содержать сколько угодно точек, быть конечным или даже оказаться пустым. Например, уравнению $y=x^2$ удовлетворяют координаты бесконечного множества точек; уравнению $x^2+y^2=0$ удовлетворяют координаты только одной точки $O(0;0)$; уравнению $x^2+y^2+1=0$ не удовлетворяют координаты всех точек плоскости. В первом случае плоская кривая является обычной кривой (парабола); во втором - кривая представляет собой точку; в третьем - мнимую плоскую кривую (мнимая окружность).

Из определения 1.1. следует, что любое уравнение вида $F(x,y)=0$ в общем случае определяет на координатной плоскости XOY некоторую линию. Для ее построения можно воспользоваться обычным методом точек.

ПРИМЕР 1.1. Построить линию, заданную уравнением $y=\sqrt{x}$

Придавая переменной x различные числовые значения и вычисляя соответствующие значения y, построим таблицу:

x	0	1	4	9	...
y	0	1	2	3	...

Введем на плоскости декартову систему координат и построим на этой плоскости соответствующие точки с координатами x, y. Соединяя построенные точки линией, получим искомую кривую (рис. 1.1)

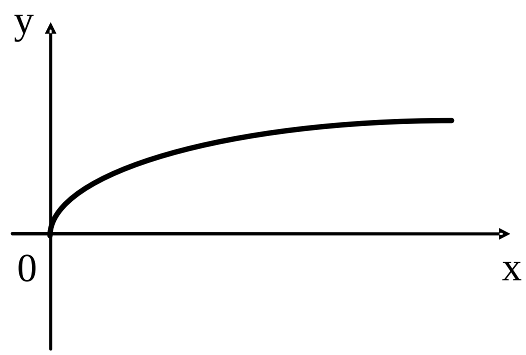

Рис. 1.1

В аналитической геометрии из бесконечного множества уравнений наиболее полно изучаются так называемые алгебраические уравнения.

<u>ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2.</u> Уравнение $F(x,y)=0$ называется алгебраическим, если выражение $F(x,y)$ есть сумма конечного числа слагаемых вида $Ax^k y^m$, где $k,m-$ целые неотрицательные числа, A -действительное число. При этом наибольшая из сумм степеней $k+m$ называется ***<u>степенью уравнения</u>***.

Например, уравнения $2x-3y+5=0$, $xy-7=0$ есть алгебраические уравнения соответственно первой и второй степеней. Уравнение $y-\sqrt{x}=0$ алгебраическим не является.

Уравнение $Ax+By+C=0$, где A,B,C - действительные числа, является наиболее общим алгебраическим уравнением первой степени. Уравнение $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+Q=0$ - общее алгебраическое уравнение второй степени.

Задача изучения свойств линии по известному ее уравнению является одной из главных задач аналитической геометрии. Второй центральной задачей этой науки является решение обратной задачи, т.е. задачи определения уравнения линии , если известны все ее точки. Например, непосредственно из определения окружности с центром в начале координат (рис.1.2) следует, что $\left|\overline{OM}\right| = R \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = R \Leftrightarrow x^2 + y^2 = R^2$,

если произвольная точка плоскости $M(x;y)$принадлежит окружности , и $\left|\overline{OM}\right| \neq R$, если точка $M(x;y)$ не принадлежит окружности. Следовательно, $x^2 + y^2 = R^2$, если $M \in \ell$ или $x^2 + y \neq R^2$, если $M \notin \ell$. Тогда, согласно определения 1.1. уравнение $x^2 + y^2 = R^2$ есть уравнение искомой окружности.

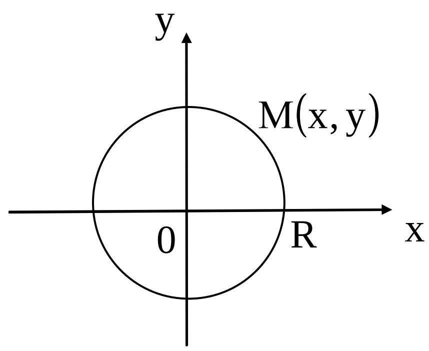

Рис. 1.2

1.2 ПРЯМАЯ ЛИНИЯ НА ПЛОСКОСТИ. УРАВНЕНИЕ ПРЯМОЙ ПО ТОЧКЕ И НОРМАЛЬНОМУ ВЕКТОРУ

Положение прямой ℓ на координатной плоскости XOY вполне определяется заданием:

1) любых двух ее точек;
2) точки и вектора, параллельного ℓ;
3) точки и вектора, перпендикулярного ℓ;
4) углового коэффициента и отрезка, отсекаемого прямой от оси OY;
5) других величин.

Поставим задачу определения уравнения прямой ℓ в каждом из перечисленных способов ее задания.

Уравнение прямой по точке и нормальному вектору

Пусть на плоскости XOYдана точка $M_0(x_0;y_0)$ и вектор $\overline{N} = A\bar{i} + B\bar{j}$ (рис.1.3). Требуется определить уравнение прямой ℓ проходящей через точку M_0 перпендикулярно вектору $\overline{N}$ (вектор $\overline{N} \perp \ell$ называется ***нормальным вектором прямой***).

Выберем на плоскости произвольную точку $M(x; y)$ и построим вектор $\overline{M_0M} = (x - x_0)\bar{i} + (y - y_0)\bar{j}$.

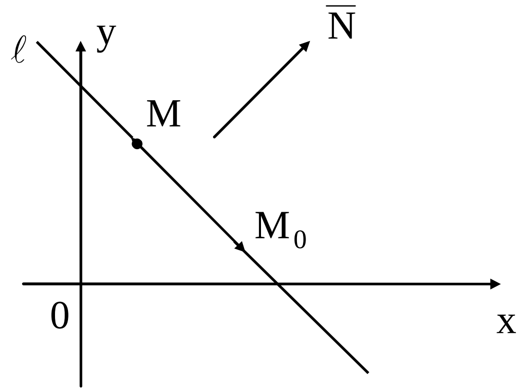

Рис. 1.3

Рассмотрим два случая:

1) пусть точка $M \in \ell$. Тогда $\overline{M_0M} \perp \overline{N} \Rightarrow \overline{M_0M} \cdot \overline{N} = 0$ или

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0; \qquad (1.1)$$

2) если точка $M \notin \ell$, то векторы $\overline{M_0M}$ и $\overline{N}$ не перпендикулярны. Следовательно $\overline{M_0M} \cdot \overline{N} \neq 0$ или $A(x - x_0) + B(y - y_0) \neq 0$. Из 1) и 2) и определения 1.1. уравнения плоской линии следует, что уравнение (1.1) является уравнением искомой прямой ℓ.

Уравнение (1.1) называется уравнением прямой по точке и нормальному вектору $\overline{N} = \{A; B\}$.

ПРИМЕР 1.2. Найти уравнение прямой ℓ, проходящей через точку $M_0(2;3)$ перпендикулярно вектору $\overline{N} = \{4;5\}$.

Решение. Уравнение прямой ℓ будем искать в виде $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$. По условию $A = 4, B = 5, x_0 = 2, y_0 = 3$. Тогда для ℓ получим $4(x - 2) + 5(y - 3) = 0 \Leftrightarrow 4x + 5y - 23 = 0$.

1.3. УРАВНЕНИЕ ПРЯМОЙ ПО ТОЧКЕ И НАПРАВЛЯЮЩЕМУ ВЕКТОРУ

Пусть на плоскости XOY дана точка $M_0(x_0; y_0)$ и вектор $\overline{S} = m\bar{i} + n\bar{j}$ (рис 1.4).

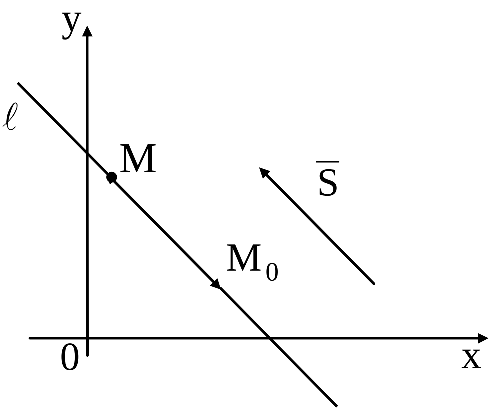

Рис. 1.4

Требуется определить уравнение прямой ℓ проходящей через точку $M_0(x_0;y_0)$ параллельно вектору $\overline{S}$ (вектор $\overline{S}$ называется ***<u>направляющим вектором прямой</u>***).

Выберем на плоскости XOY произвольную точку $M(x;y)$ и построим вектор $\overline{M_0M} = (x-x_0)\overline{i} + (y-y_0)\overline{j}$.

Рассмотрим два случая:

1) пусть точка $M \in \ell$. Тогда $\overline{M_0M} \parallel \overline{S}$. Следовательно, векторы $\overline{M_0M}$ и $\overline{S}$ коллинеарны. Итак, $\overline{M_0M} = \lambda\overline{S}$, где λ - некоторое действительное число. Тогда

$$(x-x_0)\overline{i} + (y-y_0)\overline{j} = \lambda(m\overline{i} + n\overline{j}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - x_0 = m\lambda \\ y - y_0 = n\lambda \end{cases} \Rightarrow \frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \lambda \Leftrightarrow \frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n}; \qquad (1.2)$$

2) пусть точка $M \notin \ell$. Тогда $\overline{M_0M} \neq \lambda\overline{S}$ при любом λ. Отсюда и $\frac{x-x_0}{m} \neq \frac{y-y_0}{n}$. Из 1) и 2) и определения 1.1 уравнения линии следует, что уравнение (1.2) является уравнением искомой прямой ℓ. Уравнение (1.2) называется уравнением прямой по точке и направляющему вектору $\overline{S} = \{m;n\}$. Его также называют каноническим уравнением прямой.

<u>*Замечание*</u>. Если прямая ℓ проходит через точку $M_0(x_0;y_0)$ и параллельна оси OX, то направляющий вектор $\overline{S}$ также параллелен этой оси. Следовательно, $\overline{S} = \{m;0\}$. Хотя его проекция $n = 0$, уравнение этой прямой условились записывать в канонической форме, т.е. в форме $\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{0}$.

Последнее уравнение считается другой формой записи уравнения этой прямой $y = y_0$. Аналогично каноническое уравнение вида $\frac{x - x_0}{0} = \frac{y - y_0}{n}$ означает другую форму записи уравнения прямой $x = x_0$, проходящей через точку $M_0(x_0; y_0)$ параллельно оси OY.

1.4. УРАВНЕНИЕ ПРЯМОЙ ПО ДВУМ ТОЧКАМ

Пусть на плоскости XOY даны две точки $M_1(x_1; y_1), M_2(x_2; y_2)$ и требуется найти уравнение прямой ℓ, проходящей через эти точки (рис.1.5). Согласно формуле (1.2) уравнение любой прямой проходящей через точку M_1, запишется в виде

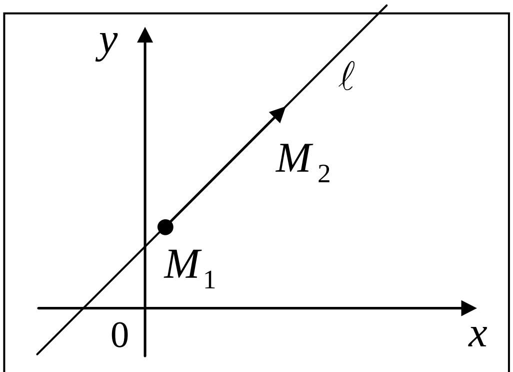

Рис. 1.5

$$\frac{x - x_1}{m} = \frac{y - y_1}{n}, \tag{1.3}$$

где m и n проекции неизвестного направляющего вектора $\bar{S}$ этой прямой.

Примем за направляющий вектор $\bar{S}$ вектор $\overline{M_1M_2} = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1\}$.Тогда $m = x_2 - x_1, n = y_2 - y_1$. Подставляя найденные числа в уравнение (1.3), получим уравнение искомой прямой ℓ.

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \tag{1.4}$$

Уравнение (1.4) называется уравнением прямой, проходящей через две данные точки.

ПРИМЕР 1.3. Найти уравнение прямой, проходящей через точки $M_1(1;3)$ и $M_2(5;4)$.

Решение. Полагая в (1.4) $x_1 = 1, y_1 = 3, x_2 = 5, y_2 = 4$, получим искомое уравнение $\frac{x-1}{5-1} = \frac{y-3}{4-3} \Leftrightarrow x - 4y + 11 = 0.$

1.5. УРАВНЕНИЕ ПРЯМОЙ ПО ТОЧКЕ И УГЛОВОМУ КОЭФФИЦИЕНТУ

Пусть на плоскости XOY проведена некоторая прямая ℓ (рис.1.6). Углом наклона α прямой к оси OX называется угол, на который нужно повернуть вокруг начала координат против движения часовой стрелки ось абсцисс так, чтобы она стала параллельна данной прямой.

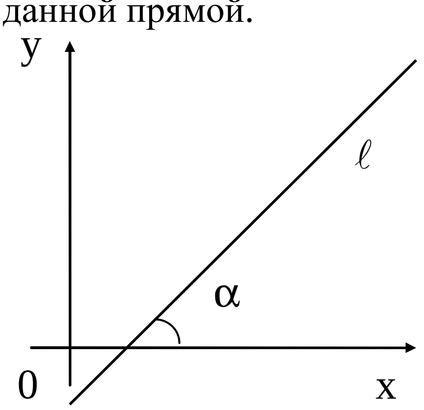

Рис.1.6

Тангенс угла наклона α прямой называется угловым коэффициентом прямой и обозначается буквой k. Итак,

$$k = \mathrm{tg}\alpha \qquad (1.5)$$

Заметим, что если α острый угол, то $k > 0$, если тупой, то $k < 0$, если $\alpha = 0$, то $k = 0$, если $\alpha = \frac{\pi}{2}$, то k не существует.

Пусть требуется найти уравнение прямой ℓ, если ℓ проходит через точку $M_0(x_0; y_0)$ и имеет угловой коэффициент k (рис.1.7). Согласно формуле (1.2) уравнение любой прямой проходящей через точку $M_0(x_0; y_0)$ запишется в виде

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n},$$

где m и n есть координаты направляющего вектора $\bar{S}$. В качестве направляющего вектора прямой ℓ примем единичный вектор $\bar{S}^0 = \{\cos\alpha; \cos\beta\}$, составляющий с осью OX тот же угол α, что и прямая ℓ.

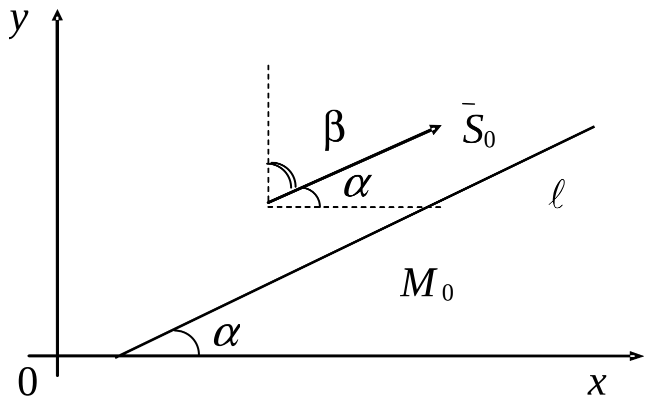

Рис.1.7

Так как $\cos\beta = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha$, то $\bar{S}^0 = \{\cos\alpha\,;\sin\alpha\}$.

Полагая $m = \cos\alpha, n = \sin\alpha$, получим

$$\begin{gathered}\frac{x - x_0}{\cos\alpha} = \frac{y - y_0}{\sin\alpha} \Leftrightarrow y - y_0 = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}(x - x_0) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow y - y_0 = \mathrm{tg}\alpha(x - x_0) \Leftrightarrow y - y_0 = k(x - x_0)\end{gathered} \tag{1.6}$$

Уравнение (1.6) называется уравнением прямой по точке и угловому коэффициенту.

1.6. УРАВНЕНИЕ ПРЯМОЙ С УГЛОВЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ. УГОЛ МЕЖДУ ДВУМЯ ПРЯМЫМИ

Пусть прямая ℓ наклонена под углом $\alpha \neq \dfrac{\pi}{2}$ к оси OX и пересекает ось OY в точке $B(0;b)$ (рис.1.8). Уравнение ℓ согласно формуле (1.6) при $x_0 = 0, y_0 = b$ запишется в виде

$$y - b = kx \Leftrightarrow y = kx + b. \tag{1.7}$$

Уравнение (1.7) называется уравнением прямой с угловым коэффициентом.

Частные случаи:

1) если $b = 0$, то уравнением примет вид $y = kx$. Это есть уравнение прямой, проходящей через начало координат;

2) если $k = 0$, то $y = b$ есть уравнение прямой, параллельной оси OX;

3) если $k = b = 0$, то $y = 0$ - уравнение самой оси OX.

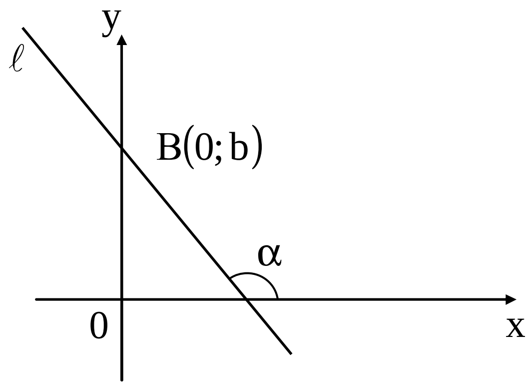

Рис. 1.8

Пусть на плоскости XOY даны две пересекающиеся прямые ℓ_1 и ℓ_2. (рис.1.9).

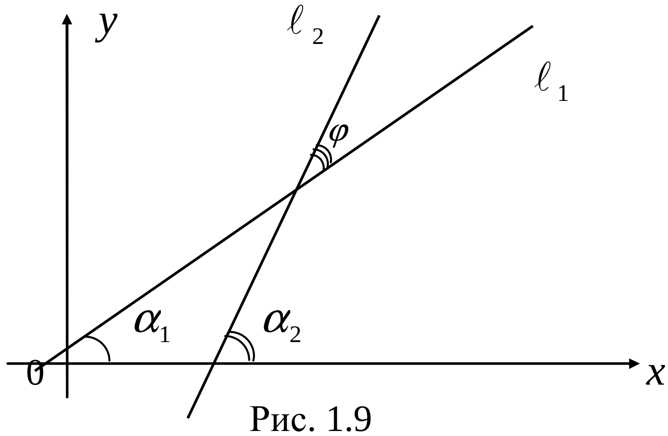

Рис. 1.9

Пусть прямые ℓ_1 и ℓ_2 даны уравнениями $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$. Требуется определить угол φ между ними. Предположим, что прямые не перпендикулярны и вычислим $tg\varphi$. Непосредственно из рис.1.9 найдем, что $\varphi = \alpha_2 - \alpha_1$.

Тогда

$$tg\varphi = tg(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{tg\alpha_2 - tg\alpha_1}{1 + tg\alpha_1\alpha_2}.$$

Но

$$tg\alpha_1 = k_1, tg\alpha_2 = k_2.$$

Следовательно,

$$tg\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2} \tag{1.8}$$

Итак, если угол φ отсчитывается от прямой ℓ_1 к прямой ℓ_2 и $\varphi \neq \frac{\pi}{2}$, то угол между прямыми может быть найден с помощью формулы (1.8).

Заметим, что если $\ell_1 \| \ell_2$, то $\alpha_1 = \alpha_1$. Тогда $\mathrm{tg}\alpha_1 = \mathrm{tg}\alpha_2$.

Следовательно,

$$k_1 = k_2 \tag{1.9}$$

Обратно, если $k_1 = k_2$, то

$$\alpha_1 = \alpha_2 \Rightarrow \ell_1 \| \ell_2 .$$

Таким образом, равенство (1.9) является необходимым и достаточным условием параллельности двух прямых.

Пусть $\ell_1 \perp \ell_2$, тогда формула (1.8) теряет свой смысл. Но в этом случае $\varphi = \frac{\pi}{2}$ и $\alpha_2 - \alpha_1 = \frac{\pi}{2}$. Тогда $\mathrm{tg}\alpha_2 = \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha_1\right) = -\mathrm{ctg}\alpha_1 = -\frac{1}{\mathrm{tg}\alpha_1}$.

Следовательно,

$$k_2 = -\frac{1}{k_1} \text{ или } k_1 \cdot k_2 = -1. \tag{1.10}$$

Нетрудно проверить, что из $k_1 \cdot k_2 = -1$ следует, что $\ell_1 \perp \ell_2$. Условие (1.10) является условием перпендикулярности двух прямых.

ПРИМЕР 1.4. Найти проекцию точки $P(-6;4)$ на прямую $y = \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}$.

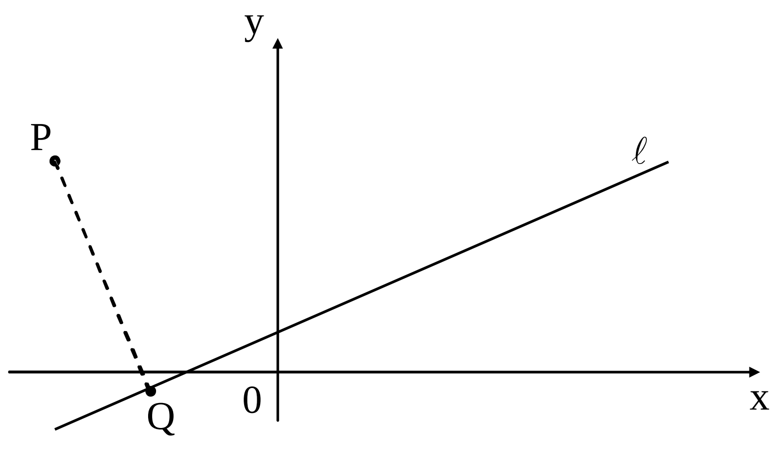

Рис. 1.10

Решение. На плоскости XOY проведем прямую ℓ и построим точку P. Обозначим через Q проекцию точки P на прямую ℓ (рис.1.10).

Уравнение прямой (PQ) будем искать в форме уравнения прямой по точке и угловому коэффициенту, т.е. в форме $y - y_p = k_{PQ}(x - x_p)$. Подставляя значения $x_p = -6, y_p = 4,$ получим $y - 4 = k_{PQ}(x + 6)$. Прямые (PQ) и ℓ перпендикулярны. Тогда согласно формуле (1.10) $k_\ell \cdot k_{PQ} = -1$. Но $k_\ell = \frac{4}{5}$, тогда $k_{PQ} = -\frac{5}{4}$. Следовательно, уравнение (PQ) запишется в виде: $y - 4 = -\frac{5}{4}(x + 6)$ или $y = -\frac{5}{4}x - \frac{7}{2}$.

Точка Q принадлежит обеим прямым ℓ и (PQ). Следовательно, ее координаты удовлетворяют уравнениям обеих прямых. Тогда, координаты точки Q найдутся из системы

$$\begin{cases} y = \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}, \\ y = -\frac{5}{4}x - \frac{7}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}, \\ \frac{4}{5}x + \frac{3}{5} = -\frac{5}{4}x - \frac{7}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}, \\ x = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -1, \\ x = -2. \end{cases}$$

Ответ : $Q(-2;-1)$.

1.7. ОБЩЕЕ УРАВНЕНИЕ ПРЯМОЙ

Как уже известно, уравнение $Ax + By + C = 0$, где A, B, C - действительные числа, является общим алгебраическим уравнением первой степени относительно двух переменных x и y. Установленные ранее формы уравнения прямой являются также алгебраическими уравнениями первой степени относительно x и y и при помощи простейших действий могут быть приведены к форме

$$Ax + By + C = 0 \tag{1.11}$$

Покажем, что уравнение при любых A, B, C, кроме $A = B = 0$, определяет прямую на координатной плоскости XOY. Действительно, полагая одно из чисел A или B, например B, не равным нулю, получим

$$Ax + By + C = 0 \Leftrightarrow Ax + B\left(y + \frac{C}{B}\right) = 0 \Leftrightarrow A(x - 0) + B\left(y + \frac{C}{B}\right) = 0$$

Сравнивая это уравнение с уравнением $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$, найдем, что оно есть уравнение прямой, проходящей через точку $\left(0; -\frac{C}{B}\right)$ перпендикулярно вектору $\overline{N} = \{A; B\}$. Следовательно, и уравнение $Ax + By + C = 0$ есть уравнение прямой.

Уравнение (1.11) называется общим уравнением прямой.

Частные случаи:

1) если $C = 0$, то $Ax + By = 0$. Это есть уравнение прямой, проходящей через начало координат;

2) если $A = 0, B \neq 0$, то $y = -\frac{C}{B}$ есть уравнение прямой, параллельной оси OX;

3) если $B = 0, A \neq 0$, то $x = -\frac{C}{A}$. Это уравнение прямой параллельной оси OY. В частности, при $C = 0$ получим $x = 0$ - уравнение оси OY.

ПРИМЕР 1.5. Дана прямая $2x + 3y + 4 = 0$. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(2;1)$ параллельно данной прямой.

<u>Решение.</u> Так как $2x + 3y + 4 = 0$ то $y = -\frac{2}{3}x - \frac{4}{3}$. Сравнивая полученное уравнение с уравнением $y = kx + b$, получим, что $k = -\frac{2}{3}$.

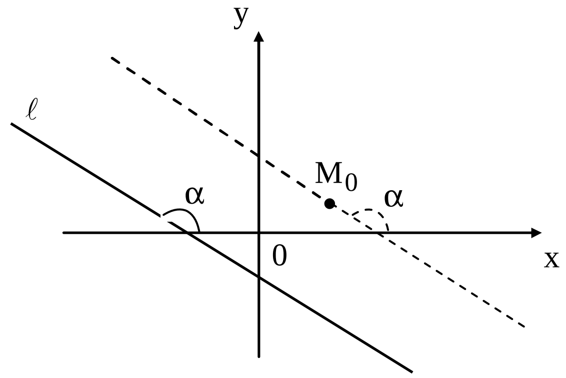

Рис. 1.11

Искомая прямая должна быть параллельна данной прямой. Следовательно, согласно формуле (1.9) ее угловой коэффициент $k = -\frac{2}{3}$. Итак, для искомой прямой известна ее точка $M_0(2;1)$ и угловой коэффициент $k = -\frac{2}{3}$. Тогда ее уравнение найдем по формуле (1.6)

$$y - y_{M_0} = k(x - x_{M_0}) \Rightarrow y - 1 = -\frac{2}{3}(x - 2) \Leftrightarrow 2x + 3y - 7 = 0.$$

Заметим попутно, что коэффициенты $A = 2, B = 3$ у искомой и данной прямых оказались равными. Этот факт не случаен (доказать самостоятельно).

Ответ: $2x + 3y - 7 = 0$.

ВЫВОД. Заканчивая изложение вопроса о прямой линии на плоскости, еще раз отметим, что всякое алгебраическое уравнение первой степени относительно двух переменных x и y, т.е. уравнение вида $Ax + By + C = 0$, есть уравнение прямой линии на плоскости XOY. И наоборот, уравнение любой прямой на этой плоскости является алгебраическим уравнением вида $Ax + By + C = 0$.

1.8 КРИВЫЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА. ОКРУЖНОСТЬ

В следующих параграфах рассматриваются геометрические образы алгебраического уравнения второй степени относительно двух переменных:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + Q = 0, \tag{1.12}$$

где A, B, C, D, E, Q - действительные числа;

A, B, C одновременно не равны нулю.

Линия, определяемая уравнением (1.12), называется кривой второго порядка.

Пусть на координатной плоскости XOY дана окружность радиуса R с центром в точке $M_0(x_0; y_0)$ и требуется определить ее уравнение (рис.1.12).

Выберем на этой плоскости произвольную точку $M(x; y)$.

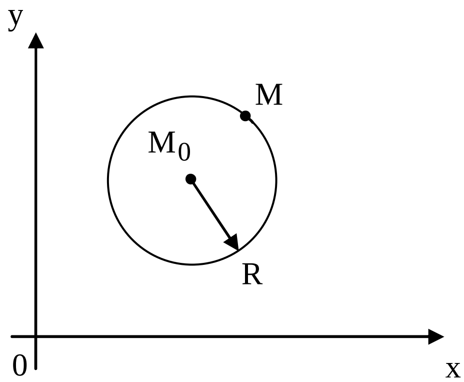

Рис. 1.12

Тогда:

1) если точка M лежит на окружности, то

$$\begin{gathered} \left|\overline{M_0M}\right| = R \Leftrightarrow \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = R \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2 \end{gathered} \tag{1.13}$$

2) если точка M не лежит на окружности, то для внутренних точек круга $\left|\overline{M_0M}\right| < R$, а для внешних точек круга $\left|\overline{M_0M}\right| > R$. Следовательно, для всех точек, не лежащих на окружности,

$\left|\overline{M_0M}\right| \neq R \Leftrightarrow (x-x_0)^2+(y-y_0)^2 \neq R^2.$

Из 1) и 2) и определения 1.1. уравнения плоской кривой, следует, что уравнение (1.13) есть уравнение искомой окружности.

Уравнение (1.13) является уравнением второй степени относительно x и y. Следовательно, окружность есть кривая второго порядка. Раскрыв скобки в уравнении (1.13), получим, что

$$x^2-2xx_0+x_0{}^2+y^2-2yy_0+y_0{}^2-R^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2-2x_0x-2y_0y+x_0{}^2+y_0{}^2-R^2=0$$

Сравнивая с (1.12), найдем, что $A=1, B=0, C=1, D=-2x_0$, $E=-2y_0, Q=x_0{}^2+y_0{}^2-R^2$.Рассматривая полученные коэффициенты $A, B,...., Q$, легко заметить, что для окружности выполнились два условия:

1) коэффициент B при произведении xy равен нулю;

2) коэффициенты при x^2 и y^2 равны между собой. Покажем, что если в (1.12) старшие коэффициенты A, B и C удовлетворяют условиям $A=C\neq 0, B=0,$ то это уравнение определяет либо действительную окружность с $R>0$, либо точку $(R=0)$, либо мнимую окружность $(R<0)$. Полагая для простоты выкладок $A=C=1, B=0$ в уравнение (1.12), получим

$$x^2+y^2+Dx+Ey+Q=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2+2\cdot\frac{D}{2}x+\frac{D^2}{4}\right)+\left(y^2+2\cdot\frac{E}{2}y+\frac{E^2}{4}\right)+Q-\frac{D^2}{4}-\frac{E^2}{4}=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(x+\frac{D}{2}\right)^2+\left(y+\frac{E}{2}\right)^2=\frac{D^2}{4}+\frac{E^2}{4}-Q \qquad (1.14)$$

Обозначим $\frac{D}{2}=-x_0, \frac{E}{2}=-y_0, \frac{D^2}{4}+\frac{E^2}{4}-Q=a$.

Рассмотрим три случая:

1) $a>0.$ Тогда уравнение (1.14) запишется в виде $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=(\sqrt{a})^2$, т.е. определяет действительную окружность радиуса $R=\sqrt{a}$ с центром в точке $O_1(x_0;y_0)$.

2) $a=0$. Тогда (1.14) запишется в виде $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x=x_0, \\ y=y_0. \end{cases}$ т.е. уравнение (1.14) определяет единственную точку $O_1(x_0;y_0)$,которую можно рассматривать как "окружность" радиуса нуль.

3) $a<0.$ Тогда уравнение (1.14) не удовлетворяется ни при каких значе-

ниях x и y. Следовательно, уравнение (1.14), не определяет никакой действительно существующей кривой или для общности говорят, что оно определяет мнимую окружность с $R < 0$.

Итак, если в уравнение (1.13) старшие коэффициенты удовлетворяют условиям $A = C, B = 0,$ то уравнение определяет некоторую окружность.

1.9. ЭЛЛИПС

<u>ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.3.</u> ***<u>Эллипсом</u>*** называется множество всех точек плоскости, сумма расстояний каждой из которых от двух данных точек этой плоскости, называемых фокусами, есть величина постоянная.

Выберем на плоскости две произвольные точки F_1 и F_2 и введем систему координат XOY, как это показано на рис.1.13. Обозначим через $2c$ расстояние между этими точками, тогда выбранные фокусы F_1 и F_2 будут иметь координаты $F_1(-c;0)$, а $F_2(c;0)$.

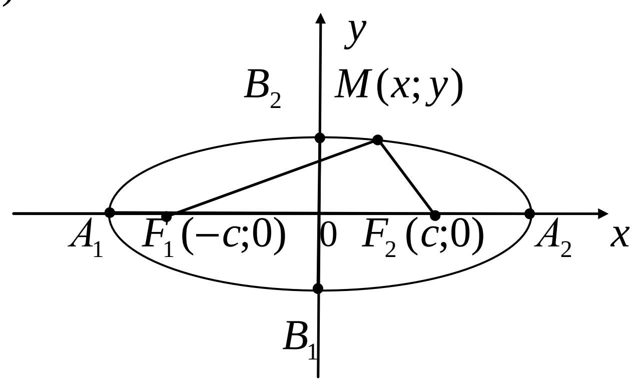

Рис.1.13.

Пусть точка $M(x;y)$ произвольная точка плоскости XOY. Предположим, что точка M принадлежит эллипсу. Тогда, если $2a$, где $2a > 2c$, есть сумма расстояний от точки M до точек F_1 и F_2, то по определению эллипса

$$\left|\overline{MF_1}\right| + \left|\overline{MF_2}\right| = 2a \Leftrightarrow \sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a, \quad (1.14)$$

Избавляясь от иррациональности, уравнение (1.14) можно привести к виду:

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2). \qquad (1.15)$$

По условию $2a > 2c > 0$.Тогда $a > c$ и $a^2 > c^2$. Пусть $a^2 - c^2 = b^2$. Подставляя в уравнение (1.15) получим:

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad (1.16)$$

где $b^2 = a^2 - c^2$.

Пусть точка $M(x;y)$ не лежит на эллипсе. Тогда для такой точки $\left|\overline{MF_1}\right| + \left|\overline{MF_2}\right| \neq 2a$. Следовательно, координаты точки M не могут удовлетворять и уравнению (1.16).

Итак, согласно определению 1.1. уравнения плоской кривой, уравнение (1.16) есть уравнение искомого эллипса.

Уравнение эллипса (1.16) называется его каноническим уравнением.

Воспользовавшись уравнением эллипса определим форму этой кривой. Так как переменные x и y входят в (1.16) только в четной степени, то кривая симметрична относительно осей координат. Следовательно, достаточно определить форму кривой только в первой четверти. При $x = 0$ из (1.16) получим, что $y = b$. При $x = a$ получим, что $y = 0$. При увеличении x от 0 до a переменная у уменьшается от значения b до 0. При $a < x < +\infty$ y не существует. Соединяя плавной кривой точки $B_2(0;b)$ и $A_2(a;0)$, построим искомую кривую в первой четверти (рис.1.13). Используя ее симметрию относительно осей координат, построим все множество точек эллипса.

<u>Терминология.</u> Точки $F_1(-c;0)$ и $F_2(c;0)$ называются фокусами эллипса. Точки $A_1(-a;0), B_1(0;-b), A_2(a;0), B_2(0;b)$ называются вершинами эллипса. Точка $O(0;0)$ называется центром эллипса. Ось, на которой расположены фокусы эллипса, называется фокальной осью. Оси OX и OY называются осями симметрии эллипса.

Отрезки $[A_1;A_2]$, длины $2a$ и $[B_1;B_2]$, длины $2b$ называются соответственно большой и малой осями эллипса. Отрезок $[F_1;F_2]$, длины $2c$, называется фокусным расстоянием.

Отрезки $[O;A_1],[O;A_2]$, длины a и $[O;B_1],[O;B_2]$, длины b называются соответственно большой и малой полуосями эллипса. Соотношение c/a, называется эксцентриситетом эллипса и обозначается буквой ε. Итак,

$$\varepsilon = \frac{c}{a}. \tag{1.17}$$

Так как по условию $c < a$, то $0 < \varepsilon < 1$. Эксцентриситет характеризует форму эллипса. Действительно, $b^2 = a^2 - c^2$. Следовательно,

$\dfrac{b^2}{a^2} = 1 - \dfrac{c^2}{a^2} \Leftrightarrow \left(\dfrac{b}{a}\right)^2 = 1 - \varepsilon^2$. Тогда, чем меньше ε, тем меньше малая ось эллипса отличается от его большой оси. Иными словами, форма эллипса приближается к форме окружности радиуса $R = a = b$. При этом фокусы эллипса неограниченно приближаются к центру $O(0;0)$ этой окружности. В пределе при $\varepsilon = 0$ эллипс превращается в окружность.

ПРИМЕР 1.6. Дан эллипс $9x^2 + 25y^2 = 225$. Найти:

1) его полуоси; 2) фокусы; 3) эксцентриситет.

Решение. Разделив обе части уравнения эллипса на 225, найдем его каноническое уравнение $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$. Отсюда $a^2=25, b^2=9$. Следовательно $a=5, b=3$. Вычислим $c^2=a^2-b^2=25-9=16$. Тогда $c=4$, а фокусы эллипса расположены в точках $F_1(-4;0), F_2(4;0)$. Эксцентриситет эллипса $\varepsilon=\frac{c}{a}=\frac{4}{5}$.

1.10. ГИПЕРБОЛА

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.4. ***Гиперболой*** называется множество всех точек плоскости, абсолютная величина разности расстояний каждой из которых от двух данных точек этой плоскости, называемых фокусами, есть величина постоянная.

Выберем на плоскости две произвольные точки F_1, и F_2 и введем систему координат XOY на этой плоскости так, как показано на рис.1.14. Обозначим через $2c$ расстояние между точками F_1 и F_2, тогда выбранные фокусы будут иметь координаты: $F_1(-c;0)$, а $F_2(c;0)$.

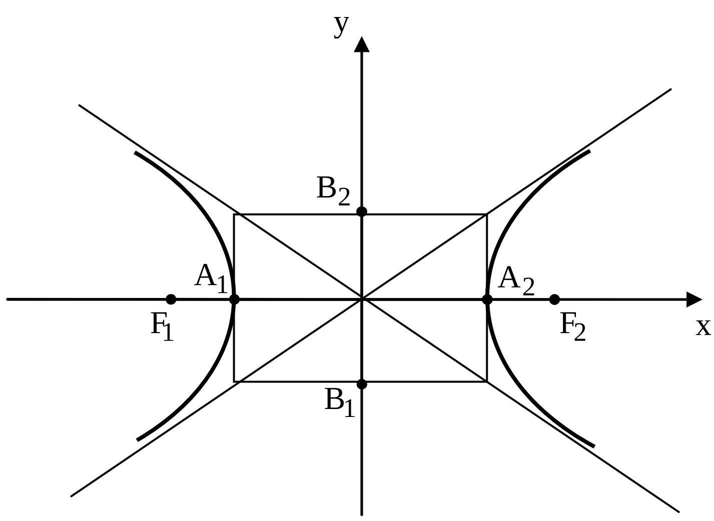

Рис.1.14.

Пусть точка $M(x;y)$ произвольная точка плоскости XOY. Предположим, что точка $M(x;y)$ принадлежит гиперболе. Тогда, если $2a$, где $2a<2c$, есть абсолютная величина разности расстояний от точки M до точек F_1 и F_2, то по определению гиперболы

$$\left|\overline{MF_1}\right|-\left|\overline{MF_2}\right|=\pm 2a \Leftrightarrow \sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}=\pm 2a.$$

Избавляясь от иррациональности, уравнение можно привести к виду

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2). \qquad (1.18)$$

По условию $2a < 2c$. Тогда $c > a$ и $c^2 > a^2$. Обозначим через b^2 разность $c^2 - a^2$. Подставляя это число в уравнение (1.18), получим

$$-b^2x^2 + a^2y^2 = -a^2b^2 \Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \qquad (1.19)$$
$$b^2 = c^2 - a^2$$

Пусть точка $M(x;y)$ не лежит на гиперболе. Тогда для такой точки $\left|\overline{MF_1}\right| - \left|\overline{MF_2}\right| \neq \pm 2a$. Следовательно, координаты точки M не могут удовлетворять и уравнению (1.19).

Итак, согласно определению 1.1 уравнения плоской кривой, уравнение (1.19) является уравнением искомой гиперболы. Оно называется каноническим уравнением гиперболы.

Определим форму гиперболы. Так как переменные x и y входят в уравнение (1.19) только в четной степени, то кривая симметрична относительно осей координат. Следовательно, достаточно определить ее форму только в первой четверти. При $x = 0$ из (1.19) получим, что $y^2 = -b^2 \Leftrightarrow y \notin \varnothing$.Это значит, что кривая не имеет с осью OY общих точек. При $a < x < \infty$ значения y существуют, причем при увеличении x переменная y также возрастает и изменяется от 0 до $+\infty$.

Покажем, что часть гиперболы, расположенная в 1 четверти, имеет асимптоту - прямую $y = \frac{b}{a}x$. Из уравнениям (1.19) найдем, что $y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$. Рассмотрим разность между ординатами прямой и гиперболы при одном и том же значении x (рис.1.15). Имеем:

$$Y_{ac} - Y_{гип} = \frac{b}{a}x - \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} = \frac{b}{a} \cdot \frac{(x - \sqrt{x^2 - a^2}) \cdot (x + \sqrt{x^2 - a^2})}{x + \sqrt{x^2 - a^2}} =$$
$$= \frac{b}{a} \cdot \frac{x^2 - x^2 + a^2}{x + \sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{ab}{x + \sqrt{x^2 - a^2}} \qquad (1.20)$$

Из (1.20) следует, что при увеличении x разность между Y_{ac} и $Y_{гип}$ стремится к нулю. Следовательно, стремится к нулю и расстояние между точками прямой и гиперболы. Тогда прямая $y = \frac{b}{a}x$ является асимптотой гиперболы. Для построения этой асимптоты достаточно построить точку с координатами $(a;b)$ и провести прямую, проходящую через эту точку и начало координат (рис. 1.15).

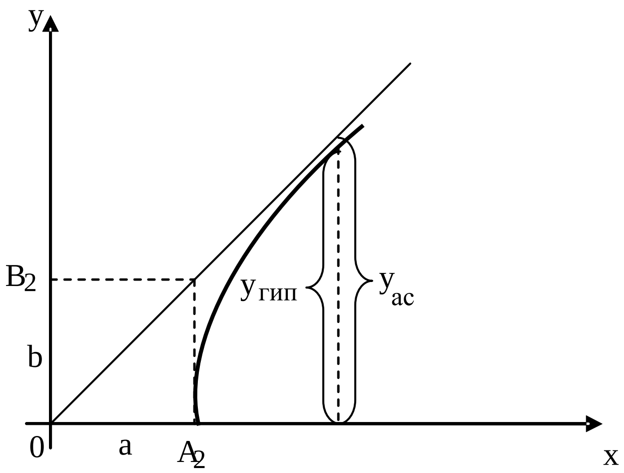

Рис. 1.15

Терминология. Точки $F_1(-c;0)$, $F_2(c;0)$ называются ***фокусами гиперболы.*** Точки $A_1(-a;0)$, $A_2(a;0)$ называются ***действительными вершинами гиперболы***, а точки $B_1(0;-b)$, $B_2(0;\ b)$ ***- мнимыми вершинами.*** Точка $O(0;0)$ ***называется центром гиперболы.*** Ось, на которой расположены фокусы, называется ***фокальной осью*** или ***действительной осью.*** Ось, .на которой расположены мнимые вершины гиперболы, называется ***мнимой осью.***

Отрезок $[F_1;F_2]$, длины $2c$, называется ***фокусным расстоянием.*** Отрезок $[A_1;A_2]$, длины $2a$, называется ***действительной осью гиперболы*** (название совпадает с названием самой оси). Отрезок $[B_1;B_2]$, длины $2b$, называется ***мнимой осью.*** Отрезки $[0;A_1]$, $[0;A_2]$, $[0;B_1]$, $[0;B_2]$ называются соответственно ***действительными и мнимыми полуосями гиперболы.*** Число $\frac{c}{a} = \varepsilon$ - называется ***эксцентриситетом гиперболы*** . По определению гиперболы $c > a$. Следовательно, $\varepsilon > 1$. Эксцентриситет гиперболы характеризует ее форму. Действительно, из (1.19) следует, что $\left(\frac{b}{a}\right)^2 = \left(\frac{c}{a}\right)^2 - 1 \Leftrightarrow \left(\frac{b}{a}\right)^2 = \varepsilon^2 - 1.$ Тогда, чем меньше ε, тем меньше число b по сравнению с числом a, т.е. точки гиперболы приближаются к оси XOY.

Прямоугольник, изображенный на рис.1.15 пунктирной линией, со сторонами длины $2a$ и $2b$, называется основным прямоугольником. С его помощью легко строятся две асимптоты гиперболы $y = \frac{b}{a}x$ и $y = -\frac{b}{a}x$, являющиеся диагоналями этого прямоугольника.

Частный случай. При $a = b$ гипербола называется ***равносторонней (равнобочной)*** Для равнобочной гиперболы из (1.19) найдем, что $x^2 - y^2 = a^2$, а асимптотами будут биссектрисы координатных углов: $y = x$ и $y = -x$. Эксцентриситет равнобочной гиперболы $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + a^2}}{a} = \sqrt{2}$.

ПРИМЕР 1.7. Дана гипербола $16x^2 - 9y^2 = 144$. Найти:1) полуоси a и b; 2) фокусы; 3) эксцентриситет ; 4) уравнения асимптот.

Решение. Разделив обе части данного уравнения гиперболы на 144, найдем каноническое уравнение $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$. Отсюда $a^2 = 9$, $b^2 = 16$. Следовательно $a = 3$, $b = 4$. Тогда $c^2 = a^2 + b^2 = 25$. Или $c = 5$. Фокусы гиперболы располагаются в точках $F_1(-5;0)$, $F_2(5;0)$. Эксцентриситет $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{5}{3}$. Асимптотами являются прямые $y = \pm\frac{b}{a}x = \pm\frac{4}{3}x$.

1.11. ПАРАБОЛА

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.5. Параболой называется множество всех точек плоскости, равноудаленных от данной точки, называемой фокусом, и данной прямой, называемой директрисой.

Выберем на плоскости произвольную точку F и произвольную прямую (NP), не проходящую через эту точку. Назовем точку F фокусом, а прямую (NP) директрисой. Обозначим расстояние от точки F до прямой (NP) через p и построим систему координат XOY так, как это изображено на рис 1.16.

Тогда фокус будет расположен в точке $F\left(\frac{p}{2};0\right)$, а директриса будет иметь уравнение $x = -\frac{p}{2}$.

Пусть точка $M(x;y)$ произвольная точка плоскости XOY. Предположим, что точка M лежит на параболе. Тогда, по определению этой кривой $\left|\overline{MF}\right| = \left|\overline{MN}\right|$, где $(MN) \perp (NP)$. Точка N по построению имеет координаты $N\left(-\frac{p}{2};y\right)$.Следовательно, равенство $\left|\overline{MF}\right| = \left|\overline{MN}\right|$ запишется в виде

$$\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}=\sqrt{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+(y-y)^2}\Leftrightarrow x+\frac{p}{2}=\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}$$

Освобождаясь от иррациональности, получим

$$x^2+px+\frac{p^2}{4}=x^2-px+\frac{p^2}{4}+y^2\Leftrightarrow y^2=2px. \qquad (1.21)$$

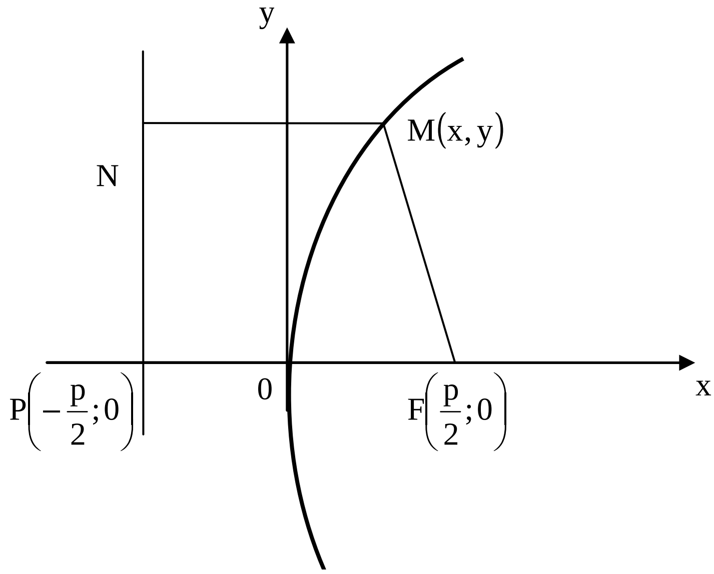

Рис. 1.16

Пусть точка M не лежит на параболе. Тогда $\left|\overline{MF}\right|\neq\left|\overline{MN}\right|$. Следовательно, и $y^2\neq 2px$.

Итак, согласно определения 1.1 уравнения плоской кривой, уравнение (1.21) является уравнением искомой параболы. Оно называется каноническим уравнением параболы, а число $p>0$ называется ее параметром.

Определим форму параболы. В уравнение (1.21) переменная y входит в четной степени. Следовательно, кривая симметрична относительно оси OX. При $x=0,\ y=0$. Значит, кривая проходит через начало координат. При $-\infty<x<0, y\in\varnothing$, так как по условию $p>0$. При $0<x<+\infty$ y существует, причем при увеличении x переменная y также увеличивается. По полученным данным построим параболу (рис.1.16).

<u>Терминология,</u> Точка $F\left(\frac{p}{2};0\right)$ называется ***<u>фокусом параболы.</u>*** Точка $O(0;0)$ называется ***<u>вершиной параболы.</u>*** Прямая $x=-\frac{p}{2}$ называется ***<u>директрисой.</u>*** Ось, на которой расположен фокус, называется ***<u>фокальной осью</u>***. Расстояние p от фокуса до директрисы называется ***<u>параметром параболы.</u>***

<u>Дополнение.</u> Если фокальную ось параболы принять за ось OY, то урав-

нение параболы запишется в виде

$$x^2 = 2py. \qquad (1.22)$$

ПРИМЕР 1.8. Найти фокус и уравнение директрисы параболы $y^2 = 24x$.
Решение. Так как каноническое уравнение параболы имеет вид $y^2 = 2px$, то $2p = 24$. Следовательно, $p = 12$, а $\frac{p}{2} = 6$. Фокус параболы расположен в точке $F(6;0)$. Директриса имеет уравнение $x = -\frac{p}{2} = -6$.

1.12 . УРАВНЕНИЯ КРИВЫХ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ОСЯМИ СИММЕТРИИ ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ ОСЯМ КООРДИНАТ

Рассмотрим предварительно одну из частных задач преобразования системы координат. Пусть на плоскости введены две прямоугольные декартовые системы координат XOY и $X'O'Y'$ с центрами в точках O и O' и соответственно параллельными осями координат (рис.1.17)

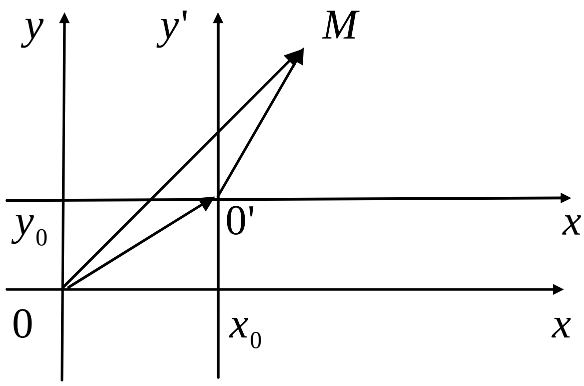

Рис. 1.17

Пусть точка O' в системе XOY имеет координаты $(x_0; y_0)$. Выберем на плоскости произвольную точку M и обозначим ее координаты через $(x; y)$ и $(x'; y')$ в соответствующих системах XOY и $X'O'Y'$. Поставим задачу установления формул связи между координатами точки M в старой (XOY) и новой $(X'O'Y'$ системах координат. Очевидно, что в системе XOY вектор $\overline{OO'} = \{x_0; y_0\}$, вектор $\overline{OM} = \{x; y\}$. В системе $X'O'Y'$ вектор $\overline{O'M} = \{x'; y'\}$.

Согласно правилу сложения векторов

$$\overline{OM} = \overline{OO'} + \overline{O'M} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x = x_0 + x' \\ y = y_0 + y'. \end{cases} \qquad (1.23)$$

Формулы (1.23), связывающие между собой старые и новые координаты точки плоскости, называются формулами параллельного переноса системы координат. Пусть теперь на плоскости XOY задан эллипс с полуосями a и b, центр которого находится в точке $O'(x_0; y_0)$, а оси симметрии параллельны осям координат OX и OY. Требуется найти уравнение эллипса. Введем новую систему координат $X'O'Y'$ с помощью параллельного переноса системы XOY, расположив ее начало координат в центре эллипса (рис. 1.18). Тогда в новой системе $X'O'Y'$ каноническое уравнение эллипса запишется в виде $\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1$. Из (1.23) найдем, что $x' = x - x_0, y' = y - y_0$. Тогда в заданной системе координат XOY, уравнение эллипса примет вид:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1. \qquad (1.24)$$

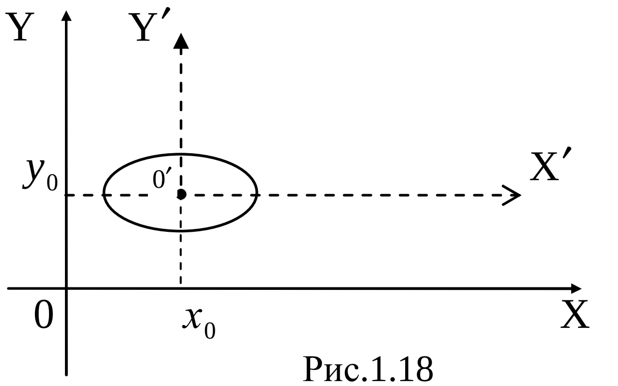

Рис.1.18

Уравнение (1.24) является уравнением эллипса с полуосями a и b, центром в точке $O'(x_0; y_0)$ и осями симметрии, параллельными координатным осям.

Решая аналогичным образом задачу относительно уравнения гиперболы, с центром в точке $O'(x_0; y_0)$, с осями симметрии параллельными осям координат, с действительной полуосью равной a, мнимой равной b, получим уравнение

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1. \qquad (1.25)$$

Аналогично найдем, что уравнение параболы, ось симметрии которой параллельна оси абсцисс, вершина которой находится в точке $O'(x_0;y_0)$, а ее параметр равен p, имеет вид

$$(y-y_0)^2 = 2p(x-x_0). \tag{1.26}$$

Если же ось параболы параллельна оси ординат, то

$$(x-x_0)^2 = 2p(y-y_0). \tag{1.27}$$

1.13. ИССЛЕДОВАНИЕ ОБЩЕГО УРАВНЕНИЯ КРИВОЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА, НЕ СОДЕРЖАЩЕГО ЧЛЕНА С ПРОИЗВЕДЕНИЕМ ТЕКУЩИХ КООРДИНАТ

Пусть задано общее уравнение кривой второго порядка (1.12) при $B=0$, т.е. уравнение вида

$$Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+Q=0. \tag{1.28}$$

Покажем, что уравнение (1.28) в зависимости от значений коэффициентов A, C, D, E, Q на плоскости XOY определяет окружность, эллипс, гиперболу, параболу, пару прямых, точку, или мнимую кривую.

1) Пусть $A>0, C>0$.

Преобразуем уравнение (1.28), дополнив до полного квадрата члены, содержащие переменные x и y:

$$A\left(x^2+2x\frac{D}{2A}+\frac{D^2}{4A^2}\right)+C\left(y^2+2y\frac{E}{2C}+\frac{E^2}{4C^2}\right)=\frac{D^2}{4A}+\frac{E^2}{4C}-Q \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow A\left(x+\frac{D}{2A}\right)^2+C\left(y+\frac{E}{2C}\right)^2=\frac{D^2}{4A}+\frac{E^2}{4C}-Q$$

Введем обозначения, положив

$$x_0=-\frac{D}{2A},\ y_0=-\frac{E}{2C},\ m=\frac{D^2}{4A}+\frac{E^2}{4C}-Q. \tag{1.29}$$

Тогда предыдущее уравнение запишется в форме:

$$A(x-x_0)^2+C(y-y_0)^2=m. \tag{1.30}$$

Пусть $m=0$, тогда $A(x-x_0)^2+C(y-y_0)^2=0$,

Это уравнение определяет на плоскости единственную точку $(x_0;y_0)$.

Пусть $m > 0$. Тогда уравнение (1.30) можно записать в форме

$$\frac{(x - x_0)^2}{m / A} + \frac{(y - y_0)^2}{m / C} = 1.$$

Из сравнения этого уравнения с уравнением (1.24) следует, что это уравнение эллипса, а значит и уравнение (1.28), определяет эллипс с центром в точке $O(x_0; y_0)$ и полуосями $a = \sqrt{\frac{m}{A}}, b = \sqrt{\frac{m}{C}}$, где x_0, y_0, m определяются равенствами (1.29).

В частности, при $A = C$ уравнение определяет окружность с центром в точке $O'(x_0; y_0)$ и радиусом $R = \sqrt{\frac{m}{A}}$.

Если же в уравнении (1.30) $m < 0$, то оно не удовлетворяется ни при каких значениях x и y. Следовательно, уравнение (1.28) не определяет кривой на плоскости (или говорят: определяет мнимый эллипс). Итак, уравнение (1.28) при $A > 0$ и $C > 0$ на плоскости XOY определяет либо эллипс, либо окружность, либо точку, либо мнимый эллипс.

2) Пусть $A > 0, C < 0$.

Вновь, дополняя до полного квадрата слагаемые, содержащие переменные x и y, из (1.28), получим

$$A(x - x_0)^2 - |C|(y - y_0)^2 = m. \tag{1.31}$$

где x_0, y_0, m, определяются равенствами (1.29).

Если $m = 0$, то $A(x - x_0)^2 = |C|(y - y_0)^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \pm\sqrt{A} \cdot (x - x_0) = \sqrt{|C|} \cdot (y - y_0)$.

Эти уравнения определяют пару пересекающихся прямых. Если $m > 0$, то уравнение (1.31) можно записать в форме:

$$\frac{(x - x_0)^2}{m / A} - \frac{(y - y_0)^2}{m / |C|} = 1.$$

Из сравнения уравнения с уравнением гиперболы (1.25) следует, что уравнение определяет гиперболу с центром в точке $O'(x_0; y_0)$, действительной полуосью $a = \sqrt{\frac{m}{A}}$ и мнимой полуосью $b = \sqrt{\frac{m}{|C|}}$. Если $m < 0$, то уравнение (1.31) примет вид $\frac{(y - y_0)^2}{m / C} - \frac{(x - x_0)^2}{|m| / A} = 1$

Это уравнение также определяет гиперболу с центром в той же точке $O'(x_0;y_0)$, но с действительной полуосью $a=\sqrt{\dfrac{m}{C}}$, расположенной на прямой параллельной оси OY и мнимой полуосью $b=\sqrt{\dfrac{|m|}{A}}$ расположенной на прямой параллельной оси OX.

Итак, уравнение (1.28) при $A\cdot C<0$ определяет на плоскости XOY либо гиперболу, либо пару пересекающихся прямых.

3) Пусть $A>0, C=0$.

Выполняя те же преобразования, что и в предыдущих случаях можно показать, что уравнение (1.28) определяет либо параболу с осью симметрии параллельной оси OY, либо пару параллельных прямых, либо мнимое место точек (доказать самостоятельно).

4) Если $A=0,\ C>0$.

В этом случае уравнение (1.28) определяет либо параболу с осью симметрии, параллельной оси OX, либо пару параллельных прямых, либо мнимое место точек.

ПРИМЕР 1.9. Определите вид линии, заданной уравнением $9x^2-16y^2-54x-64y-127=0$, и изобразите эту линию на чертеже.

Решение. Сравнивая данное уравнение с общим уравнением кривых второго порядка, найдем, что $A=9, B=0, C=-16$. Так как $A\cdot C=-144<0$, то, согласно случаю 2 данное уравнение определяет либо гиперболу, либо пару пересекающихся прямых.

Дополняя до полного квадрата слагаемые, содержащие переменные, получим

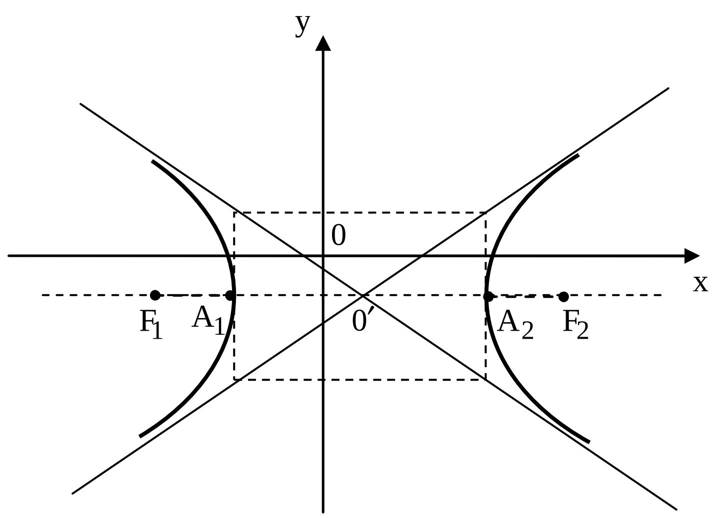

Рис. 1.19

$$9(x^2-6x+9-9)-16(y^2+4y+4-4)-127=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 9(x-3)^2-16(y+2)^2-81+64-127=0 \Leftrightarrow$$
$$9(x-3)^2-16(y+2)^2=144 \Leftrightarrow \frac{(x-3)^2}{16}-\frac{(y+2)^2}{9}=1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{(x-3)^2}{4^2}-\frac{(y+2)^2}{3^2}=1.$$

Уравнение определяет гиперболу с центром в точке $O'(3;-2)$,действительной полуосью $a=4$ и мнимой полуосью $b=3$. С центром в точке O' построим основной прямоугольник гиперболы со сторонами $2a=8,\ 2b=6$ (рис.1.19). Диагонали этого прямоугольника являются асимптотами гиперболы. Так как прямые проходят через точку $O'(3;-2)$ и имеют угловые коэффициенты $k_{1,2}=\pm\frac{b}{a}$, то уравнения асимптот найдутся по формулам $y-y_0=k_{1,2}(x-x_0)$ или $y-y_0=\pm\frac{b}{a}(x-x_0)$. Отсюда при $x_0=3$ и $y_0=-2$ получим $y+2=\pm\frac{3}{4}(x-3)$. Или $3x-4y-17=0$ и $3x+4y-1=0$.

Вершины гиперболы при $a=4$ и $b=3$ располагаются в точках $A_1(-1;-2), A_2(7;-2)$. Найдем координаты фокусов F_1 и F_2 гиперболы. Вычислим $c^2=a^2+b^2=16+9=25 \Rightarrow \Rightarrow c=5$.Так как $x_0=3$, то фокусы расположены в точках $F_1(-2;-2)$ и $F_2(8;-2)$. Эксцентриситет гиперболы $\varepsilon=\frac{c}{a}=\frac{5}{4}=1{,}25$. Используя полученные результаты, построим искомую гиперболу (рис.1.19)

Заключение. В параграфе 1.13 рассмотрены наиболее простые случаи расположения кривых второго порядка на координатной плоскости. В специальных курсах аналитической геометрии доказывается, что алгебраическое уравнение $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+Q=0$ при любых старших коэффициентах A, B и C всегда определяет либо окружность, либо эллипс, гиперболу, параболу, либо вырожденную кривую (точку, прямые, мнимые кривые).

1.14. НЕРАВЕНСТВА ВТОРОЙ СТЕПЕНИ ОТНОСИТЕЛЬНО ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

<u>ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.6</u>. Неравенство $F(x,y)>0$ (или $F(x,y)<0$) называется неравенством второй степени относительно двух переменных x и y, если $F(x,y)=Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+Q$, где A,B,C,D,E,Q - действительные числа; A,B и C одновременно не равны нулю. Пусть, дано неравенство вида

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+Q>0. \tag{1.32}$$

Выясним геометрический образ (смысл) этого неравенства на координатной плоскости XOY, т.е. найдем на этой плоскости множество всех точек $M(x;y)$, координаты которых при их подстановке в неравенство (1.32) обращают его в верное числовое неравенство.

Для решения этой задачи предварительно определим вид кривой второго порядка по ее уравнению

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+Q=0. \tag{1.33}$$

Допустим, что уравнение (1.33) определяет одну из кривых: окружность, эллипс, гиперболу или параболу. Тогда эта линия разделяет все множество точек плоскости на два или на три подмножества.

Например, окружность разделяет множество точек плоскости на множество внутренних и внешних точек круга. Выберем в любом из образовавшихся подмножеств произвольную точку $M(x;y)$ и подставим ее координаты в неравенство (1.32). Если при этом окажется, что (1.32) превращается в верное числовое неравенство, то выбранная точка $M(x;y)$, а вместе с ней и все рассматриваемое подмножество точек плоскости, удовлетворяют заданному неравенству. Если же координаты точки M не удовлетворяют неравенству (1.32), то ему не удовлетворяют и все точки рассматриваемого подмножества. Применяя этот метод, называемый методом представителей, во всех случаях решения неравенства (1.32), найдем геометрический образ данного неравенства. Аналогично определяется и геометрический образ противоположного (1.32) неравенства.

ПРИМЕР 1.10. Определить геометрический смысл неравенства $y^2-x-6y+7>0$.

<u>Решение.</u> Определим вид кривой $y^2-x-6y+7=0$. Из сравнения с уравнением (1.28) получим $A=0, B=0, C=1$. Следовательно, кривая является либо параболой с осью симметрии, параллельной оси OX, либо парой параллельных прямых, либо мнимым местом точек.

Дополняя слагаемые, содержащие переменную y, до полного квадрата, получим

$$y^2 - 6y + 9 - x - 9 + 7 = 0 \Leftrightarrow (y-3)^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow (y-3)^2 = x + 2$$

Из сравнения уравнения с уравнением параболы (1.26) следует, что искомой кривой является парабола с вершиной в точке $(-2;3)$ и параметром $p = \frac{1}{2}$.

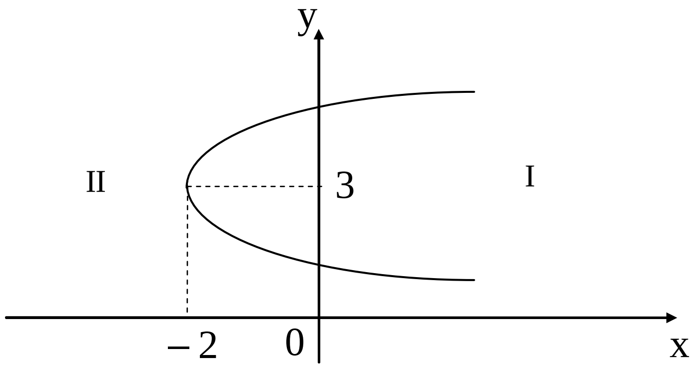

Рис. 1.20

Эта линия (рис.1.20) разделяет все множество точек плоскости на внутреннюю и внешнюю части I и II соответственно. Выберем произвольного представителя из любой части. Например, выберем точку $M(0;3)$, принадлежащую внутреннему множеству точек. Подставляя ее координаты в заданное неравенство, получим $9 - 0 - 18 + 7 = -2 < 0$. Следовательно, точка M, а вместе с ней и все множество внутренних точек I не удовлетворяет данному неравенству. Тогда геометрическим образом этого неравенства будет множество внешних точек II (рис.1.20).

1.15. ПОВЕРХНОСТИ И ЛИНИИ В ПРОСТРАНСТВЕ R^3

В геометрии поверхность определяется как множество точек (геометрическое место точек) пространства R^3, обладающих некоторым общим для всех точек поверхности свойством. Например, сфера радиуса R есть множество всех точек пространства R^3, удаленных на расстояние R от некоторой точки O этого пространства.

Рассмотрим аналитическое определение поверхности. Пусть в пространстве R^3 введена декартовая система координат XYZ. Выберем в этом пространстве произвольную точку $M(x;y;z)$ и рассмотрим вместе со множеством точек пространства R^3 множество уравнений вида $F(x,y,z) = 0$. Будем говорить, что числа $x = x_0, y = y_0, z = z_0$ удовлетворяют уравнению $F(x,y,z) = 0$, если $F(x_0,y_0,z_0) = 0$, и ему не удовлетворяют, если $F(x_0,y_0,z_0) \neq 0$. Например, числа $x_0 = 1$, $y_0 = 2$, $z_0 = -3$, удовлетворяют уравнению $2x-3y-4z-8=0$, а числа $x_0=2, y_0=0, z_0=1$ ему не удовлетворяют.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.7. Уравнение $F(x,y,z)=0$, связывающее между . собой переменные величины x,y,z, называется уравнением поверхности в выбранной системе координат , если координаты любой(произвольной) точки M этой поверхности ему удовлетворяют, а координаты всех точек, не лежащих на ней, ему не удовлетворяют.

Множество всех точек координатного пространства R^3, координаты которых удовлетворяют уравнению, будем называть ***поверхностью.***

Заметим, что это множество точек может содержать бесконечное количество точек, быть конечным или быть даже пустым. Например, уравнению $x^2+y^2+z^2=1$ удовлетворяют координаты бесконечного множества точек (сфера с центром в начале координат радиуса 1); уравнению

$(x-1)^2+(y+2)^2+z^2=0$ удовлетворяют координаты только одной точки $M(1;-2;0)$. Из определения 1.7 следует, что любое уравнение вида $F(x,y,z)=0$ определяет в координатном пространстве некоторую поверхность.

Как уже отмечалось, в аналитической геометрии изучаются в основном алгебраические уравнения, т.е. такие уравнения $F(x,y,z)=0$, в которых выражение $F(x,y,z)$ представляет собой сумму конечного числа слагаемых вида $Ax^m y^n z^k$, где m,n,k есть целые неотрицательные числа, $A-$ действительное число. Наибольшая сумма $m+n+k$ называется ***степенью уравнения.***

Например, уравнение $Ax+By+Cz+D=0$, где A,B,C,D - действительные числа, есть наиболее общий вид алгебраического уравнения первой степени относительно трех переменных.

Уравнение $2x^2+y^2+3z^2-4x-5=0$ есть частный случай алгебраического уравнения второй степени относительно трех переменных.

В аналитической геометрии в R^3 линию рассматривают как множество всех точек, принадлежащих каждой из двух пересекающихся поверхностей. Следовательно, система уравнений

$$\begin{cases} F_1(x,y,z)=0, \\ F_2(x,y,z)=0 \end{cases} \qquad (1.34)$$

определяет уравнения линии в пространстве R^3.

Например, система $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=R^2, \\ z=0 \end{cases}$ определяет окружность радиуса R, расположенную на плоскости XOY.

1.16. ПЛОСКОСТЬ. УРАВНЕНИЕ ПЛОСКОСТИ ПО ТОЧКЕ И НОРМАЛЬНОМУ ВЕКТОРУ

Положение плоскости α в пространстве R^3 вполне определяется заданием:

1) любых трех точек, не лежащих на одной прямой;

2) точки плоскости и вектора $\overline{N}$ перпендикулярного α.

Найдем уравнение плоскости в каждом из перечисленных случаев ее задания. Пусть в пространстве R^3 дана точка $M_0(x_0; y_0; z_0)$ и вектор $\overline{N} = A\bar{i} + B\bar{j} + C\bar{k}$ (рис.1.21) Требуется найти уравнение плоскости α, проходящей через точку M_0 перпендикулярно заданному вектору $\overline{N}$.

Выберем в R^3 произвольную точку $M(x; y; z)$ и построим вектор $\overline{M_0M} = (x - x_0)\bar{i} + (y - y_0)\bar{j} + (z - z_0)\bar{k}$.

Рассмотрим два случая:

1) если точка $M \in \alpha$ то

$$\begin{gathered} \overline{M_0M} \perp \overline{N} \Rightarrow \overline{N} \cdot \overline{M_0M} = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \end{gathered} \tag{1.35}$$

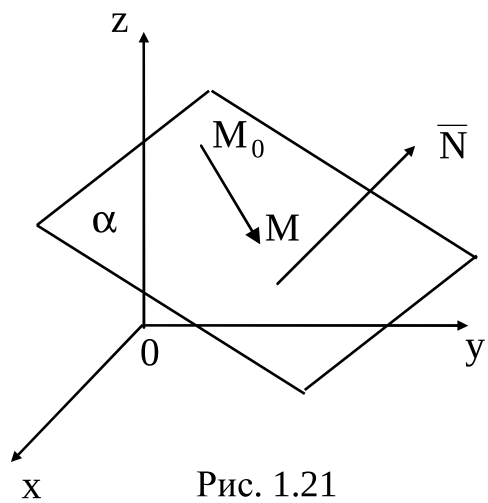

Рис. 1.21

2) если точка $M \notin \alpha$, то вектора $\overline{M_0M}$ и $\vec{N}$ не перпендикулярны. $\Rightarrow \overline{N} \cdot \overline{M_0M} \neq 0 \Leftrightarrow A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) \neq 0$. Из случаев 1) и 2) и определения уравнения поверхности следует, что уравнение (1.35) есть уравнение искомой плоскости α. Уравнение (1.35) ***называется уравнением плоскости по точке и нормальному вектору.*** Вектор $\overline{N}$, перпендикулярный плоскости α, называется ***нормальным вектором*** этой плоскости.

ПРИМЕР 1.11. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(5;-1;3)$ перпендикулярно вектору $\overline{N} = \{2;3;4\}$.

Решение. Уравнение искомой плоскости будем искать в форме $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$. Полагая в уравнении (1.35) $A = 2, B = 3, C = 4, x_0 = 5, y_0 = -1, z_0 = 3$ получим

$2(x-5) + 3(y+1) + 4(z-3) = 0 \Leftrightarrow 2x + 3y + 4z - 19 = 0.$

1.17. УРАВНЕНИЕ ПЛОСКОСТИ ПО ТРЕМ ТОЧКАМ

Пусть в пространстве R^3 даны три точки $M_1(x_1;y_1;z_1), M_2(x_2;y_2;z_2), M_3(x_3;y_3;z_3)$ не лежащие на одной прямой. Выберем в этом пространстве произвольную точку $M(x;y;z)$ и построим три вектора

$$\overline{M_1M} = \{x - x_1; y - y_1; z - z_1\}$$
$$\overline{M_1M_2} = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\}$$
$$\overline{M_1M_3} = \{x_3 - x_1; y_3 - y_1; z_3 - z_1\}$$

Предположим, что точка M лежит на плоскости α (рис.1.22) проходящей через заданные точки M_1, M_2, M_3. Тогда векторы $\overline{M_1M}, \overline{M_1M_2}$ и $\overline{M_1M_3}$ лежат на этой плоскости. Следовательно,

$$(\overline{M_1M} \times \overline{M_1M_2}) \cdot \overline{M_1M_3} = 0 \Leftrightarrow$$
$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0. \tag{1.36}$$

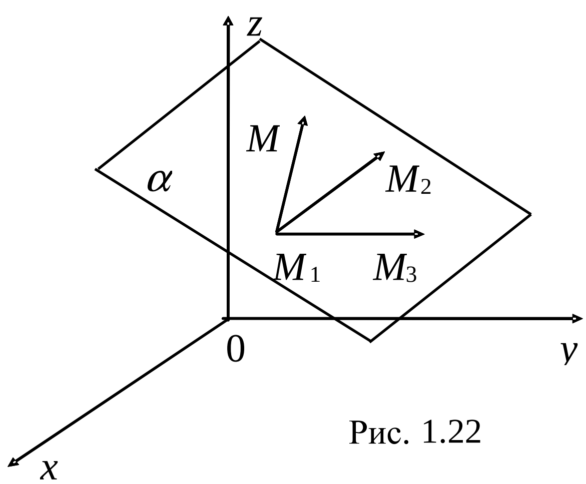

Рис. 1.22

Если же точка $M \notin \alpha$, то векторы $\overline{M_1M}, \overline{M_1M_2}$ и $\overline{M_1M_3}$ не компланарны. Тогда и их смешанное произведение отлично от нуля. Согласно определению 1.7, уравнение (1.36) является уравнением искомой плоскости α.

Заметим, что если расписать определитель (1.36), то полученное уравнение так же, как и уравнение (1.35), будет алгебраическим уравнением первой степени относительно трех переменных x, y, z.

1.18. ОБЩЕЕ УРАВНЕНИЕ ПЛОСКОСТИ

Пусть задано произвольное алгебраическое уравнение первой степени относительно переменных x, y, z

$$Ax + By + Cz + D = 0. \tag{1.37}$$

Покажем, что уравнение (1.37) при любых допустимых значениях коэффициентов A, B, C, D всегда является уравнением некоторой плоскости.

По условию по крайней мере один их коэффициентов A, B или C отличен от нуля. Тогда, предположив для определенности, что $A \neq 0$, перепишем уравнение (1.37) в форме

$$A\left(x + \frac{D}{A}\right) + B(y - 0) + C(z - 0) = 0.$$

Сравнивая это уравнение с уравнением плоскости (1.35) , найдем, что оно является уравнением плоскости, проходящей через точку $M_0(-\frac{D}{A};0;0)$ и имеющей нормальный вектор $\overline{N} = A\bar{i} + B\bar{j} + C\bar{k}$. Следовательно, уравнение (1.37) является уравнением некоторой плоскости при любых допустимых значениях коэффициентов A, B, C, D.

Итак, всякой плоскости в пространстве R^3 соответствует алгебраическое уравнение первой степени относительно трех переменных и всякому уравнению вида (1.37) соответствует плоскость. Уравнение (1.37*)* называется общим уравнением плоскости. Рассмотрим некоторые частные случаи этого уравнения:

1) $D = 0$. Тогда, плоскость $Ax + By + Cz = 0$ проходит через начало координат, так как точка $O(0;0;0)$ принадлежит этой плоскости при любых значениях A, B и C;

2) $C = 0$. Уравнение плоскости запишется в виде $Ax + By + D = 0$. Так как старшие коэффициенты A, B и C являются проекциями нормального к плоскости вектора $\overline{N}$, то вектор $\overline{N} = \{A; B; 0\}$ перпендикулярен этой плоскости. Но вектор $\overline{N}$ перпендикулярен и координатной оси OZ. Следовательно, рассматриваемая плоскость параллельна оси OZ;

3) если $B = 0$, то плоскость $Ax + Cz + D = 0$ параллельна оси OY (доказать самостоятельно);

4) если $A = D = 0$, то плоскость проходит через начало координат и параллельна оси OX. Следовательно, плоскость $By + Cz = 0$ проходит через ось OX;

5). если $A = B = D = 0$, то $Cz = 0 \Leftrightarrow z = 0$ совпадает с плоскостью XOY.

ПРИМЕР 1.12. Определить, перпендикулярен ли вектор $\overline{a} = \{3;0;4\}$ плоскости $2x - 5y + z - 1 = 0$.

Решение. Коэффициенты $A = 2, B = -5, C = 1$ являются проекциями нормального вектора $\overline{N}$ плоскости. Тогда, если вектор $\overline{a}$ перпендикулярен заданной плоскости, то векторы $\overline{N}$ и $\overline{a}$ должны быть коллинеарными. Согласно условию коллинеарности двух векторов проекции этих векторов должны быть пропорциональными между собой. Но $\frac{3}{2} \neq \frac{0}{(-5)}$ следовательно, вектор $\overline{a}$ не перпендикулярен данной плоскости.

1.19. УГОЛ МЕЖДУ ПЛОСКОСТЯМИ

Пусть в R^3 заданы своими уравнениями две плоскости $\alpha_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $\alpha_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$

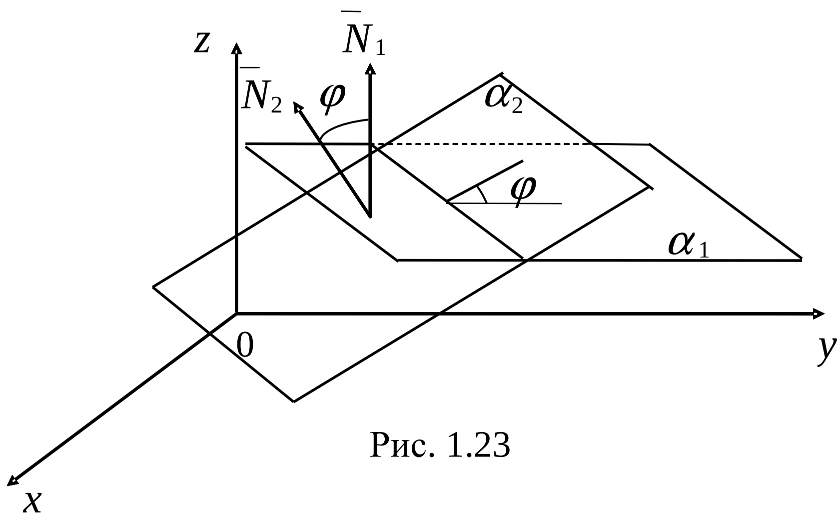

Рис. 1.23

Коэффициенты A, B и C уравнения плоскости являются проекциями нормального вектора $\overline{N}$ к этой плоскости. Следовательно, один из смежных двугранных углов φ между плоскостями α_1 и α_2 равен углу между нормальными к этим плоскостям векторами

$\overline{N_1} = \{A_1; B_1; C_1\}$ и $\overline{N_2} = \{A_2; B_2; C_2\}$ (рис.1.23). Тогда

$$\cos\varphi = \frac{\overline{N_1} \cdot \overline{N_2}}{\left|\overline{N_1}\right| \cdot \left|\overline{N_2}\right|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1{}^2 + B_1{}^2 + C_1{}^2} \cdot \sqrt{A_2{}^2 + B_2{}^2 + C_2{}^2}}. \qquad (1.38)$$

По формуле (1.38) определяется один из смежных двугранных углов между данными плоскостями.

Следствие 1. Если плоскости α_1 и α_2 параллельны, то их нормальные векторы $\overline{N_1}$ и $\overline{N_2}$ коллинеарны. Тогда

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}. \qquad (1.39)$$

Условия (1.39) называются условиями параллельности двух плоскостей.

Следствие 2. Если плоскости α_1 и α_2 перпендикулярны, то в (1.38) угол $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Тогда $\cos\varphi = 0$. Следовательно, и

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0. \qquad (1.40)$$

Условие (1.40) называется условием перпендикулярности двух плоскостей.

ПРИМЕР 1.13. Определить, при каком значении ℓ плоскость $3x - 5y + \ell z - 3 = 0$ перпендикулярна плоскости $x + 3y + 2z + 5 = 0$.

Решение. Векторы $\overline{N_1} = \{3; -5; \ell\}, \overline{N_2} = \{1; 3; 2\}$ являются нормальными векторами к данным плоскостям. Тогда согласно условию (1.40) плоскости взаимно перпендикулярны, если $3 \cdot 1 + (-5) \cdot 3 + 2\ell = 0 \Leftrightarrow 2\ell = 12 \Leftrightarrow \ell = 6.$

Ответ: 6.

ПРИМЕР 1.14. Составить уравнение плоскости, которая проходит через точку $M_0(3; -2; -7)$ параллельно плоскости $2x - 3z + 5 = 0.$

Решение. Искомая плоскость проходит через заданную точку M_0, тогда ее уравнение, согласно формуле (1.35), запишется в виде: $A(x-3) + B(y+2) + C(z+7) = 0$.

Искомая плоскость параллельна заданной плоскости. Тогда из условия параллельности двух плоскостей (1.39) получим $\frac{2}{A} = \frac{0}{B} = \frac{-3}{C}$. Отсюда $A = 2, B = 0, C = -3$

Подставляя найденные коэффициенты A, B, C в предыдущее уравнение найдем уравнение искомой плоскости

$$2(x-3)-3(z+7)=0 \Leftrightarrow 2x-3z-27=0.$$

1.20. ПРЯМАЯ В ПРОСТРАНСТВЕ R^3. ВЕКТОРНОЕ, КАНОНИЧЕСКИЕ И ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ПРЯМОЙ

Положение прямой ℓ в пространстве R^3 определяется заданием:

1) любых двух точек;

2) ее точки и вектора $\bar{S}$, параллельного этой прямой;

3) двух пересекающихся плоскостей.

Поставим задачу определения уравнения прямой в каждом из этих случаев.

Пусть в пространстве R^3 дана точка $M_0(x_0;y_0z_0)$ и вектор $\bar{S}=\{m;n;p\}$. Тогда через точку M_0 параллельно вектору $\bar{S}$ проходит единственная прямая ℓ. Для определения ее уравнения выберем в R^3 произвольную точку $M(x;y;z)$ и построим векторы $\overline{r_0}=\overline{OM_0}=\{x_0;y_0;z_0\}$, и

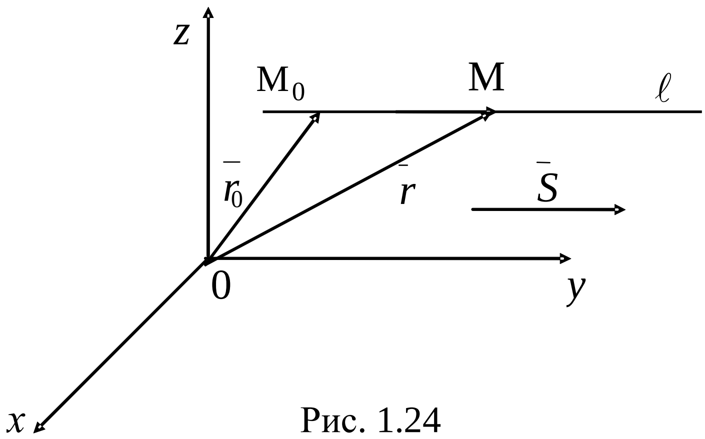

Рис. 1.24

$\bar{r}=\overline{OM}=\{x;y;z\}$

Согласно определению суммы векторов получим (рис.1.24) $\bar{r}=\overline{r_0}+\overline{M_0M}$

Пусть точка $M\in\ell$, тогда векторы $\overline{M_0M}$ и $\bar{S}$ коллинеарны. Следовательно, $\overline{M_0M}=t\cdot\bar{S}$, где t - параметр, принимающий любое значение из R в зависимости от положения точки M на прямой ℓ. Тогда для точки $M\in\ell$ имеем

$$\bar{r}=\overline{r_0}+t\cdot\bar{S}, \tag{1.41}$$

где $t \in R$

Если точка $M \notin \ell$, то векторы $\overline{M_0M}$ и $\overline{S}$ не коллинеарны.

Следовательно, для таких точек равенство (1.41) не выполняется ни при каких $t \in R$.. Итак, уравнение (1.41) является векторным уравнением прямой. Вектор $\overline{S} = \{m; n; p\}$ называется ***<u>направляющим вектором прямой.</u>*** Воспользовавшись координатами векторов $\overline{r}, \overline{r_0}, \overline{S}$ из (1.41) , получим

$$x\overline{i} + y\overline{j} + z\overline{k} = x_0\overline{i} + y_0\overline{j} + z_0\overline{k} + t(m\overline{i} + n\overline{j} + p\overline{k}) \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt, \\ z = z_0 + pt. \end{cases} \tag{1.42}$$

Уравнения (1.42) называются параметрическими уравнениями прямой ℓ с параметром t в пространстве R^3.

Исключая параметр t из уравнений (1.42) найдем, что

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}. \tag{1.43}$$

Уравнения (1.43) называются ***<u>каноническими уравнениями</u>*** прямой ℓ в пространстве R^3.

Замечание. В уравнении (1.43) условились считать, что числа m, n и p могут принимать любые значения, кроме одновременного равенства m, n и p нулю. В частности, если уравнение (1.43) имеет вид $\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{0}$, то это уравнение есть уравнение прямой перпендикулярной оси OZ. Действительно, при $p = 0$ направляющий вектор $\overline{S} = \{m; n; 0\}$ перпендикулярен оси OZ. Следовательно, и параллельная вектору $\overline{S}$ прямая перпендикулярна этой оси. Если же уравнение (1.43) имеет вид $\frac{x - x_0}{0} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{0}$,то это уравнение является уравнением прямой перпендикулярной плоскости XOZ.

ПРИМЕР 1.15. Определить, лежит ли точка $M_1(8; -7; 6)$ на прямой ℓ, проходящей через точку $M_0(2; 1; -4)$ параллельно вектору $\overline{S} = \{3; -4; 5\}$.

<u>Решение</u>. Найдем уравнения прямой ℓ в канонической форме. Полагая

$x_0 = 2, y_0 = 1, z_0 = -4, m = 3, n = -4, p = 5,$ получим

$$\ell : \frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{-4} = \frac{z+4}{5}.$$

Подставляя в эти уравнения координаты точки M_1, найдем

$$\frac{8-2}{3} = \frac{-7-1}{-4} = \frac{6+4}{5} = 2.$$

Следовательно, точка M_1 принадлежит прямой ℓ.

1.21. УРАВНЕНИЯ ПРЯМОЙ ПО ДВУМ ЕЕ ТОЧКАМ

Пусть прямая ℓ проходит через две данные точки $M_1(x_1; y_1; z_1), M_2(x_2; y_2; z_2)$. Вектор $\overline{M_1M_2} = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\}$ расположен на самой прямой ℓ. Следовательно, этот вектор является одним из направляющих векторов $\overline{S}$ этой прямой. Тогда, полагая, в (1.43) $m = x_2 - x_1, n = y_2 - y_1, p = z_2 - z_1, x_0 = x_1, y_0 = y_1, z_0 = z_1,$ получим

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}. \qquad (1.44)$$

Уравнения (1.44) называются уравнениями прямой ℓ по двум ее точкам

ПРИМЕР 1.16. Найти уравнения медианы (AM) треугольника с вершинами в точках $A(1;3;-5), B(0;4;-1), C(6;-2;5)$

Решение. Так как точка M делит отрезок BC пополам, то

$$x_m = \frac{x_b + x_c}{2} = \frac{0+6}{2} = 3, y_m = \frac{y_b + y_c}{2} = \frac{4-2}{2} = 1,$$

$$z_m = \frac{z_b + z_c}{2} = \frac{-1+5}{2} = 2.$$

Медиана (AM) проходит через точки A и M, координаты которых известны. Тогда, уравнения этой медианы найдутся по формуле (1.44)

$$\frac{x - x_a}{x_m - x_a} = \frac{y - y_a}{y_m - y_a} = \frac{z - z_a}{z_m - z_a} \Leftrightarrow \frac{x-1}{3-1} = \frac{y-3}{1-3} = \frac{z+5}{2+5} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z+5}{7}.$$

1.22. ОБЩИЕ УРАВНЕНИЯ ПРЯМОЙ

Пусть в пространстве R^3 даны своими уравнениями $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ две плоскости α_1, α_2. Если эти плоскости пересекаются, то система

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases} \tag{1.45}$$

определяет уравнения прямой, являющейся линией пересечения плоскостей α_1 и α_2. Уравнения (1.45) называются общими уравнениями прямой.

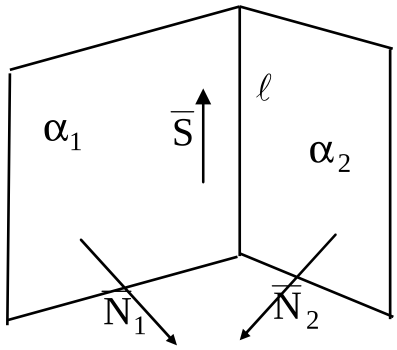

Рис. 1.25

Покажем, что если прямая ℓ задана своими уравнениями в одной из форм (1.41-1.45), то всегда возможно найти любую из оставшихся ее форм уравнений. Например, если прямая ℓ задана своими каноническими уравнениями $\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$, то эти уравнения равносильны системе двух уравнений первой степени

$$\begin{cases} \frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n}, \\ \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} nx - my + (my_0 - nx_0) = 0, \\ py - nz + (nz_0 - py_0) = 0. \end{cases}$$

Первое уравнение этой системы не содержит z. Следовательно, оно определяет плоскостью параллельную оси OZ. Второе уравнение не содержит x и определяет плоскость, параллельную оси OX. Тогда эта система составлена из уравнений пересекающихся плоскостей и представляет собой общие уравнения данной прямой ℓ.

Пусть, наоборот, прямая ℓ дана своими общими уравнениями (1.45) и требуется найти ее канонические уравнения. Для решения этой задачи достаточно указать одну из бесконечного множества точек $M_0(x_0;y_0;z_0)$, принадлежащих прямой, и найти направляющий вектор $\bar{S}=\{m;n;p\}$.

Координаты такой точки M_0 проще всего определить из системы уравнений (1.45), если в этой системе положить либо x, либо y, либо z равными какому угодно числу (например, нулю). Для определения одного из возможных направляющих векторов $\bar{S}$ прямой ℓ построим нормальные векторы $\overline{N}_1=\{A_1;B_1;C_1\}, \overline{N}_2=\{A_2;B_2;C_2\}$данных плоскостей (рис. 1.25). Вектор $\bar{S}$ перпендикулярен векторам $\overline{N}_1, \overline{N}_2$, тогда

$$\bar{S}=\overline{N}_1\times\overline{N}_2=\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}.$$

Подставляя найденные координаты точки M_0 и проекции вектора $\bar{S}$ в уравнения (1.43) найдем искомую каноническую форму уравнений заданной прямой.

ПРИМЕР 1.17. Привести общие уравнения прямой $\begin{cases} x-2y+3z-4=0 \\ 3x+2y-5z-4=0 \end{cases}$ к каноническому виду.

Решение. Уравнения прямой ℓ ищем в виде

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}. \qquad (*)$$

Для определения координат точки $M_0(x_0,y_0,z_0)$в общих уравнениях положим, например, $z=0$. Тогда получим систему из двух уравнений с двумя неизвестными x и y:

$$\begin{cases} x-2y-4=0 \\ 3x+2y-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2y=4 \\ 4x=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-1 \\ x=2 \end{cases}$$

Итак, точка $M_0(2;-1;0)$ является одной из точек данной прямой. Для определения одного из направляющих векторов $\bar{S}=\{m;n;p\}$прямой введем два нормальных вектора $\overline{N}_1=\{1;-2;3\}$ и $\overline{N}_2=\{3;2;-5\}$. Тогда

$$\bar{S}=\overline{N}_1\times\overline{N}_2=\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & -2 & 3 \\ 3 & 2 & -5 \end{vmatrix}=4\bar{i}+14\bar{j}+8\bar{k}.$$

Отсюда $m = 4, n = 14, p = 8$. Подставляя найденные величины в уравнение (*) , получим искомую каноническую форму уравнения прямой

$$\frac{x-2}{4} = \frac{y+1}{14} = \frac{z}{8} \Leftrightarrow \frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{7} = \frac{z}{4}.$$

1.23. УГОЛ МЕЖДУ ДВУМЯ ПРЯМЫМИ

Пусть в пространстве R^3 даны две прямые

$$l_1 : \frac{x-x_1}{m_1} = \frac{y-y_1}{n_1} = \frac{z-z_1}{p_1}; \ \ l_2 : \frac{x-x_2}{m_2} = \frac{y-y_2}{n_2} = \frac{z-z_2}{p_2}.$$

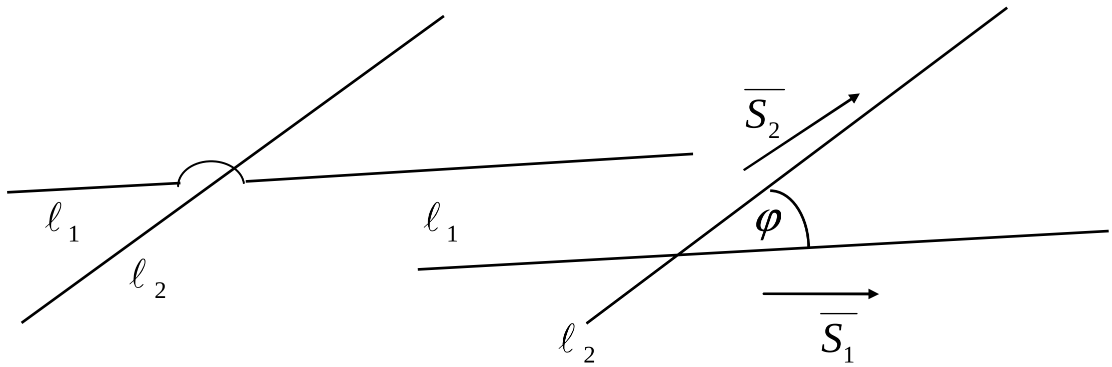

Рис. 1.26

Под углом между двумя прямыми в пространстве понимают любой из углов, образованных двумя прямыми, проведенными из одной точки параллельно данным прямым (рис.1.26) Обозначим угол между направляющими векторами $\bar{S}_1 = \{m_1; n_1; p_1\}$и $\bar{S}_2 = \{m_2; n_2; p_2\}$ данных прямых через φ. Тогда один из смежных углов между прямыми ℓ_1 и ℓ_2также равен φ. Следовательно,

$$\cos\varphi = \frac{\overline{S_1} \cdot \overline{S_2}}{\left|\overline{S_1}\right|\left|\overline{S_2}\right|} = \frac{m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2}{\sqrt{m_1{}^2 + n_1{}^2 + p_1{}^2} \cdot \sqrt{m_2{}^2 + n_2{}^2 + p_2{}^2}}. \tag{1.46}$$

Заметим, что если $\ell_1 \| \ell_2$, то векторы $\bar{S}_1, \overline{S_2}$ коллинеарны. Тогда

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}. \tag{1.47}$$

Условия (1.47) называются ***<u>условиями параллельности двух прямых в пространстве</u>*** $\mathbf{R^3}$.

Если же $\ell_1 \perp \ell_2$, то и $\overline{S_1} \perp \overline{S_2}$. Тогда $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$,

$$\cos\varphi = 0 \Leftrightarrow m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0. \qquad (1.48)$$

Условие (1.48) называется ***<u>условием перпендикулярности двух прямых в пространстве</u>*** $\mathbf{R^3}$.

ПРИМЕР 1.18. Найти уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(2;-3;4)$ перпендикулярно двум прямым ℓ_1 и ℓ_2.

$$\ell_1 : \frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{4} = \frac{z-3}{-2}; \quad \ell_2 : \frac{x+3}{1} = \frac{y-4}{5} = \frac{z-2}{3}.$$

<u>Решение.</u> Так как искомая прямая проходит через данную точку M_0, то ее уравнения будем искать в виде $\dfrac{x-2}{m} = \dfrac{y+3}{n} = \dfrac{z-4}{p}$, где $\bar{S} = \{m; n; p\}$ ее неизвестный направляющий вектор.

По условию искомая прямая перпендикулярна прямым ℓ_1, ℓ_2. Тогда $\bar{S} \perp \overline{S_1}, \bar{S} \perp \overline{S_2}$, где $\overline{S_1} = \{3;4;-2\}, \overline{S_2} = \{1;5;3\}$ есть направляющие векторы данных прямых. Следовательно, за направляющий вектор $\bar{S}$ можно принять вектор

$$\bar{S} = \overline{S_1} \times \overline{S_2} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 3 & 4 & -2 \\ 1 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 22\bar{i} - 11\bar{j} + 11\bar{k}.$$

Тогда $m = 22, n = -11, p = 11$, а уравнениями искомой прямой являются уравнения:

$$\frac{x-2}{22} = \frac{y+3}{-11} = \frac{z-4}{11} \Leftrightarrow \frac{x-2}{2} = \frac{y+3}{-1} = \frac{z-4}{1}.$$

1.24. ПРЯМАЯ И ПЛОСКОСТЬ В ПРОСТРАНСТВЕ $\mathbf{R^3}$

Пусть в пространстве R^3 даны своими уравнениями прямая ℓ и плоскость α:

$$\ell : \frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}, \alpha : \; Ax + By + Cz + D = 0.$$

Для определения взаимного расположения прямой и плоскости в пространстве достаточно установить, параллельна ли прямая ℓ плоскости α или нет. Если нет, то в какой точке ее пересекает и под каким углом.

Угол между прямой и плоскостью

Под углом между прямой и плоскостью понимают любой из двух смежных углов, образованных прямой и ее проекцией на плоскость (рис.1.27). Обозначим один из смежных углов между прямой и ее проекцией на плоскость через φ, а угол между нормальным вектором $\overline{N}\{A;B;C\}$плоскости α и направляющим вектором $\overline{S}=\{m;n;p\}$прямой ℓ через θ. Тогда либо $\varphi+\theta=\dfrac{\pi}{2}$, либо $\varphi+\theta=\dfrac{3\pi}{2}$. Отсюда $\sin\varphi=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos\theta$ или $\sin\varphi=\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}-\theta\right)=-\cos\theta.$

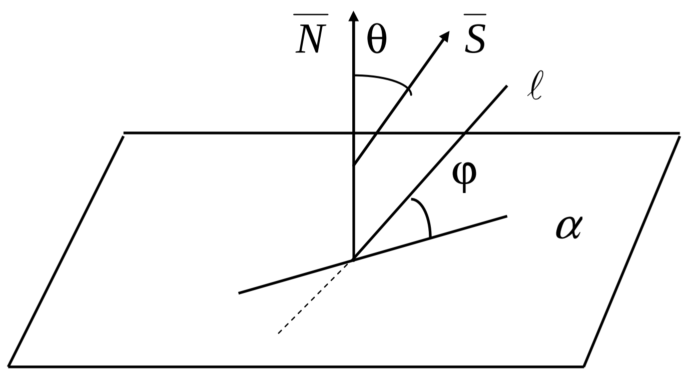

Рис. 1.27

Следовательно, $\sin\varphi=\pm\cos\theta=\pm\dfrac{\overline{N}\cdot\overline{S}}{\left|\overline{N}\right|\cdot\left|\overline{S}\right|}$.

Тогда, в координатной форме:

$$\sin\varphi=\pm\frac{Am+Bn+Cp}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{m^2+n^2+p^2}}. \tag{1.49}$$

<u>Частные случаи.</u> Если прямая ℓ перпендикулярна плоскости α, то векторы $\overline{S}$ и $\overline{N}$ коллинеарны. Тогда

$$\frac{A}{m}=\frac{B}{n}=\frac{C}{p}. \tag{1.50}$$

Если же $\ell \parallel \alpha$, то $\varphi = 0$. Следовательно и $\sin\varphi = 0$. Тогда

$$Am + Bn + Cp = 0. \qquad (1.51)$$

Условия (1.50) и (1.51) называются соответственно ***условиями перпендикулярности и параллельности прямой и плоскости.***

Точка пересечения прямой с плоскостью

Пусть прямая ℓ пересекает плоскость α в некоторой точке $M_1(x_1; y_1; z_1)$. Тогда для определения координат этой точки достаточно решить систему уравнений

$$\begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0, \\ \dfrac{x - x_0}{m} = \dfrac{y - y_0}{n} = \dfrac{z - z_0}{p}. \end{cases} \qquad (1.52)$$

Проще всего решить эту систему переходя от канонической формы задания уравнения прямой к ее заданию в параметрической форме, т.е. к форме

$$\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt, \\ z = z_0 + pt, \end{cases} \qquad (1.53)$$

где $t -$ параметр.

Подставляя вместо x, y, z их выражения из (1.53) в первое уравнение системы (1.52) для определения значения параметра t для точки пересечения, получим

$$\begin{gathered} A(x_0 + mt) + B(y_0 + nt) + C(z_0 + pt) + D = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (Am + Bn + Cp)t = -Ax_0 - By_0 - Cz_0 - D \end{gathered} \qquad (1.54)$$

Так как по условию прямая пересекает плоскость, то $Am + Bn + Cp \neq 0$. Следовательно, значение параметра t для точки пересечения найдется по формуле

$$t = -\frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{Am + Bn + Cp}. \qquad (1.55)$$

Подставляя найденное по (1.55) значение t в каждое из уравнений (1.53), вычислим координаты x_1, y_1, z_1 искомой точки M_1.

ПРИМЕР 1.19. Найти проекцию точки M(9;-13;-18) на плоскость $9x - 17y - 15z + 23 = 0$.

Решение. Проведем через точку M прямую ℓ перпендикулярно заданной плоскости (рис.1.28) . Уравнения этой прямой будем искать в форме

$$\frac{x-9}{m} = \frac{y+13}{n} = \frac{z+18}{p}. \qquad (1.56)$$

Из условия (1.50) перпендикулярности прямой и плоскости при $A = 19$, $B = -17, C = -15$ получим, что $\frac{9}{m} = \frac{-17}{n} = \frac{-15}{p}$. Тогда, за проекции m, n, p направляющего вектора $\bar{S}$ прямой ℓ можно принять числа $m = 9, n = -17, p = -15$.

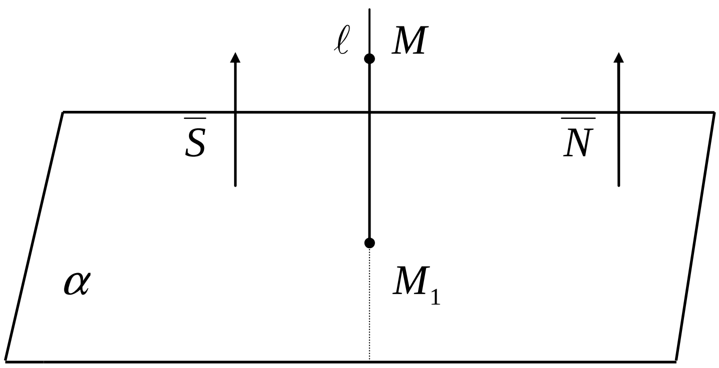

Рис. 1.28

Подставляя их в уравнения (1.56), найдем уравнения перпендикуляра ℓ:

$$\frac{x-9}{9} = \frac{y+13}{-17} = \frac{z+18}{-15}. \qquad (1.57)$$

Запишем уравнение прямой (1.56) в параметрической форме:

$$\begin{cases} x = 9 + 9t, \\ y = -13 - 17t, \\ z = -18 - 15t. \end{cases} \qquad (1.58)$$

Вычислим значение параметра t для точки пересечения прямой с плоскостью по формуле (1.55):

$$t=-\frac{Ax_0+By_0+Cz_0+D}{Am+Bn+Cp}=-\frac{9\cdot 9+(-17)(-13)+(-15)(-18)+23}{9\cdot 9+(-17)\cdot(-17)+(-15)\cdot(-15)}=-1$$

Подставляя значение $t=-1$ в уравнения (1.58), найдем координаты искомой точки M_1 : $x_1=9-9=0, y_1=-13+17=4, z_1=-18+15=-3.$

Ответ: $M_1(0;4;-3)$.

1.25. ПОВЕРХНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

В нижеследующих параграфах рассматриваются некоторые геометрические образы алгебраических уравнений второй степени относительно трех переменных:

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dxz+Ez^2+Fyz+Px+Qy+Rz+H=0, \tag{1.59}$$

где $A, B, \ldots, H-$ действительные числа, причем старшие коэффициенты $A, B, \ldots, F$ не равны нулю одновременно.

Поверхность, определяемая уравнением (1.59), называется ***поверхностью второго порядка.***

Пусть некоторая поверхность дана как множество точек пространства R^3, обладающих определенным свойством, и требуется найти ее уравнение. Например, дана сфера как множество всех точек пространства R^3, равноудаленных от одной заданной точки этого пространства.

Для вывода уравнения этой сферы в декартовой системе координат XYZ обозначим через $M_0(x_0;y_0;z_0)$ координаты заданной точки (центр сферы), а через $M(x;y;z)-$ координаты произвольной точки пространства R^3.

Построим вектор $\overline{M_0M}=\{x-x_0;y-y_0;z-z_0\}$ и рассмотрим два случая:

1) если точка M принадлежит сфере, то $\overline{M_0M}=R$, где $R>0-$ радиус сферы. Тогда

$$\begin{gathered}\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}=R \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2;\end{gathered} \tag{1.60}$$

2) если точка M не принадлежит сфере, то $\left|\overline{M_0M}\right| \neq R$. Следовательно, для таких не выполняется и уравнение (1.50).

Тогда из случаев 1) и 2) и определения 1.7 уравнения поверхности следует, что (1.60) является уравнением сферы радиуса R с центром в точке $M_0(x_0;y_0;z_0)$.

Уравнение (1.60) является алгебраическим уравнением второй степени. Следовательно, сфера является представителем поверхностей второго порядка.

1.26. ЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ ПОВЕРХНОСТИ

Поверхность, образованная всеми прямыми, проходящими параллельно данной прямой ℓ через точки линии L, называется ***цилиндрической поверхностью*** (рис. 1.29).

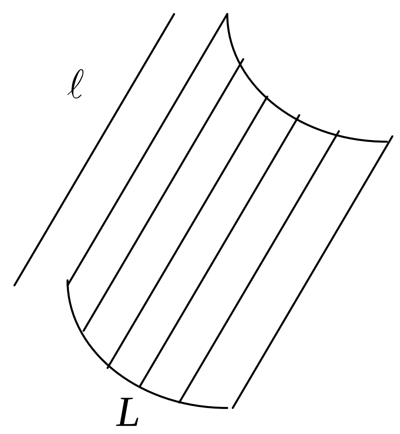

Рис. 1.29

При этом линия L называется ***направляющей***, а прямые, проходящие через точки кривой L параллельно прямой ℓ, называется ее ***образующими.***

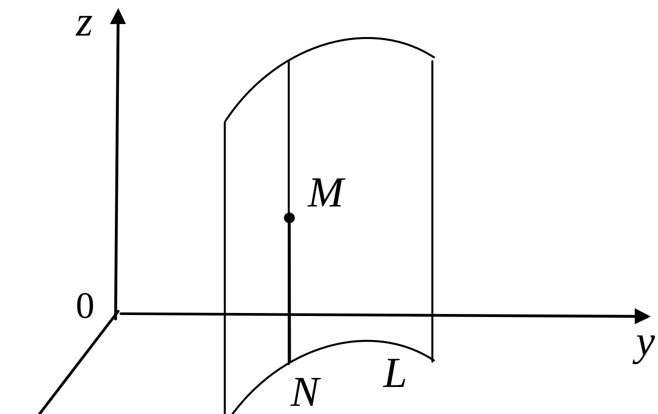

Рис. 1.30

Пусть на плоскости $X0Y$ дана своим уравнением $F(x,y)=0$ некоторая линия L (рис. 1.30).

Проведем через каждую точку кривой L прямую параллельно оси $0Z$. Тогда получим цилиндрическую поверхность с образующими, параллельными этой оси. Докажем, что уравнение будет уравнением этой поверхности.

$$F(x,y)=0. \tag{1.61}$$

Выберем на кривой L произвольную точку N и проведем через нее образующую параллельно оси $0Z$. Выберем на этой образующей произвольную точку M (рис. 1.30). Тогда точки N и M будут иметь одни и те же координаты x и y. Следовательно, уравнению (1.61), не содержащему переменную z, будут удовлетворять координаты обеих точек. А это значит, что уравнение $F(x,y)=0$, не содержащее переменной z, является уравнением цилиндрической поверхности с образующими, параллельными оси $0Z$. Аналогично доказывается, что уравнения $F(x,z)=0$ и $F(y,z)=0$, не содержащие переменные y и x соответственно, определяют цилиндрические поверхности с образующими, параллельными осям $0Y$ и $0X$ соответственно. Следовательно, и алгебраические уравнения (1.59), не содержащие по одной из переменных, определяют цилиндрические поверхности, образующие которых направлены вдоль соответствующих осей координат.

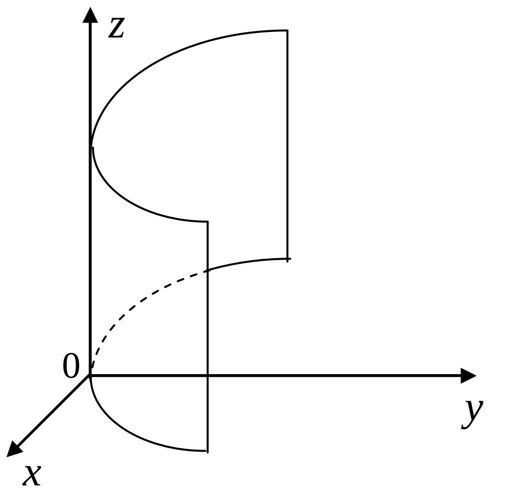

Рис. 1.31

Например, уравнение $x^2+y^2=R^2$ в пространстве трех переменных определяет круговой цилиндр с образующими, параллельными оси $0Z$.

Заметим, что название цилиндрической поверхности определяется названием направляющей. Например, если направляющая L дана уравнением $x^2=2py$, то кривая L является параболой с осью симметрии $0Y$. Тогда это же уравнение в пространстве R^3 определяет параболический цилиндр с образующими, параллельными оси $0Z$ (рис. 1.31).

Аналогично, уравнение $\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ определяет эллиптический цилиндр с образующими, параллельными оси $0Y$, а уравнение $\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ определяет гиперболический цилиндр с образующими, параллельными оси $0X$.

1.27. ЭЛЛИПСОИД

Одним из основных методов изучения поверхности, заданной своим уравнением, является метод сечений. В этом методе предлагается определить вид поверхности по ее линиям пересечения с различными плоскостями. Рассмотрим подробнее сущность этого приема исследования поверхности на примере уравнения

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, \tag{1.62}$$

где a, b, c – положительные действительные числа.

Рассмотрим вначале линии пересечения этой поверхности с горизонтальными плоскостями $z=h$, где $h \in R$. В сечении, в общем случае, образуется кривая, определяемая уравнениями

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, \\ z=h \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{h^2}{c^2}, \\ z=h. \end{cases} \tag{1.63}$$

Заметим, что $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\geq 0$ при любых значениях x и y. Следовательно - если $1-\frac{h^2}{c^2}<0$, то есть $|h|>c$, то первое уравнение не выполняется ни при каких значениях x и y. Это значит, что горизонтальные плоскости $z=h$, где $|h|>c$, не пересекают данной поверхности (в сечении образуются мнимые кривые).

Если $|h| = c$, то $1 - \frac{h^2}{c^2} = 0$ и первое уравнение из (1.63) справедливо только при $x = y = 0$. Следовательно, в сечениях $z = h = c$ и $z = h = -c$ получим точки $(0;0;c)$ и $(0;0;-c)$.

Наконец, если $|h| < c$, то $1 - \frac{h^2}{c^2} > 0$. Тогда в сечении горизонтальной плоскостью $z = h$, где $-c < h < c$, получим линию

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{h^2}{c^2} \Leftrightarrow \frac{x^2}{a^{*2}} + \frac{y^2}{b^{*2}} = 1, \tag{1.64}$$

где

$$a^* = a\sqrt{1 - \frac{h^2}{c^2}}, \ b^* = b\sqrt{1 - \frac{h^2}{c^2}}.$$

Уравнение (1.64) на плоскости $X0Y$ определяет эллипс с полуосями a^* и b^*. Следовательно, на горизонтальной плоскости $z = h$, где $|h| < c$ получим эллипс с теми же полуосями. Заметим, что наибольшие полуоси, равные a и b, образуются при $h = 0$. При увеличении $|h|$ от нуля до c полуоси эллипса уменьшаются до нулевых размеров.

Итак, в сечениях горизонтальными плоскостями $z = h$ при $|h| < c$ образуются эллипсы, при $|h| = c$ эллипсы вырождаются в точки $(0;0;c)$ и $(0;0;-c)$, при $|h| > c$ плоскости не пересекают поверхность.

Так как уравнение (1.62) обладает симметрией относительно переменных x, y и z, то в сечениях вертикальными плоскостями $x = h$, где $|h| \le a$ и $y = h$, где $|h| \le b$, так же образуются эллипсы или точки.

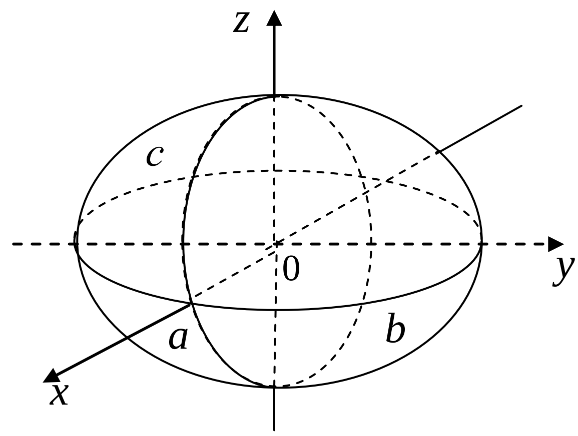

Рис. 1.32

В остальных случаях вертикальные плоскости не пересекают поверхность.

Полученные сечения позволяют построить искомую поверхность (рис. 1.32), называемую ***эллипсоидом.***

Заметим, что эллипсоид при $a = b = c$ превращается в сферу.

1.28. ЭЛЛИПТИЧЕСКИЙ ПАРАБОЛОИД

Пусть задано уравнение

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z, \tag{1.65}$$

где $p, q > 0$, являющееся частным случаем уравнения (1.59). Изучим вид поверхности, соответствующий уравнению (1.65), методом сечений.

Рассмотрим сечения поверхности горизонтальными плоскостями $z = h$, где $h \in R$. В сечении, в общем случае, получим линию:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{p} + \dfrac{y^2}{q} = 2z, \\ z = h \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{x^2}{p} + \dfrac{y^2}{q} = 2h, \\ z = h. \end{cases} \tag{1.66}$$

Так как по условию p и $q > 0$, то $\dfrac{x^2}{p} + \dfrac{y^2}{q} \geq 0$ при любых значениях x и y. Следовательно, при $h < 0$ горизонтальные плоскости $z = h$ не пересекают поверхность. При $h = 0$, то есть на плоскости $X0Y$, получим точку $(0;0;0)$. При $h > 0$ на плоскости $z = h$ получим линию

$$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2h \Leftrightarrow \frac{x^2}{2ph}+\frac{y^2}{2qh}=1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{a^{*2}}+\frac{y^2}{b^{*2}}=1, \text{ где } a^*=\sqrt{2ph},\ b^*=\sqrt{2qh}, \tag{1.67}$$

Уравнение (1.67) на плоскости $X0Y$ определяет эллипс с полуосями a^* и b^*. Следовательно, в сечениях горизонтальными плоскостями $z=h$, где $h>0$, образуются эллипсы с полуосями a^* и b^*. Заметим, что при увеличении h от 0 до ∞ полуоси эллипса неограниченно увеличиваются.

Рассмотрим сечение вертикальной плоскостью $y=h$, где $h\in R$. В сечении получим линию:

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{p}+\dfrac{y^2}{q}=2z,\\ y=h\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{x^2}{p}+\dfrac{h^2}{q}=2z,\\ y=h.\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases}x^2=2p\left(z-\dfrac{h^2}{2q}\right),\\ y=h\end{cases} \tag{1.68}$$

Уравнение $x^2=2p\left(z-\dfrac{h^2}{2q}\right)$ на плоскости $X0Z$ определяет параболу с осью симметрии $0Z$, параметром p и вершиной, находящейся в точке $\left(0;\dfrac{h^2}{2q}\right)$. Следовательно, на плоскости $y=h$ при любых значениях h также получим параболу с параметром, равным p, вершина которой находится в точке $\left(0;h;\dfrac{h^2}{2q}\right)$. Заметим, что при увеличении h от 0 до ∞ вершина параболы неограниченно поднимается над плоскостью $X0Y$.

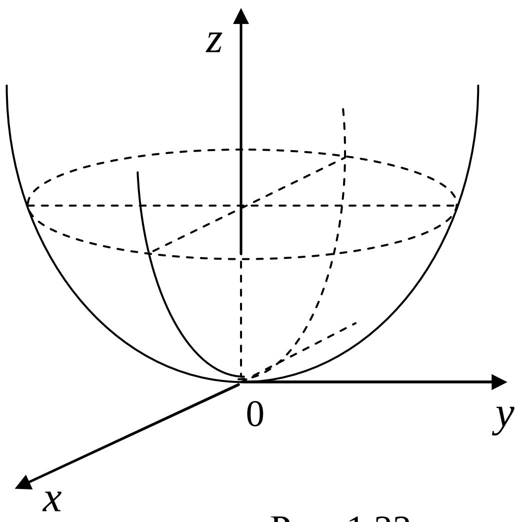

Рис. 1.33

Итак, в сечениях вертикальными плоскостями $y = h$ при любых значениях h образуются параболы.

Аналогичные параболы образуются в сечениях плоскостями $x = h$ (доказать самостоятельно).

Так как в сечениях вертикальными плоскостями $x = h$ и $y = h$ образуются параболы, а в сечениях горизонтальными плоскостями $z = h$ образуются эллипсы, то поверхность (рис. 1.33), определяемая уравнением (1.65), названа ***эллиптическим параболоидом.***

Заметим, что если в уравнении (1.65) $p = q$, то в сечениях горизонтальными плоскостями образуются окружности. Следовательно, уравнение $x^2 + y^2 = 2pz$ определяет ***параболоид вращения*** с осью симметрии $0Z$.

1.29. ОДНОПОЛОСТНЫЙ ГИПЕРБОЛОИД

Однополостным гиперболоидом называется поверхность, определяемая уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1. \tag{1.69}$$

В сечениях горизонтальными плоскостями $z = h$, где $h \in R$, получим линии

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1, \\ z = h \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 + \dfrac{h^2}{c^2}, \\ z = h. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^{*2}} + \dfrac{y^2}{b^{*2}} = 1, \\ z = h \end{cases} \text{ где } a^{*2} = a^2\left(1+\dfrac{h^2}{c^2}\right),\ b^{*2} = b^2\left(1+\dfrac{h^2}{c^2}\right).$$

Таким образом, в сечениях плоскостями $z = h$ образуются эллипсы с полуосями a^* и b^*. При увеличении $|h|$ от нуля до бесконечности полуоси эллипса неограниченно увеличиваются. Наименьшие полуоси, равные a и b, имеет эллипс, расположенный на плоскости $X0Y$.

Пусть $y = h$, где $h \in R$. В сечениях образуются линии

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1 - \dfrac{h^2}{b^2}, \\ y = h. \end{cases} \tag{1.70}$$

Если $|h| < b$, то $1 - \dfrac{h^2}{b^2} > 0$. Тогда на плоскости $y = h$, получим гиперболу $\dfrac{x^2}{a^{*2}} - \dfrac{z^2}{c^{*2}} = 1$, где $a^{*2} = a^2\left(1-\dfrac{h^2}{b^2}\right)$, $c^{*2} = c^2\left(1-\dfrac{h^2}{b^2}\right)$ с действительной полуосью a^* и мнимой c^*.

Так как действительная полуось расположена на прямой, параллельной оси $0X$, а мнимая – параллельной оси $0Z$, то гипербола (1.70) ориентирована вдоль оси $0X$.

Если $|h| > b$, то $1 - \dfrac{h^2}{b^2} < 0$. Тогда на плоскости $y = h$ получим гиперболу $\dfrac{z^2}{c^{*2}} - \dfrac{x^2}{a^{*2}} = 1$, где $c^{*2} = c^2\left(\dfrac{h^2}{b^2} - 1\right)$, $a^{*2} = a^2\left(\dfrac{h^2}{b^2} - 1\right)$ с действительной полуосью c^* и мнимой a^*.

Заметим, что действительная полуось расположена на прямой, параллельной оси $0Z$, а мнимая – параллельной оси $0X$. Следовательно, гипербола (1.70) сменила свою ориентацию.

Если $|h| = b$, то $1 - \dfrac{h^2}{b^2} = 0$. Тогда из уравнения (1.70) получим

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \Leftrightarrow z = \pm\frac{c}{a}x. \tag{1.71}$$

Уравнения (1.71) определяют пару пересекающихся прямых. Итак, в сечениях вертикальными плоскостями $y = h$, где $h \in R$, образуются или гиперболы, изменяющие свою ориентацию, или пары пересекающихся прямых.

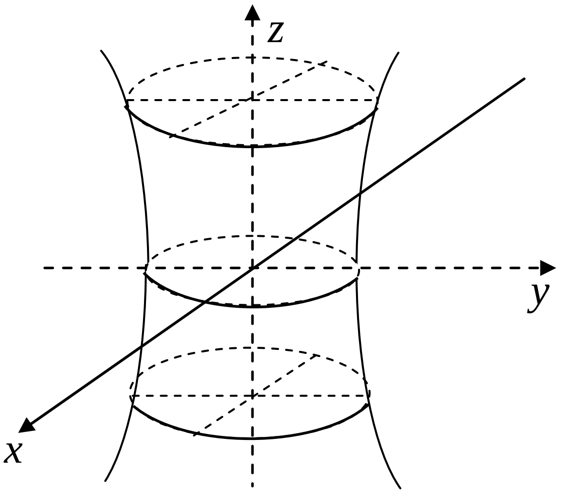

Рис. 1.34

В сечениях вертикальными плоскостями $x = h$, где $h \in R$, образуются так же, как и в сечениях $y = h$, либо гиперболы, либо пара пересекающихся прямых (исследовать самостоятельно). Полученные сечения позволяют построить искомую поверхность (рис. 1.34).

1.30. ДВУПОЛОСНЫЙ ГИПЕРБОЛИД

<u>Двуполостным гиперболоидом</u> называется поверхность, заданная уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1. \tag{1.72}$$

Рассмотрим сечения горизонтальными плоскостями $z = h$, где $h \in R$. В сечениях образуются линии

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = \dfrac{h^2}{c^2} - 1, \\ z = h. \end{cases} \tag{1.73}$$

Так как $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\ge 0$ при любых значениях x и y, то при $|h|<c$ певрое уравнение не выполняется ни при каких x и y. Следовательно, плоскости $z=h$, где $-c<h<c$, не пересекают данную поверхность.

Если $|h|=c$, то $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0 \Leftrightarrow x=y=0$. Следовательно, в сечениях плоскостями $z=-c$ и $z=c$ образуется пара точек с координатами $(0;0;-c)$ и $(0;0;c)$.

Если $|h|>c$, то $\frac{h^2}{c^2}-1>0$. Следовательно, первое уравнение из (1.73) можно записать в форме

$$\frac{x^2}{a^{*2}}+\frac{y^2}{b^{*2}}=1, \text{ где } a^{*2}=a^2\left(\frac{h^2}{c^2}-1\right),\ b^{*2}=b^2\left(\frac{h^2}{c^2}-1\right). \tag{1.74}$$

Уравнение (1.74) является уравнением эллипса с полуосями a^* и b^*. Заметим, что при увеличении $|h|$ от значения $h=c$ до бесконечности полуоси эллипса a^* и b^* так же неограниченно увеличиваются. Итак, при $|h|<c$ плоскости $z=h$ не пересекают поверхность, при $|h|=c$ в сечениях образуются точки, при $|h|>c$ в сечениях образуются эллипсы.

Пусть $y=h$, где $h\in R$. Тогда в сечениях, получим линии

$$\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1,\\ y=h.\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\frac{z^2}{c^2}-\frac{x^2}{a^2}=1+\frac{h^2}{b^2},\\ y=h.\end{cases} \tag{1.75}$$

Следовательно, на плоскости $y=h$ при любых значениях h образуется гипербола

$$\frac{z^2}{c^{*2}}-\frac{x^2}{a^{*2}}=1, \text{ где } c^{*2}=c^2\left(1+\frac{h^2}{b^2}\right),\ a^{*2}=a^2\left(1+\frac{h^2}{b^2}\right), \tag{1.76}$$

с действительной полуосью c^* и мнимой полуосью a^*, ориентированная вдоль оси $0Z$.

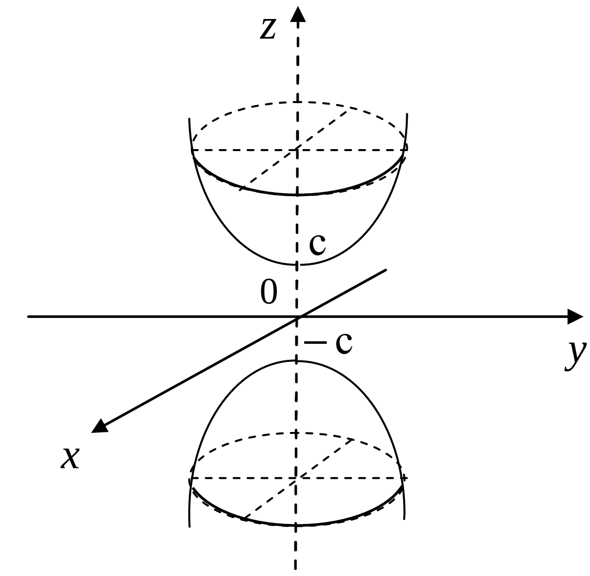

Рис. 1.35

В сечениях вертикальными плоскостями $x = h$, где $h \in R$, так же образуются гиперболы, ориентированные вдоль оси $0Z$ (исследовать самостоятельно).

Итак, в сечениях вертикальными плоскостями $x = h$ и $y = h$ при любых значениях h образуются гиперболы, в сечениях горизонтальными плоскостями $z = h$ при $|h| \geq c$ образуются либо точки, либо эллипсы (рис. 1.35).

В заключении отметим, что уравнения (1.60), (1.62), (1.65), (1.69), (1.70) являются частными случаями алгебраического уравнения (1.59). Следовательно, рассмотренные поверхности являются разновидностями поверхностей второго порядка.

УЧЕБНО – МЕТОДИЧЕСКИЙ КОМПЛЕКС

РАЗДЕЛ 2 «АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ»

2. Методические указания для студентов

2.1. ПЛОСКАЯ ЛИНИЯ И ЕЕ УРАВНЕНИЕ

Пусть на плоскости заданы декартовая система координат XOY и некоторая линия L.

Уравнение $F(x, y) = 0$ называется уравнением плоской линии L в выбранной системе координат XOY, если этому уравнению удовлетворяют координаты x и y любой точки M, лежащей на линии L, и не удовлетворяют координаты (x, y) всех точек, не лежащих на ней.

Уравнение $F(x, y) = 0$ называется алгебраическим, если выражение $F(x, y)$ есть сумма конечного числа слагаемых вида $A \cdot x^m \cdot y^n$, где m и n - целые неотрицательные числа, A - действительное число.

При этом наибольшая из сумм степеней $m + n$ называется <u>степенью уравнения</u>. В аналитической геометрии на плоскости изучаются геометрические образы алгебраических уравнений первой и второй степени, т.е. образы уравнений вида $A \cdot x + B \cdot y + C = 0$,

$$A \cdot x^2 + B \cdot x \cdot y + C \cdot y^2 + D \cdot x + E \cdot y + F = 0,$$

где A, B, C, D, E, F - любые действительные числа.

Уравнения линии L может быть задано в <u>параметрической форме</u> с помощью совокупности двух уравнений $x = x(t)$, $y = y(t)$, где t - параметр.

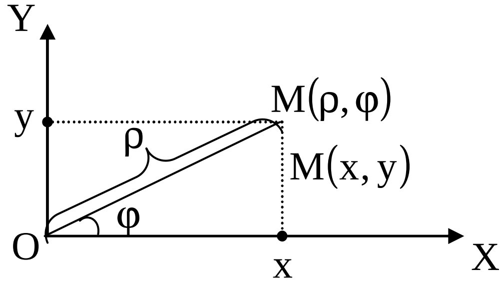

Рис. 2.1

Например, уравнения $x = \cos t$, $y = \sin t$ при $0 \le t \le 2 \cdot \pi$ определяют на плоскости XOY окружность с центром в начале координат радиуса $R = 1$. Действительно, исключая параметр t из этих уравнений, получим $x^2 = \cos^2 t$, $y^2 = \sin^2 t$. Тогда $x^2 + y^2 = \cos^2 t + \sin^2 t = 1$. Полученное уравнение $x^2 + y^2 = 1$ и есть уравнение окружности. Если наряду с системой координат XOY ввести на плоскости полярную систему координат (рис.2.1), то $x = \rho \cdot \cos\varphi$, $y = \rho \cdot \sin\varphi$, где

$$\rho = \left|\overline{OM}\right| = \sqrt{x^2 + y^2}\,; \sin\varphi \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\,; \cos\varphi \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \qquad (2.1)$$

Тогда уравнение линии $F(x,y)=0$ в полярной системе координат имеет вид

$$F(\rho\cdot\cos\varphi;\rho\cdot\sin\varphi)=0. \qquad (2.2)$$

2.2. ВИДЫ УРАВНЕНИЯ ПРЯМОЙ НА ПЛОСКОСТИ

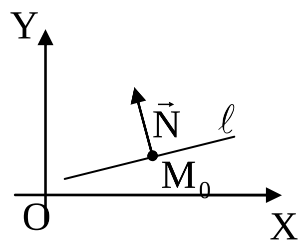

Рис. 2.2

1) Уравнение прямой ℓ по точке $M_0(x_0;y_0)$ и нормальному к прямой вектору $\vec{N}=\{A;B\}$ имеет вид

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0. \qquad (2.3)$$

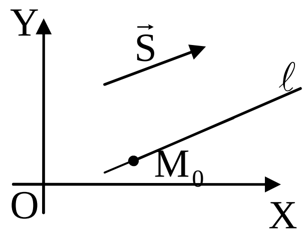

Рис.2.3

2) Уравнение прямой ℓ по точке $M_0(x_0;y_0)$ и направляющему (параллельному прямой) вектору $\vec{S}=\{m;n\}$ имеет вид

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}. \qquad (2.4)$$

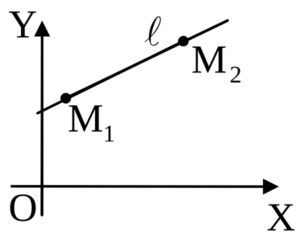

Рис.2.4

3) Система уравнений

$$\begin{cases} x=x_0+m\cdot t, \\ y=y_0+n\cdot t, \end{cases} \qquad (2.5)$$

где точка $M_0(x_0;y_0)\in\ell$, $\vec{S}=\{m;n\}$ - направляющий вектор прямой, $t\in R$ параметр, называется параметрическими уравнениями прямой.

4) Уравнение прямой ℓ проходящей через две заданные точки $M_1(x_1;y_1)$ и $M_2(x_2;y_2)$, записывается в виде

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}. \qquad (2.6)$$

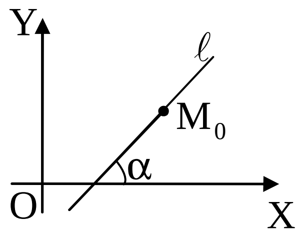

Рис.2.5

5) Уравнение прямой ℓ по точке $M_0(x_0;y_0)$ и угловому коэффициенту $k=\operatorname{tg}\alpha$ имеет вид

$$y-y_0=k\cdot(x-x_0). \qquad (2.7)$$

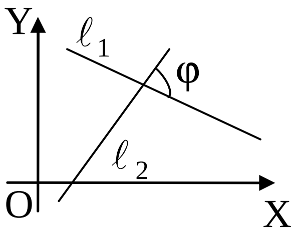

Рис.2.6

6) Если известны угловые коэффициенты k_1, k_2 пересекающихся прямых ℓ_1, ℓ_2, то угол φ между прямыми (при $\varphi \neq \pi/2$) вычисляется по формуле

$$\operatorname{tg}\varphi = \left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2}\right|. \tag{2.8}$$

в частности, если $\ell_1 \parallel \ell_2$, то $k_1 = k_2$, если же $\ell_1 \perp \ell_2$, то

$$k_1 \cdot k_2 = -1. \tag{2.9}$$

Выражения (2.9) называются <u>условиями параллельности и перпендикулярности</u> прямых.

7) Уравнение $A \cdot x + B \cdot y + C = 0$, где $A, B, C \in R$, но A и B одновременно не равны нулю, называется <u>общим уравнением прямой</u>. Вектор $\vec{N} = \{A; B\}$ является нормальным вектором прямой. Если даны две прямые ℓ_1, ℓ_2 своими общими уравнениями $A_1 \cdot x + B_1 \cdot y + C_1 = 0$ и $A_2 \cdot x + B_2 \cdot y + C_2 = 0$, то условие параллельности (2.9) прямых запишется в виде $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2}$, а условие перпендикулярности (2.9) – в виде

$$A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 = 0. \tag{2.10}$$

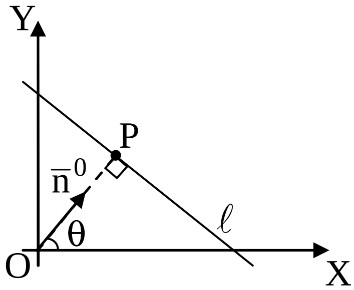

Рис.2.7

8) Если $\vec{n}^0 = \{\cos\theta, \sin\theta\}$ есть единичный вектор перпендикулярный прямой ℓ (рис.2.7), а число $p = \left|\overline{OP}\right|$ равно расстоянию от начала координат до прямой ℓ, то уравнение прямой запишется в виде

$$x \cdot \cos\theta + y \cdot \sin\theta - p = 0. \tag{2.11}$$

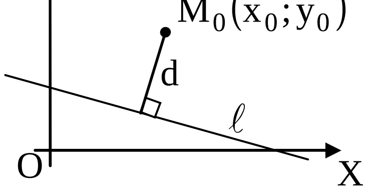

Рис.2.8

Уравнение (2.11) называется <u>нормированным</u> уравнением прямой. Для приведения общего уравнения прямой $A \cdot x + B \cdot y + C = 0$ к нормированному виду достаточно умножить его на <u>нормирующий множитель</u> $\mu = \pm\dfrac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}$, знак которого противоположен знаку C.

9) Расстояние d от произвольной точки $M_0(x_0; y_0)$ плоскости до прямой ℓ (рис.2.8) вычис-

ляется по формуле

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \qquad (2.12)$$

Примеры решения задач

ПРИМЕР 2.1. Дана прямая $2x + 3y + 4 = 0$. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(2;1)$: а) параллельно данной прямой; б) перпендикулярно к данной прямой.

Решение. а) Вычислим угловой коэффициент k_1 данной прямой. Имеем $2x + 3y + 4 = 0 \Leftrightarrow y = -\frac{2}{3}x - \frac{4}{3}$. Следовательно, $k_1 = -\frac{2}{3}$. Так как $\ell_1 \| \ell_2$ (рис. 2.9), то по формуле (2.9): $k_1 = k_2 = -\frac{2}{3}$. Если $\ell_1 \perp \ell_2$, тогда $k_1 \cdot k_2 = -1 \Rightarrow k_2 = \frac{3}{2}$.

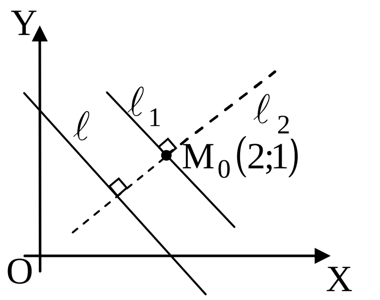

Рис. 2.9

Точка $M_0(2;1) \in \ell_1, \ell_2$.

Следовательно, уравнения ℓ_1, ℓ_2 найдутся по формуле (2.7):

1) $\ell_1 : y - 1 = -\frac{2}{3}(x - 2) \Leftrightarrow 2x + 3y - 7 = 0;$

2) $\ell_2 : y - 1 = \frac{3}{2}(x - 2) \Leftrightarrow 3x - 2y - 4 = 0.$

ПРИМЕР 2.2. Даны вершины треугольника $A(1;-1)$, $B(-2;1)$, $C(3;5)$. Составить уравнение перпендикуляра, опущенного из вершины A на медиану, проведенную из вершины B (рис. 2.10).

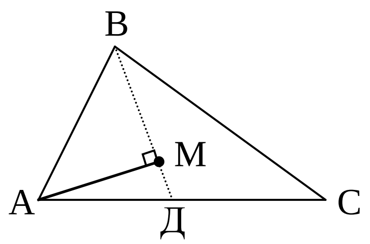

Рис.2.10

Решение. $BД$ - медиана. Так как точка $Д$ делит сторону AC пополам, то $x_Д = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{1+3}{2} = 2$, $y_Д = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{-1+5}{2} = 2$. Найдем уравнение медианы $BД$ как уравнение прямой, проходящей через две данные точки. По формуле (2.6) имеем

$$\frac{x-x_В}{x_Д-x_В}=\frac{y-y_В}{y_Д-y_В} \Rightarrow \frac{x+2}{2+2}=\frac{y-1}{2-1} \Rightarrow y=\frac{1}{4}x+\frac{1}{2} \Rightarrow k_{ВД}=\frac{1}{4}.$$ Если $AM \perp ВД$, то $k_{AM}=-\frac{1}{k_{ВД}}=-4$. Тогда согласно формуле (2.7) уравнение высоты AM запишется в виде $y+1=-4(x-1) \Leftrightarrow 4x+y-3=0$.

ПРИМЕР 2.3. Две стороны квадрата лежат на прямых $5x-12y-65=0$, $5x-12y+26=0$. Вычислить его площадь.

<u>Решение.</u> Так как коэффициенты при x и y равны между собой, то данные прямые параллельны. Точка $M_0(1;-5)$ принадлежит первой прямой, так как $5-12(-5)-65=0$. Определим по формуле (2.12) расстояние d от точки M_0 до второй прямой. Имеем $d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}=\frac{|5-12(-5)+26|}{\sqrt{5^2+12^2}}=$

$\frac{91}{13}=7$. Так как длина стороны квадрата равна 7, то $S=49$.

ПРИМЕР 2.4. Прямая проходит через точку $(2;-3)$ и отсекает на оси ординат отрезок $b=3$. Найти ее уравнение.

<u>Решение</u>. Будем искать уравнение прямой в виде $y=kx+b$. Это целесообразно сделать потому, что в задаче задан отрезок, отсекаемый прямой на оси ординат, т.е. $b=3$. Итак, $y=kx+3$. Следовательно, теперь осталось определить только угловой коэффициент k. По условию прямая проходит через точку $(2;-3)$. Если линия проходит через точку, то координаты этой точки удовлетворяют уравнению линии. Подставим в последнее уравнение 2 вместо x и –3 вместо y. Получим уравнение для определения $k: -3=k\cdot 2+3$. Решая уравнение, находим, что $k=-3$. Следовательно, искомое уравнение: $y=-3x+3$.

ПРИМЕР 2.5. Даны вершины треугольника $A(0;0)$, $B(-6;8)$, $C(3;4)$. Определить: а) уравнение высоты CK и ее длину; б) уравнение биссектрисы AE (рис. 2.11).

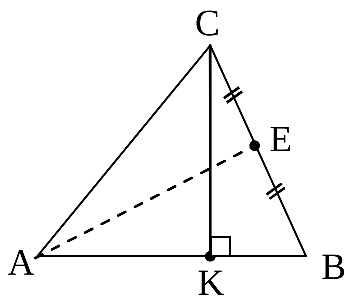

Рис.2.11

<u>Решение.</u> 1) Чтобы написать уравнение высоты CK (рис.2.11) найдем угловой коэффициент прямой AB:

$$\frac{x-x_A}{x_B-x_A}=\frac{y-y_A}{y_B-y_A} \Rightarrow \frac{x-0}{-6-0}=\frac{y-0}{8-0}$$

$$\Rightarrow -6y=8x, \quad y=-\frac{4}{3}x \quad \Rightarrow k_{AB}=-\frac{4}{3}$$ и

прямая AB имеет уравнение $4x+3y=0$.

Так как прямая CK перпендикулярна прямой AB, то $k_{CK} = -\frac{1}{k_{AB}} = -\frac{1}{-4/3} = \frac{3}{4}$. Тогда по формуле (2.7) уравнением CK является $y - 4 = \frac{3}{4}(x - 3) \Rightarrow 4y - 16 = 3x - 9,\ 3x - 4y + 7 = 0$. Длину высоты можно найти как расстояние от точки C`до прямой AB по формуле (2.12):

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|4 \cdot 3 + 3 \cdot 4|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{24}{5}.$$

2) Из свойств биссектрисы $\frac{|BE|}{|EC|} = \frac{|AB|}{|AC|}$.

$|AC| = \sqrt{(3-0)^2 + (4-0)^2} = 5,\ |AB| = \sqrt{(-6-0)^2 + (8-0)^2} = 10$. Следовательно, точка E делит отрезок BC в отношении $\lambda = \frac{|AB|}{|AC|} = \frac{10}{5} = 2$. Найдем координаты точки E,

$$x_E = \frac{x_B + \lambda \cdot x_C}{1 + \lambda} = \frac{-6 + 2 \cdot 3}{1 + 2} = 0 \text{ и } y_E = \frac{y_B + \lambda \cdot y_C}{1 + \lambda} = \frac{8 + 2 \cdot 4}{1 + 2} = \frac{16}{3}.$$

Итак, $E\left(0; \frac{16}{3}\right)$. Запишем уравнение биссектрисы AE, зная ее две точки A и E (см. формулу 2.6): $\frac{x - x_A}{x_E - x_A} = \frac{y - y_A}{y_E - y_A} \Rightarrow \frac{x - 0}{0 - 0} = \frac{y - 0}{16/3 - 0}$, $\frac{16}{3} \cdot x = y \cdot 0$. Уравнение биссектрисы AE: $x = 0$.

2.3. КРИВЫЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Геометрические образы (окружность, эллипс, гипербола, парабола) алгебраического уравнения второй степени

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

в прямоугольной декартовой системе координат называются кривыми второго порядка. Рассмотрим частные случае уравнения при $B = 0$.

1) Множество точек плоскости XOY, равноудаленных от одной фиксированной ее точки $M_0(x_0; y_0)$, называется **окружностью.** Ее уравнение записывается в виде

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2, \tag{2.13}$$

где $M_0(x_0;y_0)$ есть центр окружности, R - ее радиус. Каноническое уравнение окружности записывается в виде

$$x^2+y^2=R^2. \tag{2.14}$$

2) **Эллипсом** называется множество всех точек плоскости, для которых сумма расстояний от двух фиксированных точек плоскости, называемых фокусами, есть величина постоянная.

Каноническое уравнение эллипса имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1. \tag{2.15}$$

В общем случае уравнение эллипса записывается в форме

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1. \tag{2.16}$$

3) **Гиперболой** называется множество всех точек плоскости, абсолютная величина разности расстояний каждой из которых от двух фиксированных точек плоскости, называемых фокусами, есть величина постоянная. Канонические уравнения гиперболы с действительными осями, лежащими на осях координат OX и OY, имеют вид

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \text{ и } \frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1. \tag{2.17}$$

В общем случае уравнения гипербол записывается в форме

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1 \text{ и } \frac{(y-y_0)^2}{a^2}-\frac{(x-x_0)^2}{b^2}=1. \tag{2.18}$$

4) **Параболой** называется множество всех точек плоскости, равноудаленных от данной точки, называемой фокусом, и данной прямой, называемой директрисой. Канонические уравнения парабол с осями симметрии лежащими на осях OX и OY, записываются соответственно в форме

$$y^2=2px \text{ и } x^2=2py, \tag{2.19}$$

где p - параметр параболы.

В общем случае уравнение парабол имеют вид

$$(y-y_0)^2 = 2p(x-x_0) \text{ и } (x-x_0)^2 = 2p(y-y_0). \qquad (2.20)$$

Заметим, что с помощью формул параллельного переноса координат $x-x_0 = x^*$, $y-y_0 = y^*$ уравнения кривых (2.13), (2.16), (2.18), (2.20) приводятся к каноническим их формам.

Примеры решения задач

ПРИМЕР 2.6. Найти координаты центра C и радиус R окружности

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y - 20 = 0.$$

Решение. Дополняя до полного квадрата слагаемые, содержащие переменные x и y, получим $x^2 - 2x + 1 + y^2 + 4y + 4 - 20 - 1 - 4 = 0$ $\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+2)^2 = 5^2$. Следовательно, $C(1;-2)$, $R = 5$.

ПРИМЕР 2.7. Дан эллипс $9x^2 + 25y^2 = 225$. Найти: а) его полуоси; б) координаты фокусов; в) эксцентриситет; г) уравнения директрис.

Решение. Разделив все члены уравнения на 225, приведем уравнение эллипса к каноническому виду: $\frac{9x^2}{225} + \frac{25y^2}{225} = 1$, $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$, $\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$. Следовательно, большая полуось эллипса $a = 5$, малая полуось $b = 3$. Так как фокусы эллипса расположены в точках $F_1(c;0)$, $F_2(-c;0)$, где $c^2 = a^2 - b^2$, то $c^2 = 25 - 9 = 16 \Leftrightarrow c = 4$. Тогда $F_1(4;0)$, $F_2(-4;0)$. Эксцентриситет эллипса вычисляется по формуле $\varepsilon = c/a$. Тогда $\varepsilon = 4/5$. Директрисы эллипса определяются уравнениями $x = \pm a/\varepsilon$ при $a > b$ и уравнениями $y = \pm b/\varepsilon$ при $b > a$. Так как $5 > 3$, то директрисами являются прямые $x = \pm\frac{5}{4/5}$ или $x = \pm\frac{25}{4}$.

ПРИМЕР 2.8. Дана гипербола $9x^2 - 16y^2 + 90x + 32y - 367 = 0$. Найти координаты ее центра C, полуоси, эксцентриситет, уравнения асимптот и уравнения директрис.

Решение. Методом дополнения до полного квадрата приведем уравнение гиперболы к виду (2.18). Имеем $9x^2 - 16y^2 + 90x + 32y - 367 = 0$ $\Leftrightarrow 9\cdot(x^2 + 10x + 25 - 25) - 16\cdot(y^2 - 2y + 1 - 1) - 367 = 0 \Leftrightarrow$

$$9(x+5)^2 - 225 - 16(y-1)^2 + 16 - 367 = 0 \Leftrightarrow 9(x+5)^2 - 16(y-1)^2 = 576$$

$\Leftrightarrow \frac{(x+5)^2}{8^2}-\frac{(y-1)^2}{6^2}=1$. Следовательно, действительная полуось, расположенная на прямой, параллельной оси OX, равна $a=8$. Мнимая полуось $b=3$. Центр гиперболы находится в точке $M_0(-5;1)$. Фокусы гиперболы F_1, F_2 удалены на расстояние, равное C, где $c^2=a^2+b^2$, тогда $c^2=64+36=100$ $\Leftrightarrow c=10$. Итак, $F_1(-15;1)$, $F_2(5;1)$. Эксцентриситет $\varepsilon=c/a$. Тогда $\varepsilon=5/4$. Уравнения асимптоты для гипербола со смещенным центром записывается в виде: $y-y_0=\pm\frac{b}{a}(x-x_0)$. Следовательно,

$y-1=\pm\frac{6}{8}(x+5)\Leftrightarrow 4y-4=\pm 3(x+5)$. Уравнение директрис найдем по формуле $x-x_0=\pm a/\varepsilon$ при $a>b$.

Следовательно, $x+5=\pm\frac{8}{5/4}\Leftrightarrow x+5=\pm\frac{32}{5}$. Отсюда $x=\frac{7}{5}$ и $x=-\frac{57}{5}$.

ПРИМЕР 2.9. Дана парабола $y=4x^2-8x+7$. Найти координаты ее вершины A, фокуса F и величину параметра p.

Решение. Дополняя до полного квадрата, получим $y=4\cdot\left(x^2-2x+1-1\right)+7$, $y=4(x-1)^2+3\Leftrightarrow y-3=4(x-1)^2$. Следовательно, согласно формуле (2.20), ее вершина находится в т. $A(1;3)$. Так как $2p=4$, то параметр $p=2$. Фокус F параболы удален от ее вершины на расстояние $\frac{p}{2}=1$. Данная парабола симметрична относительно прямой, параллельной оси OY. Ее фокус расположен в т. $F(1;4)$.

ПРИМЕР 2.10. Определить, какая линия дана уравнением $3\rho(1-\cos\varphi)=1$ в полярных координатах.

Решение. Так как $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$, $\cos\varphi=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, то данное уравнение записывается в виде $3\sqrt{x^2+y^2}\cdot\left(1-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)=1\Leftrightarrow 3\sqrt{x^2+y^2}=1+3x$

$$\Rightarrow 9\left(x^2+y^2\right)=9x^2+6x+1\Rightarrow 9y^2=6x+1\Rightarrow y^2=\frac{2}{3}\left(x+\frac{1}{3}\right).$$

Сравнивая это уравнение с уравнением (2.20), найдем, что кривая является параболой с осью симметрии OX, с вершиной в т. $\left(-\frac{1}{3};0\right)$, параметр которой $p=\frac{1}{3}$.

2.4. ПОВЕРХНОСТЬ И ЕЕ УРАВНЕНИЕ

Пусть в трехмерном пространстве дана декартовая система координат XYZ и некоторая поверхность.

Уравнение $F(x, y, z) = 0$ называется уравнением поверхности в выбранной системе координат, если этому уравнению удовлетворяют координаты (x, y, z) любой точки, лежащей на поверхности, и не удовлетворяют координаты всех точек пространства, не лежащих на ней.

Уравнение $F(x, y, z) = 0$ называется алгебраическим, если выражение $F(x, y, z) = 0$ есть сумма конечного числа слагаемых вида $Ax^m y^n z^p$, где m, n, p - целые неотрицательные числа; A - действительное число. Наибольшая из сумм $m + n + p$ называется степенью уравнения.

В аналитической геометрии в пространстве изучаются геометрические образы алгебраических уравнений первой и второй степени относительно трех переменных. Так как пересечением двух поверхностей является линия, то ее уравнение может быть задано системой уравнений

$$\begin{cases} F_1(x; y; z) = 0, \\ F_2(x; y; z) = 0. \end{cases} \tag{2.21}$$

В параметрической форме линия задается с помощью трех уравнений вида

$$x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t), \tag{2.22}$$

где t - параметр.

2.5. ВИДЫ УРАВНЕНИЙ ПЛОСКОСТИ

1) Уравнение плоскости α (рис.2.12) по точке $M_0(x_0; y_0; z_0) \in \alpha$ и нормальному к плоскости вектору $\vec{N} = \{A, B, C\}$ имеет вид

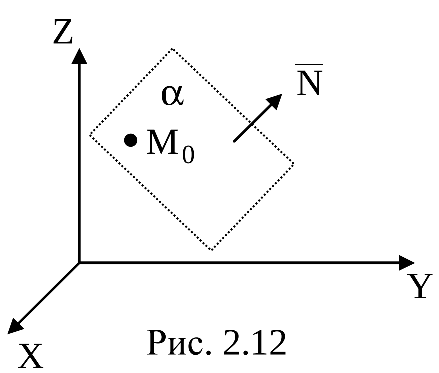

Рис. 2.12

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0. \qquad (2.23)$$

2) Если известны три точки

$M_1(x_1;y_1;z_1)$, $M_2(x_2;y_2;z_2)$, $M_3(x_3;y_3;z_3)$ плоскости α, не лежащие на одной прямой, то уравнение плоскости записывается в виде

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0. \qquad (2.24)$$

3) Алгебраическое уравнение первой степени $Ax+By+Cz+D=0$, где $A,B,C,D\in R$ и старшие коэффициенты A,B,C одновременно не равны нулю, называется <u>общим уравнением плоскости</u>.

4) Если даны две плоскости α_1, α_2 своими общими уравнениями, то угол φ, под которым пересекаются эти плоскости, вычисляется по формуле

$$\cos\varphi=\frac{\vec{N}_1\cdot\vec{N}_2}{\left|\vec{N}_1\right|\cdot\left|\vec{N}_2\right|}=\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}. \qquad (2.25)$$

Если $\alpha_1\parallel\alpha_2$, то

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}. \qquad (2.26)$$

Если $\alpha_1\perp\alpha_2$, то

$$A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0. \qquad (2.27)$$

5) Уравнение

$$x\cdot\cos\alpha+y\cdot\cos\beta+z\cdot\cos\gamma-p=0, \qquad (2.28)$$

где $\{\cos\alpha;\cos\beta;\cos\gamma\}$ - нормальный единичный к плоскости вектор,

p - расстояние от начала координат до плоскости, называется <u>нормальным уравнением плоскости</u>.

6) Если точка $M_0(x_0;y_0;z_0)\notin\alpha$, то расстояние d от точки до плоскости α вычисляется по формуле

$$d=\frac{|A\cdot x_0+B\cdot y_0+C\cdot z_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}. \qquad (2.29)$$

Примеры решения задач

ПРИМЕР 2.11. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(3;-2;-7)$ параллельно плоскости $5x-3y+2z-3=0$.

Решение. Уравнения всех плоскостей, проходящих через точку M_0, имеют вид $A(x-3)+B(y+2)+C(z+7)=0$ (см. формулу 2.23). Вектор $\vec{N}=\{5;-3;2\}$, ввиду параллельности плоскостей, является нормальным вектором и для искомой плоскости. Тогда $A=5,\ B=-3,\ C=2$ (см. формулу 2.26). Следовательно, уравнение плоскости α примет вид $5\cdot(x-3)-3\cdot(y+2)+2\cdot(z+7)=0$

$\Leftrightarrow 5x-3y+2z-7=0$. Ответ: $5x-3y+2z-7=0$.

ПРИМЕР 2.12. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(3;4;-5)$ параллельно двум векторам $\bar{a}_1=\{3;1;-1\}$, $\bar{a}_2=\{1;-2;1\}$.

Решение. Так как точка $M_0\in\alpha$, то уравнение плоскости α будем искать в виде $A(x-3)+B(y-4)+C(z+5)=0$ (см. формулу 2.23). Так как вектора $\bar{a}_1,\bar{a}_2$ параллельны плоскости α, а вектор $\overline{N}=\{A;B;C\}$ перпендикулярен α, то $\overline{N}=\bar{a}_1\times\bar{a}_2$. Тогда $\overline{N}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 3 & 1 & -1\\ 1 & -2 & 1\end{vmatrix}=\{-1;-4;-7\}$. Следовательно, $A=-1$, $B=-4$, $C=-7$. Тогда уравнение плоскости запишется в виде $-1\cdot(x-3)-4\cdot(y-4)-7\cdot(z+5)=0 \Leftrightarrow x+4y+7z+16=0$.

ПРИМЕР 2.13. Вычислить расстояние d от точки $P(-1;1;-2)$ до плоскости, проходящей через три точки $M_1(1;-1;1)$, $M_2(-2;1;3)$, $M_3(4;-5;-2)$.

Решение. Найдем, по формуле (2.24), уравнение плоскости α, проходящей через данные три точки. Имеем

$$\begin{vmatrix}x-1 & y+1 & z-1\\ -3 & 2 & 2\\ 3 & -4 & -3\end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow 2x-3y+6z-11=0.$$

Вычислим расстояние d, воспользовавшись формулой (2.29):

$$d=\frac{|2\cdot(-1)-3\cdot 1+6\cdot(-2)-11|}{\sqrt{2^2+3^2+6^2}}=\frac{28}{7}=4.$$

ПРИМЕР 2.14. Найти уравнение плоскости, параллельной оси OZ и проходящей через точки $A(2;3;-1)$ и $B(-1;2;4)$.

<u>Решение.</u> Уравнение плоскости, параллельной оси OZ, имеет вид $Ax+By+D=0$. Если плоскость проходит через точку, то координаты этой точки удовлетворяют уравнению плоскости. Подставляя координаты точек $A(2;3;-1)$ и $B(-1;2;4)$ в уравнение $Ax+By+D=0$, получим два уравнения: $\begin{cases} 2A+3B+D=0, \\ -A+2B+D=0. \end{cases}$ Для определения коэффициентов A, B, D мы имеем систему двух однородных линейных уравнений с тремя неизвестными. Составляем матрицу коэффициентов этих уравнений: $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Используем формулы, позволяющие решить систему двух линейных однородных уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} ax+by+cz=0, \\ a_1x+b_1y+c_1z=0, \end{cases}$$

где

$$x=\begin{vmatrix} b & c \\ b_1 & c_1 \end{vmatrix}\cdot t,\ y=\begin{vmatrix} c & a \\ c_1 & a_1 \end{vmatrix}\cdot t,\ z=\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}\cdot t. \qquad (2.30)$$

Получаем по формуле (2.30): $A=\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}\cdot t=(3-2)\cdot t=t$,

$$B=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}\cdot t=(-1-2)\cdot t=-3t,\ D=\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}\cdot t=(4+3)\cdot t=7t.$$

Подставляя найденные значения A, B, D в уравнение $Ax+By+D=0$, получим $tx-3ty+7t=0$. После сокращения на t уравнение искомой плоскости приобретает вид $x-3y+7=0$.

ПРИМЕР 2.15. Составить уравнение плоскости, перпендикулярной оси OX и проходящей через точку $M_0(3;7;-1)$.

<u>Решение.</u> Так как плоскость перпендикулярна оси OX, то она параллельна плоскости YOZ, а потому ее уравнение имеет вид $Ax+D=0$. Подставляя в это уравнение координаты точки M_0, получим $A\cdot 3+D=0 \Rightarrow D=-3A$. Это значение D подставим в уравнение $Ax+D=0$. Получаем $Ax-3A=0$ и, сокращая на A, будем иметь окончательно $x-3=0$.

2.6. ВИДЫ УРАВНЕНИЙ ПРЯМОЙ В ПРОСТРАНСТВЕ

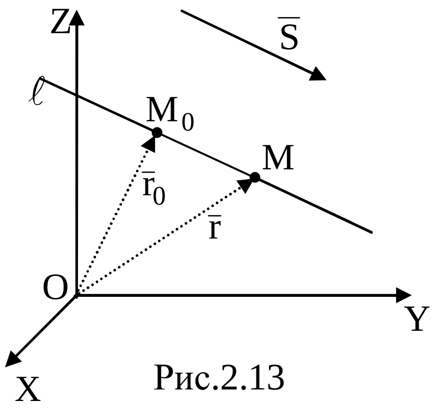

Рис.2.13

1) Если $\bar{r}_0 = \{x_0; y_0; z_0\}$ есть радиус – вектор фиксированной точки прямой ℓ, $\bar{r} = \{x; y; z\}$ есть радиус – вектор произвольной точки прямой, $\bar{S} = \{m; n; p\}$ - направляющий вектор прямой (рис.2.13), то уравнение

$$\bar{r} = \bar{r}_0 + \bar{S} \cdot t, \text{ где } t \in R \qquad (2.31)$$

является <u>векторным уравнением</u> прямой.

2) Уравнения

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}, \qquad (2.32)$$

где $M_0(x_0; y_0; z_0)$ фиксированная точка прямой $\bar{S} = \{m; n; p\}$ - направляющий вектор прямой называются <u>каноническими уравнениями</u> прямой.

3) Совокупность уравнений

$$x = x_0 + mt \; y = y_0 + nt, \; z = z_0 + pt, \qquad (2.33)$$

где $t \in R$ - параметр, называется <u>параметрическими уравнениями</u> прямой ℓ.

4) Если точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$ и $M_2(x_2; y_2; z_2)$ принадлежит прямой ℓ, то уравнение прямой записывается в виде

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}. \qquad (2.34)$$

5) Так как линией пересечения двух плоскостей является прямая, то общие уравнения прямой имеют вид

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases} \qquad (2.35)$$

6) Если две прямые ℓ_1, ℓ_2 даны своими каноническими уравнениями (2.32), то угол φ между ними вычисляется по формуле

$$\cos\varphi = \frac{\bar{S}_1 \cdot \bar{S}_2}{|\bar{S}_1| \cdot |\bar{S}_2|} = \frac{m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}. \qquad (2.36)$$

Если $\ell_1 \| \ell_2$, то

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}. \qquad (2.37)$$

Если $\ell_1 \perp \ell_2$, то

$$m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0. \qquad (2.38)$$

Примеры решения задач

ПРИМЕР 2.16. Найти уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(3;2;-1)$ перпендикулярно двум прямым:

$$\ell_1 : \frac{x-1}{2} = \frac{y-7}{-3} = \frac{z+4}{5} \text{ и } \ell_2 : \frac{x+3}{4} = \frac{y+5}{1} = \frac{z-9}{-2}.$$

Решение. Уравнение любой прямой, проходящей через точку M_0, записывается в виде $\dfrac{x-3}{m} = \dfrac{y-2}{n} = \dfrac{z+1}{p}$. Так как искомая прямая ℓ перпендикулярна прямым ℓ_1, ℓ_2, то, согласно условию перпендикулярности прямых (2.38), получим $\begin{cases} 2m - 3n + 5p = 0, \\ 4m + n - 2p = 0. \end{cases}$ Полагая, например $m = 1$, найдем одно из частных решений этой системы. Получим $n = 24$, $p = 14$. Итак, направляющим вектором $\overline{S}$ является $\overline{S} = \{1; 24; 14\}$ и искомая прямая ℓ имеет уравнение

$$\frac{x-3}{1} = \frac{y-2}{24} = \frac{z+1}{14}.$$

ПРИМЕР 2.17. Составить параметрические уравнения прямой, проходящей через точку $M_1(1;-1;-3)$ параллельно вектору $\overline{a} = \{2;-3;4\}$.

Решение. Уравнения всех прямых, проходящих через точку $M_1(1;-1;-3)$, имеют вид $\begin{cases} x = 1 + mt, \\ y = -1 + nt, \\ z = -3 + pt. \end{cases}$ По условию прямая ℓ параллельна вектору $\overline{a} = \{2;-3;4\}$. Следовательно, $\overline{S} \| \overline{a}$, где $\overline{S} = \{m; n; p\}$ - направляющий вектор искомой прямой. Тогда $m = 2$, $n = -3$, $p = 4$ и уравнения прямой запишутся в виде

$$\begin{cases} x = 2t + 1, \\ y = -3t - 1, \\ z = 4t - 3. \end{cases}$$

ПРИМЕР 2.18. Составить канонические уравнения прямой $\begin{cases} x - 2y + 3z - 4 = 0, \\ 3x + 2y - 5z - 4 = 0. \end{cases}$

<u>Решение.</u> Для приведения общего уравнения прямой ℓ к каноническому виду (2.32) достаточно найти одну из её точек и указать её направляющий вектор $\overline{S}$.

1) Для определения точки $M_0 \in \ell$ в данной системе уравнений положим известной одну из координат, например, $z = 0$. Тогда, для определения оставшихся координат, получим систему $\begin{cases} x - 2y = 4, \\ 3x + 2y = 4. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2, \\ y = -1. \end{cases} \Rightarrow M_0(2;-1;0) \in \ell$.

2) Для определения координат вектора $\overline{S}$ заметим (рис. 2.14), что $\overline{S} \perp \overline{N}_1$, $\overline{S} \perp \overline{N}_2$, где $\overline{N}_1 = \{1;-2;3\}$, $\overline{N}_2 = \{3;2;-5\}$. Тогда

$$\overline{S} = \lambda \cdot (\overline{N}_1 \times \overline{N}_2) = \lambda \cdot \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & -2 & 3 \\ 3 & 2 & -5 \end{vmatrix} =$$

$$= \lambda \cdot (4\bar{i} + 14\bar{j} + 8\bar{k}) = \lambda\{4;14;8\}.$$

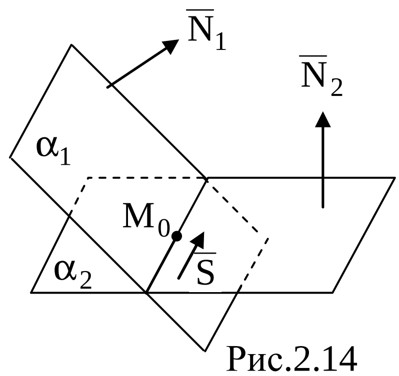

Рис.2.14

Полагая $\lambda = 1/2$, найдем, что $m = 2$, $n = 7$, $p = 4$.

Подставляя найденные числа в канонические уравнения (2.32), получим

$$\frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{7} = \frac{z}{4}.$$

ПРИМЕР 2.19. При каком значении числа m прямые $\frac{x+2}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z-1}{4}$ и $\frac{x-3}{m} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-7}{2}$ пересекаются?

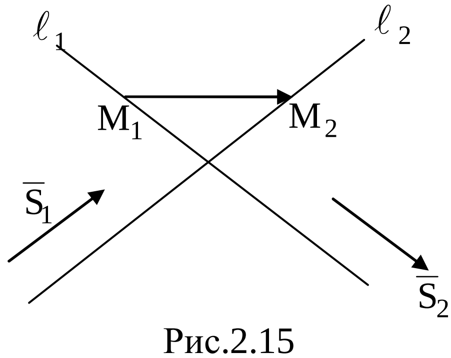

Рис.2.15

<u>Решение</u>. Прямые ℓ_1, ℓ_2 (рис. 2.15) пересекаются, если вектора $\overline{S}_1$, $\overline{S}_2$, $\overline{M_1M_2}$ компланарны. По условию $\overline{S}_1 = \{2;-3;4\}$ и

$\overline{S}_2=\{m;4;2\}$, $M_1(-2;0;1)\in\ell_1$, $M_2(3;1;7)\in\ell_2$. Тогда $\overline{M_1M_2}=\{5;1;6\}$. Векторы компланарны, если

$$(\overline{S}_1\times\overline{S}_2)\cdot\overline{M_1M_2}=0\Leftrightarrow\begin{vmatrix}2&-3&4\\m&4&2\\5&1&6\end{vmatrix}=0\Leftrightarrow 22m-66=0\Leftrightarrow m=3.$$

Ответ. $m=3$.

2.7. ПРЯМАЯ И ПЛОСКОСТЬ В ПРОСТРАНСТВЕ R^3

В пространстве R^3 даны своими уравнениями плоскость $Ax+By+Cz+D=0$ и прямая $\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}$.

1) Для определения координат точки M_1 пересечения прямой ℓ и плоскости α (рис. 2.16) достаточно решить систему уравнений

$$\begin{cases}Ax+By+Cz+D=0,\\ x=x_0+mt,\ y=y_0+nt,\ z=z_0+pt,\end{cases}$$

где уравнения прямой ℓ записаны в параметрической форме (2.33).

Подставляя в первое уравнение выражения для x, y, z, найдем значение параметра $t=t_1$, определяющее координаты точки M_1 пересечения прямой и плоскости.

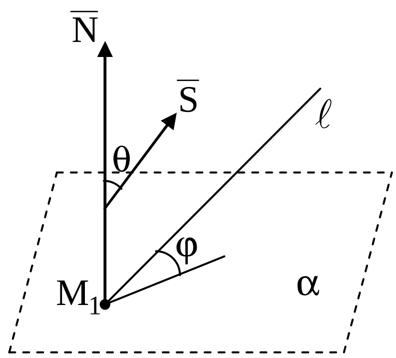

Рис.2.16

2) Углы, под которыми прямая пересекает плоскость, вычисляются по формулам

$$\sin\varphi=\pm\frac{Am+Bn+Cp}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{m^2+n^2+p^2}}. \tag{2.39}$$

Если $\ell\perp\alpha$, то

$$\frac{A}{m}=\frac{B}{n}=\frac{C}{p}. \tag{2.40}$$

Если $\ell\parallel\alpha$, то

$$A\cdot m+B\cdot n+C\cdot p=0. \tag{2.41}$$

Примеры решения задач

ПРИМЕР 2.20. Найти проекцию точки $P(5;2;-1)$ на плоскость $2x-y+3z+23=0$.

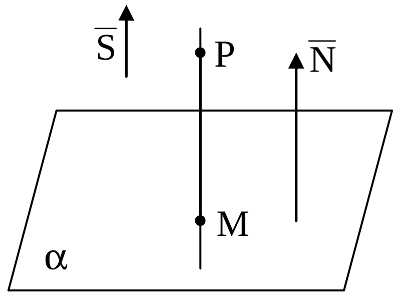

Рис. 2.17

Решение. Если точка M есть проекция точки $P(5;2;-1)$ на данную плоскость, то направляющий вектор $\overline{S}$ прямой MP коллинеарен нормальному вектору $\overline{N}$ (рис. 2.17) плоскости α. Полагая $\overline{S}=\overline{N}$, получим $\overline{S}=\{2;-1;3\}$. Тогда прямая MP задается уравнениями $x=5+2t$, $y=2-t$, $z=-1+3t$. Подставляя выражения для x, y, z в уравнение плоскости α, получим

$$2\cdot(5+2t)-(2-t)+3\cdot(-1+3t)+23=0 \Leftrightarrow 14t+28=0 \Leftrightarrow t=-2.$$

Подставляя найденное значение параметра t в уравнения прямой, получим

$x=1$, $y=4$, $z=-7$. Значит, точка $M(1;4;-7)$ есть проекция точки $P(5;2;-1)$ на данную плоскость $2x-y+3z+23=0$.

ПРИМЕР 2.21. При каком значении n прямая $\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-2}{n}=\dfrac{z+3}{-2}$ параллельна плоскости $x-3y+6z+7=0$?

Решение. По условию $\overline{S}=\{3;n;-2\}$, $\overline{N}=\{1;-3;6\}$. Прямая $\ell\parallel\alpha$, если $\overline{S}\cdot\overline{N}=0$. Тогда, по формуле (2.41) $A\cdot m+B\cdot n+C\cdot p=0$, получим $3-3n-12=0 \Leftrightarrow n=-3$. Значит, прямая ℓ будет параллельна плоскости α при $n=-3$.

ПРИМЕР 2.22. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_1(1;2;-3)$ параллельно прямым $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{-3}=\dfrac{z-7}{3}$, $\dfrac{x+5}{3}=\dfrac{y-2}{-2}=\dfrac{z+3}{-1}$.

Решение. Точка $M_1\in\alpha \Rightarrow \alpha: A(x-1)+B(y-2)+C(z+3)=0$. Плоскость $\alpha\parallel\ell_1$, $\alpha\parallel\ell_2$. Следовательно, $\overline{N}\perp\overline{S}_1$, $\overline{N}\perp\overline{S}_2$. Тогда, нормальным вектором плоскости $\overline{N}$ может служить вектор $\overline{N}=\overline{S}_1\times\overline{S}_2=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 2 & -3 & 3\\ 3 & -2 & 1\end{vmatrix}=\{9;11;5\}$. Тогда плоскость α имеет уравнение:

$9\cdot(x-1)+11\cdot(y-2)+5\cdot(z+3)=0$. Ответ: $9x+11y+5z-16=0$.

ПРИМЕР 2.23. Составить уравнение плоскости, проходящей через две параллельные прямые $\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-3}{-2}$, $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z+3}{-2}$.

Решение. Точка $M_1(2;-1;3)\in\alpha_1$; $M_2(1;2;-3)\in\alpha_2$ (рис. 2.18). Если вектор $\overline{N}$ нормальный вектор плоскости α, проходящей через обе прямые, то $\overline{N}\perp\overline{M_1M_2}$ и $\overline{N}\perp\overline{S}$, где $\overline{S}=\{3;2;-2\}$. Следовательно, $\overline{N}=\overline{M_1M_2}\times\overline{S}$, где $\overline{M_1M_2}=\{-1;3;-6\}$. Тогда

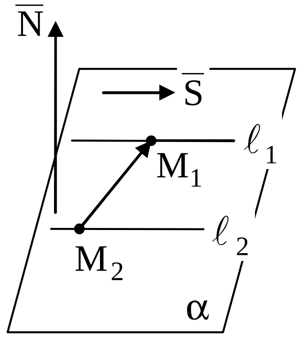

Рис.2.18

$$\overline{N}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ -1 & 3 & -6\\ 3 & 2 & -2\end{vmatrix}=6\cdot\bar{i}-20\cdot\bar{j}-11\cdot\bar{k}=\{6;-20;-11\}$$

.

Плоскость α проходит через прямую ℓ_1. Следовательно, точка $M_1\in\alpha$. Тогда уравнение плоскости α имеет вид $A(x-2)+B(y+1)+C(z-3)=0$, где $\overline{N}=\{A;B;C\}$. Подставляя координаты вектора $\overline{N}$ в это уравнение, получим $6\cdot(x-2)-20\cdot(y+1)-11\cdot(z-3)=0$. Значит, уравнение искомой плоскости имеет вид $6x-20y-11z+1=0$.

2.8. ПОВЕРХНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Геометрические образы (сфера, эллипсоид, гиперболоид, параболоид, цилиндр, конус, …) алгебраического уравнения второй степени

$$Ax^2+By^2+Cz^2+Dxy+Exz+Fyz+Px+Qy+Rz+H=0. \qquad (2.42)$$

Относительно трех переменных x, y, z в прямоугольной декартовой системе координат называются поверхностями второго порядка.

В данном параграфе рассматриваются некоторые образы уравнения (2.42) при $D=E=F=0$. Основным методом изучения поверхности при известном её уравнении является метод сечений, состоящий в определении линии пересечения поверхности с плоскостями, параллельными осям координат.

1) Множество точек пространства R^3, равноудаленных от одной фиксированной ее точки $M_0(x_0;y_0z_0)$, называется **сферой**. Её уравнение имеет вид

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)=R^2. \qquad (2.43)$$

где точка $M_0(x_0;y_0;z_0)$ - центр сферы, $R>0$ - её радиус.

2) **Эллипсоидом** называется поверхность, определяемая уравнением

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}+\frac{(z-z_0)^2}{c^2}=1. \tag{2.44}$$

Числа $a, b, c > 0$ называются полуосями эллипсоида. Если a, b, c - различные числа, то поверхность (рис.2.19) называется трехосным эллипсоидом. Если два из них равны между собой, то эллипсоид является поверхностью вра-

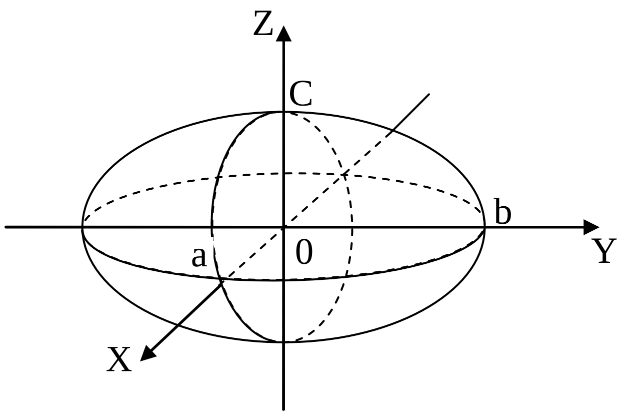

Рис. 2.19

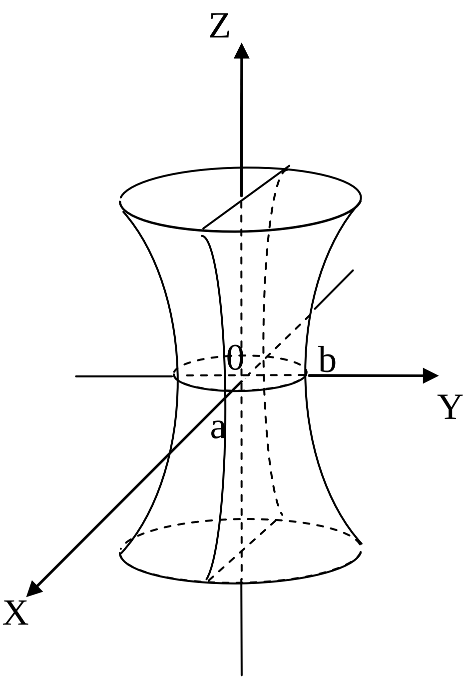

Рис. 2.20

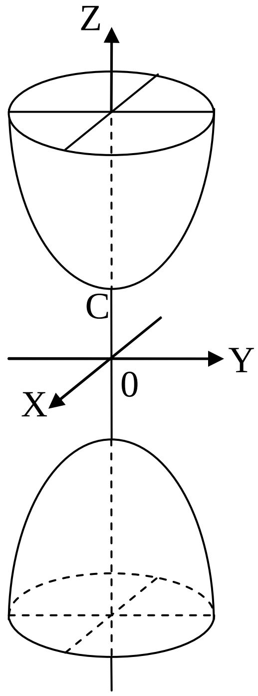

Рис.2.21

щения. При $a = b = c$ эллипсоид вырождается в сферу.

3) **Однополостным гиперболоидом** (рис.2.20) называется поверхность, определяемая уравнением

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}-\frac{(z-z_0)^2}{c^2}=1. \tag{2.45}$$

При $x_0 = y_0 = z_0 = 0$ уравнение (2.45) называется каноническим уравнением однополостного гиперболоида. Гиперболоиды с осями симметрии Ox и Oy задаются уравнениями

$$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \text{ и } \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1. \tag{2.46}$$

4) **Двухполостным гиперболоидом** (рис. 2.21) называется поверхность, определяемая уравнением

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}-\frac{(z-z_0)^2}{c^2}=-1. \qquad (2.47)$$

При $x_0 = y_0 = z_0 = 0$ уравнение (2.47) называется каноническим уравнением двухполостного гиперболоида.

Гиперболоиды с осями симметрии Ox и Oy задаются уравнениями

$$\begin{aligned} -\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}&=-1,\\ \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}&=-1 \end{aligned} \qquad (2.48)$$

5) **Эллиптическим параболоидом** называется поверхность, определяемая уравнением

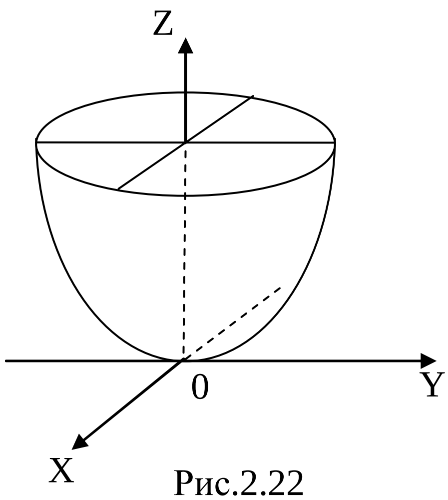

Рис.2.22

$$\frac{(x-x_0)^2}{p}+\frac{(y-y_0)^2}{q}=2(z-z_0)^2 \qquad (2.49)$$

где $p, q > 0$.

При $x_0 = y_0 = z_0 = 0$ уравнение (2.49) называется каноническим уравнением эллиптического параболоида (рис. 2.22). Параболоиды с осями симметрии Ox и Oy соответственно задаются уравнениями

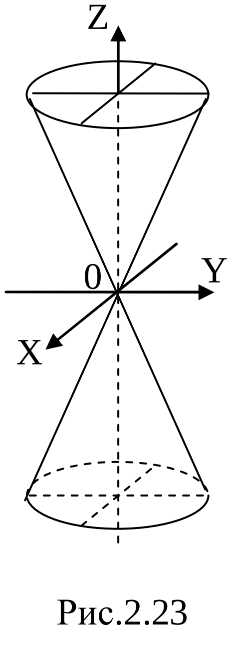

Рис.2.23

$$\begin{aligned} \frac{y^2}{p}+\frac{z^2}{q}&=2x,\\ \frac{x^2}{p}+\frac{z^2}{q}&=2y \end{aligned} \qquad (2.50)$$

При $p = q$ уравнения (2.49), (2.50) определяют соответствующие поверхности вращения.

6) **Конусом** называется поверхность, определяемая уравнением

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}-\frac{(z-z_0)^2}{c^2}=0. \qquad (2.51)$$

При $x_0=y_0=z_0=0$ уравнение (2.51) называется каноническим уравнением конуса (рис.2.23). Конусы с осями симметрии Ox и Oy соответственно задаются уравнениями

$$\begin{gathered}-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0,\\ \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0.\end{gathered} \qquad (2.52)$$

При $a=b$, $b=c$, $a=c$ в соответствующих уравнениях (2.51), (2.52) образуются круговые конусы.

Примеры решения задач

ПРИМЕР 2.24. Вывести уравнение поверхности, каждая точка которой расположена вдвое ближе к точке $A(2;0;0)$, чем к точке $B(-4;0;0)$.

Решение. Если S - поверхность, заданная условиями задачи, то $M(x,y,z)\in S$ в том и только в том случае, когда $\rho(M,B)=2\cdot\rho(M,A)$ или $\sqrt{(x+4)^2+y^2+z^2}=2\cdot\sqrt{(x-2)^2+y^2+z^2}$. Отсюда получаем $(x+4)^2+y^2+z^2=4\cdot\left((x-2)^2+y^2+z^2\right)\Rightarrow 3x^2-24x+3y^2+3z^2=0$ или, выделяя полный квадрат в слагаемых, содержащих x, получаем искомое уравнение поверхности в виде $(x-4)^2+y^2+z^2=16$. Из него видно, что заданная поверхность S есть сфера радиуса 4 с центром в точке $(4;0;0)$.

ПРИМЕР 2.25. Исследовать форму кривой Г, заданной уравнениями

$$\begin{cases}(x-1)^2+y^2+z^2=36,\\ y+z=0.\end{cases}$$

Определить вид её проекции на плоскость Oxy.

Решение. Кривая Г задана как линия пересечения сферы $(x-1)^2+y^2+z^2=36$ с плоскостью $y+z=0$ и, следовательно, есть окружность. Так как центр сферы $C(1;0;0)$ лежит в плоскости сечения $y+z=0$, то центр окружности совпадает с точкой C, а ее радиус равен радиусу сферы, т.е. $R=4$. Установим форму проекции окружности Г на плоскость Oxy. Исключая z из системы $\begin{cases}(x-1)^2+y^2+z^2=36,\\ y+z=0,\end{cases}$ получаем $(x-1)^2+2y^2=36$, или $\dfrac{(x-1)^2}{36}+\dfrac{y^2}{18}=1$. Отсюда заключаем, что искомая проекция – эллипс, главные оси которого сонаправлены с осями Ox и Oy, центр находится в точке $(1;0)$, а полуоси равны $a=6,\ b=3\sqrt{2}$.

ПРИМЕР 2.26. Методом сечений исследовать форму и построить поверхность, заданную уравнением $z=2\left(1-\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{25}\right)$.

Решение. В сечении поверхности горизонтальной плоскостью $z=h$ имеем кривую Γ_h, проекция которой на плоскость Oxy определяется уравнением

$$h=2\left(1-\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{25}\right) \text{ или } \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25}=2-h. \qquad (2.53)$$

Уравнение (2.53) при $h>2$ не имеет решений относительно (x,y). Это означает, что соответствующее сечение пусто, т.е. рассматриваемая поверхность целиком расположена ниже плоскости $z=2$. При $h\le 2$ уравнение (2.53) определяет эллипс с полуосями $a=4\sqrt{2-h}$ и $b=5\sqrt{2-h}$, вырождающийся в точку $x=y=0$ при $h=2$. Заметим, что все эллипсы, получающиеся в сечениях поверхности плоскостями $x=h\le 2$, подобны между собой $\left(\dfrac{a}{b}=\text{const}=\dfrac{4}{5}\right)$, причем с уменьшением h их полуоси неограниченно и монотонно возрастают. Полученной информации достаточно, чтобы построить эскиз поверхности. Дальнейшее уточнение ее формы можно получить, если рассмотреть сечения координатными плоскостями Oxz и Oyz. Сечение плоскостью $Oxz: y=0$ дает кривую $x^2=16(2-z)$, т.е. параболу с параметром $p=8$, вершиной в точке

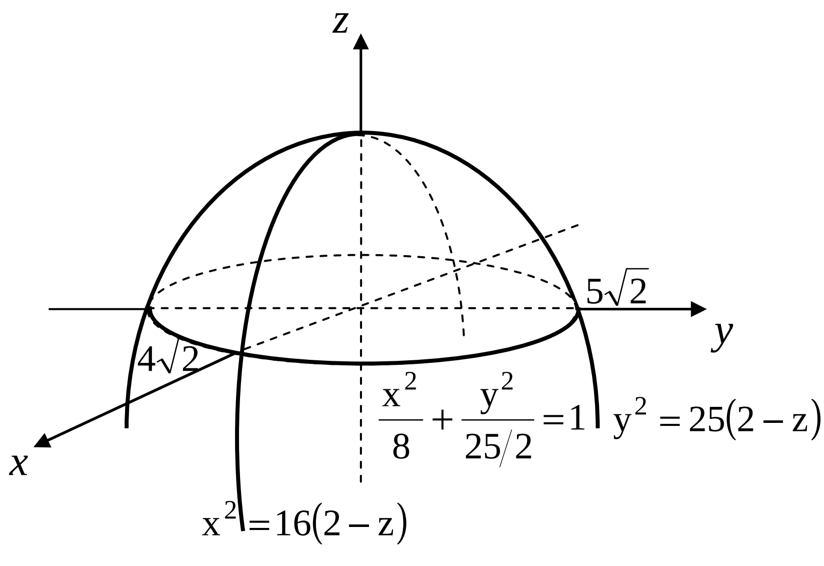

Рис. 2.24

$x=0,\ z=2$ и ветвями, направленными в сторону убывания значений z. Сечение плоскостью Oyz: $x=0$ дает параболу $y^2=25(2-z)$ с параметром $p=\frac{25}{2}$, вершиной в точке $y=0,\ z=2$ и аналогично направленным ветвями. Заданная поверхность есть эллиптический параболоид (рис. 2.24).