МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Харківський національний автомобільно-дорожній університет

До друку дозволяю
Заступник ректора
__________ І.П. Гладкий

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

з дисципліни **«Вища математика»**
для студентів денної форми навчання освітньо-кваліфікаційного рівня бакалавр зі спеціальності
015.13 «Професійна освіта (метрологія, стандартизація та сертифікація)»
015.20 «Професійна освіта (транспорт)»

Затверджено Радою
Факультету
Компьютерных
технологий та
мехатроники протокол
№ ___ від

Укладач: ст. викладач каф. прикладної
математики Козачок Л.М.

Харків
2016

1.1 МАТРИЦЫ

1.1.1 Определение матрицы

<u>ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1</u> Прямоугольная таблица, составленная из $m \cdot n$ чисел, называется ***матрицей*** из m строк и n столбцов размера $m \times n$. Для обозначения матрицы применяются круглые скобки и прописные буквы А, В, С.....

Например, $$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad (1.1)$$

есть общий вид записи матрицы из $m \times n$ чисел.

Числа $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{mn}$, составляющие матрицу, называются ее элементами.

Горизонтальные ряды матрицы называются ***строками*** матрицы, вертикальные - ***столбцами***.

Индексы i и j у элемента a_{ij}, где $i = 1,2,...m;$ $j = 1,2,...,n,$ означают, что этот элемент расположен в i-й строке и j-м столбце.

Например, элемент a_{23} расположен во второй строке, в третьем столбце.

Наряду с обозначением (1.1) матрица обозначается также в форме

$$A = \left(a_{ij}\right)_{m \times n}, \text{ где } i = 1,2,\dots,m, \ j = 1,2,\dots,n \qquad (1.2)$$

1.1.2 Виды матриц

<u>ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2</u> Матрица, у которой число строк равно числу ее столбцов называется ***квадратной матрицей***. При этом число ее строк (столбцов) называется порядком матрицы.

Например, матрица $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 5 \\ 1 & -3 & 7 \end{pmatrix}$ есть квадратная матрица третьего порядка.

Квадратная матрица n-го порядка записывается в виде

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad (1.3)$$

В квадратной матрице (1.3) числа $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ образуют главную диагональ матрицы, а числа $a_{n1}, a_{(n-1)2}, \dots, a_{1n}$ – побочную диагональ.

Квадратная матрица, у которой все числа, не стоящие на главной диагонали, равны нулю, называется ***диагональной матрицей.***

Например, матрица $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ есть диагональная матрица второго порядка.

Диагональная матрица, у которой все элементы главной диагонали равны единице, называется ***единичной матрицей***. Единичную матрицу обозначают прописной буквой Е.

Например, матрица $E=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ есть единичная матрица второго порядка.

Матрица, состоящая только из одной строки, называется ***матрицей-строкой***, состоящая только из одного столбца ***матрицей - столбцом***.

Например, матрица А=(2 0 5 4) есть матрица - строка.

Матрица A^T называется ***транспонированной*** по отношению к матрице А, если столбцы (строки) матрицы A являются соответствующими строчками (столбцами) матрицы A^T.

Например, если матрица A равна

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \text{ то } A^T=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 0 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

1.1.3 Равенство матриц

<u>ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.3</u> Две матрицы А и В называются равными (А=В), если они имеют одинаковые размеры и равные соответствующие элементы.

Например, если

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \text{ и } A=B, \text{ то } b_{11}=1, b_{12}=2,$$

$b_{21} = 3, b_{22} = 4.$

1.1.4 Сложение матриц

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.4 Пусть даны матрицы $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$, имеющие одинаковые размеры $m \times n$.

Суммой матриц A и B называется матрица C = A+B тех же размеров $m \times n$, что и заданные матрицы, элементы которой c_{ij} определяются правилом $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ для всех $i = 1,2,\ldots,m,\ j = 1,2,\ldots,n$.

Например, если $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, то $C = A + B = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$

Нетрудно проверить, что сумма матриц подчиняется переместительному и сочетательному законам, т.е. $A + B = B + A$ и $(A + B) + C = A + (B + C)$

1.1.5 Умножение матриц на число

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.5 ***Произведением матрицы*** $A = (a_{ij})$ размеров $m \times n$ на число λ называется матрица $B = (b_{ij})$ тех же размеров, что и матрица A, элементы, которой определяются правилом $b_{ij} = \lambda\, a_{ij}$ для всех $i = 1,2,\ldots,m;\ j = 1,2,\ldots,n$

Например, если $A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ и $\lambda = 3$, то $B = \lambda A = \begin{pmatrix} 6 & -15 \\ 12 & 3 \end{pmatrix}$

Умножение матрицы на число подчиняется закону $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$, где λ и $\mu -$ числа.

1.1.6 Умножение матриц

Пусть заданы матрица A размеров $m \times n$ и матрица B размеров $n \times p$, т.е. такие, что число столбцов первой равно числу строк второй матрицы. Выберем строку с номером i из матрицы A и столбец с номером j из матрицы B. Умножим каждый элемент $a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}$ выбранной строки на соответствующий элемент $b_{1j}, b_{2j}, \ldots, b_{nj}$ выбранного столбца и сложим полученные произведения, т.е. составим сумму

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} \qquad (1.4)$$

Вычислим такие суммы для всех $i = 1,2,\ldots,m,$ и всех $j = 1,2,\ldots,p$ и из полученных $m \times p$ чисел составим матрицу $C = (c_{ij})$.

<u>ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.6</u> ***Произведением матрицы*** A размеров $m \times n$ на матрицу B размеров $n \times p$ называется матрица $C = A \cdot B$ размеров $m \times p$, элементы c_{ij} которой определяются по формуле (1.4) для всех $i = 1,2,\ldots,m$, и всех $j = 1,2,\ldots,p$.

ПРИМЕР 1.1 Даны $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$

Так как число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B, то произведение $A \cdot B$ определено и

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}.$$

ПРИМЕР 1.2 Даны $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

<u>Решение.</u> Матрица A имеет два столбца, B - две строки; следовательно, $A \cdot B$ определено.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 3\cdot 2 + 2\cdot 4 & 3\cdot 1 + 2\cdot 0 & 3\cdot 3 + 2\cdot 1 \\ 4\cdot 2 + 1\cdot 4 & 4\cdot 1 + 1\cdot 0 & 4\cdot 3 + 1\cdot 1 \\ 1\cdot 2 + 0\cdot 4 & 1\cdot 1 + 0\cdot 0 & 1\cdot 3 + 0\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 3 & 11 \\ 12 & 4 & 13 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

ПРИМЕР 1.3 Даны квадратная матрица A порядка n и матрица - столбец B размеров $n \times 1$.

<u>Решение.</u>

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \ldots \\ b_{n1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \ldots + a_{1n}b_{n1} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + \ldots + a_{2n}b_{n1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}b_{11} + a_{n2}b_{21} + \ldots + a_{nn}b_{n1} \end{pmatrix}$$

Из примера следует, что произведение квадратной матрицы на матрицу-столбец есть матрица-столбец. Аналогично проверяется, что произведение матрицы-строки размеров $1 \times n$ на квадратную матрицу порядка n есть строчная матрица размеров $1 \times n$.

ПРИМЕР 1.4 Даны $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$, $E=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

$$A\cdot E=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot 1+2\cdot 0 & 1\cdot 0+2\cdot 1\\ 3\cdot 1+4\cdot 0 & 3\cdot 0+4\cdot 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}=A \quad \text{и}$$

$$E\cdot A=\begin{pmatrix}1\cdot 1+0\cdot 3 & 1\cdot 2+0\cdot 4\\ 0\cdot 1+1\cdot 3 & 0\cdot 2+1\cdot 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}=A.$$

Итак, если E единичная матрица и A - квадратная, то $A\cdot E=E\cdot A=A$, т.е. единичная матрица играет роль единицы в действиях над матрицами.

ПРИМЕР 1.5 Даны $A=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 2 & 3\end{pmatrix}$.

Очевидно, что определены произведения $A\cdot B$ и $B\cdot A$

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}(-1)\cdot 0+2\cdot 2 & (-1)\cdot 1+2\cdot 3\\ 3\cdot 0+4\cdot 2 & 3\cdot 1+4\cdot 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 5\\ 8 & 15\end{pmatrix},$$

$$B\cdot A=\begin{pmatrix}0\cdot(-1)+1\cdot 3 & 0\cdot 2+1\cdot 4\\ 2\cdot(-1)+3\cdot 3 & 2\cdot 2+3\cdot 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 4\\ 7 & 16\end{pmatrix}$$

Этот пример показывает, что произведение двух матриц не подчиняется переместительному закону, т.е. $A\cdot B\neq B\cdot A$. Однако можно проверить, что умножение матриц подчиняется сочетательному и распределительному законам, т.е. $A(BC)=(AB)C$ и $(A+B)C=AC+BC$.

1.2 ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

1.2.1 Определители второго порядка и их свойства

Определитель – это число, которое по специальным правилам вычисляется для каждой квадратной матрицы.

Пусть дана квадратная матрица второго порядка

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.7 ***Определителем второго порядка***, соответствующим заданной матрице A, называется число равное $a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}$.

Для обозначения определителя используются вертикальные черточки и прописная буква Δ. Например,

$$\Delta=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21} \qquad (1.5)$$

есть общий вид определителя второго порядка.

Числа $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ называются ***элементами определителя***. Как и у матрицы второго порядка, элементы a_{11}, a_{12} образуют первую строку определителя; a_{21}, a_{22} – вторую строку; a_{11}, a_{21} – - первый столбец; a_{12}, a_{22} – второй столбец; a_{11}, a_{22} – образуют главную диагональ определителя; a_{21}, a_{12} – побочную диагональ. Используя данную терминологию, можно сказать, что определитель второго порядка есть число, равное разности произведений элементов, расположенных на главной и побочной его диагоналях.

ПРИМЕР 1.6 $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 - 4 \cdot 3 = 10 - 12 = -2$

Рассмотрим простейшие свойства определителя второго порядка.

Свойство 1.2.1 Определитель не изменится, если его строки поменять местами с соответствующими столбцами, т.е.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} \qquad (1.6)$$

Действительно, согласно (1.5) получим

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \quad \text{и} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Из свойства 1.2.1 следует, что свойства, установленные для строк определителя, справедливы и для его столбцов.

Свойство 1.2.2 При перестановке местами двух строк (столбцов) определитель меняет свой знак на противоположный.

Действительно, если $\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix}$, то

$$\Delta_1 = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = -(a_{21}a_{12} - a_{11}a_{22}) = -\Delta_2$$

Свойство 1.2.3 Определитель, имеющий две одинаковые строки (столбца), равен нулю.

Например, $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix} = a_{11}a_{12} - a_{11}a_{12} = 0.$

Свойство 1.2.4 Если все элементы какой-либо строки (столбца) определителя умножить на одно и то же число, то определитель умножится на это число.

Пусть $\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$, где k – число.

Тогда $\Delta_2 = ka_{11}a_{22} - ka_{12}a_{21} = k(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = k \cdot \Delta_1$.

Свойство 1.2.4 означает, что общий множитель всех элементов строки (столбца) можно вынести за знак определителя.

Свойство 1.2.5 Определитель, у которого элементы двух его строк (столбцов) пропорциональны, равен нулю.

Действительно, $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ ka_{11} & ka_{12} \end{vmatrix} = ka_{11}a_{12} - ka_{11}a_{12} = 0$ при любом k.

Свойство 1.2.6 Если каждый элемент какой-либо строки (столбца) определителя есть сумма двух слагаемых, то определитель равен сумме двух определителей, у одного из них элементами соответствующей строки являются первые слагаемые, у другого - вторые. Оставшиеся элементы этих определителей те же, что и у данного.

Пусть $\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_{11} + a_{11}^* & a_{12} \\ a_{21} + a_{21}^* & a_{22} \end{vmatrix}$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$, $\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11}^* & a_{12} \\ a_{21}^* & a_{22} \end{vmatrix}$.

Тогда $\Delta_1 = \left(a_{11} + a_{11}^*\right)a_{22} - \left(a_{21} + a_{21}^*\right)a_{12} = \left(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}\right) +$
$+ \left(a_{11}^*a_{22} - a_{21}^*a_{12}\right) = \Delta_2 + \Delta_3.$

Свойство 1.2.7 Определитель не изменится, если к элементам какой-либо его строки (столбца) прибавить соответствующие элементы другой строки (столбца), умноженные на одно и то же число.

Действительно, пусть $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$, $\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_{11} + ka_{12} & a_{12} \\ a_{21} + ka_{22} & a_{22} \end{vmatrix}$.

Тогда, согласно свойствам 1.2.5 и 1.2.6, получим

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ka_{12} & a_{12} \\ ka_{22} & a_{22} \end{vmatrix} = \Delta + k \cdot \begin{vmatrix} a_{12} & a_{12} \\ a_{22} & a_{22} \end{vmatrix} = \Delta + 0 = \Delta$$

1.2.2 Определители третьего порядка

Пусть дана квадратная матрица третьего порядка

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

<u>ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.8</u> Определителем третьего порядка, соответствующим данной квадратной матрице A, называется число

$$\Delta = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = \qquad (1.7)$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{31}a_{23} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{31}a_{22}.$$

Определитель третьего порядка обозначается символом

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \qquad (1.8)$$

где числа $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{33}$ называются его элементами.

Индексы $i = 1,2,3$ и $j = 1,2,3$ у элемента a_{ij} показывают номера строки и столбца, на пересечении которых записан этот элемент.

Например, элемент a_{23} расположен на пересечении второй строки $(i = 2)$ и третьего столбца $(j = 3)$.

Элементы a_{11}, a_{22}, a_{33} образуют главную диагональ определителя, а элементы a_{31}, a_{22}, a_{13} – побочную диагональ.

Определение имеет сложный по форме вид, поэтому для нахождения определителя третьего порядка предложены более простые правила. Так, согласно правилу треугольников необходимо:

1) вычислить с собственными знаками произведения элементов, лежащих на главной диагонали и в вершинах двух равнобедренных треугольников, основания которых параллельны этой диагонали ;

2) найти произведения элементов, лежащих на побочной диагонали и в вершинах двух равнобедренных треугольников, основания которых параллельны побочной диагонали, и взять их с противоположными знаками;

3) найти общую сумму всех произведений.

ПРИМЕР 1.7 $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 4 + 0 - 16 + 24 + 0 - 3 = 9$

Все свойства определителей второго порядка справедливы и для определителей третьего порядка. Доказательства этих свойств основаны на вычислении определителя третьего порядка по формуле (1.7).

Например, покажем, что определитель, у которого элементы двух его строк пропорциональны, равен нулю. Действительно,

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = ka_{11}a_{12}a_{33} + ka_{12}a_{13}a_{31} + ka_{11}a_{32}a_{13} -$$

$$- ka_{31}a_{12}a_{13} - ka_{11}a_{12}a_{33} - ka_{11}a_{13}a_{32} = 0.$$

Аналогично проверяется справедливость и других свойств.

Пусть дан определитель (1.8) третьего порядка.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.9 **Минором** M_{ij} элемента a_{ij}, где $i, j = 1,2,3$

определителя третьего порядка, называется определитель второго порядка, полученный из данного вычеркиванием $i-$й строки и $j-$го столбца. Так, например, минор M_{23} элемента a_{23} есть определитель

$$M_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}, \text{ а минор элемента } a_{11} \text{ есть } M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

С помощью миноров определитель (1.7) можно записать в виде

$$\Delta = a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + a_{13}M_{13} \tag{1.9}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.10 **Алгебраическим дополнением** A_{ij} элемента a_{ij}, где $i, j = 1,2,3$, называется минор M_{ij} этого элемента, взятый со знаком $(-1)^{i+j}$. По определению 1.9 имеем

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}, \text{ где } i, j = 1,2,3. \tag{1.10}$$

Например,

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot M_{12} = (-1) \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{31}a_{23} - a_{21}a_{33},$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot M_{31} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} = a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13} \text{ и т.д.}$$

Теорема 1.1 (Разложение определителя по элементам строки или столбца)

Определитель третьего порядка равен сумме произведений элементов любой его строки (столбца) на их алгебраические дополнения. Иными словами, имеют место шесть равенств:

$$\Delta = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} = \ldots$$

$$\ldots = a_{13}A_{13} + a_{23}A_{23} + a_{33}A_{33}. \tag{1.11}$$

Проверим, например, справедливость равенства

$$\Delta = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}.$$

Согласно определениям минора и алгебраического дополнения получим

$$a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = a_{11}(-1)^{1+1} \cdot M_{11} + a_{12}(-1)^{1+2} \cdot M_{12} +$$

$$+ a_{13}(-1)^{1+3} \cdot M_{13} = a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + a_{13}M_{13} =$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} = \Delta$$

Теорема 1.2. Сумма произведений элементов какой- либо строки (столбца) определителя на алгебраические дополнения элементов любой другой его строки (столбца) равна нулю.

Для определенности выберем элементы a_{11}, a_{12}, a_{13} первой строки и алгебраические дополнения A_{21}, A_{22}, A_{23} элементов второй строки определителя. Составим сумму произведений $a_{11}A_{21} + a_{12}A_{22} + a_{13}A_{23}$ и покажем, что эта сумма равна нулю.

Действительно,

$$a_{11}A_{21} + a_{12}A_{22} + a_{13}A_{23} = -a_{11}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{13}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$= -a_{11}a_{12}a_{33} + a_{11}a_{13}a_{32} + a_{12}a_{11}a_{33} - a_{12}a_{13}a_{31} - a_{13}a_{11}a_{32} + a_{13}a_{12}a_{31} = 0$$

Аналогично проверяется равенство нулю и всех других подобных сумм.

В заключение рассмотрим схему использования свойств определителя и теоремы разложения при вычислении определителя.

ПРИМЕР 1.8 Вычислить определитель $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix}$.

<u>Решение.</u> Разложим определитель по элементам третьей строки.

$$\Delta = a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33} = a_{31}M_{31} - a_{32}M_{32} + a_{33}M_{33} =$$

$$= 2M_{31} + 0M_{32} + 0M_{33} = 2\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 2(-4-5) = -18.$$

ПРИМЕР 1.9 Вычислить определитель $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 8 & 26 & 56 \\ 3 & -4 & 6 \end{vmatrix}$.

<u>Решение.</u> Прибавляя ко второй строке первую, умноженную на - 8, получим $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & -4 & 5 \end{vmatrix}$. Раскладывая этот определитель по элементам второй его строки, найдем

$$\Delta = -0\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ -4 & 5 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = 2(5-21) = -32.$$

1.2.3 Определители $n-$го порядка

Пусть дана квадратная матрица A $n-$го порядка

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Определитель $n-$го порядка, соответствующий квадратной матрице A, обозначается символом

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad (1.12)$$

и определяется как число

$$\Delta=a_{11}M_{11}-a_{12}M_{12}+\dots+(-1)^{1+n}a_{1n}M_{1n}, \qquad (1.13)$$

где $M_{11}, M_{12}, \dots, M_{1n}$ есть миноры соответствующих элементов $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}$,, т.е. определители $(n-1)-$го порядка, полученные из данного вычеркиванием его первой строки и соответственно первого, второго,. . . , $n-$го его столбцов.

Например, $M_{11}=\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$.

Так как каждый минор M_{1k}, где $k=1,2,...,n$ есть определитель $(n-1)-$го порядка, то согласно (1.13) вычисление определителя $n-$го порядка сводится к вычислению n определителей $(n-1)-$го порядка.

ПРИМЕР 1.10 Вычислить определитель $\Delta=\begin{vmatrix} 4 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{vmatrix}$.

<u>Решение.</u> Согласно (1.13) получим

$$\Delta=4\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 5 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix}-0\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}+2\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix}-0\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix}=$$

$$= 4(6 - 20 + 1 - 45) + 2(1 + 30 - 4 - 20) = -232 + 14 = -218.$$

Определители $n-$го порядка имеют те же свойства, что и определители третьего порядка. Их справедливость проверяется с помощью соотношения (1.10).

Выберем в определителе Δ элемент a_{ij}, где $i, j = 1,2,\ldots,n$.

<u>ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.11</u> ***Минором*** M_{ij} элемента a_{ij} определителя $n-$го порядка называется определитель $(n-1)-$го порядка, полученный из Δ вычеркиванием его $i-$й строки и $j-$ го столбца.

<u>ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.12</u> ***Алгебраическим дополнением*** A_{ij} элемента a_{ij} называется минор M_{ij} этого элемента, взятый с дополнительным знаком $(-1)^{i+j}$, т.е.

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}, \text{где } i, j = 1,2,\ldots,n. \tag{1.14}$$

Для определителей $n-$го порядка также остается справедливой теорема разложения, т.е. определитель $n-$го порядка равен сумме произведений элементов любой его строки (столбца) на алгебраические дополнения этих элементов

$$\Delta = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \ldots + a_{1n}A_{1n} = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + \ldots + a_{2n}A_{2n} =$$
$$= \ldots = a_{1n}A_{1n} + a_{2n}A_{2n} + \ldots + a_{nn}A_{nn} \tag{1.15}$$

Равенство (1.15) содержат $2n$ формул, по каждой из которых можно произвести вычисление определителя.

На практике полезно перед применением теоремы разложения преобразовать определитель с помощью его свойств так, чтобы в одной из его строк (столбцов) образовалось максимальное число нулевых элементов.

ПРИМЕР 1.11 Вычислить определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{vmatrix}.$$

<u>Решение.</u> Вычитая из второго столбца первый, а из четвертого столбца третий, найдем
$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 5 & 1 & 7 & 1 \\ 9 & 1 & 11 & 1 \\ 13 & 1 & 15 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

так как образовавшийся определитель содержит два одинаковых столбца.

1.3 ОБРАТНАЯ МАТРИЦА

Пусть дана квадратная матрица A порядка n.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

<u>ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.13</u> Квадратная матрица A^{-1} порядка n называется ***обратной*** матрицей для данной матрицы A, если

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E, \text{ где } E - \text{ единичная матрица} \qquad (1.16)$$

Обозначим через Δ определитель матрицы A и вычислим его. Тогда, если $\Delta \neq 0$, то матрицу A называют ***неособенной (невырожденной) матрицей***, если же $\Delta = 0$, то ***особенной (вырожденной) матрицей.***

Теорема 1.3. Всякая неособенная матрица A имеет обратную матрицу A^{-1}, определяемую формулой

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \qquad (1.17)$$

где $A_{11}, A_{12}, \dots, A_{nn}$ есть алгебраические дополнения соответствующих элементов $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{nn}$ матрицы A.

Доказательство. Покажем, что $A \cdot A^{-1} = E$. Действительно,

$$A \cdot A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\Delta} \cdot \begin{pmatrix} a_{11}A_{11} + \dots + a_{1n}A_{1n} & a_{11}A_{21} + \dots + a_{1n}A_{2n} & \dots & a_{11}A_{n1} + \dots + a_{1n}A_{nn} \\ a_{21}A_{11} + \dots + a_{2n}A_{1n} & a_{21}A_{21} + \dots + a_{2n}A_{2n} & \dots & a_{21}A_{n1} + \dots + a_{2n}A_{nn} \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ a_{n1}A_{11} + \dots + a_{nn}A_{1n} & a_{n1}A_{21} + \dots + a_{nn}A_{2n} & \dots & a_{n1}A_{n1} + \dots + a_{nn}A_{nn} \end{pmatrix}$$

Согласно обобщению теоремы 1.1 о разложении определителя по элементам любой строки все элементы, расположенные на главной диагонали предыдущей матрицы, равны Δ, а оставшиеся элементы, согласно обобщению теоремы 1.2, равны нулю. Тогда

$$A\cdot A^{-1}=\frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix}\Delta & 0 & \dots & 0\\ 0 & \Delta & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & \Delta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 1 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & 1\end{pmatrix}=E$$

Аналогично доказывается, что $A^{-1}\cdot A=E$.

ПРИМЕР 1.12 Найти матрицу A^{-1}, если $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 3 & 1\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}$.

<u>Решение.</u> Выясним, является ли матрица A невырожденной

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 3 & 1\\ 0 & 1 & 2\end{vmatrix}=1\cdot\begin{vmatrix}3 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}-0\cdot\begin{vmatrix}2 & 0\\ 1 & 2\end{vmatrix}+0\cdot\begin{vmatrix}2 & 0\\ 3 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=5.$$

Так как определитель $\Delta=5\neq 0$, то матрица A невырожденная и имеет обратную матрицу A^{-1}.

$$A^{-1}=\frac{1}{\Delta}\cdot\begin{pmatrix}A_{11} & A_{21} & A_{31}\\ A_{12} & A_{22} & A_{32}\\ A_{13} & A_{23} & A_{33}\end{pmatrix},\text{ где}$$

$$A_{11}=\begin{vmatrix}3 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=5,\quad A_{21}=-\begin{vmatrix}2 & 0\\ 1 & 2\end{vmatrix}=-4,\quad A_{31}=\begin{vmatrix}2 & 0\\ 3 & 1\end{vmatrix}=2,$$

$$A_{12}=-\begin{vmatrix}0 & 1\\ 0 & 2\end{vmatrix}=0,\quad A_{22}=\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{vmatrix}=2,\quad A_{32}=-\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix}=-1,$$

$$A_{13}=\begin{vmatrix}0 & 3\\ 0 & 1\end{vmatrix}=0,\quad A_{23}=-\begin{vmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{vmatrix}=-1,\quad A_{33}=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 0 & 3\end{vmatrix}=3.$$

Подставляя найденные числа в формулу для A^{-1}, получим

$$A^{-1}=\frac{1}{5}\cdot\begin{pmatrix}5 & -4 & 2\\ 0 & 2 & -1\\ 0 & -1 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -\frac{4}{5} & \frac{2}{5}\\ 0 & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5}\\ 0 & -\frac{1}{5} & \frac{3}{5}\end{pmatrix}.$$

1.4 РАНГ МАТРИЦЫ

Рассмотрим матрицу A размера $m \times n$: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$.

Выделим в ней k строк и k столбцов $(k \le \min(m;n))$. Из элементов, стоящих на пересечении выделенных строк и столбцов, составим определитель k-го порядка. Все такие определители называются ***минорами этой матрицы***.

<u>ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.14</u> Наибольший из порядков миноров данной матрицы, отличных от нуля, называется ***рангом матрицы***. Обозначается $r, r(A)$ или $\operatorname{rang} A$.

Очевидно, что $0 \le r \le \min(m;n)$, где $\min(m;n)$ – меньшее из чисел m и n.

<u>ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.15</u> Минор, порядок которого определяет ранг матрицы, называется ***базисным.***

У матрицы может быть несколько базисных миноров.

ПРИМЕР 1.13. Дана матрица $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 & 8 \\ 0 & 1 & 4 & 6 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 7 & 10 \end{pmatrix}$. Определить ее ранг.

<u>Решение.</u> Имеем $M_1 = |1| \ne 0$, $M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \ne 0$, $M_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \ne 0$.

Минор четвертого порядка составить нельзя.

Ответ: $\operatorname{rang} A = 3$.

Отметим свойства ранга матрицы:

1. При транспонировании матрицы ее ранг не меняется.
2. если вычеркнуть из матрицы нулевой ряд, то ранг матрицы не изменится.
3. Ранг матрицы не изменится при элементарных преобразованиях матрицы.

Простейший способ определения ранга матрицы состоит в приведении ее к ступенчатому виду при помощи последовательности элементарных преобразований.

К ним относятся:

умножение строки на произвольное число, отличное от нуля;

прибавление к некоторой строке любой другой строки, умноженной на одно и тоже число;

вычеркивание нулевой строки.

Матрица B, получающаяся из данной матрицы A с помощью элементарных преобразованиий, называется ***эквивалентной*** матрице A. Обозначается $A \approx B$ (A~B).

ПРИМЕР 1.14 Найти ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & 2 & -8 \\ 7 & -1 & 2 & 1 & -12 \\ 11 & -1 & 3 & 0 & -16 \\ 10 & -2 & 3 & 3 & -20 \end{pmatrix}$.

<u>Решение.</u> После вычитания первой строки из остальных получаем эквивалентную матрицу, а из последней умноженную на 2,

$$A \approx \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & 2 & -8 \\ 4 & 0 & 1 & -1 & -4 \\ 8 & 0 & 2 & -2 & -8 \\ 4 & 0 & 1 & -1 & -4 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & 2 & -8 \\ 4 & 0 & 1 & -1 & -4 \end{pmatrix}.$$

Поскольку три строки промежуточной матрицы были пропорциональны, то из них можно получить две ненулевые строки, которые мы отбросили.

Ясно, что $\operatorname{rang} A = 2$, т.к. $M_2 = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = 4$.

1.5 СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

1.5.1 Основные понятия

Определители и матрицы широко применяются при решении систем линейных уравнений, т.е. систем, содержащих m уравнений первой степени относительно n неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

В наиболее общем виде такие системы записываются в форме

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \qquad (1.18)$$

Числа $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{mn}$ называются ***коэффициентами системы*** или ***коэффициентами при неизвестных.***

Первый индекс у коэффициентов системы указывает на номер уравнения, второй на номер неизвестного, при котором записан этот коэффициент. Числа $b_1, b_2, \ldots, b_m$ называются ***свободными членами***. Если все свободные члены равны нулю, то система называется ***однородной***, если же, хотя бы одно из них отлично от нуля, то ***неоднородной.***

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.16 ***Решением системы*** (1.18) называется любая совокупность чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$, подстановка которой в (1.18) обращает каждое уравнение этой системы в верное числовое равенство.

Система, имеющая хотя бы одно решение, называется ***совместной***, имеющая только одно решение ***определенной***, имеющая более одного решения - ***неопределенной***, не имеющая ни одного решения - ***несовместной.***

Решить систему (1.18) - это значит указать все множество ее решений или доказать ее несовместность.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.17 Две системы линейных уравнений называются ***равносильными,*** если каждое решение второй системы является решением первой и наоборот.

Доказано, что если над системой (1.18) выполнить преобразования:

1) поменять местами уравнения;

2) умножить обе части любого уравнения системы на любое не равное нулю число;

3) прибавить к обеим частям одного из уравнений системы соответствующие части другого уравнения, умноженные на любое действительное число, то система (1.18) переходит в равносильную ей систему. Перечисленные выше преобразования называются ***элементарными преобразованиями системы***. В результате элементарных преобразований может случиться, что в системе появится уравнение, все коэффициенты которого равны нулю. Тогда, если и свободный член этого уравнения равен нулю, то уравнение справедливо при любых $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и, следовательно, его можно отбросить. Если же свободный член не равен нулю, то этому уравнению не удовлетворяют никакие значения неизвестных, следовательно, полученная система является несовместной, а это означает, что несовместна и исходная система.

1.5.2 Решение систем линейных уравнений. Теорема Кронекера – Капелли

Пусть дана произвольная система m линейных уравнений с n неизвестными
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_{2,} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_{m.}. \end{cases}$$

Расширенной матрицей системы называется матрица

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}.$$

Исчерпывающий ответ на вопрос о совместности этой системы дает теорема Кронекера – Капели.

Теорема 1.4. . Система линейных алгебраических уравнений совместна тогда и только тогда, когда ранг расширенной матрицы системы равен рангу основной матрицы

Примем ее без доказательства.

Правила практического разыскивания всех решений совместной системы линейных уравнений вытекают из следующих теорем.

Теорема 1.5. Если ранг совместной системы равен числу неизвестных, то система имеет единственное решение.

Теорема 1.6. Если ранг совместной системы меньше числа неизвестных, то система имеет бесчисленное множество решений.

Правило решения произвольной системы линейных уравнений.

1. Найти ранг основной и расширенной матриц системы. Если $r(A) \neq r(\tilde{A})$, то система несовместна.

2. Если $r(A) = r(\tilde{A}) = r$, система совместна. Найти какой-либо базисный минор порядка r(минор, порядок которого определяет ранг матрицы, называется базисным). Взять r уравнений, из коэффициентов которых составлен базисный минор. Неизвестные, коэффициенты которых входят в базисный минор, называют главными и оставляют слева, а остальные $n - r$ неизвестных называют свободными и переносят в правые части уравнений.

3. Найти выражения главных неизвестных через свободные. Получить общее решение системы (множество всех решений).

4. Придавая свободным неизвестным произвольные значения, получим соответствующие значения главных неизвестных. Таким образом можно найти частные решения исходной системы уравнений.

ПРИМЕР 1.15 Исследовать систему линейных уравнений; если она совместна, то найти ее общее решение и одно частное решение:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = -4, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0, \\ -2x_1 - 2x_3 = 16. \end{cases}$$

<u>Решение.</u> Привести к ступенчатому виду расширенную матрицу

системы: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -4 \\ 1 & 2 & -3 & 0 \\ -2 & 0 & -2 & 16 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & -4 & 8 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Так как $r(A) = r(\tilde{A}) = 2 < 3 = n$, то система совместна и неопределенна (т.е. имеет бесконечно много решений).

Количество главных переменных равно $r(A) = 2$, количество свободных переменных равно $n - r(A) = 3 - 2 = 1$. Выберем какой-нибудь не равный нулю минор 2-го порядка полученной матрицы А, например, минор $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$. Его столбцы - 1-ый и 2-ой столбцы матрицы А – соответствуют переменным x_1 и переменная x_2 – это будут главные переменные, а x_3 – свободная переменная. Запишем систему уравнений, соответствующую полученной расширенной матрице:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = -4, \\ x_2 - 2x_3 = 4. \end{cases}$$

Теперь для наглядности запишем эту систему в другом виде:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = x_3 - 4, \\ x_2 = 2x_3 + 4. \end{cases}$$

Подставляя выражение для x_2 в первое уравнение, получим $x_1 = -x_3 - 8$. Обозначая свободную переменную через t, получим общее решение системы: $(-t - 8; 2t + 4; t)$. Частное решение системы получим, например, при $t = 0 : (-8; 4; 0)$.

1.5.3 Формулы Крамера. Матричный способ решения систем линейных уравнений

Пусть задана система линейных уравнений, содержащая одинаковое число уравнений и неизвестных $(m = n)$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \qquad (1.19)$$

Введем три матрицы

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Матрица A, составленная из коэффициентов системы, является квадратной матрицей порядка n. Матрицы X и B являются столбцовыми и составлены соответственно из неизвестных и свободных членов системы.

Так как число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы X, то существует произведение $A\cdot X$, являющееся столбцовой матрицей тех же размеров, что и матрица B. Тогда систему уравнений (1.19) можно записать в форме одного матричного уравнения.

$$A\cdot X=B \tag{1.20}$$

Для определения матрицы X из (1.20) допустим, что матрица A имеет обратную матрицу A^{-1} определяемую формулой (1.17). Тогда, умножая обе части (1.20) слева на A^{-1}, получим

$$A^{-1}(A\cdot X)=A^{-1}\cdot B \Leftrightarrow \left(A^{-1}A\right)\cdot X=A^{-1}\cdot B \tag{1.21}$$

По определению обратной матрицы $A^{-1}\cdot A=E$,где $E-$ единичная матрица порядка n. Отсюда $\left(A^{-1}\cdot A\right)\cdot X=E\cdot X=X$.

Следовательно, уравнение (1.21) запишется в виде

$$X=A^{-1}\cdot B \tag{1.22}$$

Матричное равенство (1.22) определяет решение заданной системы уравнений в матричной форме. Для определения конкретных значений неизвестных $x_1, x_2, \dots, x_n$ перепишем (1.22) в виде

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}=\frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}, \tag{1.23}$$

где $\Delta\neq 0-$ определитель, соответствующий матрице A;

$A_{ij}-$ алгебраические дополнения элементов a_{ij} этой матрицы.

Перемножив матрицы в правой части (1.23), найдем

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}=\frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11}b_1+A_{21}b_2+\dots+A_{n1}b_n \\ A_{12}b_1+A_{22}b_2+\dots A_{n2}b_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ A_{1n}b_1+A_{2n}b_2+\dots+A_{nn}b_n \end{pmatrix}$$

Отсюда, согласно условию равенства двух матриц, получим

$$x_1 = \frac{A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + \ldots + A_{n1}b_n}{\Delta},\ x_2 = \frac{A_{12}b_1 + A_{22}b_2 + \ldots + A_{n2}b_n}{\Delta}, \ldots,$$

$$\ldots, x_n = \frac{A_{1n}b_1 + A_{2n}b_2 + \ldots + A_{nn}b_n}{\Delta} \qquad (1.24)$$

Формулы (1.24) и определяют матричный способ решения системы

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_{2,} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_{n.}. \end{cases}$$

Для запоминания этих формул и последующего их применения на практике введем группу определителей:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad \Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \ldots & a_{12} \\ b_2 & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_n & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

$$\Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & b_n & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}, \ldots,\ \Delta_{x_n} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & b_n \end{vmatrix}.$$

Заметим, что определитель Δ_{x_1} получен из Δ заменой его первого столбца на столбец свободных членов, определитель Δ_{x_2} получен из Δ заменой его второго столбца на столбец свободных членов и т.д.. Разложим каждый из определителей $\Delta_{x_1}, \Delta_{x_2}, \ldots, \Delta_{x_n}$ по столбцу из свободных членов $b_1, b_2, \ldots, b_n$. Тогда

$$\Delta_{x_1} = b_1A_{11} + b_2A_{21} + \ldots + b_nA_{n1}, \Delta_{x_2} = b_1A_{12} + b_2A_{22} + \ldots + b_nA_{n2},$$

$$\ldots, \Delta_{x_n} = b_1A_{1n} + b_2A_{2n} + \ldots + b_nA_{nn} \qquad (1.25)$$

Из сравнения полученных результатов (1.25) с числителями равенств (1.24) следует, что решение системы (1.19) можно записать в виде

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta},\ x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta}, \ldots,\ x_n = \frac{\Delta_{x_n}}{\Delta}. \qquad (1.26)$$

Формулы (1.26) называются ***формулами Крамера.***

ПРИМЕР 1.16 Решить по формулам Крамера систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 = 9, \\ 5x_1 - x_2 = 3. \end{cases}$$

Решение. Система содержит одинаковое число уравнений и неизвестных. Вычислим определитель Δ этой системы.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = -21.$$

Так как $\Delta \neq 0$,то решение можно найти по формулам Крамера:

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} 9 & 4 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -21, \quad \Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} 1 & 9 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = -42.$$ Тогда

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta} = \frac{(-21)}{(-21)} = 1, \quad x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta} = \frac{(-42)}{(-21)} = 2.$$ Ответ: {1;2}.

ПРИМЕР 1.17 Решить матричным способом систему уравнений

$$\begin{cases} x + 2y + z = 4, \\ 2x - y + 2z = 3, \\ 3x + y - 2z = 2. \end{cases}$$

Решение.

Система содержит одинаковое число уравнений и неизвестных. Вычислим определитель Δ этой системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & 0 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = (-5)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 25 \neq 0$$

Так как $\Delta \neq 0$, то система может быть решена матричным способом.

Составим матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Так как определитель системы $\Delta \neq 0$, то матрица A имеет обратную матрицу A^{-1}, где $A^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$.

Вычислим алгебраические дополнения A_{ij} всех элементов

$$A_{11}=\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 1 & -2\end{vmatrix}=0,\quad A_{21}=-\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & -2\end{vmatrix}=5,\quad A_{31}=\begin{vmatrix}2 & 1\\ -1 & 2\end{vmatrix}=5,$$

$$A_{12}=-\begin{vmatrix}2 & 2\\ 3 & -2\end{vmatrix}=10,\quad A_{22}=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 3 & -2\end{vmatrix}=-5,\quad A_{32}=-\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & 2\end{vmatrix}=0,$$

$$A_{13}=\begin{vmatrix}2 & -1\\ 3 & 1\end{vmatrix}=5,\quad A_{23}=-\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 1\end{vmatrix}=5,\quad A_{33}=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & -1\end{vmatrix}=-5.$$

Тогда $A^{-1}=\frac{1}{25}\cdot\begin{pmatrix}0 & 5 & 5\\ 10 & -5 & 0\\ 5 & 5 & -5\end{pmatrix}.$

Так как решением является $X=A^{-1}\cdot B$, то

$$\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\frac{1}{25}\cdot\begin{pmatrix}0 & 5 & 5\\ 10 & -5 & 0\\ 5 & 5 & -5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4\\ 3\\ 2\end{pmatrix}=\frac{1}{25}\cdot\begin{pmatrix}25\\ 25\\ 25\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$$

Или $x=1, y=1, z=1.$ Ответ: {1,1,1}

1.5.4 Решение систем линейных уравнений методом Гаусса

Пусть задана система из m линейных уравнений с n неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n=b_m\end{cases} \qquad (1.27)$$

Допустим, что в системе коэффициент при x_1 в первом уравнении $a_{11}\neq 0$. Разделив обе части этого уравнения на a_{11}, получим равносильную данной систему:

$$\begin{cases} x_1+a_{12}^{(1)}x_2+\ldots+a_{1n}^{(1)}x_n=b_1^{(1)},\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n=b_m\end{cases} \qquad (1.28)$$

где $a_{12}^{(1)}=\frac{a_{12}}{a_{11}},\ldots,a_{1n}^{(1)}=\frac{a_{1n}}{a_{11}},\ b_1^{(1)}=\frac{b_1}{a_{11}}.$

Исключим с помощью первого уравнения системы (1.28) неизвестное x_1

из всех оставшихся уравнений этой системы. Для этого умножим первое уравнение этой системы последовательно на $a_{21}, a_{31}, \ldots, a_{m1}$ и в том же порядке вычтем полученное из второго, третьего и последующих уравнений системы (1.28). В результате получим равносильную систему вида

$$\begin{cases} x_1 + a_{12}^{(1)} x_2 + \ldots + a_{1n}^{(1)} x_n = b_1^{(1)}, \\ \quad a_{22}^{(1)} x_2 + \ldots + a_{2n}^{(1)} x_n = b_2^{(1)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \quad a_{m2}^{(1)} x_2 + \ldots + a_{mn}^{(1)} x_n = b_m^{(1)} \end{cases} \qquad (1.29)$$

где $a_{22}^{(1)} = a_{22} - a_{12}^{(1)} \cdot a_{21}, \ldots, a_{2n}^{(1)} = a_{2n} - a_{1n}^{(1)} \cdot a_{21}, \ldots,$

$a_{m2}^{(1)} = a_{m2} - a_{12}^{(1)} \cdot a_{m1}, \ldots, a_{mn}^{(1)} = a_{mn} - a_{1n}^{(1)} \cdot a_{m1}, \ldots,$

$b_2^{(1)} = b_2 - b_1^{(1)} \cdot a_{21}, \ldots, b_m^{(1)} = b_m - b_1^{(1)} \cdot a_{m1}.$

Допустим, что коэффициент $a_{22}^{(1)}$ при x_2 во втором уравнении системы (1.29) отличен от нуля. В противном случае переставим местами уравнения этой системы, записав вторым другое уравнение с подходящим вторым коэффициентом.

Исключим неизвестное x_2 с помощью второго уравнения из всех последующих уравнений. Для этого разделим второе уравнение на $a_{22}^{(1)} \neq 0$. Затем умножим последовательно полученное второе уравнение на $a_{32}^{(1)}, a_{42}^{(1)}, \ldots, a_{m2}^{(1)}$ и вычтем эти результаты из третьего, четвертого и всех оставшихся уравнений.

В итоге получим очередную систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + a_{12}^{(1)} x_2 + a_{13}^{(1)} x_3 + \ldots + a_{1n}^{(1)} x_n = b_1^{(1)}, \\ \quad x_2 + a_{23}^{(2)} x_3 + \ldots + a_{2n}^{(2)} x_n = b_2^{(2)} \\ \quad a_{33}^{(2)} x_3 + \ldots + a_{3n}^{(2)} x_n = b_3^{(2)} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \quad a_{m3}^{(2)} x_3 + \ldots + a_{mn}^{(2)} x_n = b_m^{(2)} \end{cases}$$

где $a_{23}^{(2)} = \dfrac{a_{23}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}, \ldots, a_{2n}^{(2)} = \dfrac{a_{2n}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}, b_2^{(2)} = \dfrac{b_2^{(1)}}{a_{22}^{(1)}},$

$a_{33}^{(2)} = a_{33}^{(1)} - a_{23}^{(2)} \cdot a_{32}^{(1)}, \ldots, a_{mn}^{(2)} = a_{mn}^{(1)} - a_{2n}^{(2)} \cdot a_{m2}^{(1)},$

$b_3^{(2)} = b_3^{(1)} - b_2^{(2)} \cdot a_{32}^{(1)}, \ldots, b_m^{(2)} = b_m^{(1)} - b_2^{(2)} \cdot a_{m2}^{(1)}$

Продолжая этот процесс исключения неизвестных, получим либо несовместную, либо совместную систему уравнений. В первом случае в системе будет содержаться уравнение, в котором все коэффициенты левой части равны нулю, а свободный член отличен от нуля, т.е. уравнение вида $0 \cdot x_k + 0 \cdot x_{k+1} + \ldots + 0 \cdot x_n = c_k$, где $c_k \neq 0$. Во втором случае получим либо систему треугольной формы $(m = n)$

$$\begin{cases} x_1 + a_{12}^{(1)} x_2 + \ldots + a_{1n}^{(1)} x_n = b_1^{(1)}, \\ \qquad x_2 + \ldots + a_{2n}^{(2)} x_n = b_2^{(2)} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad x_n = b_n^{(n)} \end{cases} \tag{1.30}$$

либо систему трапециевидной (ступенчатой) формы

$$\begin{cases} x_1 + a_{12}^{(1)} x_2 + \ldots + a_{1k}^{(1)} x_k + \ldots + a_{1n}^{(1)} x_n = b_1^{(1)}, \\ \qquad x_2 + \ldots + a_{2k}^{(2)} x_k + a_{2n}^{(2)} x_n = b_2^{(2)} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad x_k + \ldots + a_{kn}^{(k)} x_n = b_k^{(k)} \end{cases} \tag{1.31}$$

В случае треугольной системы из последнего уравнения (1.30) следует, что $x_n = b_n^{(n)}$. Подставляя это значение в предпоследнее уравнение системы (1.30), найдем неизвестное x_{n-1}. Подставляя значения x_n и x_{n-1} в предыдущее уравнение, найдем значение неизвестного x_{n-2} и т.д.

Таким образам, если данная система (1.27) с помощью элементарных преобразований приводится к системе треугольной формы, то система имеет единственное решение (т.е. система совместна и определенна).

В случае системы ступенчатой формы (1.31), перенося все слагаемые, содержащие неизвестные $x_{k+1}, \ldots, x_n$ в правую часть уравнений, получим систему вида

$$\begin{cases} x_1 + a_{12}^{(1)} x_2 + \ldots + a_{1k}^{(1)} x_k = b_1^{(1)} - a_{1k+1}^{(1)} x_{k+1} - \ldots - a_{1n}^{(1)} x_n, \\ \qquad x_2 + \ldots + a_{2k}^{(2)} x_k = b_2^{(2)} - a_{2k+1}^{(2)} x_{k+1} - \ldots - a_{2n}^{(2)} x_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad x_k = b_k^{(k)} - a_{kk+1}^{(k)} x_{k+1} - \ldots - a_{kn}^{(k)} x_n \end{cases} \tag{1.32}$$

Из (1.32) следует, что значения неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_k$ выражаются через значения неизвестных $x_{k+1}, \ldots, x_n$. Так как последним неизвестным, называемым свободными неизвестными, можно придавать любые произвольные значения, то система (1.32), а вместе с ней и данная система (1.27), имеет бесконечное множество решений.

Итак, если данная система приводится к трапециевидной форме, то она имеет бесконечное множество решений (т.е. система совместна и неопределенна). Найденные решения, записанные в форме

$x_1 = \varphi_1(x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n), x_2 = \varphi_2(x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n), \ldots,$

$x_k = \varphi_k(x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n)$, где $x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n$ – любые числа, называются ***общими решениями системы***. Решения, полученные из общих решений при конкретных значениях свободных неизвестных $x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n$, называются ***частными решениями***.

Заключение. Матричный способ решения систем линейных уравнений, как и решение методом Крамера, применим только для особых систем линейных уравнений, в которых количество неизвестных совпадает с количеством уравнений. Метод Гаусса применим для решения произвольных систем линейных уравнений и, следовательно, является универсальным методом. Этот метод позволяет существенно упростить и сам процесс поиска решений, если все промежуточные преобразования осуществить над специальной матрицей B составленной из коэффициентов системы (1.27) и ее свободных членов.

$$B = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right).$$

Матрица B называется ***расширенной матрицей системы.*** Она позволяет заменить элементарные преобразования системы уравнений на соответствующие элементарные преобразования над своими строками, что существенно сокращает процесс поиска решении.

ПРИМЕР 1.18 Решить систему уравнений методом Гаусса.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 2, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 3, \\ -3x_1 + 2x_2 - 4x_3 + 6x_4 = 5, \\ x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 6. \end{cases}$$

<u>Решение.</u>

Построим расширенную матрицу системы

$$B = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & -1 & 3 \\ -3 & 2 & -4 & 6 & 5 \\ 1 & -1 & 1 & 2 & 6 \end{array}\right)$$

Исключая с помощью первой строки неизвестное x_1 из всех оставшихся строк матрицы B, получим

$$B \approx \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & 5 & -3 & -1 \\ 0 & 8 & -7 & 9 & 11 \\ 0 & -3 & 2 & 1 & 4 \end{array}\right) = B_1,$$

где символ $\approx$ есть символ элементарного преобразования матрицы.

Исключая с помощью второй строки неизвестное x_2 из всех последующих строк матрицы B_1, получим

$$B_1 \approx \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & 5 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 21/5 & 47/5 \\ 0 & 0 & -1 & 14/5 & 23/5 \end{array}\right) = B_2.$$

Исключая с помощью третьей строки неизвестное x_3 из четвертой строки, получим:

$$B_2 \approx \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & 5 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 21/5 & 47/5 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 14 \end{array}\right) = B_3.$$

Матрица B_3 имеет треугольную форму. Следовательно, заданная система эквивалентна системе

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 2, \\ -5x_2 + 5x_3 - 3x_4 = -1, \\ x_3 + (21/5)x_4 = 47/5, \\ 7x_4 = 14. \end{cases}$$

Последовательно вычисляя x_4 из последнего уравнения, далее x_3 из третьего, x_2 из второго и x_1 из первого уравнения этой системы найдем, что $x_4 = 2$, $x_3 = 1$, $x_2 = 0$, $x_1 = 1$. Итак, заданная система имеет единственное решение $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$, $x_4 = 2$.

ПРИМЕР 1.19 Решить систему уравнений

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 1, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = -1, \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 4, \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 4. \end{cases}$$

Решение.

Построим расширенную матрицу системы

$$B=\left(\begin{array}{cccc|c}-1 & 2 & -1 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 1 & -3 & -1\\ 2 & 4 & -2 & 0 & 4\\ 1 & 3 & -2 & 2 & 4\end{array}\right)\approx\left(\begin{array}{cccc|c}-1 & 2 & -1 & 1 & 1\\ 0 & 3 & -1 & -1 & 1\\ 0 & 8 & -4 & 2 & 6\\ 0 & 5 & -3 & 3 & 5\end{array}\right)\approx$$

$$\approx\left(\begin{array}{cccc|c}-1 & 2 & -1 & 1 & 1\\ 0 & 3 & -1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & -\frac{4}{3} & \frac{14}{3} & \frac{10}{3}\\ 0 & 0 & -\frac{4}{3} & \frac{14}{3} & \frac{10}{3}\end{array}\right)\approx\left(\begin{array}{cccc|c}-1 & 2 & -1 & 1 & 1\\ 0 & 3 & -1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & -4 & 14 & 10\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)\approx$$

$$\approx\left(\begin{array}{cccc|c}-1 & 2 & -1 & 1 & 1\\ 0 & 3 & -1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & -2 & 7 & 5\end{array}\right)$$

Таким образом, заданная система эквивалентна системе,

$$\begin{cases}-x_1+2x_2-x_3+x_4=1,\\ \qquad 3x_2-x_3-x_4=1,\\ \qquad\quad -2x_3+7x_4=5.\end{cases}$$

которая имеет ступенчатый вид, и, следовательно, имеет бесконечное множество решений. Выразим переменные x_1, x_2, x_3 через x_4:

$$x_3=\frac{7x_4-5}{2};$$

$$x_2=\frac{1+x_3+x_4}{3}=\left(1+\frac{7x_4-5}{2}+x_4\right)\Big/3=\frac{9x_4-3}{6}=\frac{3x_4-1}{2};$$

$$x_1=2x_2-x_3+x_4-1=3x_4-1-\frac{7x_4-5}{2}+x_4-1=\frac{x_4+1}{2}.$$

Итак, общим решением данной системы будет

$$x_1=\frac{x_4+1}{2},\ x_2=\frac{3x_4-1}{2},\ x_3=\frac{7x_4-5}{2},\ \ x_4 - \text{любое число.}$$

Полагая, в частности, $x_4=3$ найдем, что $x_1=2, x_2=4, x_3=8$. Тогда $x_1=2, x_2=4, x_3=8$, $x_4=3$ будет одним из частных решений системы.

1.6 ЭЛЕМЕНТЫ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ

1.6.1 Скалярные и векторные величины

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.18 Величина, определяемая заданием своего численного значения, называется ***скалярной величиной.***

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.19 Величина, определяемая заданием своего численного значения и направления, называется ***векторной величиной.***

Примерами скалярных величин являются длина, площадь, объем, масса, температура и др. Скалярные величины обозначаются символами $a, b, \ldots, A, B\ldots$ и изображаются точками соответствующей числовой оси. Примерами векторных величин являются сила, скорость, ускорение и др. Векторные величины изображаются с помощью векторов - направленных отрезков, т.е. таких отрезков, у которых одна из ограничивающих их точек принята за начало вектора, а другая за его конец. Пусть точка A есть начало вектора, а точка B его конец, тогда этот вектор обозначается символом $\overline{AB}$ и изображается с помощью стрелки (рис.1.1).

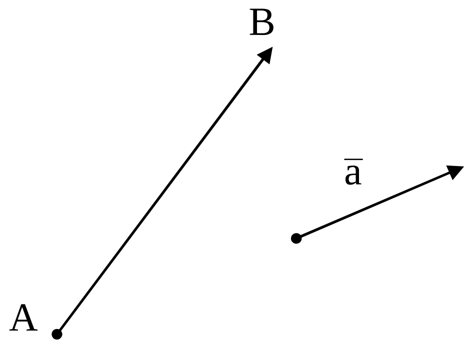


Рис. 1.1

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.20 Вектор может быть обозначен также одним из символов $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}, \ldots$. Расстояние между началом и концом вектора называется ***длиной вектора*** или ***его модулем***. Модуль вектора обозначается символами $\left|\overline{AB}\right|, \left|\overline{a}\right|, \ldots$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.21 Вектор, начало которого совпадает с его концом, называется ***нулевым*** и обозначается $\overline{0}$. Нулевой вектор не имеет определенного направления и его $\left|\overline{0}\right| = 0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.22 Векторы, расположенные на одной прямой или параллельных прямых, называются ***коллинеарными.***

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.23 Векторы, расположенные на одной плоскости или на параллельных плоскостях, называются ***компланарными.***

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.24 Два вектора $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называются ***равными***, если они коллинеарны, одинаково направлены и имеют одинаковую длину. Равенство векторов записывается в виде $\bar{a} = \bar{b}$.

Из определения равенства векторов следует, что вектор можно перенести параллельно самому себе из одной точки пространства в любую другую его точку.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.25 Вектор $\left(-\bar{a}\right)$ называется ***противоположным вектором*** для вектора $\bar{a}$, если он ему коллинеарен, имеет одинаковую с $\bar{a}$ длину, но направлен в противоположную сторону. Векторы $\bar{a}$ и $-\bar{a}$ называются ***взаимно противоположными векторами.***

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.26 Вектор, длина которого равна единице, называется ***единичным вектором*** и обозначается символом $\bar{a}^{0}$.

1.6.2 Линейные операции над векторами

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.27 Операции сложения и вычитания векторов и умножения вектора на число называются ***линейными операциями над векторами.***

Сложение векторов

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.28 Суммой векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называется третий вектор $\bar{c} = \bar{a} + \bar{b}$, начало которого совпадает с началом вектора $\bar{a}$, а конец – с концом вектора $\bar{b}$, при условии, что начало вектора $\bar{b}$ приложено к концу вектора $\bar{a}$ (рис. 1.2).

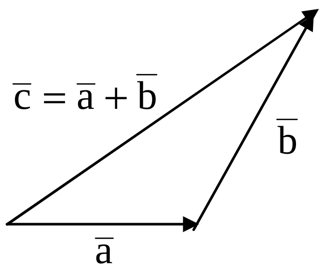


Рис. 1.2

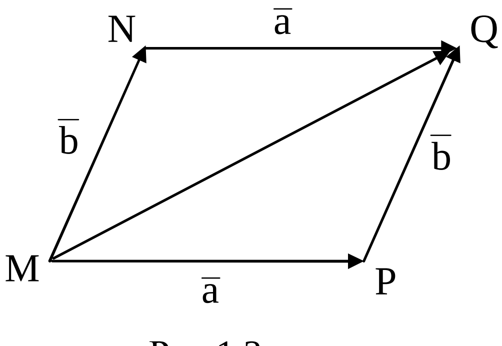


Рис.1.3

Сумма векторов может быть найдена и по правилу параллелограмма (рис. 1.3). Из определения суммы векторов следует, что сложение векторов подчиняется переместительному закону $\bar{a} + \bar{b} = \bar{b} + \bar{a}$. Действительно, пусть $\overline{MP} = \bar{a}$, $\overline{MN} = \bar{b}$ и $MNQP$ есть параллелограмм. Тогда $\overline{NQ} = \bar{a}$, $\overline{PQ} = \bar{b}$ и $\overline{MQ} = \overline{MP} + \overline{PQ} = \bar{a} + \bar{b}$, $\overline{MQ} = \overline{MN} + + \overline{NQ} = \bar{b} + \bar{a}$. Отсюда, $\bar{a} + \bar{b} = \bar{b} + \bar{a}$.

Понятие суммы векторов, введенное для двух векторов, можно обобщить на сумму любого конечного числа слагаемых. Например, если заданы три вектора $\overline{a}_1, \overline{a}_2$ и $\overline{a}_3$, то суммой этих векторов называется вектор $\overline{a}_1 + \overline{a}_2 + \overline{a}_3$, определяемый по правилу $\overline{a}_1 + \overline{a}_2 + \overline{a}_3 = \left(\overline{a}_1 + \overline{a}_2\right) + \overline{a}_3$. Аналогично, если заданы векторы $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_k$, где $k > 3, k \in N$, то суммой этих векторов называется вектор

$$\overline{a}_1 + \overline{a}_2 + \ldots + \overline{a}_k = \left(\overline{a}_1 + \overline{a}_2 + \ldots + \overline{a}_{k-1}\right) + \overline{a}_k.$$

Покажем, что сложение векторов подчиняется сочетательному закону $\left(\overline{a} + \overline{b}\right) + \overline{c} = \overline{a} + \left(\overline{b} + \overline{c}\right)$ (рис. 1.4).

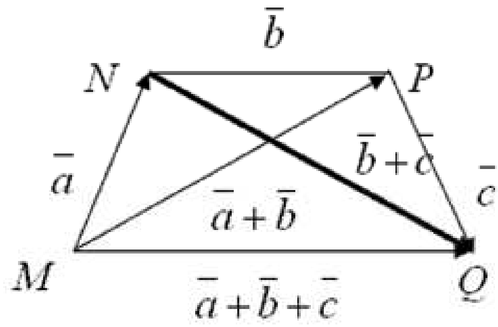


Рис. 1.4

Пусть $\overline{MN} = \overline{a}$, $\overline{NP} = \overline{b}$, $\overline{PQ} = \overline{c}$. Тогда $\overline{MP} = \overline{a} + \overline{b}$, $\overline{NQ} = \overline{b} + \overline{c}$, $\overline{MQ} = \overline{MP} + \overline{PQ} = \left(\overline{a} + \overline{b}\right) + \overline{c}$, $\overline{MQ} = \overline{MN} + \overline{NQ} = \overline{a} + \left(\overline{b} + \overline{c}\right)$. Следовательно, $\left(\overline{a} + \overline{b}\right) + \overline{c} = \overline{a} + \left(\overline{b} + \overline{c}\right)$.

Разность векторов

<u>ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.29</u> Разностью векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называется такой вектор $\overline{c} = \overline{a} - \overline{b}$, что $\overline{a} = \overline{b} + \overline{c}$.

Для построения вектора $\overline{a} - \overline{b}$ по данным векторам $\overline{a}$ и $\overline{b}$ можно воспользоваться одним из способов, сущность которых пояснена на рис. 1.5 и рис. 1.6

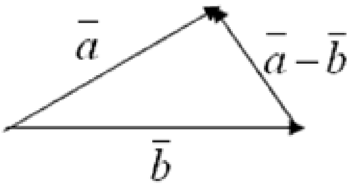


Рис 1.5

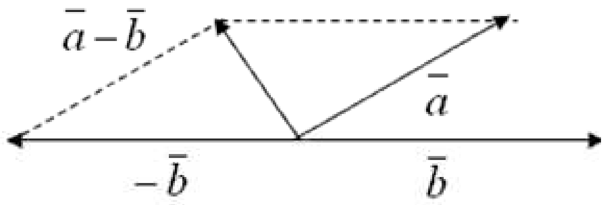


Рис 1.6

Умножение вектора на число

<u>**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.30**</u> Пусть даны вектор $\bar{a}$ и число λ. **Произведением вектора** $\bar{a}$ **на число** λ называется вектор $\lambda\bar{a}$, коллинеарный вектору $\bar{a}$, имеющий длину $|\lambda\bar{a}| = |\lambda||\bar{a}|$ и то же направление, что и вектор $\bar{a}$, если $\lambda > 0$, и противоположное направление, если $\lambda < 0$. Если $\lambda = 0$, то $\lambda\bar{a} = \bar{0}$.

<u>*Следствие 1 .*</u> Из определения умножения вектора на число следует, что если $\bar{b} = \lambda\bar{a}$, то векторы $\bar{b}$ и $\bar{a}$ коллинеарны. Очевидно, что если $\bar{a}$ и $\bar{b}$ коллинеарные векторы, то $\bar{b} = \lambda\bar{a}$. Таким образом, два вектора $\bar{a}$ и $\bar{b}$ коллинеарны тогда и только тогда, когда имеет место равенство $\bar{b} = \lambda\bar{a}$.

<u>*Следствие 2.*</u> Противоположный вектор $-\bar{a}$ можно рассматривать как произведение вектора $\bar{a}$ на $\lambda = -1$, то есть $-\bar{a} = (-1)\bar{a}$

<u>*Следствие 3.*</u> Пусть дан вектор $\bar{a}$. Рассмотрим вектор $\bar{a}^0$, коллинеарный $\bar{a}$, направленный, как $\bar{a}$, имеющий длину, равную единице. Тогда, согласно операции умножения вектора на число, следует, что

$$\bar{a} = |\bar{a}|\bar{a}^0 \tag{1.33}$$

Умножение вектора на число подчиняется распределительным законам $\lambda(\bar{a}+\bar{b}) = \lambda\bar{a} + \lambda\bar{b}$, $(\lambda_1 + \lambda_2)\bar{a} = \lambda_1\bar{a} + \lambda_2\bar{a}$ и сочетательному закону $(\lambda_1 \cdot \lambda_2)\bar{a} = \lambda_1(\lambda_2\bar{a})$.

Покажем, например, справедливость первого из распределительных законов. Построим на векторах $\overline{MN} = \bar{a}$, $\overline{MQ} = \bar{b}$ параллелограмм $MNPQ$, на векторах $\overline{MN}' = \lambda\bar{a}$, $\overline{MQ}' = \lambda\bar{b}$ параллелограмм $MN'P'Q'$ (рис. 1.7). Из подобия этих параллелограммов следует, что $\lambda(\bar{a}+\bar{b}) = \lambda\bar{a} + \lambda\bar{b}$.

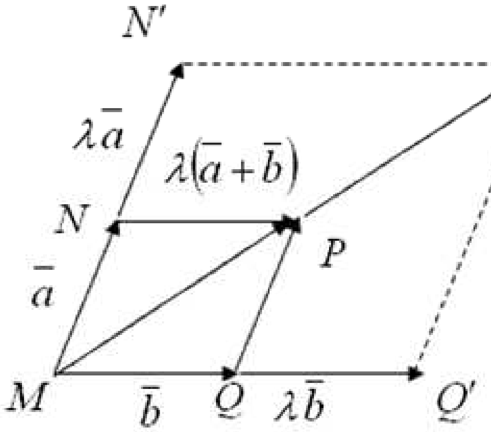


Рис. 1.7

Аналогично можно убедиться и в справедливости оставшихся законов.

ПРИМЕР 1.20 Точка O является центром тяжести треугольника ABC. Доказать, что $\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC}=\bar{0}$.

<u>Решение.</u> Известно, что центр тяжести треугольника находится в точке пересечения его медиан. Обозначим через P середину стороны AC и построим вектор $\overline{OP}$ (рис. 1.8).

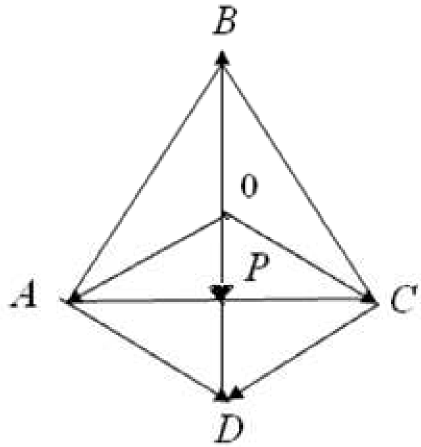


Рис. 1.8

Тогда, согласно операции умножения вектора на скаляр и свойства медианы, получим $\overline{OP}=\frac{1}{3}\overline{BP}=-\frac{1}{2}\overline{OB}$. Построим на векторах $\overline{OA}$ и $\overline{OC}$ параллелограмм $OADC$ (рис. 1.8).

Тогда, согласно операции сложения векторов, $\overline{OD}=\overline{OA}+\overline{OC}$. Точка P является точкой пересечения диагоналей этого параллелограмма.

Следовательно, $\overline{OP}=\frac{1}{2}\overline{OD}$ или

$\overline{OP}=\frac{1}{2}\left(\overline{OA}+\overline{OC}\right)$. Итак,

$$\overline{OP} = -\frac{1}{2}\left(\overline{OB}\right) = \frac{1}{2}\left(\overline{OA} + \overline{OC}\right).$$

Отсюда $\frac{1}{2}\left(\overline{OA} + \overline{OC}\right) + \frac{1}{2}\overline{OB} = \overline{0} \iff \overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} = \overline{0}$.

1.6.3 Угол между векторами. Проекция вектора на ось

Пусть заданы векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$. Выберем в пространстве произвольную точку O и отложим от этой точки векторы $\overline{OA} = \overline{a}$ и $\overline{OB} = \overline{b}$.

Углом между векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называется наименьший угол $\varphi(0 \le \varphi \le \pi)$, на который нужно повернуть один из заданных векторов до его совпадения со вторым (рис. 1.9).

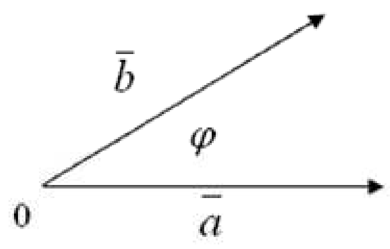


Рис. 1.9

Пусть в пространстве заданы вектор $\overline{AB}$ и ось ℓ (рис. 1.10).

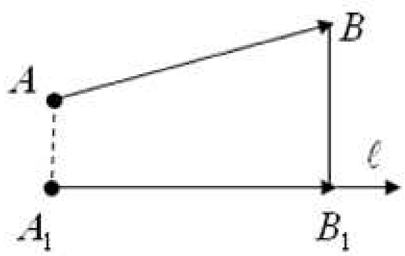


Рис. 1.10

Обозначим через A_1 и B_1 проекции на ось ℓ точек A и B соответственно. Построим вектор $\overline{A_1 B_1}$ и назовем его компонентом вектора $\overline{AB}$ по оси ℓ.

Проекцией вектора $\overline{AB}$ на ось ℓ называется длина его компоненты $\overline{A_1 B_1}$ по этой оси, если компонента направлена в ту же сторону, что и ось ℓ;

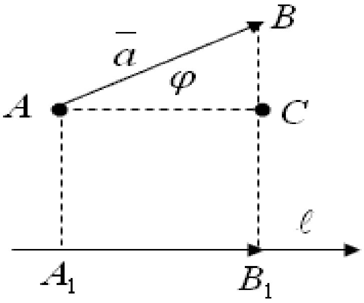
противоположное число, если компонента и ось имеют разные направления; нуль, если компонента есть нулевой вектор. Проекция вектора на ось обозначается в виде $\text{пр}_\ell \overline{AB}$ или $\text{пр}_\ell \bar{a}$.

Выберем на оси ℓ единичный вектор $\bar{e}$ имеющий то же направление, что и ось ℓ. Углом между векторами $\overline{AB}$ и $\bar{e}$ называется угол между вектором $\overline{AB}$ и осью ℓ.

Теорема 1.7. Проекция вектора $\bar{a}$ на ось ℓ равна модулю вектора $\bar{a}$, умноженному на косинус угла φ между вектором и осью:

$$\text{пр}_\ell \bar{a} = |\bar{a}|\cos\varphi. \tag{1.34}$$

Доказательство: Пусть $\bar{a} = \overline{AB}$ и $\overline{A_1B_1}$ является компонентой вектора $\overline{AB}$ на ось ℓ (рис. 1.11).



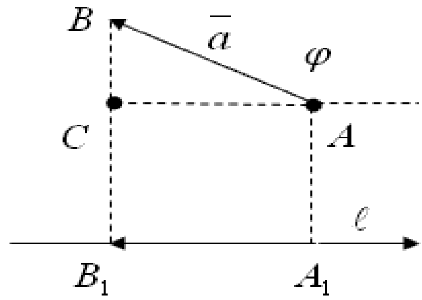


Рис. 1.11

Если угол φ между $\bar{a}$ и осью острый, то компонента $\overline{A_1B_1}$ направлена в ту же сторону, что и ось ℓ. Тогда $\text{пр}_\ell \bar{a} = \text{пр}_\ell \overline{AB} = \left|\overline{A_1B_1}\right|$. Из треугольника ABC следует, что $\left|\overline{A_1B_1}\right| = \left|\overline{AC}\right| = \left|\overline{AB}\right|\cos\varphi = |\bar{a}|\cos\varphi$. Тогда $\text{пр}_\ell \bar{a} = |\bar{a}|\cos\varphi$.

Если же $\frac{\pi}{2} < \varphi \le \pi$, то компонента $\overline{A_1B_1}$ направлена в противоположную по отношению к оси ℓ сторону. Следовательно, $\text{пр}_\ell \bar{a} = \text{пр}_\ell \overline{AB} = -\left|\overline{A_1B_1}\right|$. Из треугольника ABC следует, что $\left|\overline{A_1B_1}\right| =$
$= \left|\overline{AC}\right| = \left|\overline{AB}\right|\cos(\pi - \varphi) = -\left|\overline{AB}\right| \cdot \cos\varphi$. Тогда $\text{пр}_\ell \bar{a} = -\left|\overline{A_1B_1}\right| =$
$= \left|\overline{AB}\right|\cos\varphi = |\bar{a}|\cos\varphi$.

Если $\varphi = \frac{\pi}{2}$, то компонента есть нулевой вектор. Тогда и $\text{пр}_\ell \bar{a} = 0$.

Итак, для любых углов $\varphi(0 \le \varphi \le \pi)$ $\text{пр}_\ell \bar{a} = |\bar{a}|\cos\varphi$. Опираясь на ранее рассмотренные линейные операции над векторами, можно убедиться, что для проекций векторов на ось справедливы следующие теоремы (без доказательств).

Теорема 1.8. Проекция суммы векторов на ось равна сумме проекции слагаемых векторов на ту же ось:

$$\text{пр}_{\ell}\left(\bar{a}_1+\bar{a}_2+\ldots+\bar{a}_k\right)=\text{пр}_{\ell}\,\bar{a}_1+\text{пр}_{\ell}\,\bar{a}_2+\ldots+\text{пр}_{\ell}\,\bar{a}_k. \qquad (1.35)$$

Теорема 1.9. Если вектор $\bar{a}$ умножить на число λ, то его проекция на ось умножится на это число:

$$\text{пр}_{\ell}\left(\lambda\bar{a}\right)=\lambda\ \text{пр}_{\ell}\,\bar{a}. \qquad (1.36)$$

1.6.4 Линейная комбинация векторов. Базис

<u>ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.31</u> Пусть заданы векторы $\bar{a}_1,\bar{a}_2,\ldots,\bar{a}_k$ и числа $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_k$. Выражение $\lambda_1\bar{a}_1+\lambda_2\bar{a}_2+\ldots+\lambda_k\bar{a}_k$ называется ***линейной комбинацией векторов*** $\bar{a}_1,\bar{a}_2,\ldots,\bar{a}_k$. Очевидно, что линейная комбинация векторов является вектором. Рассмотрим особый случай, когда

$$\lambda_1\bar{a}_1+\lambda_2\bar{a}_2+\ldots+\lambda_k\bar{a}_k=\bar{0}. \qquad (1.37)$$

<u>ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.32</u> Если равенство (1.37) возможно только при всех $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_k$, равных нулю, то векторы $\bar{a}_1,\bar{a}_2,\ldots,\bar{a}_k$ называются ***линейно-независимыми***. Если же это равенство справедливо не при всех $\lambda_i=0$, где $i=1,2,\ldots,k$, то векторы называются ***линейно-зависимыми.***

Пусть $\bar{a}_1,\bar{a}_2,\ldots,\bar{a}_k$ линейно-зависимы. Тогда среди λ_i найдется хотя бы одно не равное нулю число. Пусть $\lambda_1\neq 0$. Разделив обе части равенства (1.37) на λ_1, получим

$$\bar{a}_1=-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\bar{a}_2-\frac{\lambda_3}{\lambda_1}\bar{a}_3-\ldots-\frac{\lambda_k}{\lambda_1}\bar{a}_k=\mu_2\bar{a}_2+\mu_3\bar{a}_3+\ldots+\mu_k\bar{a}_k,$$

где $\mu_2=-\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1}$, $\mu_3=-\dfrac{\lambda_3}{\lambda_1}$, …, $\mu_k=-\dfrac{\lambda_k}{\lambda_1}$.

Выражение $\mu_2\bar{a}_2+\mu_3\bar{a}_3+\ldots+\mu_k\bar{a}_k$ является линейной комбинацией векторов $\bar{a}_2,\bar{a}_3,\ldots,\bar{a}_k$. Итак, если векторы линейно-зависимы, то хотя бы один из них является линейной комбинацией остальных.

Справедливо и обратное утверждение: если хотя бы один вектор является линейной комбинацией других векторов, то вся группа векторов линейно-зависима. Пусть, например, $\bar{a}_1=\mu_2\bar{a}_2+\mu_3\bar{a}_3+\ldots+\mu_k\bar{a}_k$.

Тогда $-\bar{a}_1 + \mu_2\bar{a}_2 + \mu_3\bar{a}_3 + \ldots + \mu_k\bar{a}_k = \bar{0}$ и коэффициент при $\bar{a}_1$ отличен от нуля. Это означает, что вектора $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_k$ линейно-зависимы.

Примерами линейно-зависимых векторов являются любые два вектора прямой; любые три вектора плоскости; любые четыре вектора пространства (рис. 1.12-1.13).

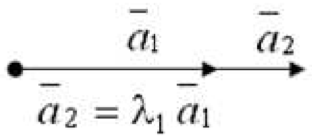


Рис. 1.12

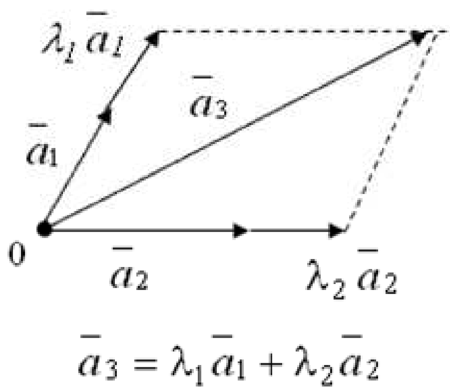


Рис. 1.13

В то же время два неколлинеарных вектора $\bar{a}_1$ и $\bar{a}_2$ плоскости (рис. 1.13) или три некомпланарных вектора $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3$ пространства (рис. 1.14) являются примерами линейно-независимых векторов.

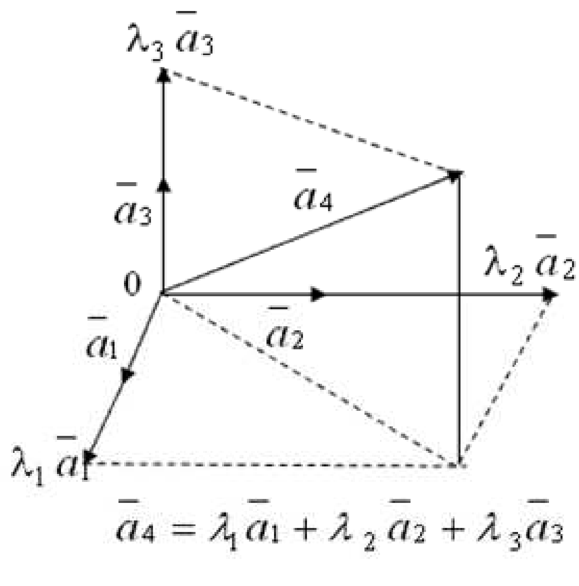


Рис. 1.14

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.33 Любая группа, составленная из максимального числа линейно-независимых векторов некоторого пространства R^n, называется ***базисом*** этого пространства. Число векторов базиса ***называется размерностью пространства***. Так, базисом на прямой (пространство R^1)

является любой ненулевой вектор этой прямой. Размерность прямой равна единице. Базисом на плоскости (пространство R^2) являются любые два неколлинеарных вектора этой плоскости. Размерность плоскости равна двум. Базисом в объемном пространстве (пространство R^3) являются любые три некомпланарные вектора. Размерность этого пространства равна трем.

Пусть векторы $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_n$ образуют базис R^n. Тогда любой вектор $\bar{a}$ этого пространства является линейной комбинацией базисных векторов, то есть

$$\bar{a} = \lambda_1 \bar{a}_1 + \lambda_2 \bar{a}_2 + \ldots + \lambda_n \bar{a}_n. \tag{1.38}$$

Представление вектора $\bar{a}$ в форме (1.38) называется разложением этого вектора по базисным векторам.

Числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ разложения называются ***координатами вектора*** $\bar{a}$ по базису $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_n$. Этот факт записывается в виде $\bar{a} = \{\lambda_1; \lambda_2; \ldots \lambda_n\}$.

Векторы $\lambda_1 \bar{a}_1, \lambda_2 \bar{a}_2, \ldots, \lambda_n \bar{a}_n$ называется компонентами вектора $\bar{a}$ по базисным векторам $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots \bar{a}_n$.

Если векторы $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots \bar{a}_n$, образующие базис, имеют общее начало 0 и вектор $\bar{a} = \overline{OM}$, где $M-$ некоторая точка пространства, то числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ называются также координатами этой точки. Этот факт записывают в виде $M(\lambda_1; \lambda_2; \ldots; \lambda_n)$.

1.6.5 Прямоугольная декартова система координат

<u>**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.34**</u> Пусть в пространстве R^3 векторы $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3$ образуют базис этого пространства. Выберем в R^3 произвольную точку O и отложим с началом в этой точке базисные векторы. Совокупность точки O и трех базисных векторов называется ***системой координат*** в пространстве R^3. Ввиду произвольности выбора точки и выбора базисных векторов в R^3 можно построить бесконечное множество систем координат. Выберем в качестве базисных векторов три взаимно перпендикулярных единичных вектора $\bar{i} = \bar{a}_1^0$, $\bar{j} = \bar{a}_2^0$, $\bar{k} = \bar{a}_3^0$. Совокупность точки O и базисных векторов $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ называется ***прямоугольной декартовой системой координат*** в пространстве R^3.

Выберем в R^3 произвольную точку M и построим вектор $\overline{OM}$. Так как векторы $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ образуют базис, то согласно (1.38) вектор $\overline{OM}$ можно разложить на компоненты по этому базису:

$$\overline{OM} = \lambda_1 \bar{i} + \lambda_2 \bar{j} + \lambda_3 \bar{k}, \tag{1.39}$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ – координаты вектора $\overline{OM}$ в заданном базисе.

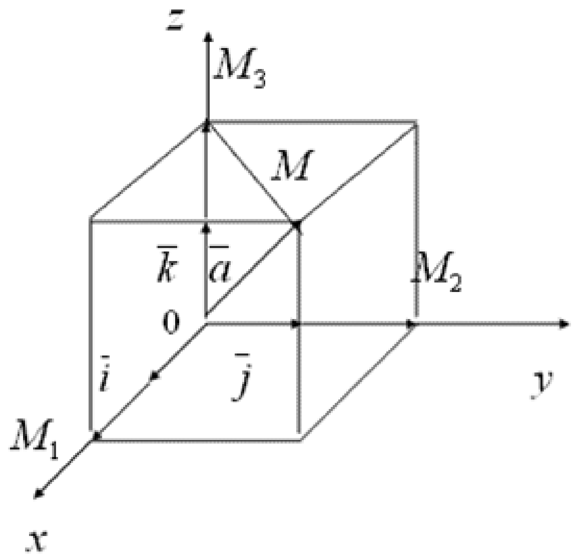


Рис. 1.15

Проведем через точку O в направлении векторов $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ оси $0X, 0Y, 0Z$ соответственно и спроектируем вектор $\overline{OM}$ на каждую из осей (рис. 1.15).

Пусть точки M_1, M_2, M_3 есть проекции точки M на оси абсцисс, ординат и аппликат соответственно.

Тогда

$$\overline{OM} = \overline{OM_1} + \overline{OM_2} + \overline{OM_3} = \text{пр}_{OX}\overline{OM}\,\bar{i} + \text{пр}_{OY}\overline{OM}\,\bar{j} + \text{пр}_{OZ}\overline{OM}\,\bar{k}. \quad (1.40)$$

Из сравнения (1.40) с (1.39) следует, что координаты вектора $\overline{OM}$ определяется по формулам

$$\lambda_1 = \text{пр}_{ox}\overline{OM},\ \lambda_2 = \text{пр}_{oy}\overline{OM},\ \lambda_3 = \text{пр}_{oz}\overline{OM}..$$

В прямоугольной декартовой системе эти координаты принято обозначать через x, y, z соответственно и называть прямоугольными декартовыми координатами вектора $\overline{OM}$ или декартовыми координатами точки $M \in R^3$. Итак,

$$\overline{OM} = \lambda_1\bar{i} + \lambda_2\bar{j} + \lambda_3\bar{k} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k} = \{x; y; z\}. \quad (1.41)$$

Координаты точки $M \in R^3$ записываются в форме $M(x; y; z)$ Пусть вектор $\bar{a} = \overline{OM}$ задан в координатной форме $\bar{a} = \{x; y; z\}$. Так как этот вектор совпадает с диагональю прямоугольного параллелепипеда (рис.1.15), то его длина равна длине этой диагонали. Следовательно,

$$|\bar{a}| = |\overline{OM}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (1.42)$$

Обозначим через α, β, γ углы, между вектором $\bar{a}$ и осями координат OY, OY, OZ. Тогда из прямоугольных треугольников OMM_1, OMM_2, OMM_3 получим

$$\cos\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},\ \cos\beta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

$$\cos\gamma = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \tag{1.43}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.35 Косинусы углов α, β, γ, определяемые по (1.43), называются ***направляющими косинусами вектора*** $\bar{a}$. Нетрудно проверить, что направляющие косинусы связаны между собой соотношением

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 \tag{1.44}$$

ПРИМЕР 1.21 Доказать, что в прямоугольной декартовой системе координат векторы $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ имеют координаты

$$\bar{i} = \{1;0;0\}, \bar{j} = \{0;1;0\}, \bar{k} = \{0;0;1\}.$$

Доказательство. Так как векторы $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ образуют базис прямоугольной декартовой системы координат, то $\bar{i} \perp \bar{j}, \bar{i} \perp \bar{k}, \bar{j} \perp \bar{k}, |\bar{i}| = |\bar{j}| = |\bar{k}| = 1.$

Следовательно, $\text{пр}_{\bar{i}}\, \bar{i} = 1, \text{пр}_{\bar{j}}\, \bar{i} = 0, \text{пр}_{\bar{k}}\, \bar{i} = 0$

Но $\text{пр}_{\bar{i}}\, \bar{i} = \text{пр}_{OX}\, \bar{i}, \text{пр}_{\bar{j}}\, \bar{i} = \text{пр}_{OY}\, \bar{i}, \text{пр}_{\bar{k}}\, \bar{i} = \text{пр}_{OZ}\, \bar{i}$

По формуле (1.38) получим, что

$\bar{i} = (\text{пр}_{OX}\, \bar{i})\bar{i} + (\text{пр}_{OY}\, \bar{i})\bar{j} + (\text{пр}_{OZ}\, \bar{i})\bar{k} = 1\bar{i} + 0\bar{j} + 0\bar{k} = \{1;0;0\}.$

Аналогично доказываются оставшиеся равенства.

1.6.6 Линейные операции над векторами, заданными в координатной форме

Пусть векторы $\overline{a_1}$ и $\overline{a_2}$ заданы в координатной форме:

$$\begin{aligned} \overline{a_1} &= \{x_1; y_1; z_1\} = x_1\bar{i} + y_1\bar{j} + z_1\bar{k}, \\ \overline{a_2} &= \{x_2; y_2; z_2\} = x_2\bar{i} + y_2\bar{j} + z_2\bar{k}. \end{aligned} \tag{1.45}$$

Непосредственно из теорем 1.5 и 1.6 о проекциях векторов на ось и определения координат вектора (1.38) вытекают правила:

$$\overline{a_1} = \overline{a_2}, \text{ если } x_1 = x_2,\ y_1 = y_2,\ z_1 = z_2; \tag{1.46}$$

$$\overline{a_1} + \overline{a_2} = (x_1 + x_2)\bar{i} + (y_1 + y_2)\bar{j} + (z_1 + z_2)\bar{k}; \tag{1.47}$$

$$\overline{a_1} - \overline{a_2} = (x_1 - x_2)\bar{i} + (y_1 - y_2)\bar{j} + (z_1 - z_2)\bar{k}; \tag{1.48}$$

$$\lambda\overline{a_1} = \lambda x_1\bar{i} + \lambda y_1\bar{j} + \lambda z_1\bar{k}, \text{ где } \lambda \in R \tag{1.49}$$

ПРИМЕР 1.22 (Условие коллинеарности двух векторов).

Установить условие коллинеарности векторов $\overline{a_1}$ и $\overline{a_2}$, если

$\overline{a_1} = \{x_1; y_1; z_1\}, \overline{a_2} = \{x_2; y_2; z_2\}.$

Решение. Так как векторы коллинеарны, то $\overline{a_1} = \lambda \overline{a_2}$, где λ – некоторое число. Согласно (1.46) - (1.49) имеем

$$x_1 \bar{i} + y_1 \bar{j} + z_1 \bar{k} = \lambda x_2 \bar{i} + \lambda y_2 \bar{j} + \lambda z_2 \bar{k} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \lambda x_2,\ y_1 = \lambda y_2,\ z_1 = \lambda z_2 \Rightarrow \lambda = \frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2} \qquad (1.50)$$

Легко проверяется, что если координаты векторов удовлетворяют равенствам (1.50), то $\overline{a_1} = \lambda \overline{a_2}$

Равенства (1.50) называются ***условием коллинеарности двух векторов.***

ПРИМЕР 1.23 (Координаты единичного вектора).

Определить координаты единичного вектора $\bar{a}^0$, если $\bar{a} = \{x; y; z\}$.

Решение. Согласно формуле (1.33) $\bar{a} = |\bar{a}|\bar{a}^0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \bar{a}^0 = \frac{1}{|\bar{a}|}\bar{a} = \frac{x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} =$$

$$= \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\bar{i} + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\bar{j} + \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\bar{k}.$$

Из (1.43) следует, что

$$\bar{a}^0 = \cos\alpha\, \bar{i} + \cos\beta\, \bar{j} + \cos\gamma\, \bar{k} = \{\cos\alpha; \cos\beta; \cos\gamma\}.$$

Под простейшими задачами аналитической геометрии понимаются задачи определения расстояния между двумя точками и деления некоторого отрезка в данном отношении.

Задача определения расстояния между двумя точками

Пусть в пространстве R^3 заданы своими координатами две точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$ и $M_2(x_2; y_2; z_2)$. Построим векторы $\overline{OM_1}, \overline{OM_2}, \overline{M_1M_2}$ (рис. 1.16).

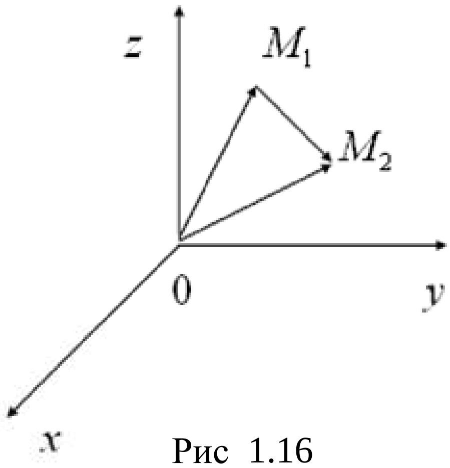


Рис 1.16

.

Тогда $\overline{OM_1}=\{x_1;y_1;z_1\}, \overline{OM_2}=\{x_2;y_2;z_2\}, \ \overline{M_1M_2}=\overline{OM_2}-\overline{OM_1}$

Согласно правилу (1.48)

$$\overline{M_1M_2}=(x_2-x_1)\bar{i}+(y_2-y_1)\bar{j}+(z_2-z_1)\bar{k}.$$

Так как длина вектора $\overline{M_1M_2}$ равна расстоянию между точками M_1 и M_2, то $d=\left|\overline{M_1M_2}\right|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$ (1.51)

Заметим, что в процессе решения этой задачи установлена формула определения координат вектора, если заданы координаты его начальной и конечной точек:

$$\overline{M_1M_2}=(x_2-x_1)\bar{i}+(y_2+y_1)\bar{j}+(z_2-z_1)\bar{k} \tag{1.52}$$

Задача деления отрезка в данном отношении

Пусть даны две точки $M_1(x_1;y_1;z_1)$ и $M_2(x_2;y_2;z_2)$. Требуется на прямой M_1M_2 (рис. 1.17) найти точку $M_0(x_0;y_0;z_0)$, которая разделила бы отрезок $[M_1M_2]$ в заданном отношении λ, т.е. так, что $\overline{M_1M_0}=\lambda\,\overline{M_0M_2}$. Согласно формуле (1.52)

$$\overline{M_1M_0}=\{x_0-x_1;\,y_0-y_1;\,z_0-z_1\},$$

$$\overline{M_0M_2}=\{x_2-x_0;\,y_2-y_0;\,z_2-z_0\}.$$

Тогда по правилу (1.49) равенство $\overline{M_1M_0}=\lambda\,\overline{M_0M_2}$ примет вид $x_0-x_1=\lambda\,(x_2-x_0), y_0-y_1=\lambda\,(y_2-y_0), z_0-z_1=\lambda\,(z_2-z_0)$.

Определяя x_0, y_0, z_0 из этих равенств, получим

$$x_0=\frac{x_1+\lambda\,x_2}{1+\lambda},\ y_0=\frac{y_1+\lambda\,y_2}{1+\lambda},\ z_0=\frac{z_1+\lambda\,z_2}{1+\lambda}, \tag{1.53}$$

где $\lambda\in R, \lambda\neq-1$.

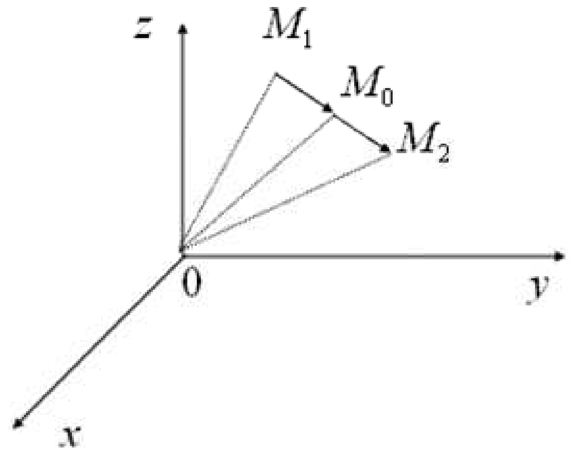


Рис. 1.17

Формулы (1.53) являются формулами деления отрезка в данном отношении. В частности, при $\lambda = 1$ получим формулы деления отрезка пополам:

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2},\ y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2},\ z_0 = \frac{z_1 + z_2}{2}. \qquad (1.54)$$

ПРИМЕР 1.24 Вершины треугольника ABC имеет координаты $A(2;4;0), B(0;3;5), C(2;5;7)$. Найти длину медианы AD этого треугольника.

Решение. Точка D делит отрезок $[BC]$ пополам. Тогда, согласно формул (1.54), получим:

$$x_D = \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{0+2}{2} = 1,\ y_D = \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{3+5}{2} = 4,$$

$$z_D = \frac{z_B + z_C}{2} = \frac{5+7}{2} = 6.$$

Искомое расстояние найдем по формуле (1.51)

$$d = \left|\overline{AD}\right| = \sqrt{(x_D - x_A)^2 + (y_D - y_A)^2 + (z_D - z_A)^2} =$$

$$= \sqrt{1+0+36} = \sqrt{37}.$$

1.6.7 Скалярное произведение векторов

Пусть даны два вектора $\bar{a}$ и $\bar{b}$. В векторной алгебре рассматриваются два вида умножения векторов: скалярное, результатом которого является число, и векторное, результатом которого является вектор**.**

<u>ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.36</u> ***Скалярным произведением векторов*** $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называется число, равное произведению модулей перемножаемых векторов на косинус угла φ между ними (рис.1.18). Скалярное произведение обозначается символом $\bar{a}\bar{b}$. Итак,

$$\bar{a}\bar{b} = |\bar{a}||\bar{b}|\cos\varphi. \qquad (1.55)$$

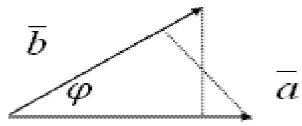


Рис. 1.18

Так как $\quad |\bar{b}|\cos\varphi = \text{пр}_{\bar{a}}\,\bar{b},\quad |\bar{a}|\cos\varphi = \text{пр}_{\bar{b}}\,\bar{a},$

то $\quad \bar{a}\bar{b} = |\bar{a}|\,\text{пр}_{\bar{a}}\,\bar{b} = |\bar{b}|\,\text{пр}_{\bar{b}}\,\bar{a}. \qquad (1.56)$

Из (1.56) следует, что скалярное произведение векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$равно модулю одного из векторов, умноженному на проекцию другого на направление первого вектора.

Свойства скалярного произведения векторов:

1) $\bar{a}\;\bar{b} = \bar{b}\;\bar{a}$;

2) $\bar{a}\bar{b} = 0$, если $\bar{a}\perp\bar{b}$ или хотя бы один из векторов есть нулевой вектор (справедливо и обратное утверждение);

3) $\bar{a}\;\bar{a} = |\bar{a}|^2$;

4) $\lambda(\bar{a}\bar{b}) = (\lambda\bar{a})\bar{b} = \bar{a}(\lambda\bar{b})$ для $\forall\lambda\in R$;

5) $(\bar{a}+\bar{b})\bar{c} = \bar{a}\;\bar{c} + \bar{b}\;\bar{c}$.

Справедливость первых четырех свойств непосредственно следует из определения скалярного произведения. Докажем справедливость распределительного свойства 5. Согласно формуле (1.56) и теореме 1.5 о проекции имеем

$$(\bar{a}+\bar{b})\bar{c} = |\bar{c}|\;\text{пр}_{\bar{c}}(\bar{a}+\bar{b}) = |\bar{c}|(\;\text{пр}_{\bar{c}}\bar{a} + \text{пр}_{\bar{c}}\bar{b}) = |\bar{c}|\;\text{пр}_{\bar{c}}\bar{a} + |\bar{c}|\;\text{пр}_{\bar{c}}\bar{b} =$$
$$= \bar{c}\;\bar{a} + \bar{c}\;\bar{b} = \bar{a}\;\bar{c} + \bar{b}\;\bar{c}.$$

Пусть векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ заданы своими координатами:

$$\bar{a} = x_1\bar{i} + y_1\bar{j} + z_1\bar{k}, \qquad \bar{b} = x_2\bar{i} + y_2\bar{j} + z_2\bar{k}.$$

Найдем скалярное произведение $\bar{a}\bar{b}$. Вычислим предварительно скалярные произведения единичных векторов.

Имеем $\bar{i}\bar{i} = |\bar{i}||\bar{i}|\cos 0 = 1\cdot 1\cdot 1 = 1,\;\; \bar{j}\bar{j} = 1,\;\; \bar{k}\bar{k} = 1.$ Векторы $\bar{i},\bar{j},\bar{k}$ взаимно перпендикулярны. Тогда, согласно свойству 2, их произведения друг на друга равны нулю.

Используя распределительный закон скалярного произведения, получим

$$\bar{a}\bar{b} = \left(x_1\bar{i} + y_1\bar{j} + z_1\bar{k}\right)\left(x_2\bar{i} + y_2\bar{j} + z_2\bar{k}\right) = x_1x_2\bar{i}\bar{i} + x_1y_2\bar{i}\bar{j} + x_1z_2\bar{i}\bar{k} +$$
$$+ y_1x_2\bar{i}\bar{j} + y_1y_2\bar{j}\bar{j} + y_1z_2\bar{j}\bar{k} + z_1x_2\bar{k}\bar{i} + z_1y_2\bar{k}\bar{j} + z_1z_2\bar{k}\bar{k} =$$
$$= x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$$

Итак, если векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ заданы своими координатами, то

$$\bar{a}\bar{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2. \qquad (1.57)$$

<u>*Следствие 1.*</u> Если $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$, то $\bar{a}\bar{b} = 0$ или

$$x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0. \qquad (1.58)$$

Условие (1.58) называется ***условием перпендикулярности двух векторов***,

<u>*Следствие 2.*</u> Так как $\bar{a}\bar{b} = |\bar{a}||\bar{b}|\cos\varphi$,то

$$\cos\varphi = \frac{\bar{a}\bar{b}}{|\bar{a}||\bar{b}|} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}, \qquad (1.59)$$

ПРИМЕР 1.25 Вычислить работу по перемещению материальной точки вдоль отрезка, из точки $B(1;-2;3)$ в точку $C(3;4;2)$ под действием постоянной по величине и направлению силы $\bar{F} = \{2;1;5\}$.

<u>Решение.</u> Из курса физики известно, что работа A, совершаемая при указанных в примере условиях, находится по формуле $A = \bar{F}\cdot\bar{S} = \bar{F}\cdot\overline{BC}$. Так как $\overline{BC} = \{2;6;-1\}, \bar{F} = \{2;1;5\}$, то

$A = \bar{F}\overline{BC} = 2\cdot 2 + 1\cdot 6 + 5\cdot(-1) = 5.$ Ответ: 5.

ПРИМЕР 1.26 Даны вершины треугольника $A(-1;-2;4), B(-4;-2;0)$ и $C(3;-2;1)$. Определить внутренний угол треугольника при вершине B (рис. 1.19).

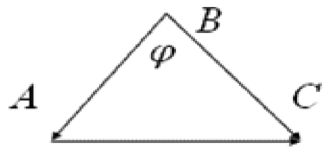


Рис. 1.19

<u>Решение.</u> Построим векторы $\overline{BA}$ и $\overline{BC}$. Имеем $\overline{BA} = \{3;0;4\}, \overline{BC} = \{7;0;1\}$. Тогда

$$\cos\varphi = \cos\left(\overline{BA}\,\hat{,}\,\overline{BC}\right) = \frac{\overline{BA}\,\overline{BC}}{\left|\overline{BA}\right|\left|\overline{BC}\right|} = \frac{3\cdot 7 + 0\cdot 0 + 4\cdot 1}{\sqrt{9+0+16}\sqrt{49+0+1}} =$$

$$= \frac{25}{5\sqrt{50}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{4}. \qquad \text{Ответ:} \frac{\pi}{4}.$$

Из приведенных примеров следует, что скалярное произведение векторов широко применяется в геометрии при поиске величин углов, в физике - при определении работы.

1.6.8 Векторное произведение векторов

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.37 **Векторным произведением** вектора $\overline{a}$ на вектор $\overline{b}$ называется вектор $\overline{c}$, удовлетворяющий условиям:

1) длина вектора $\overline{c}$ численно равна площади параллелограмма, построенного на векторах $\overline{a}$ и $\overline{b}$ как на сторонах, т.е.

$$\left|\overline{c}\right| = \left|\overline{a}\right|\left|\overline{b}\right|\sin\left(\overline{a}\,\hat{,}\,\overline{b}\right);$$

2) вектор $\overline{c}$ перпендикулярен обоим векторам $\overline{a}$ и $\overline{b}$;

3) вектор $\overline{c}$ направлен в ту сторону, что если смотреть из его конца вдоль вектора, то кратчайший поворот вектора $\overline{a}$ к вектору $\overline{b}$ виден совершающимся против движения часовой стрелки. Векторное произведение вектора $\overline{a}$ на вектор $\overline{b}$ обозначаемся символом $\overline{a}\times\overline{b}$.

Введем декартовую систему координат и рассмотрим векторные произведения единичных векторов $\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}$. Покажем, что $\overline{i}\times\overline{j} = \overline{k}$.

Действительно, если $\overline{c} = \overline{i}\times\overline{j}$, то по определению векторного произведения:

1) $\left|\overline{c}\right| = \left|\overline{i}\right|\left|\overline{j}\right|\sin\left(\overline{i}\,\hat{,}\,\overline{j}\right) = \sin\dfrac{\pi}{2} = 1 = \left|\overline{k}\right|$;

2) $\overline{c}\perp\overline{i}, \overline{c}\perp\overline{j}$. Но и $\overline{k}\perp\overline{i}, \overline{k}\perp\overline{j}$.

3) если смотреть с конца вектора $\overline{c}$ или $\overline{k}$, то кратчайший поворот вектора $\overline{i}$ к вектору $\overline{j}$ виден происходящим против движения часовой стрелки (рис. 1.20).

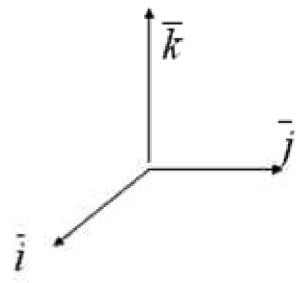


Рис. 1.20

Итак, $\bar c = \bar k$. Следовательно, $\bar i \times \bar j = \bar k$.

Аналогично доказывается, что

$$\bar j \times \bar i = -\bar k,\ \bar j \times \bar k = \bar i,\ \bar k \times \bar i = \bar j,\ \bar i \times \bar k = -\bar j,$$
$$\bar i \times \bar i = \bar 0,\ \bar j \times \bar j = \bar 0,\ \bar k \times \bar k = \bar 0 \tag{1.60}$$

Повторив вышеприведенные рассуждения для произвольных векторов $\bar a$ и $\bar b$ можно убедиться, что векторное произведение обладает свойствами:

1) $\bar a \times \bar b = -(\bar b \times \bar a)$;
2) $\lambda(\bar a \times \bar b) = (\lambda \bar a) \times \bar b = \bar a \times (\lambda \bar b)$ для $\forall \lambda \in R$;
3) $\bar a \times \bar a = \bar 0$;
4) $\bar a \times \bar b = \bar 0$, если $\bar a = \lambda \bar b$ или хотя бы один из векторов есть нулевой вектор;
5) $\bar a \times (\bar b + \bar c) = \bar a \times \bar b + \bar a \times \bar c$.

Найдем выражение для векторного произведения векторов, заданных своими координатами. Пусть $\bar a = \{x_1; y_1; z_1\}, \bar b = \{x_2; y_2; z_2\}$. Тогда, согласно свойствам 2,3,4 и равенствам (1.60), получим

$$\bar a \times \bar b = (x_1 \bar i + y_1 \bar j + z_1 \bar k) \times (x_2 \bar i + y_2 \bar j + z_2 \bar k) = x_1 x_2 \bar i \times \bar i + x_1 y_2 \bar i \times \bar j +$$
$$+ x_1 z_2 \bar i \times \bar k + x_2 y_1 \bar j \times \bar i + y_1 y_2 \bar j \times \bar j + y_1 z_2 \bar j \times \bar k + x_2 z_1 \bar k \times \bar i + y_2 z_1 \bar k \times \bar j +$$
$$+ z_1 z_2 \bar k \times \bar k = x_1 y_2 \bar k - x_1 z_2 \bar j - x_2 y_1 \bar k + y_1 z_2 \bar i + x_2 z_1 \bar j - y_2 z_1 \bar i =$$
$$= (y_1 z_2 - y_2 z_1)\bar i - (x_1 z_2 - x_2 z_1)\bar j + (x_1 y_2 - x_2 y_1)\bar k =$$
$$= \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \bar i - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} \bar j + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \bar k = \begin{vmatrix} \bar i & \bar j & \bar k \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}.$$

Итак, если $\bar a = \{x_1; y_1; z_1\}, \bar b = \{x_2; y_2; z_2\}$, то

$$\bar{a}\times\bar{b}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix} \qquad (1.61)$$

ПРИМЕР 1.27 Сила $\bar{F}=\{3;2;-4\}$ приложена к точке $M(2;-1;1)$. Определить момент силы относительно начала координат.

Решение. Пусть точка A есть некоторая точка R^3. Моментом силы $\bar{F}$, приложенной к точке M, относительно точки A называется вектор $\overline{AM}\times\bar{F}$. По условию $\overline{AM}=\overline{OM}=\{2;-1;1\}, \bar{F}=\{3;2;-4\}$. Тогда, согласно формуле (1.61), получим

$$\overline{OM}\times\bar{F}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 2 & -1 & 1\\ 3 & 2 & -4\end{vmatrix}=2\bar{i}+11\bar{j}+7\bar{k}. \qquad \text{Ответ:}\{2;11;7\}.$$

ПРИМЕР 1.28 Даны вершины треугольника $A(1;2;0), B(3;0;-3)$ и $C(5;2;6)$. Вычислить площадь этого треугольника.

Решение. Найдем векторы $\overline{AB}, \overline{AC}$ (рис. 1.21). Имеем:

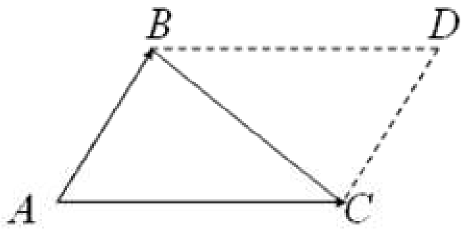


Рис. 1.21

$$\overline{AB}=\{2;-2;-3\}, \overline{AC}=\{4;0;6\}.$$

Так как $\left|\overline{AB}\times\overline{AC}\right|$ равен площади параллелограмма $ABCD$, то площадь S треугольника ABC найдется по формуле

$$S=\frac{1}{2}\left|\overline{AB}\times\overline{AC}\right|=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 2 & -2 & -3\\ 4 & 0 & 6\end{vmatrix}\right|=\frac{1}{2}\left|-12\bar{i}-24\bar{j}+8\bar{k}\right|=$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{12^2+(-24)^2+8^2}=\frac{1}{2}\sqrt{874}=14.$$

Ответ: 14

Из приведенных примеров следует, что векторное произведение в геометрии применяется при определении площадей многоугольников, в механике - при вычислении моментов.

1.6.9 Смешанное произведение векторов

Пусть даны три вектора $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$. Так как для векторов введены два вида произведений - скалярное и векторное, то для трех векторов относительно операции умножения существуют следующие виды произведений:

1)двойное векторное произведение, т.е. произведение, в котором вначале находится векторное произведение двух из заданных векторов, затем векторное произведение полученного вектора на третий из данных векторов.

Например, вначале находится векторное произведение $\bar{a}\times\bar{b}=\bar{d}$, затем - векторное произведение $\bar{d}\times\bar{c}=(\bar{a}\times\bar{b})\times\bar{c}$;

2)смешанное произведение, т.е. произведение, в котором вначале находится векторное произведение двух из заданных векторов, затем скалярное произведение полученного вектора на третий из данных векторов.

Например, вначале находится векторное произведение $\bar{a}\times\bar{b}=\bar{d}$, затем - скалярное произведение $\bar{d}\cdot\bar{c}=(\bar{a}\times\bar{b})\cdot\bar{c}$.

Двойное векторное произведение обозначается в форме $(\bar{a}\times\bar{b})\times\bar{c}$ или в форме $\bar{a}\times\bar{b}\times\bar{c}$.

Ясно, что результатом двойного векторного произведения является вектор.

Смешанное или иначе векторно-скалярное произведение обозначается символом $(\bar{a}\times\bar{b})\cdot\bar{c}$ или символом $\bar{a}\bar{b}\bar{c}$. Результатом смешанного произведения является число.

Пусть требуется определить смешанное произведение векторов, если известны координаты этих векторов

$$\bar{a}=\{x_1;y_1;z_1\},\bar{b}=\{x_2;y_2;z_2\},\bar{c}=\{x_3;y_3;z_3\}.$$

Вычислим предварительно $\bar{a}\times\bar{b}=\bar{d}$. Имеем

$$\bar{d}=\bar{a}\times\bar{b}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}y_1 & z_1\\ y_2 & z_2\end{vmatrix}\bar{i}-\begin{vmatrix}x_1 & z_1\\ x_2 & z_2\end{vmatrix}\bar{j}+\begin{vmatrix}x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{vmatrix}\bar{k}.$$

Воспользовавшись формулой (1.57), найдем

$$\bar{d}\bar{c}=(\bar{a}\times\bar{b})\bar{c}=\begin{vmatrix}y_1 & z_1\\ y_2 & z_2\end{vmatrix}x_3-\begin{vmatrix}x_1 & z_1\\ x_2 & z_2\end{vmatrix}y_3+\begin{vmatrix}x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{vmatrix}z_3.$$

Полученное равенство, согласно теореме о разложении определителя по элементам строки, можно переписать в форме

$$\left(\overline{a}\times\overline{b}\right)\overline{c}=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\\ x_3 & y_3 & z_3\end{vmatrix} \qquad (1.62)$$

Формула (1.62) дает выражение для смешанного произведения в координатной форме. Заметим, что в этой формуле координаты векторов $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$ записаны соответственно в первой, второй и третьей строках определителя.

Покажем, что для смешанного произведения векторов справедливы равенства

$$\left(\overline{a}\times\overline{b}\right)\overline{c}=\left(\overline{b}\times\overline{c}\right)\overline{a}=\left(\overline{c}\times\overline{a}\right)\overline{b}=-\left(\overline{a}\times\overline{c}\right)\overline{b}=-\left(\overline{c}\times\overline{b}\right)\overline{a}=-\left(\overline{b}\times\overline{a}\right)\overline{c} \qquad (1.63)$$

Проверим, например, справедливость равенства $\left(\overline{a}\times\overline{b}\right)\overline{c}=-\left(\overline{b}\times\overline{a}\right)\overline{c}$. Согласно формуле (1.62) имеем

$$\left(\overline{b}\times\overline{a}\right)\overline{c}=\begin{vmatrix} x_2 & y_2 & z_2\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_3 & y_3 & z_3\end{vmatrix}$$

Как известно, при перестановке двух срок определителя знак определителя меняется на противоположный. Тогда, умножая обе части предыдущего равенства на (-1), получим

$$-\left(\overline{b}\times\overline{a}\right)\overline{c}=-\begin{vmatrix} x_2 & y_2 & z_2\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_3 & y_3 & z_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\\ x_3 & y_3 & z_3\end{vmatrix}=\left(\overline{a}\times\overline{b}\right)\overline{c}.$$

Итак, $\left(\overline{a}\times\overline{b}\right)\overline{c}=-\left(\overline{b}\times\overline{a}\right)\overline{c}.$

Формулы (1.63) проще всего запомнить с помощью правила круговой перестановки векторов, сущность которого пояснена на рис.1.22 и 1.23.

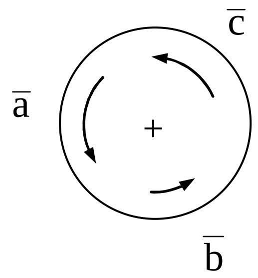


Рис .1.22

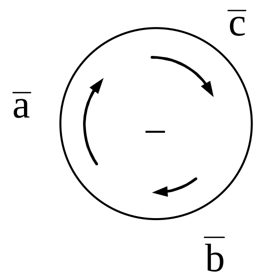


Рис .1.23

Выясним геометрический смысл смешанного произведения векторов $\left(\overline{a}\times\overline{b}\right)\overline{c}$. Отложим векторы $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$ от общего начала и построим на этих векторах, как на ребрах, параллелепипед (рис.1.24).

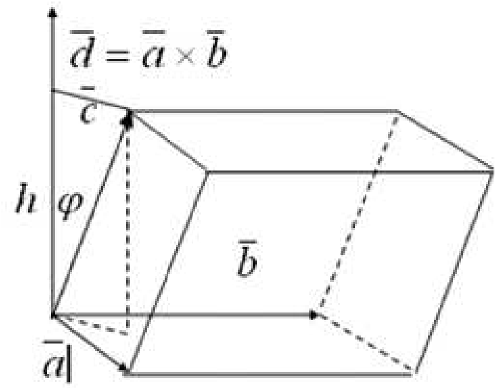


Рис. 1.24

Пусть $\bar{a} \times \bar{b} = \bar{d}$. Тогда, согласно определения векторного произведения векторов, модуль вектора $\bar{d}$ равен площади S параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a}, \bar{b}$ как на сторонах. Следовательно,

$$(\bar{a} \times \bar{b})\bar{c} = |\bar{d}||\bar{c}|\cos\varphi = S|\bar{c}|\cos\varphi, \text{ где } \varphi = \left(\bar{d} \,\hat{,}\, \bar{c}\right)$$

Обозначим через h высоту параллелепипеда, опущенную из конца вектора $\bar{c}$ на рассматриваемый параллелограмм, и выясним смысл произведения $|\bar{c}|\cos\varphi$. Вектор $\bar{d}$ перпендикулярен плоскости параллелограмма, тогда

$$|\bar{c}|\cos\varphi = h, \text{ если } 0 \le \varphi < \frac{\pi}{2} \text{ и}$$

$$|\bar{c}|\cos\varphi = -h, \text{ если } \frac{\pi}{2} \le \varphi < \pi.$$

Следовательно, если V есть объем параллелепипеда, то

$$(\bar{a} \times \bar{b})\bar{c} = |\bar{d}||\bar{c}|\cos\varphi = S\,h = V, \text{ если } 0 \le \varphi < \frac{\pi}{2} \text{ и}$$

$$(\bar{a} \times \bar{b})\bar{c} = |\bar{d}||\bar{c}|\cos\varphi = S(-h) = -V, \text{если } \frac{\pi}{2} \le \varphi < \pi.$$

Итак, $(\bar{a} \times \bar{b})\bar{c} = \pm V$ или $|(\bar{a} \times \bar{b})\bar{c}| = V$ (1.64)

Равенство (1.64) означает, что модуль смешанного произведения трех векторов равен объему параллелепипеда, построенного на этих векторах как на ребрах.

Следствие (условие компланарности трех векторов). Для того, чтобы три вектора $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ были компланарны, необходимо и достаточно, чтобы их смешанное произведение равнялось нулю, т.е. $(\bar{a} \times \bar{b})\bar{c} = 0$ или в координатной форме

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0 \qquad (1.65)$$

Необходимость. Пусть векторы $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ компланарны. Тогда вектор $\bar{d} = \bar{a} \times \bar{b}$ перпендикулярен плоскости, в которой расположены данные векторы, следовательно, перпендикулярен вектору $\bar{c}$. Поэтому

$\bar{d}\bar{c} = |\bar{d}||\bar{c}|\cos\dfrac{\pi}{2} = 0.$ Следовательно, $(\bar{a} \times \bar{b})\bar{c} = 0.$

Достаточность. Пусть векторы $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ таковы, что $(\bar{a} \times \bar{b})\bar{c} = 0.$ Если предположить, что векторы не компланарны, то на них можно построить параллелепипед с объемом $V \neq 0$. Но, согласно формуле (1.64) $V = |(\bar{a} \times \bar{b})\bar{c}|$. Следовательно, $|(\bar{a} \times \bar{b})\bar{c}| \neq 0$ или, $(\bar{a} \times \bar{b})\bar{c} \neq 0$, что противоречит исходному утверждению.

ПРИМЕР 1.29 Вычислить объем треугольной пирамиды с вершинами в точках $A(2;-1;1), B(5;5;4), C(3;2;-1), D(4;1;3).$

Решение. Построим три вектора $\overline{AB} = \{3;6;3\}, \overline{AC} = \{1;3;-2\}, \overline{AD} = \{2;2;2\}$ с общим началом точкой A. На этих векторах, как на ребрах, построим параллелепипед. Его объем равен $|(\overline{AB} \times \overline{AC})\overline{AD}|$. Объем пирамиды V составляет шестую долю объема параллелепипеда. Следовательно,

$$V = \frac{1}{6}|(\overline{AB} \times \overline{AC})\overline{AD}| = \frac{1}{6}\left|\begin{vmatrix} 3 & 6 & 3 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix}\right| = \left|\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}\right| = \left|\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}\right| =$$

$$= \left|\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}\right| = |-3| = 3.$$

Ответ: 3

Из геометрического смысла смешанного произведения векторов и рассмотренного примера следует, что оно широко используется при вычислении объемов любых многогранников.