МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Харківський національний автомобільно-дорожній університет

До друку дозволяю
Заступник ректора
__________ І.П. Гладкий

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ
з дисципліни **«Вища математика»**
для студентів денної форми навчання освітньо-кваліфікаційного рівня бакалавр напряму підготовки
6.010104 «Професійна освіта. Транспорт»

Затверджено
Радою Факультету МТЗ
протокол № ___ від

Укладач:
ст. викладач каф. прикладної математики
Козачок Л.М.

Харків
2016

1.1. ДВОЙНОЙ ИНТЕГРАЛ

1.1.1. Определение двойного интеграла. Его геометрический смысл

Пусть в некоторой замкнутой области D на плоскости xOy задана ограниченная функция двух переменных $z = f(x, y)$. Проделаем следующие операции (подобно тому, как это делаем при определении определенного интеграла).

1. Область D (рис. 1.1) разобьем произвольным образом на n частей ΔS_1, $\Delta S_2, \ldots. \Delta S_n$. И чтобы не вводить новых символов, площади этих подобластей тоже будем обозначать через $\Delta S_i \left(i = \overline{1, n}\right)$, а диаметры их (расстояния между наиболее удаленными точками границы области ΔS_i) – через d_i. Пусть $\max d_i$ - наибольший диаметр областей $\Delta S_i \left(i = \overline{1, n}\right)$.

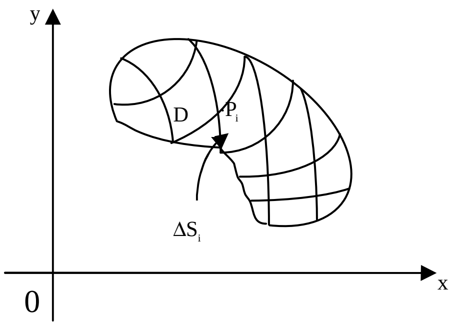

Рис. 1.1

2. В каждой из областей ΔS_i возьмем произвольную точку $P_i(\xi_i, \eta_i)$ (внутри или на границе ΔS_i). И вычислим значение функции в этой точке $f(P_i) = f(\xi_i, \eta_i)$.

3. Значение $f(P_i)$ умножим на площадь ΔS_i - меру элементарной области ΔS_i. (В случае функции одной переменной $y = f(x)$ мерой элементарной области была длина Δx_i отрезка $[x_{i-1}, x_i]$, в случае функции двух переменных за меру области ΔS_i принимается ее площадь).

4. Составим сумму произведений вида $f(P_i)\Delta S_i$:

$$S_n = f(P_1)\Delta S_1 + f(P_2)\Delta S_2 + \ldots + f(P_n)\Delta S_n = \sum_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta S_i \qquad (1.1)$$

Сумма (1.1) называется интегральной суммой для функции $z = f(x, y)$ по области D, соответствующей данному разбиению.

При заданном числе n частей ΔS_i, на которые дробится область D, можно составить сколько угодно интегральных сумм: во-первых, по-разному дробить фигуру на n частей, а во-вторых, в каждой части можно произвольным образом выбирать точку P_i.

5. Измельчая разбиение, находим предел I интегральной суммы S_n при условии, что $\max d_i \to 0$, следовательно, $n \to \infty$

$$I = \lim_{\substack{\max d_i \to 0 \\ (n \to \infty)}} S_n = \lim_{\substack{\max d_i \to 0 \\ (n \to \infty)}} \sum_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta S_i .$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Если существует конечный предел интегральной суммы S_n при $\max d_i \to 0$ (при этом $n \to \infty$) и если этот предел не зависит ни от способа разбиения области D на элементарные площадки S_i, ни от выбора точки $P_i \in \Delta S_i$, то он называется *двойным интегралом* от функции $z = f(x, y)$ по области D и обозначается символом

$$\iint_D f(P)dS \quad \text{или} \quad \iint_D f(x, y)dxdy.$$

Выражение $f(x, y)dxdy$ называется *подынтегральным выражением*; функция $f(x, y)$ - *подынтегральной функцией*; $dS = dxdy$ - *элементом площади*; D – *областью интегрирования*; x и y – *переменными интегрирования*.

Итак, по определению

$$\iint_D f(P)dS = \lim_{\substack{\max d_i \to 0 \\ (n \to \infty)}} \sum_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta S_i . \qquad (1.2)$$

Функция, имеющая предел (1.2), называется интегрируемой в области D.

Вводя определение двойного интеграла, мы предполагали, что функция $z = f(x, y)$ ограничена в области D. Однако не всякая ограниченная функция интегрируема, иначе говоря, имеет двойной интеграл. Какие условия надо наложить на функцию еще, чтобы можно было гарантировать существование двойного интеграла? Ответ на этот вопрос дает

Теорема существования двойного интеграла. Всякая функция $z = f(x, y)$, непрерывная в ограниченной замкнутой области D, интегрируема в этой области.

Выясним теперь геометрический смысл двойного интеграла.

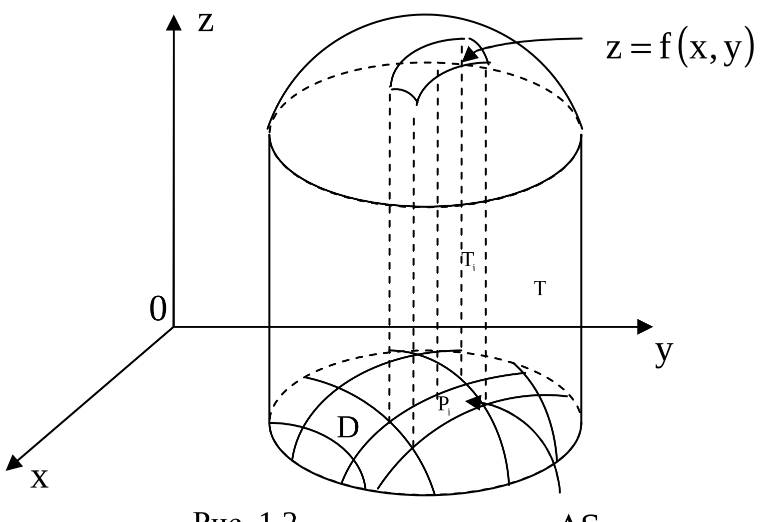

Рис. 1.2

Рассмотрим в пространстве тело T, ограниченное снизу областью D, сверху поверхностью $z = f(x, y)$ такой, что функция $f(x, y)$ непрерывна и неотрицательна в области D, с боков – цилиндрической поверхностью с образующей, параллельной оси Oz, и направляющей – границей области D (рис. 1.2). Такое тело будем называть цилиндрическим.

Поставим задачу: найти объем V цилиндрического тела. При разбиении основания цилиндрического тела – области D – на n частей ΔS_i тело T окажется разбитым на n элементарных цилиндрических тел – столбиков

$T_1, T_2, \ldots, T_n$ с основаниями $\Delta S_1, \Delta S_2, \ldots, \Delta S_n$. Объем цилиндрического столбика T_i приближенно равен объему прямого цилиндра с тем же основанием и высотой $f(P_i)$:

$$\Delta V_i \approx f(P_i)\Delta S_i.$$

Принимая объем V данного цилиндрического тела T приближенно равным объему V_n n – ступенчатого тела, получаем приближенное равенство

$$V \approx V_n = \sum_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta S_i, \tag{1.3}$$

которое, интуитивно ясно, будет тем ближе к точному, чем меньше размеры областей ΔS_i и больше n. Для получения точного значения V нужно в выражении (1.3) перейти к пределу, устремив наибольший диаметр d_i ячеек ΔS_i к нулю:

$$V = \lim_{\substack{\max d_i \to 0 \\ (n\to\infty)}} V_n = \lim_{\substack{\max d_i \to 0 \\ (n\to\infty)}} \sum_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta S_i.$$

Последний предел есть двойной интеграл, значит,

$$V = \iint_D f(x, y)dxdy. \tag{1.4}$$

Таким образом, решена задача об объеме цилиндрического тела и установлен геометрический смысл двойного интеграла: двойной интеграл $\iint_D f(x, y)dxdy$ от неотрицательной функции $f(x, y)$ дает объем соответствующего цилиндрического тела, верхней поверхностью которого служит поверхность $z = f(x, y)$.

1.1.2. Свойства двойного интеграла

Как видно, конструкции определенного интеграла и двойного интеграла аналогичны. Вследствие этого свойства, а также доказательства свойств двойного интеграла аналогичны соответствующим свойствам определенного интеграла. Поэтому приведем свойства двойного интеграла, не останавливаясь на доказательствах. Свойства формулируются в предположении непрерывности функций.

1^0. Двойной интеграл от суммы конечного числа функций равен сумме двойных интегралов от слагаемых функций

$$\iint_D [f_1(x, y) + f_2(x, y) + \ldots + f_n(x, y)]dS =$$
$$= \iint_D f_1(x, y)dS + \iint_D f_2(x, y)dS + \ldots + \iint_D f_n(x, y)dS.$$

2^0. Постоянный множитель подынтегральной функции можно выносить за знак интеграла

$$\iint\limits_D af(x,y)dS = a\iint\limits_D f(x,y)dS.$$

Совокупность этих двух свойств называется линейностью интеграла.

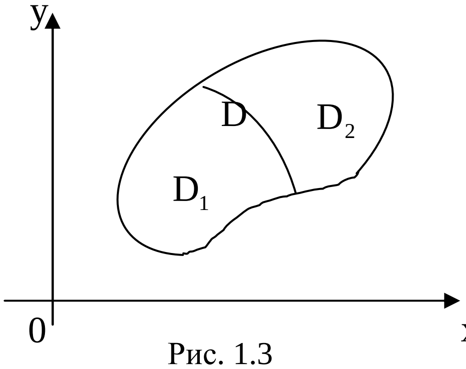

Рис. 1.3

3^0. (Свойство аддитивности). Если область D разбита на две области D_1 и D_2 без общих внутренних точек (рис. 1.3), то

$$\iint\limits_D f(x,y)dS = \iint\limits_{D_1} f(x,y)dS + \iint\limits_{D_2} f(x,y)dS.$$

4^0. (Свойство монотонности интеграла). Если

$$f(x,y) \le \varphi(x,y) \quad \forall (x,y) \in D, \text{ то}$$

$$\iint\limits_D f(x,y)dS \le \iint\limits_D \varphi(x,y)dS.$$

Из этого свойства, в частности, следует, что если подынтегральная функция в области интегрирования не меняет знак, то двойной интеграл есть число того же знака, что и функция.

5^0. (Оценка интеграла по модулю)

$$\left|\iint\limits_D f(x,y)dS\right| \le \iint\limits_D |f(x,y)|dS.$$

6^0. (Теорема об оценке интеграла). Если m и M – наименьшее и наибольшее значения функции $f(x,y)$ в области D, то двойной интеграл от нее удовлетворяет неравенствам:

$$m \cdot S \le \iint\limits_D f(x,y)dS \le M \cdot S,$$

где S – площадь области D.

7^0. (Теорема о среднем значении). В области D найдется по крайней мере одна точка $P(x,y)$ такая, что

$$\iint\limits_D f(x,y)dS = f(P) \cdot S.$$

1.1.3. Вычисление двойного интеграла

1.1.3.1. Понятие о правильных областях. Двукратный интеграл

Пусть область интегрирования D удовлетворяет условию: любая прямая, проходящая через внутреннюю точку области параллельно координатной оси, пересекает ее границу не более, чем в двух точках.

Область D называется правильной в направлении оси Oy (Ox), если любая прямая, параллельная оси Oy (Ox), пересекает границу области не более, чем в двух точках.

Для правильной в направлении оси Oy области нижнюю из этих точек будем называть точкой входа, а верхнюю – точкой выхода. Для правильной в направлении оси Ox области точка входа – левая точка пересечения прямой с границей области, точка выхода – правая точка пересечения прямой с границей.

Область, правильная как в направлении оси Oy, так и в направлении оси Ox, называется правильной.

Область, изображенная на рис. 1.4, является правильной и в направлении оси Oy (при этом M_1 - точка входа в область, M_2 - точка выхода из нее) и в направлении оси Ox (N_1 - точка входа, N_2 - точка выхода из области).Область D на рис.1.5 является правильной только в направлении оси Ox (прямая M_1M_2, параллельная оси Oy, пересекает границу в четырех точках).

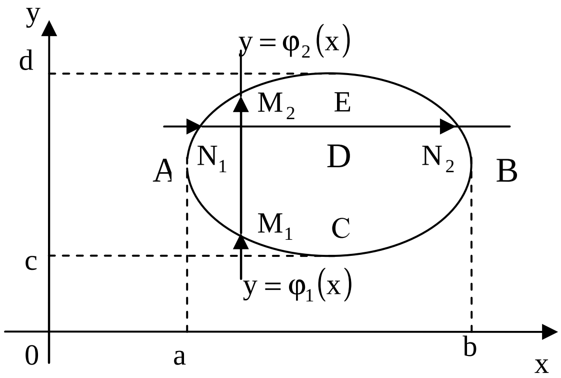

Рис. 1.4

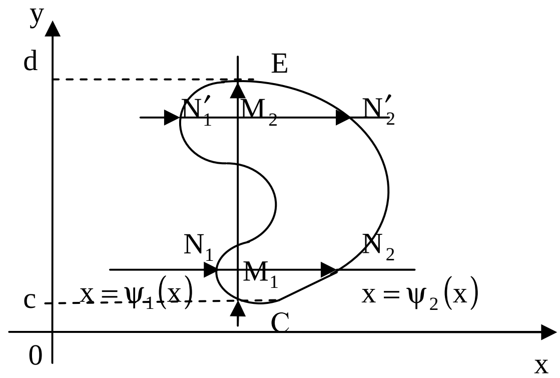

Рис. 1.5

Правильная в направлении оси Oy область D аналитически определяется системой неравенств $\begin{cases} a \le x \le b, \\ \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x), \end{cases}$ где $y=\varphi_1(x)$ и $y=\varphi_2(x)$ - уравнения нижней (ACB) и верхней (AEB) линий границы, $x=a$ и $x=b$ - уравнения прямых, параллельных оси Oy и касающихся границы в точках A и B (рис.1.4).

Правильная в направлении оси Ox область D определяется системой неравенств вида $\begin{cases} c \le y \le d, \\ \varphi_1(y) \le x \le \varphi_2(y), \end{cases}$ где $x=\varphi_1(y)$ и $x=\varphi_2(y)$ - уравнения левой (CAE на рис.1.4, $CN_1N_1'E$ на рис.1.5) и правой (CBE на рис.1.4, $CN_2N_2'E$ на рис.1.5) линий границы, $y=c$ и $y=d$ - уравнения прямых, параллельных оси Ox и касающихся границы в точках C и E.

Рассмотрим выражение

$$I_D = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy \right) dx;$$

будем называть его двукратным или повторным интегралом от функции $f(x,y)$ по области D. Сначала вычисляется интеграл в скобках: интегрирование ведется по y, а x считается постоянным; в результате такого интегрирования получается некоторая функция от x

$$\Phi(x)=\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy.$$

Затем эта функция интегрируется по x в пределах от a до b:

$$I_D=\int_a^b \Phi(x)dx.$$

В результате получается число. Двукратный интеграл обычно записывают в виде

$$I_D=\int_a^b dx\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy.$$

ПРИМЕР. Вычислить двукратный интеграл $I_D=\int_0^2\left(\int_0^{x^2}(x-y)dy\right)dx$.

$$I_D=\int_0^2\left(xy-\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_0^{x^2}dx=\int_0^2\left(x^3-\frac{x^4}{2}\right)dx=\left(\frac{x^4}{4}-\frac{x^5}{10}\right)\Bigg|_0^2=0{,}8.$$

Таким образом, вычисление двукратного интеграла сводится к последовательному вычислению двух определенных интегралов.

1.1.3.2. Сведение двойного интеграла к двукратному

Вычисление двойного интеграла сводится к вычислению одного или нескольких двукратных интегралов. Покажем это для случая, когда $f(x,y)\geq 0$ в области D. Будем рассматривать двойной интеграл $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ как объем цилиндрического тела T, ограниченного снизу областью D, сверху поверхностью $z=f(x,y)$ (формула (1.4)). Задачей вычисления объема тела мы уже занимались, когда рассматривали применения определенного интеграла к задачам геометрии. Тогда была получена формула

$$V=\int_a^b S(x)dx, \tag{1.5}$$

где S(x) – площадь произвольного поперечного сечения тела, перпендикулярного к оси Ox, а $x = a$ и $x = b$ - уравнения плоскостей, ограничивающих тело. Применим эту формулу к вычислению интеграла $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$, где D – правильная область. Рассечем цилиндрическое тело T (рис. 1.6) произвольной плоскостью $x = x_0$ $(a < x_0 < b)$, параллельной плоскости yOz. В сечении имеем криволинейную трапецию M_1NKM_2, ограниченную кривой NK, уравнение которой $z = f(x_0, y)$, где y изменяется от ординаты точки M_1 до ординаты точки M_2. Точка M_1 является точкой входа прямой $x = x_0$ в область D, а M_2 - точкой выхода из нее. Точка M_1 лежит на линии $y = \varphi_1(x)$, значит $y_{M_1} = \varphi_1(x_0)$; точка M_2 лежит на линии $y = \varphi_2(x)$, значит, $y_{M_2} = \varphi_2(x_0)$. Таким образом, площадь рассматриваемого сечения, как площадь криволинейной трапеции находится по формуле:

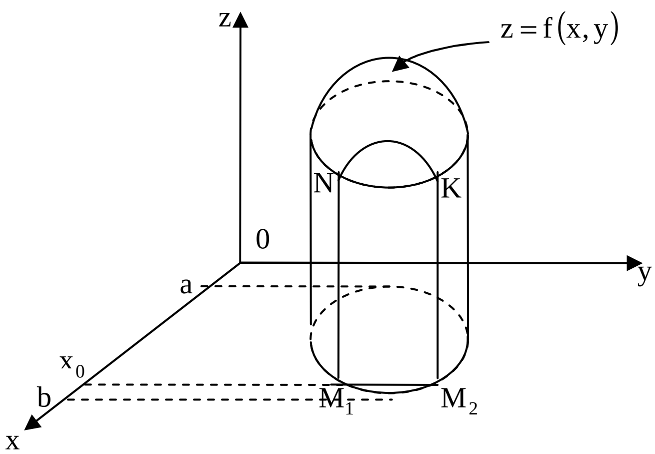

Рис. 1.6

$$S(x_0) = \int\limits_{\varphi_1(x_0)}^{\varphi_2(x_0)} f(x_0, y)dy.$$

В силу произвольности x $(a \le x \le b)$ интеграл $\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy$ есть выражение для площади S(x) любого сечения, перпендикулярного к оси Ox. Подставляя найденное S(x) в формулу (1.5), получим

$$V = \int\limits_a^b \left(\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy \right) dx = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy.$$

Сопоставляя полученный результат с формулой (1.4), заключаем, что двойной интеграл выражается через двукратный по формуле

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy. \qquad (A)$$

Рассекая тело T плоскостями $y = \text{const}$ $(c \le y \le d)$, найдем площадь S(y) любого сечения, перпендикулярного к оси Oy, по формуле

$$S(y)=\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy,$$

где y при интегрировании считается постоянным. Применяя формулу для вычисления объема тела по площади параллельных сечений

$$V=\int\limits_c^d S(y)dy,$$

придем ко второму выражению для двойного интеграла:

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\int\limits_c^d dy\int\limits_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x,y)dx. \qquad (Б)$$

В формуле (А) интегрирование выполняется вначале по y – в пределах от $y_1=\varphi_1(x)$ до $y_2=\varphi_2(x)$, которые указывают границы изменения y при постоянном, но произвольном значении x, а затем по x – в пределах от $x_1=a$ до $x_2=b$, которые являются наименьшим и наибольшим значениями x во всей области D и всегда постоянны. В формуле (Б) интегрирование выполняется в другом порядке: внутренний интеграл берется по x (при фиксированном y), пределы интегрирования указывают границы изменения x, в общем случае

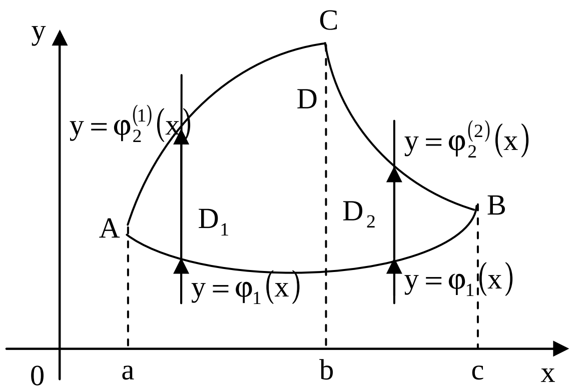

Рис. 1.7

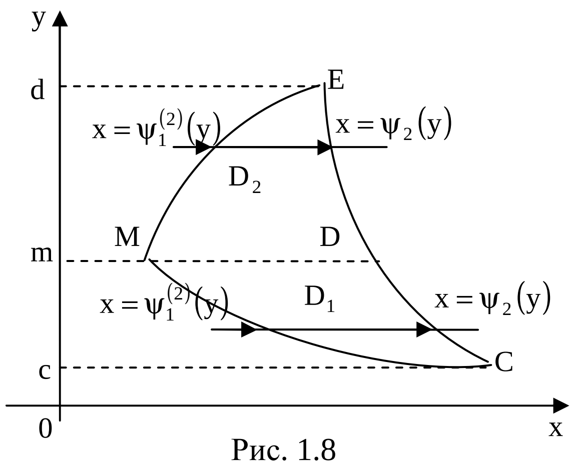

Рис. 1.8

зависящие от y; внешний интеграл берется по y, пределы интегрирования также постоянны и указывают границы изменения этой переменной.

Если область интегрирования D являются правильной в направлении оси Oy и в направлении оси Ox, то вычисление двойного интеграла можно производить как по формуле (А), так и по формуле (Б). В тех случаях, когда нижняя или верхняя (левая или правая) линии границы области D представлены различными аналитическими выражениями, область следует разбить прямыми, параллельными оси Oy (или Ox), на составляющие области, в каждой из которых указанные границы определялись бы одним уравнением, а затем воспользоваться свойством аддитивности двойного интеграла. Так, для области D, изображенной на рис.1.7, где верхняя граница имеет уравнение

$$\text{дуги}\quad \overset{\cup}{AC}:\ y=\varphi_2^{(1)}(x)\ \text{ при }\ a\le x\le c,$$

$$\overset{\cup}{CB}:\ y=\varphi_2^{(2)}(x)\ \text{ при }\ c\le x\le b,$$

двойной интеграл следует представить в виде суммы двух интегралов по областям D_1 и D_2, каждый из которых будет вычислен по формуле (А):

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\iint\limits_{D_1} f(x,y)dxdy+\iint\limits_{D_2} f(x,y)dxdy=$$

$$=\left|D_1\begin{cases}a\le x\le c;\\ \varphi_1(x)\le y\le\varphi_2^{(1)}(x);\end{cases}\quad D_2\begin{cases}c\le x\le b\\ \varphi_1(x)\le y\le\varphi_2^{(2)}(x)\end{cases}\right.=$$

$$=\int\limits_a^c dx\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2^{(1)}(x)} f(x,y)dy+\int\limits_c^b dx\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2^{(2)}(x)} f(x,y)dy. \qquad (1.6)$$

Область D, следует разбить на подобласти D_1 и D_2 прямой $y=m$, поскольку левая граница ее имеет уравнение

$$\text{дуги}\quad \overset{\cup}{MC}:\ x=\psi_1^{(1)}(y)\ \text{ при }\ c\le y\le m,$$

$$\overset{\cup}{MB}:\ x=\psi_1^{(2)}(y)\ \text{ при }\ m\le y\le d,$$

тогда двойной интеграл будет представлен в виде суммы следующих интегралов (по аналогии с (1.6)).

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\iint\limits_{D_1} f(x,y)dxdy+\iint\limits_{D_2} f(x,y)dxdy=$$

$$=\int\limits_c^m dy\int\limits_{\psi_1^{(1)}(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx+\int\limits_m^d dy\int\limits_{\psi_1^{(2)}(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx. \qquad (1.7)$$

Если область D не является правильной, то ее разбивают на конечное число правильных в направлении какой-либо оси областей $D_1,\ D_2,\ \dots,\ D_n$, что позволяет свести вычисление двойного интеграла по области D к вычислению n двойных интегралов по составляющим областям.

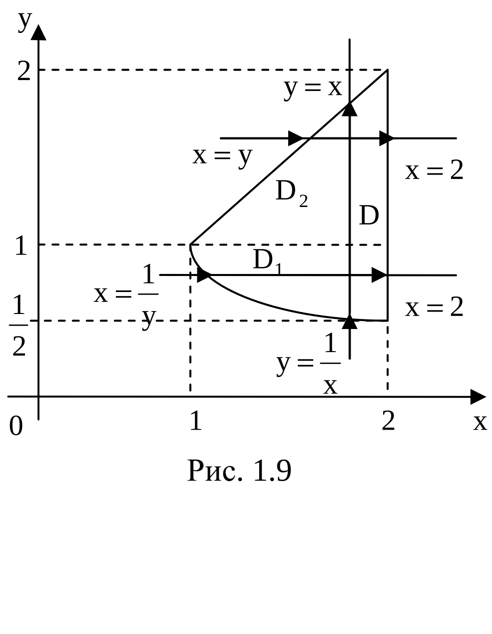

Рис. 1.9

Итак, для вычисления двойного интеграла необходимо построить область интегрирования, а затем установить порядок интегрирования в соответствии с формулами (А) или (Б), выбор которых диктуется соображениями рационального интегрирования. Поясним это на примере.

ПРИМЕР. Расставить пределы интегрирования двумя способами и вычислить двойной интеграл $\iint\limits_D \frac{x^2}{y^2}dxdy$, где область D ограничена линиями $x = 2,\ y = x$ и $xy = 1$.

Прежде изобразим область (см. рис. 1.9). Область является правильной в направлении оси Оу: произвольная прямая, проведенная параллельно этой оси, пересекает ее границу в двух точках.

Область снизу ограничена линией $y = \varphi_1(x) = \dfrac{1}{x}$, сверху – линией $y = \varphi_2(x) = x$, слева и справа – прямыми $x = a = 1,\ \ x = b = 2$. Поэтому интеграл можно вычислить по формуле (А), представив область D в виде:

$$D\begin{cases}1 \le x \le 2\\ \dfrac{1}{x} \le y \le x.\end{cases}$$

$$\iint\limits_D \frac{x^2}{y^2}dxdy = \int\limits_1^2 dx\int\limits_{\frac{1}{x}}^{x}\frac{x^2}{y^2}dy = \int\limits_1^2 x^2dx\int\limits_{\frac{1}{x}}^{x}\frac{dy}{y^2} = \int\limits_1^2 x^2\left(-\frac{1}{y}\Bigg|_{\frac{1}{x}}^{x}\right)dx = \int\limits_1^2 x^2\left(x - \frac{1}{x}\right)dx = \frac{9}{4}.$$

Изменим порядок интегрирования. Данная область D является правильной и в направлении оси Ох, но при этом левая граница ее $x = \psi_1(y)$ состоит из двух участков, имеющих уравнения $x = \dfrac{1}{y}$, когда $\dfrac{1}{2} \le y \le 1$, и $x = y$, когда $1 \le y \le 2$. В том случае следует разбить область прямой $y = 1$ на две подобласти $D_1,\ D_2$ и воспользоваться формулой (1.7), положив в ней $\varphi_1^{(1)}(y) = \dfrac{1}{y},\ \ \varphi_1^{(2)}(y) = y,\ \varphi_2(y) = 2,\ c = \dfrac{1}{2},\ m = 1,\ d = 2$.

Тогда

$$\iint\limits_D \frac{x^2}{y^2}dxdy = \iint\limits_{D_1}\frac{x^2}{y^2}dxdy + \iint\limits_{D_2}\frac{x^2}{y^2}dxdy = \left| D_1\begin{cases}\dfrac{1}{2} \le y \le 1,\\ \dfrac{1}{y} \le x \le 2,\end{cases}\quad D_2\begin{cases}1 \le y \le 2\\ y \le x \le 2\end{cases}\right| =$$

$$= \int\limits_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{dy}{y^2}\int\limits_{\frac{1}{y}}^{2}x^2dx + \int\limits_1^2\frac{dy}{y^2}\int\limits_y^2 x^2dx = \int\limits_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{1}{y^2}\left(\frac{x^3}{3}\Bigg|_{\frac{1}{y}}^{2}\right)dy + \int\limits_1^2\frac{1}{y^2}\left(\frac{x^3}{3}\Bigg|_y^2\right)dy =$$

$$= \frac{1}{3}\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{1}{y^2}\left(8 - \frac{1}{y^3}\right)dy + \frac{1}{3}\int\limits_1^2\frac{1}{y^2}\left(8 - y^3\right)dy = \frac{9}{4}.$$

Мы убедились в том, что значение двойного интеграла не зависит от порядка интегрирования. Однако, очевидно, первоначально выбранный порядок интегрирования в соответствии с формулой (А) (вначале по у, затем по

x) рациональнее обратного порядка интегрирования (вначале по x, затем по y). Этот пример также показывает, как важно выбрать нужный порядок интегрирования.

Заметим, что формулы сведения двойного интеграла к двукратному имеют особенно простой вид, когда область D является прямоугольником со сторонами, параллельными координатным осям (рис. 1.10). В этом случае являются постоянными пределы и внутреннего интеграла:

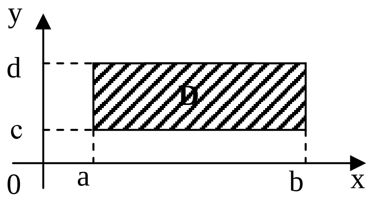

Рис. 1.10

$$\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy = \int\limits_{a}^{b} dx \int\limits_{c}^{d} f(x,y)dy = \int\limits_{c}^{d} dy \int\limits_{a}^{b} f(x,y)dx .$$

1.1.3.3. Замена переменных в двойном интеграле. Вычисление двойного интеграла в полярных координатах

При вычислении определенного интеграла $\int\limits_{x_1}^{x_2} f(x)dx$ часто приходится прибегать к замене переменной согласно зависимости $x = \varphi(u)$; введенная функция осуществляет взаимно однозначное соответствие между точками интервала $[u_1,\ u_2]$ изменения переменной u и точками интервала $[x_1,\ x_2]$ изменения переменной x. При выполнении определенных условий имеет место равенство

$$\int\limits_{x_1}^{x_2} f(x)dx = \int\limits_{u_1}^{u_2} f[\varphi(u)]\varphi'(u)du .$$

При вычислении двойных интегралов также бывает полезно сделать замену переменных: перейти к новым переменным u и v, связанным с x и y формулами

$$x = x(u,v), \quad y = y(u,v). \tag{1.8}$$

Правило замены переменных в двойном интеграле значительно сложнее. Опуская вывод этого правила, приведем окончательную формулу и разъясним ее смысл на примере преобразования двойного интеграла в декартовых координатах к полярным координатам.

Предварительно введем понятие криволинейных координат. Рассмотрим две плоскости с декартовыми координатами (x,y) и (u,v), где выделены замкнутые ограниченные области D и D'. Будем предполагать, что функции $x(u,v)$, $y(u,v)$ определены в области D' плоскости (u,v). Предположим еще, что формулы (1.8) устанавливают взаимно однозначное соответствие между точками областей D и D' (рис. 1.11).

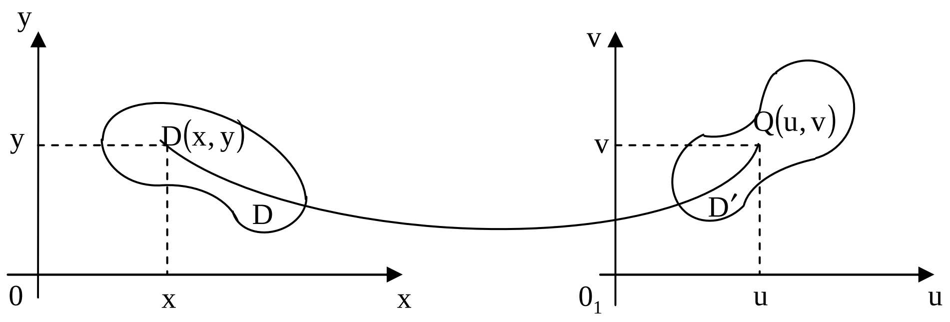

Рис. 1.11

Это значит, что не только каждой точке $Q(u,v)$ из области D' соответствует, согласно формулам (1.8), единственная точка $P(x,y)$ из области D, но и, наоборот, для любой точки $P(x,y)$ из D существует единственная точка $Q(u,v)$ из D', для которой $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$. Другими словами, для любых чисел x и y (таких, что точка $P(x,y)$ находится в D) система уравнений (1.8) имеет единственное решение

$$u = u(x,y), \ \ v = v(x,y), \tag{1.9}$$

такое, что точка $Q(u,v)$ лежит в D'. То, что точка $P(x,y)$ в D вполне определяется заданием соответствующей ей точки $Q(u,v)$ в D', позволяет смотреть на числа u и v как на координаты точки; их называют криволинейными координатами этой точки (для точки же Q они служат прямоугольными декартовыми координатами).

Когда точка $Q(u,v)$ пробегает область D', соответствующая точка $P(x,y)$ пробегает всю область D. Говорят, что формулы (1.8) отображают область D' на область D. При этом точка $P \in D$, соответствующая некоторой точке $Q \in D'$, называется образом последней, которая, в свою очередь, называется прообразом точки P. Образом любой непрерывной линии, лежащей в области D, служит непрерывная же линия в D'.

Если $z = f(x,y)$ - непрерывная в замкнутой ограниченной области D функция и если формулы

$$x = x(u,v), \quad y = y(u,v)$$

устанавливают взаимно однозначное соответствие между точками области D и точками некоторой области D' в плоскости (u,v), удовлетворяющее условиям:

1) функции $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$, $u = u(x,y)$, $v = v(x,y)$ непрерывны и имеют непрерывные частные производные первого порядка в областях D и D';
2) функциональный определитель Якоби (якобиан преобразования (1.8))

$$I(u,v)=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v}\\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}=\frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}-\frac{\partial x}{\partial v}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}$$

отличен от нуля всюду в области D', то имеет место следующая формула замены переменных в двойном интеграле:

$$\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy=\iint\limits_{D'} f(x(u,v),\ y(u,v))\,|I(u,v)|dudv. \qquad (1.10)$$

Формулу (1.10) легко запомнить. Для этого заметим, что ее правая часть получается из левой в результате трех процедур: 1) x и y заменяются их выражениями (1.8); 2) $dxdy$ заменяется на $|I(u,v)|dudv$ (выражение $|I(u,v)|dudv$ называют «элементом площади в криволинейных координатах»); 3) область D заменяется областью D'.

При удачной замене переменных преобразованный интеграл может оказаться проще, чем исходный; например, пределы интегрирования могут получиться постоянными.

Наиболее используемыми из криволинейных координат являются полярные. Мы знаем, что полярные координаты φ и ρ любой точки связаны с ее декартовыми координатами x и y формулами

$$x=\rho\cos\varphi,\ y=\rho\sin\varphi \quad (u=\varphi,\ v=\rho) \qquad (1.11)$$

при условии, что полюс помещен в начале декартовой системы координат и полярная ось направлена вдоль оси Ox. Эти формулы сопоставляют числам φ и ρ числа x и y. Значит здесь имеется отображение плоскости (φ, ρ) на плоскость (x и y); оно будет взаимно однозначным, если потребовать выполнения неравенств

$$0\le\rho\le\infty,\quad 0\le\varphi\le 2\pi \quad (\text{либо } -\pi\le\varphi\le\pi).$$

Замечая, что функции (1.11) и частные производные $x'_\varphi=-\rho\sin\varphi$, $x'_\rho=\cos\varphi$, $y'_\varphi=\rho\cos\varphi$, $y'_\rho=\sin\varphi$ непрерывны в указанной области D', найдем якобиан преобразования (1.11):

$$I(\varphi,\rho)=\begin{vmatrix}-\rho\sin\varphi & \cos\varphi\\ \rho\cos\varphi & \sin\varphi\end{vmatrix}=-\rho, \qquad |I(\varphi,\rho)|=\rho.$$

Тогда формула (1.10) принимает вид

$$\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy=\iint\limits_{D'} f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)\rho d\varphi d\rho. \qquad (1.12)$$

Заметим, что, применяя формулу (1.12), обычно не изображают область D' плоскости (u,v), а пределы изменения переменных φ и ρ устанавливают непосредственно по области D. В связи с этим формулу (1.12) часто пишут в виде

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_D f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho d\varphi d\rho \qquad (1.13)$$

Вычисление двойного интеграла в полярной системе координат, как и в декартовой, сводится к двукратному интегрированию по переменным φ и ρ. Укажем правила расстановки пределов.

1. Пусть полюс не содержится внутри области D. Область D ограничена кривыми $\rho = \Phi_1(\varphi)$, $\rho = \Phi_2(\varphi)$ и лучами $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$, где $\Phi_1(\varphi) \le \Phi_2(\varphi)$ и $\alpha < \beta$ (рис.1.12). Если луч $\varphi = \text{const}$, проходящий через внутреннюю точку области, пересекает ее границу не более чем в двух точках, то такую область так же будем называть правильной. В таком случае

$$D\{\alpha \le \varphi \le \beta,\ \Phi_1(\varphi) \le \rho \le \Phi_2(\varphi)\}$$

и

$$\iint_D f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho d\varphi d\rho = \int_\alpha^\beta d\varphi \int_{\Phi_1(\varphi)}^{\Phi_2(\varphi)} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho d\rho. \qquad (1.14)$$

Интегрирование в обратном порядке, т.е. сначала по φ, а потом по ρ, обычно не встречается.

В частном случае, когда область D есть часть кругового кольца $R_1 \le \rho \le R_2$, $\alpha \le \varphi \le \beta$, пределы внутреннего интеграла постоянны:

$$\iint_D f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho d\varphi d\rho = \int_\alpha^\beta d\varphi \int_{R_1}^{R_2} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho d\rho.$$

2. Пусть полюс содержится внутри области интегрирования и любой луч $\varphi = \text{const}$ пересекает границу в одной точке (рис. 1.13). Здесь область D описывается системой неравенств

$$0 \le \varphi \le 2\pi, \quad 0 \le \rho \le \Phi(\varphi)$$

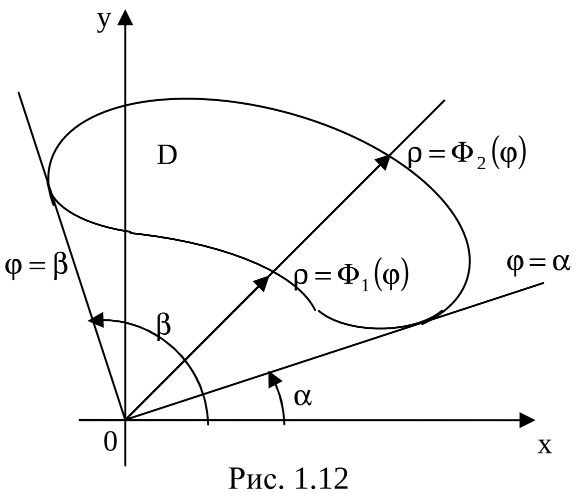

Рис. 1.12

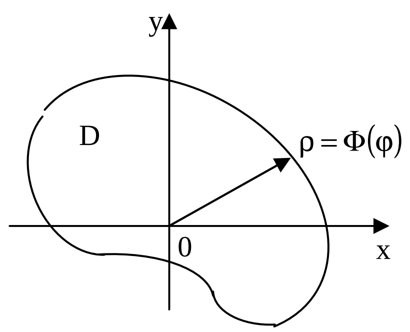

Рис. 1.13

и выполняется равенство

$$\iint_D f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho d\varphi d\rho = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\Phi(\varphi)} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho d\rho.$$

В частности, если $\rho = R = \text{const}$, т.е. когда область интегрирования D есть круг с центром в начале координат, то пределы внутреннего интеграла постоянны и имеет место равенство

$$\iint\limits_D f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho d\varphi d\rho = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^R f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho d\rho.$$

Переход к полярным координатам в двойном интеграле целесообразен в следующих случаях:

1^0. Подынтегральная функция $f(x, y)$ содержит в своем выражении $(x^2 + y^2)$;

2^0. Уравнение границы области D содержит $(x^2 + y^2)$;

3^0. Наличие условий 1^0 и 2^0.

ПРИМЕР. Перейдя к полярным координатам, вычислить двойной интеграл $\iint\limits_D \sqrt{x^2 + y^2}\,dxdy$, где область D ограничена окружностью $x^2 + y^2 = 2ax$.

Запишем данное уравнение границы области D в каноническом виде $(x - a)^2 + y^2 = a^2$, после чего можно утверждать, что область интегрирования есть круг радиуса a с центром в точке $(a, 0)$ (рис.1.14). Введем полярные координаты, положив $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$. Тогда уравнение окружности $x^2 + y^2 = 2ax$ преобразуется к виду $\rho = 2a\cos\varphi$, а область D в новой системе координат получает следующее описание:

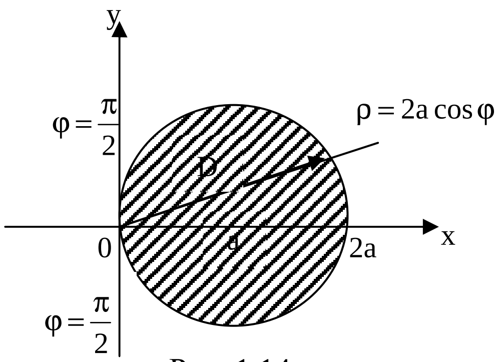

Рис. 1.14

$$D\left\{-\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2},\quad 0 \le \rho \le 2a\cos\varphi\right\}.$$

В соответствии с формулами (1.13), (1.14) получаем

$$\iint\limits_D \sqrt{x^2 + y^2}\,dxdy = \iint\limits_D \rho \cdot \rho d\varphi d\rho = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{2a\cos\varphi} \rho^2 d\rho = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\left.\frac{1}{3}\rho^3\right|_0^{2a\cos\varphi}\right) d\varphi =$$

$$= \frac{8a^3}{3}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\varphi d\varphi = \frac{8a^3}{3}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2\varphi) d(\sin\varphi) = \frac{8a^3}{3}\left.\left(\sin\varphi - \frac{\sin^3\varphi}{3}\right)\right|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{32}{9}\pi a^3.$$

Читателю предлагаем самостоятельно убедиться в целесообразности вычисления данного двойного интеграла в полярных координатах после попыток вычислить его в декартовых координатах.

1.1.4. Приложения двойных интегралов к задачам геометрии и механики

1.1.4.1. Вычисление объемов тел и площадей плоских областей

1. ***Объем***. В п.1.1 при выяснении геометрического смысла двойного интеграла было установлено, что объем V цилиндрического тела, ограниченного сверху поверхностью $z = f(x, y)$, снизу плоскостью $z = 0$ и с боков цилиндрической поверхностью, направляющей для которой служит граница области D, а образующие параллельны оси Oz, выражается формулой:

$$V = \iint_D f(x, y)dxdy.$$

Если тело ограничено сверху поверхностью $z = \Phi_2(x, y)$, а снизу – поверхностью $z = \Phi_1(x, y)$, причем проекцией обеих поверхностей на плоскость xOy является область D (рис. 1.15), то объем V тела равен разности объемов двух цилиндрических тел; первое тело верхней «крышкой» имеет поверхность $z = \Phi_2(x, y)$, для второго тела «крышкой» служит поверхность $z = \Phi_1(x, y)$. Поэтому объем V равен разности двух двойных интегралов

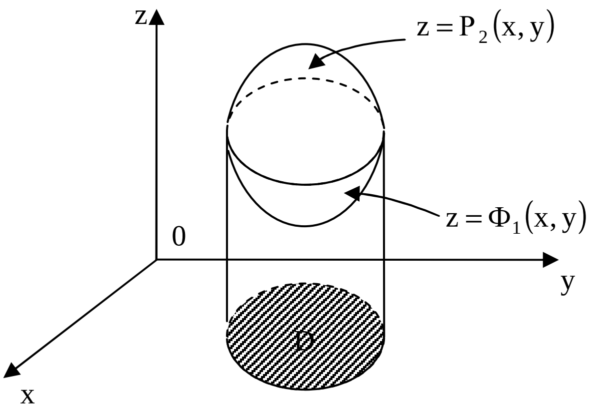

Рис. 1.15

$$V = \iint_D \Phi_2(x, y)dxdy - \iint_D \Phi_1(x, y)dxdy = \\ = \iint_D [\Phi_2(x, y) - \Phi_1(x, y)]dxdy. \qquad (1.15)$$

ПРИМЕР. Вычислить объем тела, ограниченного плоскостью $y = 0$ и параболоидом $y = 3 - x^2 - z^2$.

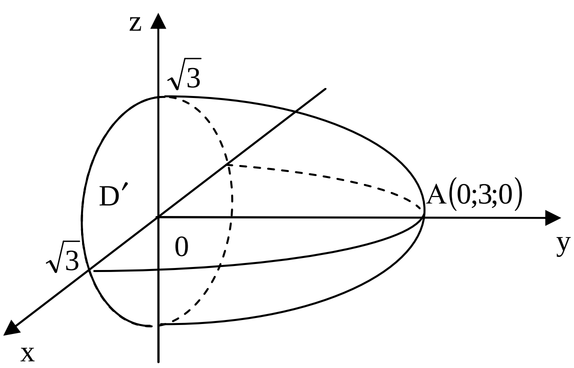

Рис. 1.16

Параболоид $y - 3 = -(x^2 + z^2)$ симметричен относительно оси Oy, имеет вершину в точке A(0;3;0) и пересекает по окружности $x^2 + z^2 = 3$ плоскость xOz, которой, по условию, ограничено данное тело (рис.1.16). Поэтому для решения задачи удобно считать, что тело «стоит» на плоскости xOz и «сверху» ограничено поверхностью $y = 3 - x^2 - z^2$. Тогда объем V будет найден по формуле

$$V = \iint_D f(x, z)dxdz.$$

Поскольку областью интегрирования D является круг, то вычисление интеграла упростится переходом в полярную систему координат, где уравнение границы имеет вид $\rho^2 = 3$ или $\rho = \sqrt{3}$. С учетом симметрии тела относительно плоскостей xOy и yOz найдем:

$$\frac{1}{4}V = \iint\limits_{D'} \left(3 - x^2 - z^2\right) dx dz = \iint\limits_{D'} \left(3 - \rho^2\right) \rho d\varphi d\rho =$$

$$= -\frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{\sqrt{3}} \left(3 - \rho^2\right) d\left(3 - \rho^2\right) = -\frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\left(3 - \rho^2\right)^2}{2}\Bigg|_0^{\sqrt{3}} d\varphi = \frac{9}{4}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi = \frac{9\pi}{8},$$

откуда $V = \frac{9\pi}{2}$.

2. ***Площадь.*** Так как двойной интеграл от неотрицательной функции выражает объем прямого цилиндра с основанием D, то при $f(x, y) \equiv 1 \quad \forall (x, y) \in D$ он будет равен объему цилиндра с высотой равной 1. Ясно, что этот объем численно равен площади S плоской области D:

$$S = \iint\limits_D dx dy \quad \text{или} \quad S = \iint\limits_D dS. \qquad (1.16)$$

Формула (1.16) для вычисления площади часто бывает удобнее, чем известная нам формула

$$S = \int\limits_a^b f(x) dx,$$

выражающая площадь криволинейной трапеции, поскольку она применима не только к криволинейной трапеции, но и к любой фигуре, произвольным образом расположенной относительно координатных осей.

Заметим, что если область D правильная (см. например, рис. 1.4), то площадь выразится двукратным интегралом

$$S = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy,$$

откуда получаем известную обобщающую формулу для вычисления площади фигуры с помощью определенного интеграла:

$$S = \int\limits_a^b \left[\varphi_2(x) - \varphi_1(x)\right] dx.$$

ПРИМЕР. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y^2 = 2x + 1, \; x - y - 1 = 0$.

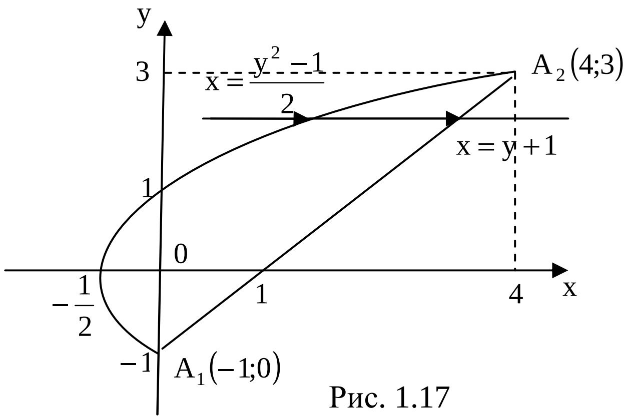

Рис. 1.17

Определим точки пересечения параболы $y^2=2\left(x+\frac{1}{2}\right)$ с прямой $\frac{x}{1}+\frac{y}{-1}=1$ (рис.1.17), их две: $A_1(-1;0)$, $A_2(4;3)$.

Воспользуемся формулой (1.16). При вычислении двойного интеграла удобно выбрать порядок интегрирования согласно формуле (Б). Итак,

$$S=\iint\limits_D dxdy=\left|D\begin{cases}-1\le y\le 3\\ \frac{y^2-1}{2}\le x\le y+1\end{cases}\right|=\int\limits_{-1}^{3}dy\int\limits_{\frac{y^2-1}{2}}^{y+1}dx=\int\limits_{-1}^{3}\left(y+1-\frac{y^2-1}{2}\right)dy=$$

$$=\left[\frac{(y+1)^2}{2}-\frac{y^3}{6}+\frac{y}{2}\right]\Bigg|_{-1}^{3}=\frac{16}{3}.$$

1.1.4.2. Задачи механики

1. ***Масса пластинки***. Рассмотрим на плоскости xOy материальную пластинку, занимающую область D (рис.1.1), по которой распределена масса с плотностью $\gamma=\gamma(x,y)$. Толщину пластинки считаем настолько малой, что изменением плотности по толщине ее можно пренебречь. Если плотность была постоянной $(\gamma=\mathrm{const})$, то масса m всей пластинки определялась бы по известной формуле $m=\gamma\cdot S$, где S – площадь пластинки.

Вычислим массу неоднородной пластинки, предполагая $\gamma(x,y)$ непрерывной функцией. Для этого разобьем область D на частичные области $\Delta S_1, \Delta S_2, \ldots, \Delta S_n$ с площадями $\Delta S_1, \Delta S_2, \ldots, \Delta S_n$ и в каждой из них выберем некоторую точку $P_i(\xi_i,\eta_i)$. Если диаметр области ΔS_i мал, то плотность в точках этой области, в силу непрерывности функции $\gamma(x,y)$, мало отличается от ее значения в точке P_i, поэтому массу m_i пластинки ΔS_i можно считать равной приближенно массе фиктивной пластинки с постоянной плотностью $\gamma(\xi_i,\eta_i)$, т.е. $m_i\approx\gamma(\xi_i,\eta_i)\Delta S_i$. Суммируя по всем областям деления, получим приближенное значение массы m области D:

$$m\approx\sum_{i=1}^{n}\gamma(\xi_i,\eta_i)\Delta S_i\,.$$

За точное значение массы неоднородной пластинки принимается предел, к которому стремится составленная интегральная сумма для функции $\gamma(x, y)$ по области D, когда каждая частичная область S_i стягивается в точку, т.е. $\max \Delta S_i \to 0$. В результате предельного перехода получаем

$$m = \lim_{\substack{\max \Delta S_i \to 0 \\ (n \to \infty)}} \sum_{i=1}^{n} \gamma(\xi_i, \eta_i) \Delta S_i = \iint_D \gamma(x, y) dxdy. \qquad (1.17)$$

2. ***Координаты центра тяжести и статистические моменты пластинки***. Известно, что координаты x_c и y_c центра тяжести $C(x_c, y_c)$ системы материальных точек $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$, … , $P_n(x_n, y_n)$, в которых сосредоточены массы $m_1, m_2, ... m_n$, определяются по формулам

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i m_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}, \quad y_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i m_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}. \qquad (1.18)$$

Найдем координаты центра тяжести плоской неоднородной пластинки D. Разбив область D на части ΔS_i и выбрав в каждой из них точку $P_i(\xi_i, \eta_i)$, будем считать, как и при решении предыдущей задачи, массу m_i элементарной площадки ΔS_i приближенно равной $\gamma(P_i)\Delta S_i$. Если предположить, что каждая из этих масс m_i сосредоточена в одной точке P_i, то получим систему материальных точек, центр тяжести которой вычисляется по формулам (1.18). Тем самым найдены приближенные значения

$$x_c \approx \frac{\sum_{i=1}^{n} \xi_i \gamma(\xi_i, \eta_i) \Delta S_i}{\sum_{i=1}^{n} \gamma(\xi_i, \eta_i) \Delta S_i}, \quad y_c \approx \frac{\sum_{i=1}^{n} \eta_i \gamma(\xi_i, \eta_i) \Delta S_i}{\sum_{i=1}^{n} \gamma(\xi_i, \eta_i) \Delta S_i}$$

координат центра $C(x_c, y_c)$ масс пластинки. Чтобы получить точные значения этих координат, в последних формулах нужно перейти к пределу, неограниченно измельчая разбиение области D.

Тогда стоящие в этих формулах суммы перейдут в соответствующие двойные интегралы. Таким образом получим

$$x_c = \frac{\iint_D x\gamma(x, y) dxdy}{\iint_D \gamma(x, y) dxdy}, \quad y_c = \frac{\iint_D y\gamma(x, y) dxdy}{\iint_D \gamma(x, y) dxdy}. \qquad (1.19)$$

Если пластинка однородна, т.е. $\gamma = \text{const}$, то формулы для координат центра масс приобретают более простой вид

$$x_c = \frac{\iint\limits_D x dxdy}{\iint\limits_D dxdy}, \quad y_c = \frac{ydxdy}{\iint\limits_D dxdy}. \qquad (1.20)$$

Заметим, что выражения

$$M_y = \iint\limits_D x\gamma(x,y)dxdy, \quad M_x = \iint\limits_D y\gamma(x,y)dxdy$$

называют статистическими моментами плоской фигуры D относительно осей Оу и Ох соответственно. С учетом этого замечания и формулы (1.17) последние формулы (1.19), (1.20) можно записать компактно:

$$x_c = \frac{M_y}{m}, \quad y_c = \frac{M_x}{m}.$$

3. ***Моменты инерции пластинки***.

Напомним, моментом инерции I материальной точки P с массой m относительно какой –либо оси (или точки O) называется произведение массы на квадрат ее расстояния r от этой оси (или точки); $I = mr^2$. А момент инерции I системы материальных точек с массами $m_1, m_2, \ldots. m_n$ относительно одной и той же оси (точки) есть сумма моментов инерции отдельных точек этой системы, т.е. $I = \sum\limits_{i=1}^{n} m_i r_i^2$.

Определим момент инерции плоской пластины D (рис. 1.18), имеющей поверхностную плотность распределения масс $\gamma = \gamma(x,y)$ относительно осей координат. Метод составления выражений для моментов инерции пластинки такой же, какой был использован при решении предыдущей задачи. Разбив область D на части ΔS_i и выбрав в каждой из них некоторую точку $P_i(\xi_i, \eta_i)$, заменим данную пластинку системой точек с массами $\gamma(\xi_i, \eta_i)\Delta S_i$. Момент инерции системы точечных масс относительно оси Oy, по определению, равен

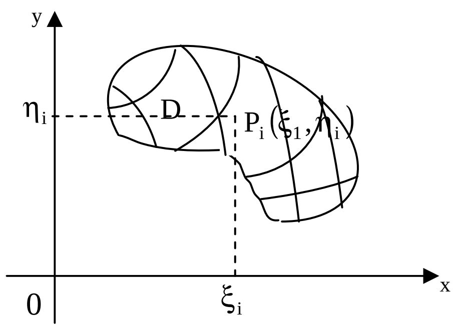

Рис. 1.18

$$\sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 \gamma(\xi_i, \eta_i)\Delta S_i.$$

Момент инерции I_y пластинки D относительно оси Оу определим как предел полученной интегральной суммы для функции $x^2\gamma(x,y)$, когда наибольший из диаметров площадок стремится к нулю $(\max \Delta S_i \to 0)$. Переходя к пределу при указанном условии, получим формулу

$$I_y = \iint\limits_D x^2 \gamma(x,y)dxdy. \qquad (1.21)$$

Аналогично находится момент инерции I_x пластины относительно оси Ох; в результате получим

$$I_x = \iint\limits_D y^2 \gamma(x, y) dxdy. \qquad (1.22)$$

Найдем еще момент инерции I_0 пластинки относительно начала координат. Приняв во внимание, что момент материальной точки $P_i(\xi_i, \eta_i)$ с массой m_i относительно точки $O(0,0)$ равен $m^2(\xi_i^2 + \eta_i^2)$ и воспользовавшись рассуждениями, аналогичными приведенным выше, получим, что

$$I_0 = \iint\limits_D (x^2 + y^2) \gamma(x, y) dxdy,$$

т.е. $I_0 = I_x + I_y$. (1.23)

1.2. ТРОЙНОЙ ИНТЕГРАЛ

1.2.1. Определение тройного интеграла. Его механический смысл. Свойства

Тройной интеграл от функции трех переменных по некоторой ограниченной пространственной области определяется по той же схеме, что и определенный и двойной интегралы. Ввиду полной аналогии между определениями двойного и тройного интегралов, изложение тем будем вести по возможности кратко.

Итак, пусть в области Т, отнесенной к пространственной системе координат и ограниченной замкнутой поверхностью S, задана ограниченная функция $u = f(x, y, z)$. Тело Т с помощью сети поверхностей произвольным образом разобьем на n частей $T_1, T_2, \ldots. T_n$, объемы которых обозначим $\Delta V_1, \Delta V_2, \ldots. \Delta V_n$.

Пусть $\max \Delta V_i$ - наибольший из объемов $\Delta V_1, \Delta V_2, \ldots. \Delta V_n$. В каждой из областей T_i выберем произвольную точку $P_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$, затем вычислим значение функции в ней $f(P_i)$ и умножим его на отрезке элементарной области T_i - объем ΔV_i. Составим сумму вида

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(P_i) \Delta V_i; \qquad (1.24)$$

ее называют интегральной суммой для функции $u = f(x, y, z)$ по области Т.

<u>ОПРЕДЕЛЕНИЕ.</u> Конечный предел интегральной суммы S_n при $\max \Delta V_i \to 0 (n \to \infty)$, если он существует и не зависит ни от способа разбиения области Т на элементарные части, ни от выбора в них точки, называется тройным интегралом от функции $f(x,y,z)$ по области T и обозначается символом $\iiint\limits_T f(P)dV$ или $\iiint\limits_T f(x,y,z)dxdydz$.

Итак, по определению,

$$\iiint\limits_T f(P)dV = \lim_{\substack{\max \Delta V_i \to 0 \\ (n\to\infty)}} \sum_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta V_i. \qquad (1.25)$$

Выясним механический смысл тройного интеграла, если функцию $u = f(x,y,z)$ считать объемной плотностью вещества в области T. Ясно, что если в каждой частичной области T_i плотность постоянна и равна ее значению в точке P_i, выражение $f(P_i)\Delta V_i$ определяет приближенное значение массы всего тела. Предел этой суммы при указанном условии, по определению, есть масса тела. Таким образом, если $u = f(x,y,z)$ есть объемная плотность распределения вещества в области T, то интеграл (1.25) дает массу всего вещества, заключенного в объеме T.

Терминология для тройных интегралов совпадает с соответствующей терминологией для двойных интегралов. Точно так же формулируется и теорема существования тройного интеграла (предоставляем читателю сделать это самостоятельно). Свойства $1^0 - 5^0$ (линейности, аддитивности, монотонности, оценка интеграла по модулю) переносятся на тройные интегралы. Приведем лишь формулировки теорем об оценке и о среднем значении интеграла.

Теорема об оценке интеграла. Если m и M – наименьшее и наибольшее значения функции $f(x,y,z)$ в области T, то значение тройного интеграла от нее удовлетворяет неравенству

$$m \cdot V \le \iiint\limits_T f(x,y,z)dV \le M \cdot V,$$

где V – объем области T.

Теорема о среднем значении интеграла. В области T найдется по крайней мере одна такая точка P, для которой выполняется равенство

$$\iiint\limits_T f(x,y,z)dV = f(P)\cdot V.$$

1.2.2. Вычисление тройного интеграла

Вычисление тройного интеграла, как и двойного, осуществляется путем последовательного интегрирования по каждой из переменных. Мы ограничимся описанием соответствующих правил.

1.2.2.1. Вычисление тройного интеграла в декартовых координатах

Вычисление тройного интеграла в декартовых координатах сводится к последовательному вычислению одного однократного и одного двойного интеграла или к вычислению трех однократных интегралов, т.е. трехкратного интеграла.

Предположим, что область T, ограниченная замкнутой поверхностью σ, такая, что: 1) всякая прямая, параллельная оси Oz, проведенная через внутреннюю точку области T, пересекает поверхность σ - границу данной области – в двух точках; 2) вся область T проектируется на плоскость xOy в правильную (относительно какой-либо координатной оси) область D. Область T обладающую перечисленными свойствами, называют правильной в направлении оси Oz.

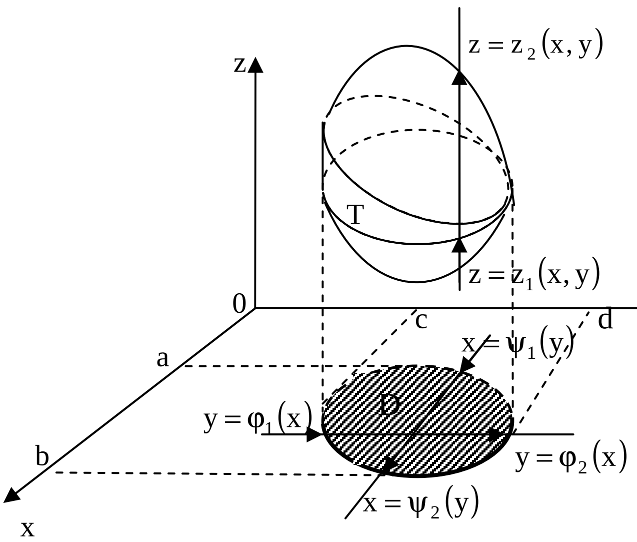

Рис. 1.19

Пусть область интегрирования T, правильная в направлении оси Oz, ограничена снизу поверхностью $z = z_1(x, y)$, сверху поверхностью $z = z_2(x, y)$ $(z_1(x, y) \le z_2(x, y))$, с боков прямым цилиндром (в частном случае боковая поверхность цилиндра может отсутствовать); проекцией тела T на плоскость xOy является двумерная область D (рис. 1.19). Тогда тройной интеграл вычисляется по формуле

$$\iiint\limits_T f(x, y, z) dxdydz = \iint\limits_D dxdy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z) dz. \qquad (1.26)$$

По этой формуле сначала вычисляется определенный интеграл по переменной z (x и y рассматриваются как постоянные), при этом переменная интегрирования изменяется от значения аппликаты $z_1 = z_1(x, y)$ точки входа прямой в область T до значения $z_2 = z_2(x, y)$ точки выхода прямой из области. Результат интегрирования является функцией двух переменных $F(x, y)$. Затем вычисляется двойной интеграл по области D от полученной функции $F(x, y)$.

Записывая, в свою очередь, двойной интеграл $\iint\limits_D F(x, y) dxdy$ через один из повторных, получаем

$$\iiint\limits_T f(x, y, z) dxdydz = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2 x} dy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z) dz \qquad (1.27)$$

или

$$\iiint\limits_T f(x, y, z) dxdydz = \int\limits_c^d dy \int\limits_{\psi_1(x)}^{\psi_2 x} dx \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z) dz. \qquad (1.27')$$

Наиболее простой вид формула (1.27) (или (1.27’)) принимает в случае, когда T есть параллелепипед, ограниченный плоскостями $x = a$, $x = b$, $y = c$, $y = d$, $z = e$, $z = g$:

$$\iiint_T f(x, y, z)dxdydz = \int_a^b dx\int_c^d dy\int_e^g f(x, y, z)dz.$$

Заметим, что если тело T ограничено поверхностями $x = x_1(y, z)$, $x = x_2(y, z)$ и цилиндрической поверхностью с образующими, параллельными Ox, то в формуле (1.26) внутреннее интегрирование следует вести по x, а двойной интеграл брать по проекции тела на плоскость yOz. Аналогичные последуют изменения, если тело ограничено поверхностями $y = y_1(x, z)$, $y = y_2(x, z)$ и цилиндром с образующими, параллельными Oy. (При этом область T должна быть правильной в направлении оси Ox – в первом случае или в направлении оси Oy – во втором).

ПРИМЕР. Вычислить $\iiint_T (x + y + z)dxdydz$, где T – тетраэдр, ограниченный плоскостями $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y + z = 1$.

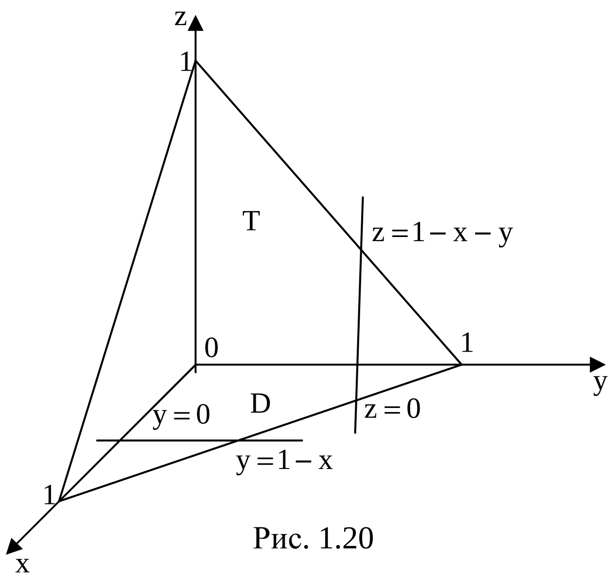

Рис. 1.20

Решение. Правильную в направлении оси Oz область T (рис.1.20) спроектируем на плоскость xOy. Тогда нижней границей области T является часть плоскости $z = 0$, верхней $z = 1 - x - y$; областью D является правильный треугольник, в котором $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1 - x$.

Применив формулу (1.26), получим

$$\iiint_T (x + y + z)dxdydz = \iint_D dxdy\int_0^{1-x-y}(x + y + z)dz = \iint_D \left[(x + y)z + \frac{z^2}{2}\right]\Bigg|_0^{1-x-y} dxdy =$$

$$= \iint_D \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2}(x + y)^2\right]dxdy = \frac{1}{2}\int_0^1 dx\int_0^{1-x}\left[1 - (x + y)^2\right]dy =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \left[y - \frac{(x + y)^3}{3}\right]\Bigg|_0^{1-x} dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \left(\frac{2}{3} - x + \frac{x^3}{3}\right)dx = \frac{1}{8}.$$

В этой задаче область T можно спроектировать на любую другую координатную плоскость (yOz или xOz). Так, данная область является правильной в направлении Ox; точка входа прямой в область находится на плоскости yOz и имеет абсциссу $x = 0$, точка выхода лежит на поверхности $x = 1 - y - z$. Областью D является треугольник плоскости yOz, где $0 \le y \le 1$, $0 \le z \le 1 - y$. Поэтому можно записать:

$$\iiint\limits_T (x + y + z) dxdydz = \iint\limits_D dydz \int\limits_0^{1-y-z} (x + y + z) dx = \int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{1-y} dz \int\limits_0^{1-y-z} (x + y + z) dx =$$

$$= \int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{1-x} \left[(y + z)x + \frac{x^2}{2} \right]\Bigg|_0^{1-y-z} dz = \int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{1-y} \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2}(y + z)^2 \right] dz = \frac{1}{8}.$$

1.2.2.2. Замена переменных в тройном интеграле. Тройной интеграл в цилиндрических и сферических координатах

Если функции

$$x = x(u, v, \omega), \;\; y = y(u, v, \omega), \;\; z = z(u, v, \omega) \qquad (1.28)$$

устанавливают взаимно однозначное соответствие между точками $P(x, y, z)$ области T пространства Oxyz и точками $Q(u, v, \omega)$ области T' пространства $O_1uv\omega$ (при этом тройка чисел u, v, ω, соответствующая точке $P(x, y, z)$ из области T, называется криволинейными координатами этой точки) и функциональный определитель Якоби $I(u, v, \omega)$, иначе Якобиан преобразования (1.28)

$$I(u, v, \omega) = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v & x'_\omega \\ y'_u & y'_v & y'_\omega \\ z'_u & z'_v & z'_\omega \end{vmatrix},$$

не обращается в нуль в области T', то справедлива следующая формула замены переменных в тройном интеграле:

$$\iiint\limits_T f(x, y, z) dxdydz = \iiint\limits_{T} f(x(u, v, \omega), y(u, v, \omega), z(u, v, \omega)) \left| I(u, v, \omega) \right| dudvd\omega. \qquad (1.29)$$

Наиболее используемыми из криволинейных координат являются цилиндрические и сферические.

Цилиндрические координаты. Положение точки P в пространстве определяется полярными координатами (φ, ρ) ее проекции P' на плоскость xOy и ее аппликатой z (рис.1.21). Величины φ, ρ, z называются цилиндрическими координатами точки P. Из рис. 1.21 видно, что декартовы координаты точки связаны с ее цилиндрическими координатами соотношениями

$$x = \rho\cos\varphi, \;\; y = \rho\sin\varphi, \;\; z = z \qquad (*)$$

$$(u = \varphi, \; v = \rho, \; \omega = z).$$

Для выполнения взаимно однозначного соответствия полагают

$$0 \le \varphi < 2\pi, \;\; 0 \le \rho < \infty, \;\; -\infty < z < \infty.$$

Якобиан преобразования (*) равен

$$I(\varphi, \rho, z) = \begin{vmatrix} -\rho\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ \rho\cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -\rho.$$

Преобразование тройного интеграла к цилиндрическим координатам в соответствии с (1.29) осуществляется по формуле

$$\iiint\limits_T f(x, y, z)dxdydz = \iiint\limits_T f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z)\rho d\varphi d\rho dz. \qquad (1.30)$$

Здесь, как правило, внутреннее интегрирование производится по переменной z (см. формулу (1.26)). Цилиндрическими координатами при вычислении тройного интеграла фактически пользуются тогда, когда после интегрирования по z, есть необходимость перехода в получившемся двойном интеграле к полярным координатам.

Сферические координаты. В сферических координатах положение точки P определяется числами φ, θ, ρ; ρ - расстояние точки P от начала координат или длина радиуса – вектора этой точки, φ - угол между проекцией радиуса – вектора точки на плоскость xOy и осью Ox, θ - угол между радиусом-вектором и осью Oz, который отсчитывается от положительного направления оси Oz (рис.1.22). Связь между декартовыми и сферическими координатами точки имеет вид:

$$x = \rho\cos\varphi\sin\theta, \;\; y = \rho\sin\varphi\sin\theta, \;\; z = \rho\cos\theta, \qquad (1.31)$$

$$(u = \varphi, \; v = \theta, \; \omega = \rho)$$

при этом $0 \le \varphi < 2\pi, \;\; 0 \le \theta \le \pi, \;\; 0 \le \rho < \infty.$

Якобиан преобразования (1.31) равен $I(\varphi, \theta, \rho) = -\rho^2\sin\theta$ (проверьте) и переход от прямоугольных координат к сферическим координатам φ, θ, ρ осуществляется по формуле

$$\iiint\limits_T f(x, y, z)dxdydz = \iiint\limits_T f(\rho\cos\varphi\sin\theta, \; \rho\sin\varphi\sin\theta, \; \rho\cos\theta)\rho^2\sin\theta d\varphi d\theta d\rho \qquad (1.32)$$

Переход к сферическим координатам в тройном интеграле целесообразен в следующих случаях:

1^0. Подынтегральная функция $f(x, y, z)$ содержит в своем выражении $(x^2 + y^2 + z^2)$;

2^0. Уравнение поверхности, ограничивающей тело Т содержит $\left(x^2+y^2+z^2\right)$;
3^0. Имеют место в тройном интеграле 1^0 и 2^0.

Применение сферических координат особенно удобно в тех случаях,

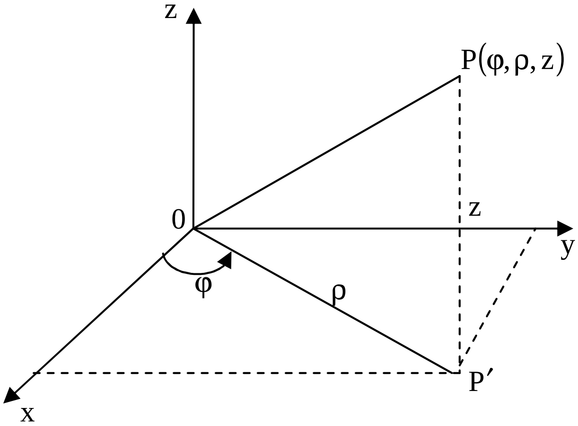

Рис. 1.21

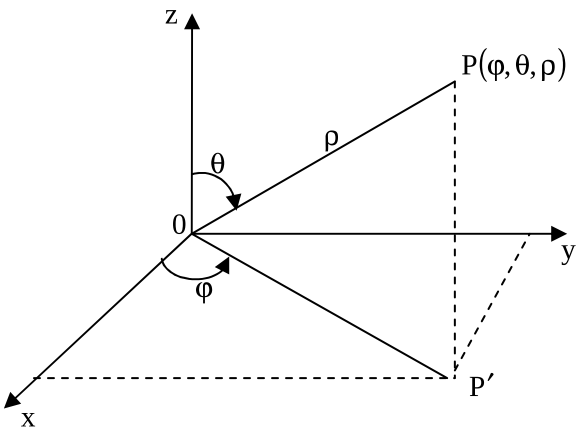

Рис. 1.22

когда область Т – шар с центром в начале координат или шаровое кольцо.

1.2.3. Приложения тройных интегралов к задачам геометрии и механики

1.2.3.1. Вычисление объемов тел

Если Т – произвольное тело, то объем V его можно вычислять по формуле

$$V=\iiint\limits_T dV. \qquad (1.33)$$

Действительно, интегральная сумма для функции $f(x, y, z)\equiv 1$ по области Т выражает объем данного тела, значит предел ее равен искомому объему.

Тройные интегралы в некоторых случаях удобнее использовать для вычисления объемов, чем двойные, так как с их помощью можно записать сразу объем не только цилиндрического тела, но и любого тела.

1.2.3.2. Задачи механики

Естественно, что все механические величины, связанные с распределением массы в пределах некоторого тела (Т), выражаются тройными интегралами, распространенными на область Т. Применение тройных интегралов к вычислению массы, координат центра тяжести, статических моментов и моментов инерции тела основано на том же принципе, что и применение двойных интегралов к вычислению соответствующих механических характеристик – принципе суммирования бесконечно малых элементов.

Если $\gamma = \gamma(x, y, z)$ - объемная плотность, то, как уже было установлено в п.1.2.1, масса m тела, занимающего область T, вычисляется по формуле

$$m = \iiint\limits_T \gamma(x, y, z) dxdydz. \qquad (1.34)$$

Координаты центра тяжести тела выражаются формулами

$$x_c = \frac{\iiint\limits_T x\gamma(x, y, z)dxdydz}{\iiint\limits_T \gamma(x, y, z)dxdydz} = \frac{M_{yz}}{m},$$

$$y_c = \frac{\iiint\limits_T y\gamma(x, y, z)dxdydz}{\iiint\limits_T \gamma(x, y, z)dxdydz} = \frac{M_{xz}}{m}, \qquad (1.35)$$

$$z_c = \frac{\iiint\limits_T z\gamma(x, y, z)dxdydz}{\iiint\limits_T \gamma(x, y, z)dxdydz} = \frac{M_{xy}}{m},$$

которые получают, исходя из формул (1.18), с помощью тех же рассуждений, что и в случае двух измерений. В формулах (1.35) M_{yz}, M_{xz}, M_{xy} - статические моменты тела относительно координатных плоскостей.

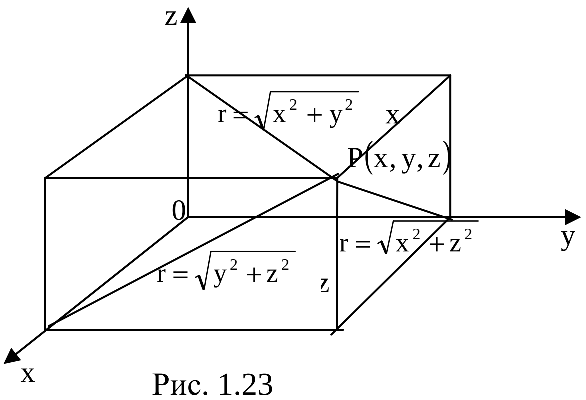

Рис. 1.23

Перейдем к определению моментов инерции тела относительно осей и точки. Замечая, что квадраты расстояний r материальной точки P до осей Ox, Oy, Oz и начала координат соответственно равны $y^2 + z^2$, $x^2 + z^2$, $x^2 + y^2$, $x^2 + y^2 + z^2$ (рис.1.23), аналогично плоскому случаю найдем, что моменты инерции тела I_x, I_y, I_z, I_0 относительно указанных осей и начала координат O выражаются тройными интегралами

$$I_x = \iiint\limits_T (y^2 + z^2)\gamma(x, y, z)dxdydz, \qquad (1.36)$$

$$I_y = \iiint\limits_T (x^2 + z^2)\gamma(x, y, z)dxdydz, \qquad (1.37)$$

$$I_z = \iiint\limits_T (x^2 + y^2)\gamma(x, y, z)dxdydz, \qquad (1.38)$$

$$I_0 = \iiint\limits_T (x^2 + y^2 + z^2)\gamma(x, y, z)dxdydz. \qquad (1.39)$$

Из сопоставления формул (1.39) и (1.36) – (1.38) следует:

$$I_0 = \frac{1}{2}\left(I_x + I_y + I_z\right),$$

т.е. момент инерции тела относительно точки равен полусумме его моментов относительно трех взаимно перпендикулярных осей, проходящих через эту точку.

Если тело однородное, то в формулах (1.34) – (1.39) следует считать $\gamma = \text{const}$.

ПРИМЕР. Найти массу лежащей в первом октанте части T шара радиуса a (рис. 1.24), если плотность $\gamma = x^2 + y^2 + z^2$.

По формуле (1.34) имеем $m = \iiint\limits_T \left(x^2 + y^2 + z^2\right)dxdydz$.

Этот интеграл удобно вычислить, перейдя к сферическим координатам. Согласно формуле (1.34) получаем

$$m = \iiint\limits_T \rho^2 \cdot \rho^2 \sin\theta d\varphi d\theta d\rho = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta d\theta \int_0^a \rho^4 d\rho = \varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \cdot (-\cos\theta)\Big|_o^{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{\rho^5}{5}\Big|_0^a = \frac{\pi a^5}{10}.$$

ПРИМЕР. Найти момент инерции однородного $(\gamma = 1)$ цилиндра с высотой h и радиусом основания a относительно диаметра основания и относительно оси цилиндра, считая, что ось цилиндра направлена по оси Oz.

Поместим начало координат в центр нижнего основания (рис.1.25); уравнение цилиндра будет иметь вид $x^2 + y^2 = a^2$.

Моменты инерции, которые требуется найти, будут равны моментам

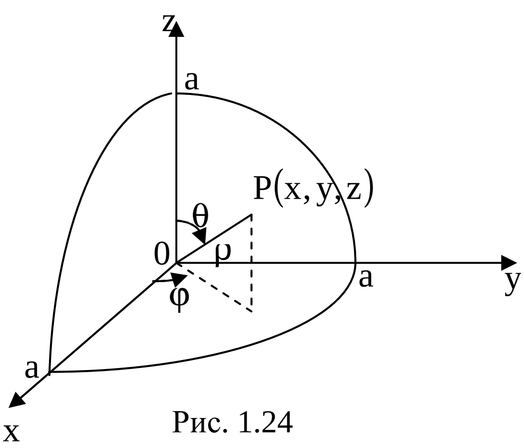

Рис. 1.24

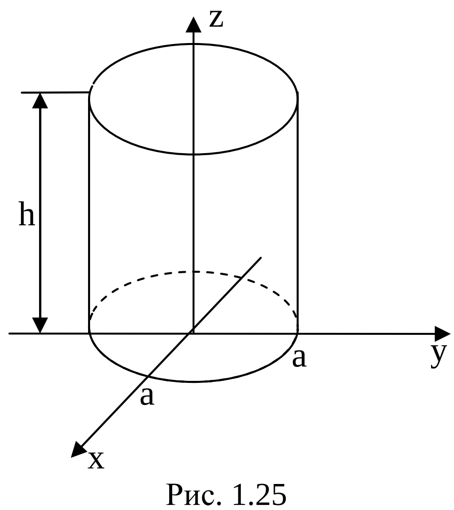

Рис. 1.25

инерции тела относительно оси Ox (или Oy) и оси Oz. Согласно формулам (1.36) и (1.38) имеем

$$I_y = \iiint\limits_T \left(x^2 + z^2\right)dxdydz, \quad I_z = \iiint\limits_T \left(x^2 + y^2\right)dxdydz.$$

Перейдем к цилиндрическим координатам: $x = \rho\cos\varphi,\ \ y = \rho\sin\varphi,\ \ z = z$.

Тогда

$$I_y=\iiint\limits_T\left(\rho^2\cos^2\varphi+z^2\right)\rho d\varphi d\rho dz=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^a\rho d\rho\int\limits_0^h\left(\rho^2\cos^2\varphi+z^2\right)dz=$$

$$=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^a\left(\rho^2\cos^2\varphi\cdot z+\frac{z^3}{3}\right)\Bigg|_0^h\rho d\rho=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^a\left(h\rho^2\cos^2\varphi+\frac{h^3}{3}\right)\rho d\rho=$$

$$=\int\limits_0^{2\pi}\left(h\cos^2\varphi\frac{\rho^4}{4}+\frac{h^3}{3}\cdot\frac{\rho^2}{2}\right)\Bigg|_0^a d\varphi=\int\limits_0^{2\pi}\left(\frac{a^4h}{4}\cos^2\varphi+\frac{a^2h^3}{6}\right)d\varphi=$$

$$=\frac{\pi a^2h\left(4h^2+3a^2\right)}{12}.$$

$$I_z=\iiint\limits_T\rho^2\cdot\rho d\varphi d\rho dz=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^a\rho^3 d\rho\int\limits_0^h dz=\frac{\pi a^2h}{2}.$$

1.3. КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Нахождение массы материальной кривой по ее плотности, вычисление силового поля вдоль некоторого пути и ряд других задач требуют введения так называемых криволинейных интегралов, т.е. интегралов от функций, заданных вдоль кривых.

Рассмотрение различных задач физики и механики, связанных с интегрированием функций вдоль кривых линий, приводит к необходимости введения двух типов криволинейных интегралов – интегралов первого и второго рода.

1.3.1. Криволинейный интеграл первого рода (или по длине дуги)

1.3.1.1. Определение и физический смысл криволинейного интеграла первого рода. Свойства

<u>ОПРЕДЕЛЕНИЕ.</u> Кривая линия L называется гладкой, если в каждой ее точке существует касательная прямая, непрерывно меняющаяся вдоль кривой линии. Кусочно-гладкой кривой называется непрерывная кривая, состоящая из конечного числа гладких кусков кривой линии.

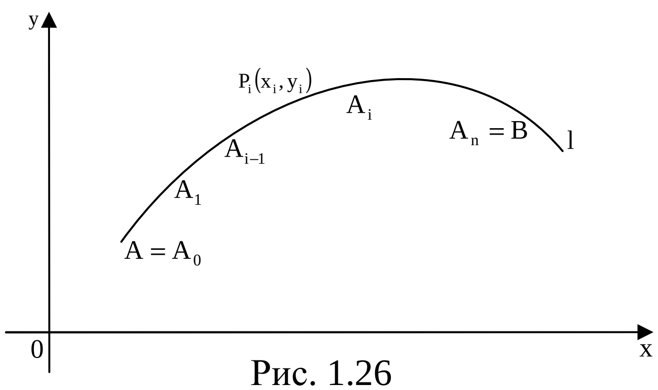

Рис. 1.26

Пусть на кусочно-гладкой кривой L взята дуга $\overset{\smile}{AB}$ (рис. 1.26), вдоль которой определена функция $f(P)=f(x,y)$. Разобьем дугу $\overset{\cup}{AB}$ произвольным образом на n элементарных дуг $A_{i-1}\overset{\cup}{}A_i$ $\left(i=\overline{1,n}\right)$, длины которых обозначим через ΔL_i. Пусть $\max \Delta L_i$ - наибольшая из длин всех элементарных дуг. На элементарной дуге $A_{i-1}\overset{\cup}{}A_i$ выберем произвольную точку $P_i(\xi_i,\eta_i)$, вычислим значение функции в этой точке и умножим его на длину ΔL_i - меру элементарной дуги $A_{i-1}\overset{\cup}{}A_i$. Составим сумму таких произведений по всем элементарным дугам

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta L_i \,. \tag{1.40}$$

Сумму S_n называют интегральной суммой для функции $f(x,y)$ по дуге $\overset{\cup}{AB}$. Каждому способу разбиения дуги на элементарные части и выбору в них точек P_i отвечает определенная интегральная сумма S_n.

<u>**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.**</u> Если при стремлении $\max \Delta L_i$ к нулю, т.е. при неограниченном увеличении числа n элементарных дуг, интегральные суммы (1.40) стремятся к конечному пределу, который не зависит ни от способа разбиения дуги $\overset{\cup}{AB}$ на элементарные части, ни от выбора точки P_i в них, то этот предел называется криволинейным интегралом первого рода от функции $f(P)$ по дуге $\overset{\cup}{AB}$ и обозначается символом

$$\int\limits_{\overset{\cup}{AB}} f(P)dL \quad \text{или} \quad \int\limits_{\overset{\cup}{AB}} f(x,y)dL\,.$$

Таким образом, по определению

$$\int\limits_{\overset{\cup}{AB}} f(P)dL = \lim_{\substack{\max \Delta L_i \to 0 \\ (n\to\infty)}} \sum_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta L_i \,. \tag{1.41}$$

Следует иметь в виду, что в выражении $\int\limits_{\overset{\cup}{AB}} f(x,y)dL$ переменные x и y не независимы, а связаны условием: точка (x,y) лежит на кривой AB.

Приведем без доказательства теорему существования криволинейного интеграла первого рода.

Теорема. Если функция $f(x,y)$ непрерывна вдоль кусочно-гладкой кривой AB, то криволинейный интеграл (1.41) существует.

Интеграл (1.41) в задачах физики и механики численно выражает массу материальной кривой AB, которая распределена вдоль нее с линейной плотностью $\rho = f(P) = f(x,y)$. В самом деле, массу Δm_i дуги $A_{i-1}\overset{\cup}{}A_i$ длины ΔL_i можно принять равной приближенно массе дуги с постоянной плотностью $f(P_i)$, такой, как в точке P_i, т.е. $\Delta m_i \approx f(P_i)\Delta L_i$. Суммируя по всем элементарным дугам найдем приближенное значение массы m:

$$m \approx \sum_{i=1}^{n} \Delta m_i = \sum_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta L_i .$$

За точное значение массы неоднородной дуги AB принимается предел, к которому стремится составленная интегральная сумма для функции $f(P)$ по области AB, когда каждая элементарная дуга стягивается в точку и, следовательно, $\max \Delta L_i \to 0$. Таким образом, в результате предельного перехода получаем

$$m = \lim_{\substack{\max \Delta L_i \to 0 \\ (n\to\infty)}} \sum_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta L_i = \int_{AB} f(x,y)dL . \qquad (1.42)$$

Свойства криволинейных интегралов аналогичны свойствам определенных интегралов. Выполняются свойства линейности, монотонности, аддитивности, оценка по модулю, теорема о среднем. Вместе с тем следует выделить особое свойство:

Теорема. При изменении направления интегрирования криволинейный интеграл первого рода не меняет своего значения, т.е.

$$\int_{\overset{\cup}{AB}} f(P)dL = \int_{\overset{\cup}{BA}} f(P)dL .$$

1.3.1.2. Вычисление криволинейного интеграла первого рода

Вычисление криволинейного интеграла по длине дуги сводится к вычислению определенного интеграла, если воспользоваться выведенными в дифференциальном исчислении формулами для дифференциала длины дуги в декартовых координатах: $dL = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$, если дуга $\overset{\cup}{AB}$ задана в двухмерном пространстве, т.е. на плоскости; $dL = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}$, если дуга $\overset{\cup}{AB}$ задана в трехмерном пространстве. Не останавливаясь на выводе, который предполагает использование определения криволинейного интеграла, приведем формулы сведения его к определенному интегралу.

Для вычисления криволинейного интеграла первого рода пользуются одной из следующих формул:

а) если гладкая кривая AB задана на плоскости параметрическими уравнениями

$x = x(t), \quad y = y(t), \quad \alpha \le t \le \beta$, то $dx = x'(t)\cdot dt$, $dy = y'(t)\cdot dt$,

тогда $dL = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,dt$

и
$$\int_{AB} f(x,y)dL = \int_{\alpha}^{\beta} f(x(t),y(t))\sqrt{x_t'^2 + y_t'^2}\,dt ; \qquad (1.43)$$

б) если гладкая кривая AB задана явным уравнением $y = \varphi(x),\ a \le x \le b$, то $dL = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \cdot dx = \sqrt{1 + (\varphi'(x))^2} \cdot dx$

и
$$\int_{AB} f(x, y) dL = \int_{\alpha}^{\beta} f(x, \varphi(x)) \cdot \sqrt{1 + \varphi'(x)^2}\, dx\,; \qquad (1.44)$$

в) если гладкая кривая AB задана в полярной системе координат уравнением $\rho = \rho(\varphi),\ \ \varphi_1 \le \varphi \le \varphi_2$, то $dL = \sqrt{\rho^2 + \rho'^2} \cdot d\varphi$. Так как формулы, связи декартовой системы координат и полярной: $x = \rho\cos\varphi,\ y = \rho\sin\varphi$, то
$$\int_{AB} f(x, y) dL = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} f(\rho\cos\varphi;\ \rho\sin\varphi) \cdot \sqrt{\rho^2 + \rho'^2}\, d\varphi. \qquad (1.45)$$

Подчеркнем, что в криволинейном интеграле та функция, которую мы интегрируем, не имеет ничего общего с уравнениями кривой, по которой ведется интегрирование.

Сведение криволинейного интеграла к определенному интегралу по идее близко к замене переменной в определенном интеграле. Однако следует иметь в виду одно отличие. После замены переменной в определенном интеграле может случиться, что нижний предел интегрирования оказывается больше верхнего. При вычислении же криволинейного интеграла всегда нижний предел должен быть меньше верхнего. Это объясняется тем, что элемент dL длины дуги должен быть положительным и поэтому, например, в формуле (1.44) должно быть $dx > 0$, а в формуле (1.43) $dt > 0$. Таким образом, при переходе от криволинейного интеграла к определенному переменная, выбранная в качестве основной, должна пробегать промежуток своего изменения в сторону возрастания.

Если линия AB кусочно-гладкая, то ее нужно разбить на отдельные части и интеграл вычислить, согласно свойству аддитивности, как сумму интегралов, взятых по этим частям кривой.

ПРИМЕР. Найти массу дуги $\overset{\cup}{AB}$ цепной линии $y = a\,\mathrm{ch}\frac{x}{a}$ между точками с абсциссами $x_A = 0,\ x_B = a$, если в каждой точке линейная плотность $\rho(x, y) = \frac{a}{y}$.

<u>Решение.</u> Согласно формуле (1.42) имеем $m = \int_{\overset{\cup}{AB}} \frac{a}{y} dL$. Исходя из данного уравнения кривой, преобразуем криволинейный интеграл в определенный с переменной x в соответствии с формулой (1.44):

$y'(x) = \mathrm{sh}\frac{x}{a}$, $\qquad dL = \sqrt{1 + \mathrm{sh}^2\frac{x}{a}}\, dx = \mathrm{ch}\frac{x}{a}\, dx$ (т.к. $\mathrm{ch}^2\alpha - \mathrm{sh}^2\alpha = 1$),

$$m=\int\limits_{\overset{\cup}{AB}}\frac{a}{y}dL=\int\limits_{x_A}^{x_B}\frac{a}{a\,\mathrm{ch}\frac{x}{a}}\,\mathrm{ch}\frac{x}{a}\,dx=\int\limits_0^a dx=a.$$

1.3.1.3. Криволинейный интеграл для пространственного случая

Аналогично определяется и физически интерпретируется криволинейный интеграл первого рода от функции $f(P)=f(x,y,z)$, заданной вдоль пространственной кусочно-гладкой линии AB. Если гладкая кривая AB задана параметрическими уравнениями

$$x=x(t),\qquad y=y(t),\qquad z=z(t),\qquad \alpha\le t\le\beta \quad \text{тогда}$$

$$dx=x'(t)\cdot dt,\qquad dy=y'(t)\cdot dt,\qquad dz=z'(t)\cdot dt,$$

и $dL=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2+(dz)^2}$ или $dL=\sqrt{x_t'^2+y_t'^2+z_t'^2}\cdot dt$

$$\int\limits_{AB}f(P)dL=\int\limits_{AB}f(x,y,z)dL=\int\limits_{\alpha}^{\beta}f[x(t),y(t),z(t)]\sqrt{x_t'^2+y_t'^2+z_t'^2}\,dt. \qquad (1.46)$$

1.3.1.4. Некоторые применения криволинейного интеграла первого рода

Криволинейные интегралы, как и все другие определенные интегралы, служат для вычислении различных геометрических и физических величин.

1. Длина дуги $\overset{\cup}{AB}$ плоской или пространственной линии:

$$L_{\overset{\cup}{AB}}=\int\limits_{\overset{\cup}{AB}}dL.$$

2. Масса материальной дуги $\overset{\cup}{AB}$ $m=\int\limits_{\overset{\cup}{AB}}\rho(P)dL$, где $\rho(P)$ линейная плотность вещества в точке P дуги.

3. Вычисление координат центра тяжести материальной кривой. Пусть масса m распределена вдоль кривой AB с плотностью $\rho=\rho(x,y,z)$. Разбив эту кривую на элементарные части длины ΔL_i и выбрав на каждой из этих частей некоторую точку $P_i(x_i,y_i,z_i)$, можно материальную кривую приближенно рассматривать как систему масс $\rho(P_i)\Delta L_i$, сосредоточенных в точках P_i. Как известно из механики, центр масс системы материальных точек имеет координаты

$$x_C=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\rho(P_i)\Delta L_i}{\sum\limits_{i=1}^{n}\rho(P_i)\Delta L_i},\quad y_C=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}y_i\rho(P_i)\Delta L_i}{\sum\limits_{i=1}^{n}\rho(P_i)\Delta L_i},\quad z_C=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}z_i\rho(P_i)\Delta L_i}{\sum\limits_{i=1}^{n}\rho(P_i)\Delta L_i}.$$

Эти выражения можно считать приближенными значениями координат x_C, y_C, z_C центра масс $C(x_C, y_C, z_C)$ кривой AB. Для получения точных значений этих координат следует перейти к пределу при $\max \Delta L_i \to 0$. В результате предельного перехода получаем

$$x_C = \frac{\int\limits_{AB} x\rho(x,y,z)dL}{m}, \quad y_C = \frac{\int\limits_{AB} y\rho(x,y,z)dL}{m}, \quad z_C = \frac{\int\limits_{AB} z\rho(x,y,z)dL}{m}, \quad (1.47)$$

где $m = \int\limits_{AB} \rho(x,y,z)dL$.

ПРИМЕР. Найти координаты центра тяжести первого полувитка винтовой линии $L: x = a\cos t, \quad y = a\sin t, \quad z = bt$, считая плотность постоянной.

Решение. Применяем формулы (1.47), в которых (т.к. плотность постоянна) можно взять $\rho = 1$. Вычислим криволинейные интегралы, содержащиеся в этих формулах, преобразуя их в определенные интегралы с переменной t согласно формуле (1.46). Первому полувитку отвечает изменение параметра t от 0 до π.

$$m = \int\limits_L dL = \int\limits_0^\pi \sqrt{a^2(-\sin t)^2 + a^2\cos^2 t + b^2}dt = \int\limits_0^\pi \sqrt{a^2 + b^2}dt = \sqrt{a^2 + b^2}\pi,$$

$$I_1 = \int\limits_L xdL = \int\limits_0^\pi a\cos t\sqrt{a^2 + b^2}dt = a\sqrt{a^2 + b^2}\sin t\Big|_0^\pi = 0,$$

$$I_2 = \int\limits_L ydL = \int\limits_0^\pi a\sin t\sqrt{a^2 + b^2}dt = a\sqrt{a^2 + b^2}(-\cos t)\Big|_0^\pi = 2a\sqrt{a^2 + b^2},$$

$$I_3 = \int\limits_L zdL = \int\limits_0^\pi bt\sqrt{a^2 + b^2}dt = b\sqrt{a^2 + b^2}\,\frac{t^2}{2}\Big|_0^\pi = \frac{b\pi^2\sqrt{a^2 + b^2}}{2}.$$

Следовательно, $x_C = \dfrac{I_1}{m} = 0, \quad y_C = \dfrac{I_2}{m} = \dfrac{2a}{\pi}, \quad z_C = \dfrac{I_3}{m} = \dfrac{b\pi}{2}.$

4. Вычисление моментов материальной кривой. Момент инерции системы точечных масс m_i относительно некоторой точки (прямой, плоскости) равен $\sum\limits_{i=1}^n r_i^2 m_i$, где r_i - расстояние i-й точечной массы до этой точки (прямой, плоскости). В частности, момент инерции системы материальных точек относительно начала координат, оси Oz и плоскости xOy соответственно равны

$$I_0 = \sum_{i=1}^n \left(x_i^2 + y_i^2 + z_i^2\right)m_i, \quad I_{0z} = \sum_{i=1}^n \left(x_i^2 + y_i^2\right)m_i, \quad I_{x0y} = \sum_{i=1}^n z_i^2 m_i,$$

где (x_i, y_i, z_i) - координаты точечной массы m_i.

Для получения моментов инерции материальной кривой AB, вдоль которой распределена масса с плотностью $\rho(x,y,z)$, нужно сделать такой же предельный переход, как и в предыдущей задаче. Тогда для моментов инерции массы относительно начала координат, координатных осей и плоскостей получим следующие выражения:

$$\left.\begin{aligned} I_0 &= \int\limits_{\overset{\cup}{AB}} \left(x^2+y^2+z^2\right)\rho(x,y,z)dL, & I_{0x} &= \int\limits_{\overset{\cup}{AB}} \left(y^2+z^2\right)\rho(x,y,z)dL, \\ I_{0y} &= \int\limits_{\overset{\cup}{AB}} \left(x^2+z^2\right)\rho(x,y,z)dL, & I_{0z} &= \int\limits_{\overset{\cup}{Ab}} \left(x^2+y^2\right)\rho(x,y,z)dL, \end{aligned}\right\} \quad (1.48)$$

$$I_{x0y} = \int\limits_{\overset{\cup}{AB}} z^2\rho(x,y,z)dL, \quad I_{x0z} = \int\limits_{\overset{\cup}{AB}} y^2\rho(x,y,z)dL,$$

$$I_{y0z} = \int\limits_{\overset{\cup}{AB}} x^2\rho(x,y,z)dL. \qquad (1.49)$$

Воспользовавшись определением <u>статических моментов</u> системы материальных точек относительно прямой (оси), плоскости, тем же методом можно найти статические моменты материальной кривой. Так, например, статический момент кривой AB относительно плоскости xOy есть

$$M_{x0y} = \int\limits_{\overset{\cup}{Ab}} z\rho(x,y,z)dL,$$

а статические моменты плоской кривой относительно осей Ox и Oy суть

$$M_{0x} = \int\limits_{\overset{\cup}{Ab}} y\rho(x,y,z)dL, \quad M_{0y} = \int\limits_{\overset{\cup}{Ab}} x\rho(x,y,z)dL.$$

ПРИМЕР. Найти моменты инерции относительно координатных осей и начала координат четверти однородной окружности $y = 2\cos t$, $z = 2\sin t$, лежащей в первом квадранте плоскости yOz (рис. 1.27).

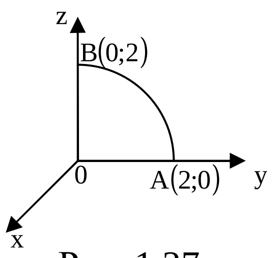

Рис. 1.27

<u>Решение.</u> Воспользуемся полученными формулами моментов инерции в плоском случае (кривая AB расположена в плоскости yOz, т.е. $x = 0$).

В силу одинакового расположения кривой по отношению координатных осей $I_{0y} = I_{0z}$.

По формулам (1.48), где можно принять $\rho = 1$, получаем

$$I_{0y} = I_{0z} = \int\limits_{AB} z^2 dL = \int\limits_{AB} z^2 \cdot \sqrt{(y'_t)^2 + (z'_t)^2}dt =$$

$$= \int\limits_0^{\pi/2} 4\sin^2 t\sqrt{4\sin^2 t + 4\cos^2 t}dt = 8\int\limits_0^{\pi/2} \frac{1-\cos 2t}{2}dt = 4\left(t - \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{\pi/2} =$$

$$= 2\pi,$$

$$I_0 = \int\limits_{AB} \left(y^2+z^2\right)dL = \int\limits_0^{\pi/2} 4\left(\cos^2 t + \sin^2 t\right)\sqrt{4\sin^2 t + 4\cos^2 t}\,dt = 8\int\limits_0^{\pi/2} dt = 4\pi.$$

1.3.2. Криволинейный интеграл второго рода (или по координатам)

1.3.2.1. Задача о работе силового поля. Определение криволинейного интеграла второго рода

Для того, чтобы подойти к понятию нового типа интеграла, начнем с физической задачи. Рассмотрим плоское силовое поле, т.е. некоторую плоскую область D в плоскости xOy, к каждой точке P которой приложена сила $\vec{F}(P)$. Тот факт, что сила $\vec{F}$ зависит от точки ее приложения, записывают в виде: $\vec{F} = \vec{F}(x, y)$. Проекции вектора силы $\vec{F}$ обозначим через X и Y; они также являются функциями переменных x и y. Тогда

$$\vec{F} = X(x, y)\vec{i} + Y(x, y)\vec{j}.$$

Определим работу этого силового поля при перемещении материальной точки вдоль некоторой кривой MN, расположенной в области D (рис. 1.28).

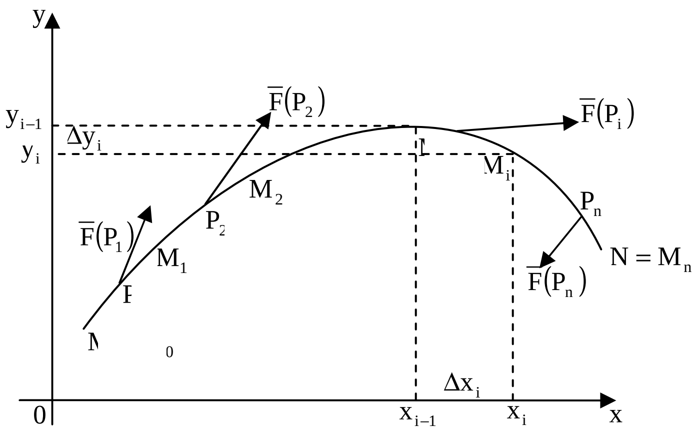

Рис. 1.28

Из физики известно, что если сила $\vec{F}$ постоянна (и по величине и направлению), а путь MN прямолинеен, то соответствующая работа равна произведению величины этой силы на косинус угла между силой и направлением $\overline{MN}$, т.е. работа A равна скалярному произведению векторов $\vec{F}$ и $\overline{MN}$, т.е. $\vec{F} \cdot \overline{MN}$.

Найдем теперь выражение для работы в общем случае, т.е. когда сила $\vec{F}$ переменна, а путь MN криволинеен.

Разобьем произвольным образом дугу $\overset{\cup}{MN}$ на n малых дуг точками $M = M_0$, $M_1, ..., M_i, ..., M_n = N$, длины которых ΔL_i. Впишем в кривую MN ломаную $M_0, M_1, ..., M_n$, заменив каждый криволинейный участок $M_{i-1}\overset{\cup}{M}_i$ прямолинейным вектором перемещения $\overline{M_{i-1}M_i}$. А силу $\vec{F}$, которая, вообще говоря, меняется и по величине и по направлению от точки к точке, условимся считать постоянной вдоль каждого звена ломаной и равной силе, приложенной в точке $P_i(\xi_i, \eta_i)$ дуги $M_{i-1}\overset{\cup}{M}_i$:

$$\vec{F}(P_i) = X(\xi_i, \eta_i)\vec{i} + Y(\xi_i, \eta_i)\vec{j}.$$

Тогда работу силы вдоль дуги $\overset{\cup}{M_{i-1}M_i}$ можно принять приближенно равной работе силы $\vec{F}(P_i)$ вдоль вектора $\overline{M_{i-1}M_i}$, которая, как было сказано, равна скалярному произведению $\overline{F(P_i)} \cdot \overline{M_{i-1}M_i}$.

Проекции вектора $\overline{M_{i-1}M_i}$ на оси координат соответственно равны $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $\Delta y_i = y_i - y_{i-1}$. Следовательно, имеет место представление

$$\overline{M_{i-1}M_i} = \Delta x_i \cdot \vec{i} + \Delta y_i \cdot \vec{j}.$$

Выражая скалярное произведение $\overline{F(P_i)} \cdot \overline{M_{i-1}M_i}$ в координатной форме, получаем

$$\overline{F(P_i)} \cdot \overline{M_{i-1}M_i} = X(\xi_i, \eta_i)\Delta x_i + Y(\xi_i, \eta_i)\Delta y_i.$$

Суммируя эти выражения по всем звеньям ломаной, найдем приближенное значение работы A вдоль кривой MN:

$$A \approx \sum_{i=1}^{n} \vec{F}(P_i) \cdot \overline{M_{i-1}M_i} = \sum_{i=1}^{n} \left[X(\xi_i, \eta_i)\Delta x_i + Y(\xi_i, \eta_i)\Delta y_i\right]. \qquad (1.50)$$

За точное значение работы A принимают предел полученной суммы при стремлении к нулю $\max \Delta L_i$ - максимальной из длин дуг $\overset{\cup}{M_{i-1}M_i}$.

$$A = \lim_{\substack{\max \Delta L_i \to 0 \\ (n \to \infty)}} \sum_{i=1}^{n} \left[X(\xi_i, \eta_i)\Delta x_i + Y(\xi_i, \eta_i)\Delta y_i\right].$$

Таким образом, вычисление работы привело нас к нахождению предела суммы нового вида. К составлению сумм вида (1.50) с последующим переходом к пределу приводит не только задача о работе, поэтому совсем не обязательно всегда считать, что функции $X(x, y)$ и $Y(x, y)$ - проекции сил.

Рассмотрим этот вопрос в общем виде. Пусть на плоскости задана гладкая линия MN. Установим на ней определенное направление движения, которое происходит от M к N. Кривую с установленным на ней направлением движения назовем ориентированной кривой. Пусть на кривой MN заданы две функции $X(x, y)$ и $Y(x, y)$, иначе говоря, задана вектор-функция $\overline{F}(x, y) = X(x, y)\vec{i} + Y(x, y)\vec{j}$. Разобьем эту кривую на n участков точками $M = M_0, M_1, \ldots, M_n = N$ и в каждом из них выберем по произвольной точке $P_i(\xi_i, \eta_i)$ (в частности, эти точки могут совпадать с концами участков). Значения функции в точках P_i будем умножать теперь не на длины частичных дуг ΔL_i, а на их проекции на координатные оси: $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $\Delta y_i = y_i - y_{i-1}$ (рис. 1.28). (Если движение по проекции происходит в сторону увеличения x (или y), то проекцию Δx_i (или Δy_i) части ΔL_i считаем положительной, в противном случае – отрицательной).

Составим сумму вида

$$\sum_{i=1}^{n}\left[X(P_i)\Delta x_i + Y(P_i)\Delta y_i\right]. \qquad (1.51)$$

Эту сумму называют интегральной суммой для вектор-функции $\overline{F}(x,y)$ по линии MN.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Если при стремлении к нулю $\max\Delta L_i$ существует конечный предел интегральной суммы (1.51), не зависящий ни от способа разбиения дуги MN на элементарные части, ни от выбора в каждой из них точки P_i, то этот предел называют криволинейным интегралом второго рода от вектор-функции $\overline{F}(x,y)$ по линии MN и обозначают символом

$$\int\limits_{MN} X(P)dx + Y(P)dy \quad \text{или} \quad \int\limits_{MN} X(x,y)dx + Y(x,y)dy.$$

Итак, по определению

$$\int\limits_{MN} X(x,y)dx + Y(x,y)dy = \lim_{\substack{\max\Delta L_i\to 0\\ (n\to\infty)}}\sum_{i=1}^{n}\left[X(\xi_i,\eta_i)\Delta x_i + Y(\xi_i,\eta_i)\Delta y_i\right]. \quad (1.52)$$

Замечание 1. По традиции для выражения, стоящего слева, скобки не пишутся и предполагается, что интеграл относится ко всей сумме.

Линия MN называется линией или контуром интегрирования, точка M – начальной, точка N – конечной точкой интегрирования.

Замечание 2. Если кривая $L = MN$ замкнутая, то для обозначения интеграла используют символ $\oint\limits_{L} X(x,y)dx + Y(x,y)dy$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Если $Y(x,y)\equiv 0$, то интеграл принимает вид $\int\limits_{MN} X(x,y)dx$ и называется криволинейным интегралом по координате x. Если $X(x,y)\equiv 0$, то $\int\limits_{MN} Y(x,y)dy$ называют криволинейным интегралом по координате y.

Поскольку определяемый нами интеграл (1.52) можно записать в виде суммы двух криволинейных интегралов по координатам x и y

$$\int\limits_{MN} X(x,y)dx + Y(x,y)dy = \int\limits_{MN} X(x,y)dx + \int\limits_{MN} Y(x,y)dy,$$

то его называют еще составным криволинейным интегралом по координатам.

Подынтегральное выражение в левой части последнего равенства есть скалярное произведение вектора $\overline{F} = X\vec{i} + Y\vec{j} = \{X(x,y); Y(x,y)\}$ и дифференциала $\overline{dr} = dx\cdot\vec{i} + dy\cdot\vec{j} = \{dx; dy\}$ радиуса-вектора $\bar{r}$ переменной точки P кривой MN. Поэтому криволинейный интеграл от вектор-функции $\vec{F}$ по кривой MN можно записать в векторной форме: $\int\limits_{MN}\vec{F}\cdot d\vec{r}$.

<u>ОПРЕДЕЛЕНИЕ.</u> Этот интеграл называют также линейным интегралом вектора $\vec{F}(\vec{r})$. А если кривая L - замкнутая, то криволинейный интеграл $\oint\limits_L \vec{F}\cdot d\vec{r}$ называют *циркуляцией* вектора $\vec{F}$ по замкнутому контуру.

Возвращаясь к задаче о работе, можно сказать, что работа силового поля при перемещении материальной точки по кривой MN выражается криволинейным интегралом второго рода

$$A = \int\limits_{MN} X(x,y)dx + Y(x,y)dy, \qquad (1.53)$$

что можно записать в векторной форме так:

$$A = \int\limits_{MN} \vec{F}\cdot d\vec{r}.$$

Таким образом, если вектор $\vec{F}(x,y)$ задает силовое поле, то криволинейный интеграл второго рода выражает работу этого поля вдоль линии MN. В этом состоит простейший *физический смысл* криволинейного интеграла второго рода.

Аналогично определяется криволинейный интеграл второго рода для вектор-функции

$$\vec{F}(x,y,z) = X(x,y,z)\vec{i} + Y(x,y,z)\vec{j} + Z(x,y,z)\vec{k},$$

заданной вдоль пространственной кривой MN, который аналитически записывают так:

$$\int\limits_{MN} X(x,y,z)dx + Y(x,y,z)dy + Z(x,y,z)dz = \int\limits_{MN} \vec{F}\cdot d\vec{r}.$$

1.3.2.2. Существование и вычисление криволинейного интеграла второго рода

Теорема. Пусть кривая MN задана параметрическими уравнениями $x = x(t),\ y = y(t)$, причем функции $x(t),\ y(t)$ непрерывны вместе со своими производными первого порядка на отрезке $t \in [\alpha,\beta]$, где $\alpha = t_M$ и $\beta = t_N$ - значения параметра t, соответствующие точкам M и N. Тогда для всякой вектор-функции

$$\vec{F}(x,y) = X(x,y)\vec{i} + Y(x,y)\vec{j},$$

непрерывной вдоль кривой MN, существует криволинейный интеграл и имеет место равенство

$$\int\limits_{MN} X(x,y)dx + Y(x,y)dy = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \{X[x(t),y(t)]x'(t) + Y[x(t),y(t)]y'(t)\}dt. \qquad (1.54)$$

<u>Доказательство.</u> Остановимся на втором утверждении теоремы. Покажем, что вычисление криволинейного интеграла второго рода сводится к вычислению определенного интеграла по формуле (1.54).

Разделим дугу MN на элементарные части длиной ΔL_i точками $M = M_0, M_1, ..., M_n = N$, имеющими следующие координаты:

$$M_0(x_0 = x(t_0),\ y_0 = y(t_0)),\ M_1(x_1 = x(t_1),\ y_1 = y(t_1)), \dots$$

причем $t_0 = \alpha;\ \ t_n = \beta$. Возьмем произвольным образом точку $P_i(\xi_i, \eta_i)$ на каждой из элементарных дуг $\overset{\cup}{M_{i-1}M_i}$.

По определению для криволинейного интеграла по координате x имеем

$$\int_{MN} X(x, y)dx = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} X(\xi_i, \eta_i)\Delta x_i, \qquad (1.55)$$

где $\Delta x_i = x_i - x_{i-1} = x(t_i) - x(t_{i-1})$, λ - наибольшее из Δx_i. Последнюю разность преобразуем по формуле Лагранжа

$$\Delta x_i = x(t_i) - x(t_{i-1}) = x'(\tau_i)\Delta t_i,$$

где $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$ и $t_{i-1} < \tau_i < t_i$. Так как точку $P_i(\xi_i, \eta_i)$ на дуге $\overset{\cup}{M_{i-1}M_i}$ выбрали произвольным образом, то выберем ее так, чтобы ее координаты соответствовали значению параметра $\tau_i : x_i = x(\tau_i),\ y_i = y(\tau_i)$. Подставляя найденные значения x_i, y_i, Δx_i в формулу (1.55) и учитывая, что при стремлении к нулю длин дуг $\overset{\cup}{M_{i-1}M_i}$ $\Delta x_i \to 0$, следовательно, $\Delta t_i \to 0$, получим

$$\int_{MN} X(x, y)dx = \lim_{\Delta t_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} X[x(\tau_i), y(\tau_i)]x'(\tau_i)\Delta t_i.$$

Сумма, стоящая в правой части последнего равенства, является интегральной суммой для непрерывной функции одной переменной t: $X[x(t), y(t)]x'(t)$, заданной на отрезке $[\alpha, \beta]$. Ее предел равен определенному интегралу. Таким образом, имеем

$$\int_{MN} X(x, y)dx = \int_{\alpha}^{\beta} X[x(t), y(t)]x'(t)dt.$$

Аналогично рассуждая, найдем

$$\int_{MN} Y(x, y)dy = \int_{\alpha}^{\beta} Y[x(t), y(t)]y'(t)dt.$$

Складывая почленно эти два равенства, получим

$$\int_{MN} X(x, y)dx + Y(x, y)dy = \int_{\alpha}^{\beta} \{X[x(t), y(t)]x'(t) + Y[x(t), y(t)]y'(t)\}dt.$$

Итак, для того, чтобы вычислить криволинейный интеграл по дуге линии $x = x(t),\ y = y(t)$, нужно в подынтегральной выражении заменить x, y, dx, dy их выражениями через t и dt и вычислить получившийся определенный интеграл по интервалу изменения параметра t.

Сформулированная теорема обобщается аналогичным образом на пространственный случай, когда линия MN задана уравнениями

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t), \quad \alpha \le t \le \beta .$$

В этом случае имеет место равенство

$$\int\limits_{MN} X(x,y,z)dx + Y(x,y,z)dy + Z(x,y,z)dz =$$

$$= \int\limits_{\alpha}^{\beta} \{X[x(t),y(t),z(t)]x'(t) + Y[x(t),y(t),z(t)]y'(t) + Z[x(t),y(t),z(t)]z'(t)\}dt \qquad (1.56)$$

Рассмотрим важные частные случаи формулы (1.54).

Если кривая MN задана уравнением $y = y(x)$, то формула (1.54), сводящая криволинейный интеграл к определенному, принимает вид

$$\int\limits_{MN} X(x,y)dx + Y(x,y)dy = \int\limits_{x_M}^{x_N} \{X[x,y(x)] + Y[x,y(x)]y'(x)\}dx, \qquad (1.57)$$

где $x = x_M$ отвечает начальной точке M кривой, а $x = x_N$ - ее конечной точке N. Если, в частности, кривая MN – отрезок горизонтальной прямой $y = y_0$ (рис. 1.29а), то вдоль него $y' \equiv 0$ и

$$\int\limits_{MN} X(x,y)dx + Y(x,y)dy = \int\limits_{x_M}^{x_N} X(x,y_0)dx .$$

Если кривая MN задана уравнением $x = x(y)$, где y пробегает отрезок $[y_M, y_N]$, то имеет место

$$\int\limits_{MN} X(x,y)dx + Y(x,y)dy = \int\limits_{y_M}^{y_N} \{X[x(y),y]x'(y) + Y[x(y),y]\}dy. \qquad (1.58)$$

В частности, когда MN – отрезок вертикальной прямой $x = x_0$ (рис. 1.29б), то $x'(y) \equiv 0$ и

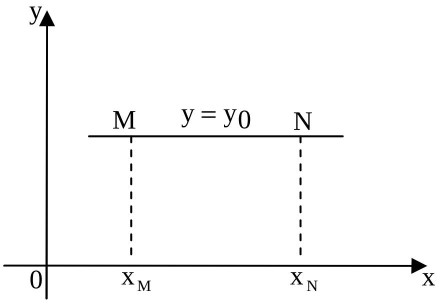

Рис. 1.29а

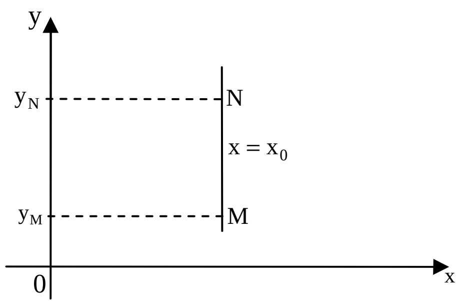

Рис. 1.29б

$$\int\limits_{MN} X(x,y)dx + Y(x,y)dy = \int\limits_{y_M}^{y_N} Y(x_0,y)dy .$$

Замечание 1. Определенный интеграл является частным случаем криволинейного интеграла по координате, у которого линией интегрирования служит прямолинейный отрезок оси координат.

Замечание 2. В случае замкнутого контура интегрирования в формулах (1.54), (1.56), (1.57) условимся брать направление движения по кривой L так, чтобы область, ограниченная этой кривой, оставалась слева (рис. 1.30). Такое направление интегрирования называют положительным. Перемещение в противоположном направлении называют отрицательным.

Криволинейный интеграл второго рода, наряду с теми свойствами, которые аналогичны свойствам интеграла первого рода, обладает следующим отличительным свойством:

при изменении направления пути интегрирования криволинейный интеграл изменяет свой знак на противоположный, т.е.

$$\int\limits_{MN} = -\int\limits_{NM} \quad \text{и} \quad \oint\limits_{L^+} = -\oint\limits_{L^-}$$

(здесь L^+ - замкнутый контур, обходимый в положительном направлении, L^- - контур, обходимый в отрицательном направлении).

ПРИМЕР 1. Вычислить $\int\limits_L y^2dx + x^2dy$, если в качестве пути интегрирования L берется одна из следующих линий, соединяющих точки $O(0;0)$ и $B(1;1)$:

а) отрезок прямой $y = x$;

б) дуга параболы $x = y^2$;

в) ломаная OABO, где $A(1;0)$ (рис. 1.31).

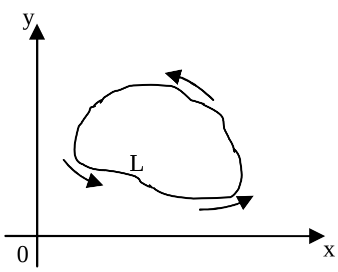

Рис. 1.30

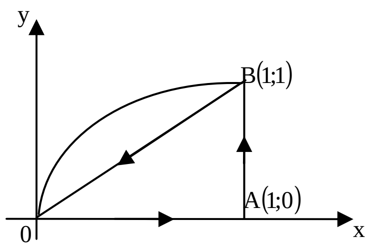

Рис. 1.31

<u>Решение:</u> а) из уравнения линии OB $y = x$ найдем $dy = dx$

Используя формулу (1.57), получим

$$\int\limits_{OB} y^2dx + x^2dy = \int\limits_{x_O}^{x_B} \left(x^2 + x^2\right)dx =$$

$$= 2\int\limits_0^1 x^2dx = 2\cdot\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1 = \frac{2}{3}.$$

б) воспользуемся формулой (1.58), выбрав в качестве переменной интегрирования в определенном интеграле переменную y. Из уравнения кривой OB $x = y^2$ находим $dx = 2ydy$; при движении от точки O к точке B y меняется в пределах от 0 до 1. Следовательно,

$$\int\limits_{\stackrel{\cup}{OB}} y^2dx + x^2dy = \int\limits_{y_O}^{y_B} \left(y^2 \cdot 2y + y^4\right)dy = \left(\frac{y^4}{2} + \frac{y^5}{5}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{7}{10};$$

в) контур интегрирования разбиваем на три участка OA, AB, BO, обходя его против часовой стрелки, т.е. в положительном направлении:

$$\oint\limits_{L^+} = \int\limits_{OA} + \int\limits_{AB} + \int\limits_{BO} .$$

Вдоль OA имеем $y = 0,\ dy = 0,\ 0 \le x \le 1$, так что $\int\limits_{OA} y^2dx + x^2dy = 0$.

Вдоль AB имеем $x = 1,\ dx = 0,\ 0 \le x \le 1$, поэтому

$$\int\limits_{AB} y^2dx + x^2dy = \int\limits_{y_A}^{y_B} dy = \int\limits_0^1 dy = y\Big|_0^1 = 1.$$

Вдоль BO имеем $y = x,\ dy = dx$ и

$$\int\limits_{BO} y^2dx + x^2dy = \int\limits_{y_B}^{y_O} \left(x^2 + y^2\right)dx = \int\limits_1^0 2x^2dx = 2 \cdot \frac{x^3}{3}\Bigg|_1^0 = 0 - \frac{2}{3} = -\frac{2}{3}.$$

Следовательно, $\oint\limits_L y^2dx + x^2dy = 0 + 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$.

Сравнивая результаты, полученные в пунктах а) и б), замечаем, что хотя начальная и конечная точки пути интегрирования были одни и те же, получены разные значения интеграла. Это показывает, что криволинейный интеграл зависит не только от начальной и конечной точек интегрирования, но и от линии, их соединяющей. Подробно этот вопрос будет рассмотрен позже.

ПРИМЕР 2. Вычислить работу силы $\vec{F} = -y\vec{i} + x\vec{j} + z^2\vec{k}$ вдоль первого витка винтовой линии

$L: x = a\cos t,\ y = a\sin t,\ z = bt,\ 0 \le t \le 2\pi.$

<u>Решение.</u> Используя формулы (1.53), (1.56) и замечая, что $x'_t = -a\sin t$, $y'_t = a\cos t$, $z'_t = b$, получим

$$A = \int\limits_L -ydx + xdy + z^2dz = \int\limits_0^{2\pi} \left[-a\sin t(-a\sin t) + a\cos t \cdot a\cos t + b^2t^2 \cdot b\right]dt =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} \left(a^2 + b^3t^2\right)dt = \left(a^2t + b^3\frac{t^3}{3}\right)\Bigg|_0^{2\pi} = a^2 \cdot 2\pi + \frac{b^3(2\pi)^3}{3}.$$

1.3.2.3. Связь между криволинейными интегралами первого и второго рода

Пусть на кривой L установлено направление движения. Взяв точку P на этой кривой, проведем касательную к линии L в точке P и установим на касательной направление, соответствующее направлению движения по кривой. Отложим по касательной в установленном направлении дифференциал дуги dL, получим вектор $d\vec{\tau}$ (рис. 1.32), проекциями которого служат дифференциалы dx, dy, dz координат x, y и z. Обозначим через $\alpha(P)$, $\beta(P)$, $\gamma(P)$ углы, образованные касательным вектором $d\vec{\tau}$ с осями координат Ox, Oy, Oz. Эти углы есть функции от точки P. Напомним формулы, по которым определяются проекции вектора на ось:

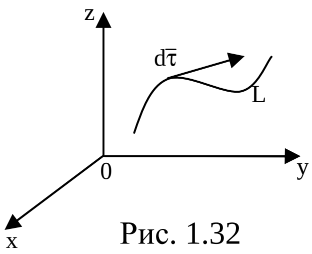

Рис. 1.32

$$dx = |d\vec{\tau}|\cos\alpha(P) = dL\cdot\cos\alpha(P),$$
$$dy = dL\cdot\cos\beta(P),$$
$$dz = dL\cdot\cos\gamma(P).$$

Поэтому составной криволинейный интеграл второго рода может быть заменен интегралом первого роды по формуле

$$\int\limits_l Xdx + Ydy + Zdz = \int\limits_L \left(X\cos\alpha(P) + Y\cos\beta(P) + Z\cos\gamma(P)\right)dl.$$

1.3.2.4. Формула Грина

Пусть D - плоская область, ограниченная линией L. В замкнутой области $\vec{D}$ заданы функции $X(x, y)$ и $Y(x, y)$, непрерывные вместе со своими частными производными $\dfrac{\partial X(x, y)}{\partial y}$, $\dfrac{\partial Y(x, y)}{\partial x}$. Тогда справедлива формула, называемая формулой Грина:

$$\iint\limits_D \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right)dxdy = \oint\limits_L X(x, y)dx + Y(x, y)dy, \qquad (1.59)$$

где замкнутый контур L проходит в положительном направлении, т.е. при движении по контуру область D остается слева.

Формула Грина, как, впрочем, и другие формулы, в известном смысле сходные с ней, которые мы будем рассматривать в дальнейшем, весьма полезна. Она позволяет заменять анализ одного явления, происходящего в области (двойной интеграл), анализом другого явления, происходящего только на границе области (криволинейный интеграл).

Выведем формулу (1.59). Пусть отнесенная к плоскости xOy область D правильна как в направлении оси Ox, так и в направлении оси Oy. Для определенности предположим, что граница L состоит из двух дуг AMB и

ANB, заданных соответственно уравнениями $y = y_1(x)$, $y = y_2(x)$, причем $a \le x \le b$ (рис. 1.33).

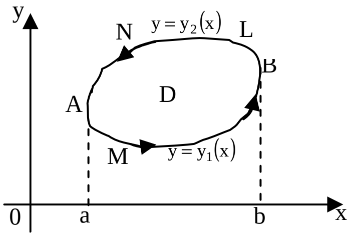

Рис. 1.33

Рассмотрим сначала двойной интеграл $\iint\limits_D \frac{\partial X}{\partial y} dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial X}{\partial y} dy$.

Так как $X = X(x, y)$ при постоянном x есть одна из первообразных для $\frac{\partial X}{\partial y}$, то

$$\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial X}{\partial y} dy = X(x, y)\Big|_{y_1(x)}^{y_2(x)} = X(x, y_2(x)) - X(x, y_1(x))$$

.

Поэтому

$$\iint\limits_D \frac{\partial X}{\partial y} dxdy = \int\limits_a^b [X(x, y_2(x)) - X(x, y_1(x))]dx =$$

$$= \int\limits_a^b X(x, y_2(x))dx - \int\limits_a^b X(x, y_1(x))dx.$$

Каждый из этих двух определенных интегралов можно рассматривать как криволинейный интеграл, взятый по соответствующей дуге (см. формулу (1.57), а именно:

$$\int\limits_a^b X(x, y_2(x))dx = \int\limits_{ANB} X(x, y)dx, \quad \int\limits_a^b X(x, y_1(x))dx = \int\limits_{AMB} X(x, y)dx.$$

Следовательно,

$$\iint\limits_D \frac{\partial X}{\partial y} dxdy = \int\limits_{ANB} X(x, y)dx - \int\limits_{AMB} X(x, y)dx.$$

Но

$$\int\limits_{ANB} X(x, y)dx = -\int\limits_{BNA} X(x, y)dx,$$

поэтому

$$\iint\limits_D \frac{\partial X}{\partial y} dxdy = -\int\limits_{BNA} X(x, y)dx - \int\limits_{AMB} X(x, y)dx.$$

Так как дуги BNA и AMB дают в совокупности границу L, проходимую в положительном направлении, то, воспользовавшись свойством аддитивности, получаем

$$\iint\limits_D \frac{\partial X}{\partial y} dxdy = -\oint\limits_L X(x, y)dx. \qquad (1.60)$$

Аналогично устанавливается формула

$$\iint_D \frac{\partial Y}{\partial x} dxdy = -\oint_L Y(x,y)dy. \qquad (1.61)$$

Вычитая (1.61) из (1.60), получаем

$$\iint_D \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right) dxdy = \oint_L Xdx + Ydy.$$

Формула Грина справедлива для любой области, которую можно разбить на правильные области.

1.3.2.5. Условия независимости интеграла от пути интегрирования

Рассматривая в п.1.3.2.2 пример 1, мы обратили внимание на то, что значение криволинейного интеграла второго рода зависит от пути интегрирования, т.е. зависит от вида линии, соединяющей начальную и конечную точку пути. Для различных приложений оказывается важным вопрос: при каких условиях значение интеграла не зависит от пути, по которому производится интегрирование и, следовательно, зависит только от положения начальной и конечной точек пути интегрирования.

Для решения поставленной задачи докажем простое вспомогательное предложение, которое позволит заменить ее другой задачей: при каких условиях интеграл по замкнутому контуру равен нулю?

ЛЕММА. Пусть функции $X(x,y)$ и $Y(x,y)$ определены и непрерывны вместе со своими частными производными $\frac{\partial X(x,y)}{\partial y}$ и $\frac{\partial Y(x,y)}{\partial x}$ в замкнутой ограниченной односвязной области D. Для того чтобы криволинейный интеграл не зависел от линии интегрирования, необходимо и достаточно, чтобы этот интеграл, взятый по любому замкнутому контуру, был равен нулю.

Напомним, что область D (открытая или замкнутая) называется односвязной, если для любого замкнутого контура, лежащего в этой области, ограниченная им часть плоскости целиком принадлежит области D.

Доказательство. Необходимость. Пусть интеграл

$$\oint_L X(x,y)dx + Y(x.y)dy$$

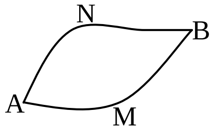

Рис. 1.34

не зависит от пути интегрирования. Покажем, что он равен нулю по любому замкнутому контуру. Рассмотрим две произвольные линии AMB и ANB, лежащие в области D и соединяющие данные точки A и B (рис. 1.34) .Так как по условию интеграл по линии AMB равен интегралу по линии ANB:

$$\int_{AMB} X(x,y)dx + Y(x,y)dy = \int_{ANB} X(x,y)dx + Y(x,y)dy, \qquad (1.62)$$

то имеем

$$\int\limits_{AMB} Xdx + Ydy - \int\limits_{ANB} Xdx + Ydy = 0.$$

На основании свойств криволинейного интеграла имеем

$$\int\limits_{AMB} Xdx + Ydy + \int\limits_{BNA} Xdx + Ydy = 0.$$

Следовательно,

$$\oint\limits_{L} Xdx + Ydy = 0, \qquad (1.63)$$

где $L \equiv AMBNA$.

Действительно, если криволинейный интеграл не зависит от формы кривой, соединяющей точки А и В, а зависит только от положения этих точек, то интеграл по любому замкнутому контуру равен нулю.

Достаточность. Пусть интеграл по любому замкнутому контуру $L \equiv AMBNA$ равен нулю, т.е.

$$\oint\limits_{L} Xdx + Ydy = 0.$$

Но

$$\oint\limits_{L} Xdx + Ydy = \int\limits_{AMB} Xdx + Ydy + \int\limits_{BNA} Xdx + Ydy =$$

$$= \int\limits_{AMB} Xdx + Ydy - \int\limits_{ANB} Xdx + Ydy.$$

Следовательно,

$$\int\limits_{AMB} Xdx + Ydy = \int\limits_{ANB} Xdx + Ydy.$$

Таким образом, если криволинейный интеграл по любому замкнутому контуру равен нулю, то этот интеграл не зависит от формы кривой, соединяющей две любые точки А и В, а зависит только от положения этих точек.

Итак, из равенства (1.62) следует выполнимость равенства (1.63) и, наоборот, из (1.63) следует (1.62).

А теперь перейдем к рассмотрению вопроса: при каких условиях криволинейный интеграл по замкнутому контуру равен нулю? Ответ на него дает следующая теорема.

Теорема. Пусть в некоторой замкнутой ограниченной односвязной области D функции $X(x, y)$, $Y(x, y)$ определены и непрерывны вместе со своими частными производными $\dfrac{\partial X(x, y)}{\partial y}$; $\dfrac{\partial Y(x, y)}{\partial x}$. Тогда, для того чтобы криволинейный интеграл по замкнутому контуру L, лежащему в этой области, был равен нулю, т.е. выполнялось равенство (1.63)

$$\oint\limits_{L} Xdx + Ydy = 0,$$

необходимо и достаточно выполнение равенства

$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x} \qquad (1.64)$$

во всех точках области D.

<u>Доказательство</u>. Достаточность. Возьмем произвольный замкнутый контур $L \subset D$ и к интегралу по этому контуру применим формулу Грина

$$\oint_L X dx + Y dy = \iint_D \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right) dx dy.$$

Так как по условию $\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x}$, то двойной интеграл обращается в ноль и, следовательно, $\oint_L X dx + Y dy = 0$.

Необходимость. Следует доказать, что выполнение (1.63) влечет выполнение (1.64). Предположим противное: условие (1.64) не выполняется, т.е. $\frac{\partial Y}{\partial x} \neq \frac{\partial X}{\partial y}$ хотя бы в одной точке $M(x_0, y_0)$ из области D. Пусть, например,

$$\left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right)_M > 0.$$

В силу непрерывности частных производных их разность, как функция непрерывная, будет положительной и в некоторой достаточно малой области D^* окрестности точки M, т.е. выполняется $\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} > 0$.

Двойной интеграл по области D^* от положительной функции в силу известного свойства интеграла также будет иметь положительное значение

$$\iint_{D^*} \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right) dx dy > 0.$$

Но по формуле Грина

$$\iint_{D^*} \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right) dx dy = \oint_{L^*} X dx + Y dy,$$

где L^* - граница области D^*. По предположению криволинейный интеграл по любому замкнутому контуру равен нулю, значит,

$$\oint_{L^*} X dx + Y dy = 0.$$

Последнее же неравенство противоречит этому условию. А это значит, что предположение $\frac{\partial Y}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial y}\neq 0$ хотя бы в одной точке было неверным. Следовательно $\frac{\partial Y}{\partial x}=\frac{\partial X}{\partial y}$ во всех точках области D. Теорема доказана.

Полезно рассмотреть связь вопроса независимости интеграла от пути интегрирования с условием полного дифференциала.

Напомним: выражение

$$X(x,y)dx+Y(x,y)dy$$

можно рассматривать как полный дифференциал некоторой функции $u(x,y)$, т.е. $du=X(x,y)dx+Y(x,y)dy$.

Теорема. При прежних предположениях относительно функций $X(x,y)$ и $Y(x,y)$ для того, чтобы выражение $Xdx+Ydy$ было полным дифференциалом, необходимо и достаточно, выполнение условия $\frac{\partial Y}{\partial x}=\frac{\partial X}{\partial y}$.

Сопоставляя рассмотренные лемму и две теоремы, можно теперь вывести

<u>*Следствие.*</u> При сделанных ранее предположениях относительно функций X и Y, для того чтобы интеграл

$$\int_L Xdx+Ydy$$

не зависел от пути интегрирования (а интеграл по замкнутому контуру равнялся нулю), необходимо и достаточно, чтобы <u>подынтегральное выражение было полным дифференциалом.</u>

Приведенные утверждения можно сформулировать в виде обобщающей теоремы.

Теорема. Пусть функции $X(x,y)$, $Y(x,y)$ определены и непрерывны вместе со своими частными производными $\frac{\partial X}{\partial y}$ и $\frac{\partial Y}{\partial x}$ в замкнутой ограниченной односвязной области D. Тогда выполнение одного из следующих четырех утверждений влечет выполнение остальных трех.

1. Криволинейный интеграл $\int_{AB} Xdx+Ydy$ не зависит от линии интегрирования, соединяющей две данные точки.
2. Криволинейный интеграл $\oint_L Xdx+Ydy$, взятый по любому замкнутому контуру, целиком лежащему в области D, равен нулю.
3. Выражение $Xdx+Ydy$ является полным дифференциалом $du=Xdx+Ydy$ некоторой функции $u(x,y)$.
4. Во всех точках области D выполняется равенство

$$\frac{\partial X}{\partial y}=\frac{\partial Y}{\partial x}.$$

Связь равносильных между собой утверждений 1-4 можно изобразить схемой:

$$1.\to 2.\to 3.\to 4.\to 1.$$

Следствие. Из первых трех высказываний следует, что

$$\int\limits_{A(x_1,y_1)}^{B(x_2,y_2)} Xdx+Ydy=\int\limits_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)} du(x,y)=u(x_2,y_2)-u(x_1,y_1).$$

Эту формулу естественно называть обобщенной формулой Ньютона-Лейбница. Она будет весьма полезной в теории поля, в частности, при вычислении работы потенциальной силы.

ПРИМЕР. Найти $I=\int\limits_{(1;2)}^{(3;4)} ydx+xdy$.

Когда найдена функция $u(x,y)$ - первообразная для подынтегрального выражения $Xdx+Ydy$, значение криволинейного интеграла между любыми двумя точками легко вычисляется по обобщенной формуле Ньютона-Лейбница.

Легко видеть, что $u(x,y)=x\cdot y$, т.к. $ydx+xdy=d(xy)$, поэтому

$$I=\int\limits_{(1;2)}^{(3;4)} d(xy)=xy\Big|_{(1;2)}^{(3;4)}=3\cdot 4-1\cdot 2=10.$$

1.3.2.6. Вычисление площади с помощью криволинейного интеграла второго рода

В п.1.3.2.1 было установлено, что работа силового поля при перемещении материальной точки вдоль кривой L выражается криволинейным интегралом второго рода по этой кривой. Применение криволинейного интеграла второго рода к решению физических задач будет изложено в теории поля.

Покажем, что криволинейный интеграл может быть использован для вычисления площади плоской фигуры.

Пусть D - некоторая область (правильная) с границей L и S - площадь этой области.

Рассмотрим криволинейный интеграл $\oint\limits_L xdy$.

Применив к нему формулу Грина (1.59), где $X(x,y)=0$, $Y(x,y)=x$, $\frac{\partial X}{\partial y}=0$, $\frac{\partial Y}{\partial x}=1$, получим

$$\oint\limits_L xdy=\iint\limits_D dxdy=S.$$

Аналогично получается другая формула

$$S = -\oint_L y dx.$$

Можно получить иные формулы. Для этого достаточно выбрать функции $X(x, y)$ и $Y(x, y)$ такими, чтобы они удовлетворяли условию

$$\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} = 1.$$

Так, если в интеграле $\oint_L X dx + Y dy$ положить $X = -\frac{1}{2} y$, $Y = \frac{1}{2} x$, то $\frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{1}{2}$, $\frac{\partial X}{\partial y} = -\frac{1}{2}$ и

$$\oint_L = \iint_D \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right) dxdy = \iint_D dxdy = S.$$

Следовательно,

$$S = \frac{1}{2} \oint_L x dy - y dx. \qquad (1.65)$$

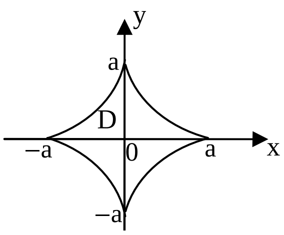

Рис. 1.35

Формула (1.65) отличается от предыдущих двух симметричностью формы.

ПРИМЕР. Вычислить площадь области, ограниченной астроидой L: $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$ (рис. 1.35). Применяя формулу (1.65), получим

$$S = \frac{1}{2} \oint_L x dy - y dx = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left[a\cos^3 t \left(3a\sin^2 t \cos t \right) - a\sin^3 t \left(-3a\cos^2 t \sin t \right) \right] dt =$$

$$= \frac{3a^2}{2} \int_0^{2\pi} \sin^2 t \cos^2 t \left(\cos^2 t + \sin^2 t \right) dt = \frac{3a^2}{8} \int_0^{2\pi} \sin^2 2t dt = \frac{3a^2}{8} \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos 4t}{2} dt =$$

$$= \frac{3}{8} \pi a^2.$$

1.4. ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

При рассмотрении ряда физических задач встречаются функции, заданные на той или иной поверхности. Примерами таких функций являются: плотность распределения зарядов на поверхности, скорость жидкости, протекающей через некоторую поверхность, и т.д. Необходимость интегрирования функций, заданных на поверхности, привела к введению поверхностных интегралов. Различают поверхностные интегралы первого и второго рода.

1.4.1. Поверхностный интеграл первого рода (или по площади поверхности). Теорема существования интеграла

Поверхностный интеграл первого рода представляет собой обобщение двойного интеграла, каким криволинейный интеграл первого рода является по отношению к определенному интегралу.

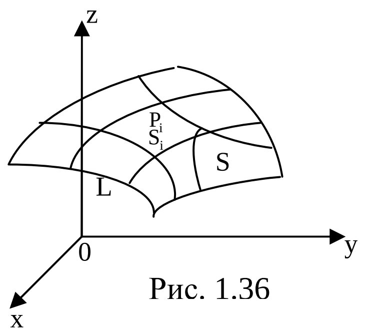

Рис. 1.36

Это обобщение строится так. Пусть в точках гладкой (или кусочно-гладкой) поверхности S, ограниченной кусочно-гладким контуром L, определена функция $f(P) = f(x, y, z)$. Разобьем поверхность S произвольно проведенными кривыми на части $S_1, S_2, \ldots, S_n$, площадь каждой из которых обозначим $\Delta S_i \left(i = \overline{1, n}\right)$ (рис. 1.36). Выбрав в каждой из площадок произвольную точку P_i, вычислим в этой точке значение функции $f(P_i)$ и умножим его на площадь ΔS_i элементарной части S_i. Составим сумму произведений $f(P_i)\Delta S_i$

$$I_n = \sum_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta S_i\,, \tag{1.66}$$

которую будем называть интегральной суммой для функции $f(x, y, z)$ по поверхности S. Наибольший из диаметров ячеек S_i обозначим $\max \Delta S_i$. Перейдем в равенстве (1.66) к пределу при условии стремлении к нулю $\max \Delta S_i$, что влечет увеличение числа n ячеек S_i и стягивание каждой из них в точку.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Если при стремлении $\max \Delta S_i$ к нулю, существует конечный предел интегральных сумм (1.66), который не зависит от способа разбиения поверхности S на части S_i и от выбора точек $P_i \in S_i$, то его называют поверхностным интегралом первого рода от функции $f(P) = f(x, y, z)$ по поверхности S или интегралом по площади поверхности S и обозначают

$$\iint\limits_S f(P)dS \quad \text{или} \quad \iint\limits_S f(x, y, z)dS.$$

Итак, по определению

$$\iint\limits_S f(x, y, z)dS = \lim_{\substack{\max \Delta S_i \to 0 \\ (n \to \infty)}} \sum_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta S_i \tag{1.67}$$

(dS - дифференциал площади поверхности).

Теорема. существования поверхностного интеграла первого рода: если функция $f(x, y, z)$ непрерывна вдоль кусочно-гладкой поверхности S, то интеграл по площади поверхности существует.

Поверхностный интеграл первого рода обладает теми же свойствами, что и двойной интеграл. В частности, выполняется свойство аддитивности: если поверхность S разбита на части S_1 и S_2, то

$$\iint\limits_{S}=\iint\limits_{S_1}+\iint\limits_{S_2}\ .$$

Читателю предлагаем самостоятельно сформулировать остальные свойства.

1.4.1.1. Вычисление поверхностного интеграла первого рода

Пусть задана гладкая поверхность S уравнением $z=z(x,y)$. Так как поверхность гладкая, то следовательно $z(x,y)$ - непрерывная функция вместе со своими частными производными. И пусть на поверхности S определена непрерывная функция $u=f(x,y,z)$. Требуется вычислить поверхностный интеграл

$$\iint\limits_{S} f(x,y,z)dS.$$

(Нельзя смешивать интегрируемую функцию $f(x,y,z)$ с функцией, входящей в уравнение поверхности S!).

Покажем, что при таких условиях вычисление поверхностного интеграла можно свести к вычислению двойного интеграла.

Предварительно займемся выводом формулы для вычисления площади ΔS_i элементарной части S_i поверхности S. Обратимся к рис. 1.37 и 1.38, где выделен участок S_i разбиения области S на элементарные части с выбранной на нем точкой P_i, которая имеет координаты x_i, y_i, $z_i=z(x_i,y_i)$.

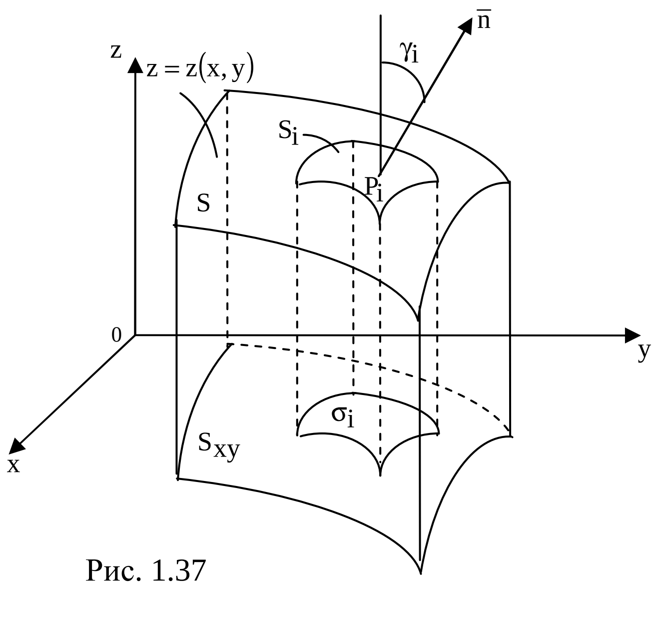

Рис. 1.37

Через точку $P_i \in S_i$ проведем касательную плоскость к поверхности S. Уравнение касательной плоскости, как известно, имеет вид

$$z - z_i = z'_x(x_i, y_i)(x - x_i) + z'_y(x_i, y_i)(y - y_i).$$

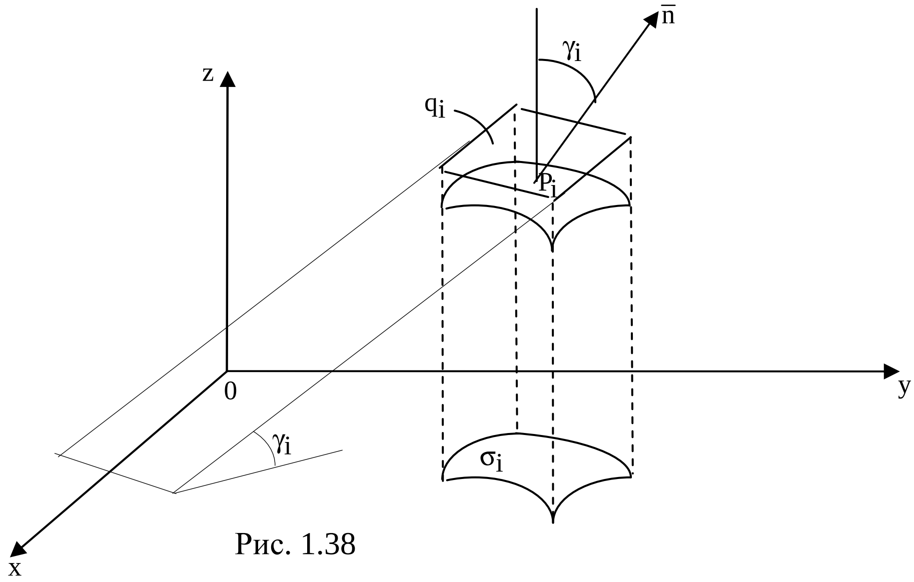

Рис. 1.38

На этой плоскости выделим элемент q_i с площадью Δq_i (рис. 1.38), который проектируется на плоскость xOy в ту же элементарную область σ_i, что и элемент S_i (рис. 1.37). Заменим криволинейный элемент S_i плоским элементом q_i, тогда

$$\Delta S_i \approx \Delta q_i. \tag{1.68}$$

Обозначим через γ_i двугранный угол между касательной плоскостью и плоскость xOy.

Воспользуемся соотношением из аналитической геометрии: площадь S_1 проекции плоской фигуры равна площади S самой этой фигуры, умноженной на абсолютную величину косинуса двугранного угла φ между плоскостями, т.е.

$$S_1 = S \cdot |\cos\varphi|.$$

В наших обозначениях имеем

$$\Delta\sigma_i = \Delta q_i \cdot |\cos\gamma_i|,$$

откуда в силу формулы (1.68) получаем

$$\Delta S_i \approx \frac{\Delta\sigma_i}{|\cos\gamma_i|}. \tag{1.69}$$

Линейный угол двугранного угла γ_i есть в то же время угол между осью Oz и перпендикуляром $\bar{n}$ к касательной плоскости. И поэтому

$$|\cos\gamma_i| = \left|\cos\left(\bar{n},\, \hat{Oz}\right)\right|. \qquad (1.70)$$

Это позволяет нам найти косинус угла между векторами $\bar{n}$ и $\bar{k}$ ($\bar{k}$ - орт оси Oz), по известной формуле

$$\cos\left(\bar{n}, \hat{\bar{k}}\right) = \frac{\bar{n}\cdot\bar{k}}{|\bar{n}|\cdot|\bar{k}|}.$$

Нормальный вектор $\bar{n}$ касательной плоскости, как видно из ее уравнения, имеет координаты $z'_x(x_i, y_i)$, $z'_y(x_i, y_i)$, -1, а вектор $\bar{k} = \{0,0,1\}$. Тогда

$$\cos\left(\bar{n}, \hat{Oz}\right) = \frac{-1}{\sqrt{1 + z'^2_x(x_i, y_i) + z'^2_y(x_i, y_i)}}. \qquad (1.71)$$

Таким образом, с учетом (1.70) и (1.71) получаем

$$\Delta S_i \approx \sqrt{1 + z'^2_x(x_i, y_i) + z'^2_y(x_i, y_i)} \cdot \Delta\sigma_i. \qquad (1.72)$$

А теперь, для решения поставленной задачи о вычислении поверхностного интеграла, вернемся к интегральной сумме (1.66), соответствующей данному разбиению поверхности S на части $\Delta S_i \left(i = \overline{1,n}\right)$ и выбору точек P_i. Принимая во внимание полученное выражение для ΔS_i (1.72), запишем

$$\sum_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta S_i = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z(x_i, y_i))\sqrt{1 + z'^2_x(x_i, y_i) + z'^2_y(x_i, y_i)} \cdot \Delta\sigma_i. \quad (1.73)$$

В этом равенстве перейдем к пределу при $n \to \infty$, считая, что каждая из элементарных областей стягивается в точку. Сумма, стоящая в правой части равенства (1.73), является интегральной суммой для непрерывной функции $f(x, y, z(x, y))\sqrt{1 + z'^2_x(x_i, y_i) + z'^2_y(x_i, y_i)}$ по области S_{xy} - проекции поверхности S на плоскость xOy. Поэтому ее предел есть двойной интеграл от указанной функции двух переменных по области S_{xy}.

<u>ОПРЕДЕЛЕНИЕ</u>. Предел суммы, стоящей в левой части равенства (1.73), есть поверхностный интеграл от функции $f(x, y, z)$ по поверхности S (т.е. 1-го рода).

Следовательно,

$$\iint_S f(x, y, z)dS = \iint_{S_{xy}} f(x, y, z(x, y))\sqrt{1 + z'^2_x(x, y) + z'^2_y(x, y)}d\sigma,$$

иначе

$$\iint_S f(x, y, z)dS = \iint_{S_{xy}} f(x, y, z(x, y))\sqrt{1 + z'^2_x(x, y) + z'^2_y(x, y)}dxdy. \qquad (1.74)$$

Заметим, что существование двойного интеграла доказывает, в силу (1.74) существование поверхностного интеграла при оговоренных условиях, которым удовлетворяют подынтегральная функция и область интегрирования.

Вместо плоскости xOy поверхность S можно спроектировать на плоскости xOz и yOz. Тогда переменив роли координат x, y и z, из равенства (1.74), можно получить следующие формулы:

$$\iint_S f(x,y,z)dS = \iint_{S_{yz}} f(x(y,z),y,z)\sqrt{1+x_y'^2(y,z)+x_z'^2(y,z)}dydz, \quad (1.75)$$

$$\iint_S f(x,y,z)dS = \iint_{S_{xz}} f(x,y(x,z),z)\sqrt{1+y_x'^2(x,z)+y_z'^2(x,z)}dxdz, \quad (1.76)$$

где $x = x(y,z)$ $y = y(x,z)$ - уравнения поверхности S, разрешенные относительно x и y соответственно, а S_{yz}, S_{xz} - проекции поверхности S на координатные плоскости yOz и xOz.

Замечание. В более сложных случаях, когда поверхность кусочно-гладкая или неоднозначно проектируется на координатные плоскости, ее разбивают на гладкие части, однозначно проектирующиеся на одну из координатных плоскостей, тогда интеграл разобьется на сумму интегралов по этим частям, к каждому из которых применимы формулы (1.74) – (1.76).

1.4.1.2. Некоторые применения поверхностного интеграла первого рода

Если в равенстве (1.74) функция $f(x,y,z) \equiv 1$, то получается формула для вычисления площади поверхности S (обозначим эту площадь той же буквой S, что и поверхность):

$$S = \iint_S dS = \iint_{S_{xy}} \sqrt{1+z_x'^2(x,y)+z_y'^2(x,y)}dxdy. \quad (1.77)$$

В этой формуле $z = z(x,y)$ - уравнение поверхности S, а S_{xy} - ее проекция на плоскость xOy.

С помощью поверхностного интеграла первого рода можно определять массы, моменты (инерции и статические), координаты центров тяжести и т.п. величины для материальных поверхностей, вдоль которых распределены массы с поверхностной плотностью $\rho = \rho(x,y,z)$. Вывод соответствующих формул по существу не отличается от вывода формул, относящихся к распределению масс в плоской области или вдоль кривой (см. применении двойного интеграла и криволинейного интеграла первого рода к задачам механики). Поэтому мы приведем окончательные результаты, предоставив вывод формул читателю.

Пусть по поверхности S распределена масса с поверхностной плотностью $\rho(x,y,z)$, представляющей собой непрерывную функцию на S. Такую поверхность называют материальной поверхностью. Тогда имеют место следующие формулы.

1. Масса m материальной поверхности равна

$$m=\iint\limits_S \rho(x,y,z)dS. \qquad (1.78)$$

2. Координаты центра масс материальной поверхности определяются формулами

$$x_C=\frac{\iint\limits_S x\rho(x,y,z)dS}{m},\quad y_C=\frac{\iint\limits_S y\rho(x,y,z)dS}{m},\quad z_C=\frac{\iint\limits_S z\rho(x,y,z)dS}{m}. \qquad (1.79)$$

Для однородной поверхности $\rho=\text{const}$.

3. Момент инерции I_{Oz} материальной поверхности относительно оси Oz равен

$$I_{Oz}=\iint\limits_S \left(x^2+y^2\right)\rho(x,y,z)dS. \qquad (1.80)$$

Аналогично выражаются моменты инерции относительно других осей.

4. Момент инерции I_{xOy} относительно координатной плоскости xOy:

$$I_{xOy}=\iint\limits_S z^2\rho(x,y,z)dS. \qquad (1.81)$$

Аналогично выражаются моменты инерции относительно других координатных плоскостей.

5. Момент инерции I_0 относительно начала координат:

$$I_0=\iint\limits_S \left(x^2+y^2+z^2\right)\rho(x,y,z)dS. \qquad (1.82)$$

6. Статический момент материальной поверхности M_{xOy} относительно плоскости xOy определяется по формуле

$$M_{xOy}=\iint\limits_S z\rho(x,y,z)dS. \qquad (1.83)$$

ПРИМЕР. Вычислить статический момент относительно плоскости xOy и координаты центра масс однородной полусферы радиуса R.

Решение. Выберем систему координат так, чтобы полусфера стояла на плоскости xOy, а начало координат находилось в ее центре. Тогда уравнение полусферы имеет вид $x^2+y^2+z^2=R^2$ $(z\ge 0)$.

Согласно формуле (1.83), где полагаем $\rho=1$, имеем

$$M_{xOy}=\iint\limits_S z\,dS.$$

Разрешим уравнение поверхности относительно z: $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$. Тогда в соответствии с формулой (1.74) получим

$$M_{xOy}=\iint\limits_{S_{xy}}\sqrt{R^2-x^2-y^2}\cdot\sqrt{1+\frac{x^2}{R^2-x^2-y^2}+\frac{y^2}{R^2-x^2-y^2}}dxdy=$$

$$=\iint\limits_{S_{xy}}\sqrt{R^2-x^2-y^2}\cdot\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}dxdy=R\iint\limits_{S_{xy}}dxdy=R\cdot S_{\text{круга}}=\pi R^3.$$

Так как материальная сфера однородная, то из соображений симметрии ее центр тяжести должен находиться на оси Oz, поэтому $x_C=0,\ y_C=0$, а $z_C=\dfrac{M_{xOy}}{m}$.

По формуле (1.78) найдем массу полусферы

$$m=\iint\limits_{S}dS=\iint\limits_{S_{xy}}\frac{Rdxdy}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}.$$

Для вычисления двойного интеграла перейдем к полярным координатам: $x=\rho\cos\varphi,\ \ y=\rho\sin\varphi$.

$$m=R\iint\limits_{0\le\rho\le R}\frac{\rho d\rho d\varphi}{\sqrt{R^2-\rho^2}}=-R\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^R\frac{d\left(R^2-\rho^2\right)}{2\sqrt{R^2-\rho^2}}=-R\int\limits_0^{2\pi}\sqrt{R^2-\rho^2}\Big|_0^R\cdot d\varphi=2\pi R^2.$$

Заметим, что в данном случае вычисления двойного интеграла можно избежать. В самом деле, $\iint\limits_S dS=S$, а площадь полусферы, как известно, равна $2\pi R^2$.

Таким образом, $z_C=\dfrac{M_{xOy}}{m}=\dfrac{R}{2}$.

1.4.2. Поверхностный интеграл второго рода или по координатам

Поверхностный интеграл второго рода является обобщением двойного интеграла, каким криволинейный интеграл второго рода является по отношению к определенному интегралу.

Пусть в прямоугольной системе координат $OXYZ$ задана некоторая область V. Пусть в этой области задана поверхность σ, ограниченная замкнутым контуром L. Относительно поверхности σ будем предполагать, что она гладкая или кусочно-гладкая, то есть в каждой ее точке P определяется положительное направление нормали единичным вектором $\bar{n}(P)$, направляющие косинусы которого являются непрерывными функциями координат точек поверхности σ.

Пусть в каждой точке поверхности σ определен вектор

$$\bar{F}=\bar{X}(x,y,z)\bar{i}+Y(x,y,z)\bar{j}+Z(x,y,z)\bar{k} \qquad (1.84)$$

или $\bar{F}=\left\{\bar{X}(x,y,z);\ Y(x,y,z);\ Z(x,y,z)\right\}$,

где $X=X(x,y,z);\ \ Y=Y(x,y,z);\ \ Z=Z(x,y,z)$ - непрерывные функции.

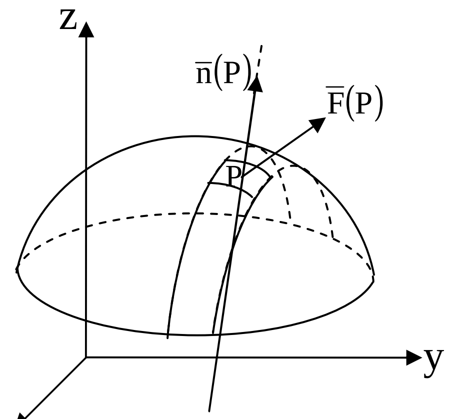

Рис. 1.39

Разобьем поверхность σ произвольным образом на n элементарных площадок $\Delta\sigma_i\,(i=1,n)$. На каждой площадке возьмем произвольно точку P_i и рассмотрим сумму

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\overline{F}(P_i)\cdot\overline{n}(P_i)\right)\cdot\Delta\sigma_i\,, \qquad (1.85)$$

где $\overline{F}(P_i)$ - значение вектора (1.84) в точке P_i; $\overline{n}(P_i)$ - единичный вектор нормали в этой точке; $\overline{F}(P_i)\cdot\overline{n}(P_i)$ - скалярное произведение этих векторов. Сумма (1.85) называется интегральной суммой. При различных разбиениях поверхности σ на элементарные площадки получаем различные значения интегральной суммы (1.85).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Предел суммы (1.85) при $n\to\infty$ (таким образом, чтобы наибольшая из $\Delta\sigma_i\to 0$) называется поверхностным интегралом второго рода:

$$\lim_{\substack{n\to\infty\\ \max\Delta\sigma_i\to 0}}\sum_{i=1}^{n}\left(\overline{F}(P_i)\cdot\overline{n}(P_i)\right)\cdot\Delta\sigma_i=\iint_{\sigma}\left(\overline{F}\cdot\overline{n}\right)\cdot d\sigma. \qquad (1.86)$$

Каждое i-е слагаемое суммы (1.85) можно рассматривать как объем призмы с основанием $\Delta\sigma_i$ и с высотой $\overline{F}(P_i)\cdot\overline{n}(P_i)$.

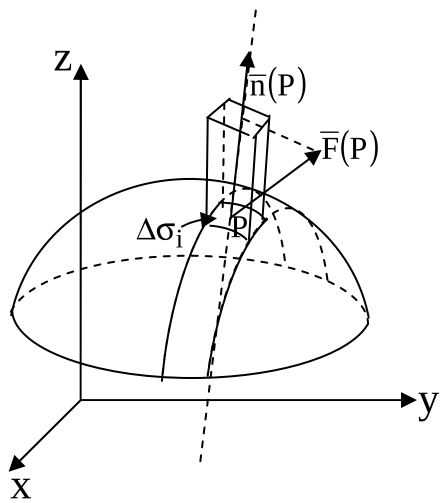

Рис.1.40

<u>Физический смысл поверхностного интеграла второго рода.</u> Вектор $\overline{F}$ может определять направление скоростей: потока жидкости, потока воздуха, потока частиц газа, магнитных полей и т.д. Если вектор $\overline{F}$ определяет скорость жидкости, протекающей через поверхность σ, то произведение $\left(\overline{F}(P_i)\cdot\overline{n}(P_i)\right)\cdot\Delta\sigma_i$ равно количеству жидкости, протекающей через площадку $\Delta\sigma_i$ за единицу времени в направлении вектора $\overline{n}(P_i)$. Тогда выражение $\iint_{\sigma}\left(\overline{F}\cdot\overline{n}\right)\cdot d\sigma$ из формулы (1.86) есть общее количество жидкости, протекающей в единицу времени через поверхность σ в положительном направлении. Поэтому поверхностный интеграл (1.86) называется <u>потоком</u> векторного поля $\overline{F}$ через поверхность σ.

Выразим единичный вектор $\overline{n}$ через его проекции на оси координат:

$$\overline{n}=\{\cos\alpha;\ \cos\beta;\ \cos\gamma\}, \qquad (1.87)$$

где α, β, γ - углы между вектором $\overline{n}$ и положительными направлениями осей Ox, Oy, Oz соответственно. Подставляя в интеграл (1.87) проекции вектора $\overline{F}$ из (1.84) и проекции вектора $\overline{n}$ из (1.87), получим:

$$\iint_{\sigma}(\overline{F}\cdot\overline{n})\cdot d\sigma = \iint_{\sigma}(X(x,y,z)\cos\alpha + Y(x,y,z)\cos\beta + Z(x,y,z)\cos\gamma)d\sigma =$$

$$= \iint_{\sigma} X(x,y,z)(\cos\alpha\cdot d\sigma) + Y(x,y,z)(\cos\beta\cdot d\sigma) + Z(x,y,z)(\cos\gamma\cdot d\sigma). \qquad (1.88)$$

Произведение $d\sigma\cdot\cos\alpha$ есть проекция площадки $\Delta\sigma_i$ на координатную плоскость yOz. Произведения $d\sigma\cdot\cos\beta$ и $d\sigma\cdot\cos\gamma$ есть проекции площадки $\Delta\sigma$ на координатные плоскости, соответственно, xOz и xOy. Поскольку разбиение поверхности σ производится произвольным образом, то можно произвести разбиения плоскостями параллельными координатным плоскостям и тогда при предельном переходе (при $n\to\infty$) площади проекций элементарной площадки $\Delta\sigma$ равны:

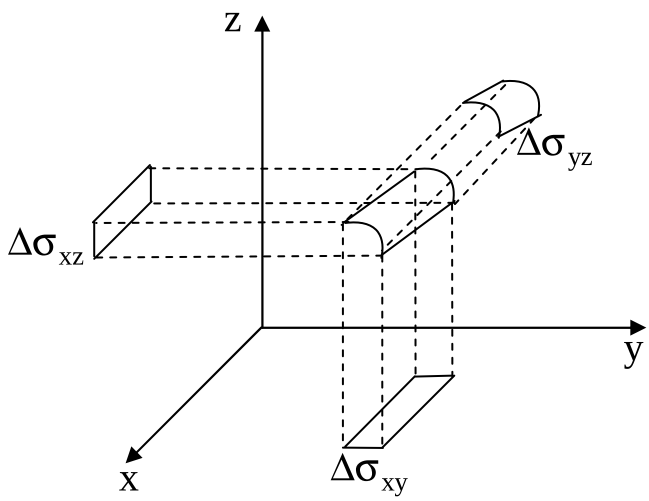

Рис. 1.41

$$d\sigma\cdot\cos\alpha = dy\cdot dz; \qquad d\sigma\cdot\cos\beta = dx\cdot dz; \qquad d\sigma\cdot\cos\gamma = dx\cdot dy$$

и интеграл (1.88) принимает вид:

$$\iint_{\sigma}(\overline{F}\cdot\overline{n})\cdot d\sigma = \iint_{\sigma} X(x,y,z)dydz + Y(x,y,z)dxdz + Z(x,y,z)dxdy. \qquad (1.89)$$

Из свойств поверхностного интеграла второго рода выделим два

1. $$\iint_{\sigma_+}(\overline{F}\cdot\overline{n})\cdot d\sigma = -\iint_{\sigma_-}(\overline{F}\cdot\overline{n})d\sigma, \qquad (1.90)$$

где σ_+ - это сторона поверхности σ, соответствующая положительному направлению нормального вектора $\overline{n}$; σ_- - противоположная сторона поверхности σ.

2. Если поверхность σ состоит их нескольких частей $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 + ... + \sigma_k$, тогда интеграл (1.89) есть сумма интегралов по этим частям поверхности:

$$\iint_{\sigma} (\overline{F} \cdot \overline{n}) d\sigma = \iint_{\sigma_1} (\overline{F} \cdot \overline{n}) d\sigma + \iint_{\sigma_2} (\overline{F} \cdot \overline{n}) d\sigma + ... + \iint_{\sigma_k} (\overline{F} \cdot \overline{n}) d\sigma \qquad (1.91)$$

1.4.2.1. Вычисление поверхностного интеграла второго рода

Вычисление интеграла (1.89) можно свести к вычислению двойных интегралов, если правую часть разложить в сумму трех интегралов:

$$\iint_{\sigma} X(x, y, z) dydz + \iint_{\sigma} Y(x, y, z) dxdz + \iint_{\sigma} Z(x, y, z) dxdy \qquad (1.92)$$

и далее вычислять отдельно каждый из них (путем сведения подынтегральной функции к двум переменным).

Например, для первого интеграла из (1.91) $I_1 = \iint_{\sigma} X(x, y, z) dydz$. Если область интегрирования, то есть поверхность σ, задана таким уравнением, что его можно преобразовать к виду $x = x(y, z)$, то данный интеграл I_1 вычисляем так:

$$\iint_{\sigma} X(x, y, z) dydz = \pm \iint_{\sigma_{yz}} X(x(y, z), y, z) dydz,$$

где знак $\pm$ в силу формулы (1.90) будет определяться в зависимости от стороны поверхности σ (плюс, если $\cos\alpha = \cos(\overline{n}, \overline{Ox}) > 0$; минус, если $\cos\alpha < 0$); σ_{yz} - это проекция поверхности σ на координатную плоскость yOz (см. рис. 1.41).

Аналогичные приемы применяем и при решении второго и третьего интегралов из (1.92).

<u>Формула Остроградского-Гаусса</u>

Если поверхность σ - замкнутая, V – тело, которое ограничивается поверхностью σ. Тогда имеет место формула

$$\oint\!\!\oint_{\sigma} X(x, y, z) dydz + Y(x, y, z) dxdz + Z(x, y, z) dxdy =$$

$$= \iiint_{V} \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right) dxdydz, \qquad (1.93)$$

где функции $X = X(x, y, z)$, $Y = Y(x, y, z)$, $Z = Z(x, y, z)$ и их частные производные $\frac{\partial X}{\partial x}$, $\frac{\partial Y}{\partial y}$, $\frac{\partial Z}{\partial z}$ должны быть непрерывными в области V и на границе, то есть на поверхности σ.

<u>Формула Стокса</u>

Если поверхность σ - незамкнута и ограничена замкнутым контуром L, то имеет место формула

$$\oint_L X(x,y,z)dx + Y(x,y,z)dy + Z(x,y,z)dz =$$

$$= \iint_\sigma \left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}\right)dydz + \left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}\right)dxdz + \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right)dxdy, \qquad (1.94)$$

где функции $X = X(x,y,z)$, $Y = Y(x,y,z)$, $Z = Z(x,y,z)$ и их частные производные должны быть непрерывными функциями на поверхности σ и на ее границе, то есть на контуре L.

1.4.2.2. Применение поверхностного интеграла второго рода

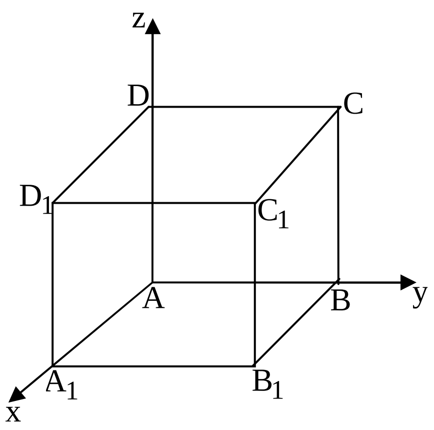

Рис. 1.42

Основное применение поверхностного интеграла второго рода вытекает из его физического смысла – он помогает вычислять <u>потоки</u> различных векторных полей.

ПРИМЕР. Вычислить поток векторного поля $\overline{F} = \{x; y; z\}$ через поверхность куба: $0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1,\ 0 \le z \le 1.$

Решение. Здесь $X(x,y,z) = x$, $Y(x,y,z) = y$, $Z(x,y,z) = z$. Поток будет равен

$$I = \iint_\sigma X(x,y,z)dydz + Y(x,y,z)dxdz + Z(x,y,z)dxdy =$$
$$= \iint_\sigma xdydz + ydxdz + zdxdy. \qquad (*)$$

Поскольку поверхность σ состоит из шести плоскостей (граней куба), то вычисление потока произведем по формуле (1.92): $I = I_{\sigma_1} + I_{\sigma_2} + I_{\sigma_3} + I_{\sigma_4} + I_{\sigma_5} + I_{\sigma_6}$.

1) Рассмотрим σ_1: грань A_1ABB_1. Уравнение плоскости, в которой лежит эта грань есть $z = 0$, тогда $dz = 0$. Подставим эти данные в (*):

$$I_{\sigma_1} = \iint_{A_1ABB_1} xdy \cdot 0 + ydx \cdot 0 + 0 \cdot dxdy = 0.$$

2) Рассмотрим σ_2: грань A_1ADD_1. Уравнение плоскости, в которой лежит эта грань есть $y = 0$, тогда $dy = 0$. Подставим эти данные в (*):

$$I_{\sigma_2} = \iint_{A_1ADD_1} x \cdot 0 \cdot dz + 0 \cdot dxdz + z \cdot dx \cdot 0 = 0.$$

3) Рассмотрим σ_3: грань $ABCD$. Уравнение плоскости, в которой лежит эта грань есть $x = 0$, тогда $dx = 0$. Подставим эти данные в (*):

$$I_{\sigma_3} = \iint\limits_{ABCD} 0 \cdot dydz + y \cdot 0 \cdot dz + z \cdot 0 \cdot dy = 0.$$

4) Рассмотрим σ_4: грань D_1DCC_1. Уравнение плоскости, в которой лежит эта грань есть $z = 1$, тогда $dz = 0$. Подставим эти данные в (*):

$$I_{\sigma_4} = \iint\limits_{D_1DCC_1} xdy \cdot 0 + y \cdot dx \cdot 0 + 1 \cdot dxdy = \iint\limits_{D_1DCC_1} dxdy =$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^1 dy = \int_0^1 dx \left(y\Big|_0^1 \right) = \int_0^1 dx = x\Big|_0^1 = 1.$$

5) Рассмотрим σ_5: грань B_1C_1CB. Уравнение плоскости, в которой лежит эта грань есть $y = 1$, тогда $dy = 0$. Подставим эти данные в (*):

$$I_{\sigma_5} = \iint\limits_{B_1C_1CB} x \cdot 0 \cdot dz + 1 \cdot dxdz + z \cdot dx \cdot 0 = \iint\limits_{B_1C_1CB} dxdz = \int_0^1 dx \int_0^1 dz = 1.$$

6) Рассмотрим σ_6: грань $A_1D_1C_1B_1$. Уравнение плоскости, в которой лежит эта грань есть $x = 1$, тогда $dx = 0$. Подставим эти данные в (*):

$$I_{\sigma_6} = \iint\limits_{A_1D_1C_1B_1} 1 \cdot dydz + y \cdot 0 \cdot dz + z \cdot 0 \cdot dy = \iint\limits_{A_1D_1C_1B_1} dydz = \int_0^1 dy \int_0^1 dz = 1.$$

Ответ: $I = I_{\sigma_1} + I_{\sigma_2} + I_{\sigma_3} + I_{\sigma_4} + I_{\sigma_5} + I_{\sigma_6} = 0 + 0 + 0 + 1 + 1 + 1 = 3.$

Замечание (к примеру). Эту же задачу можно решить значительно быстрее, если применить формулу Остроградского – Гаусса (1.93). Так как по условию $X(x, y, z) = x$, $Y(x, y, z) = y$, $Z(x, y, z) = z$, то $\dfrac{\partial X(x, y, z)}{\partial x} = 1$, $\dfrac{\partial Y(x, y, z)}{\partial y} = 1$, $\dfrac{\partial Z(x, y, z)}{\partial z} = 1$.

По формуле 1.93:

$$I = \iint\limits_{\sigma} xdydz + ydxdz + zdxdy = \iiint\limits_{V} (1 + 1 + 1) dxdydz =$$

$$= 3 \iiint\limits_{V} dxdydz = 3 \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^1 dz = 3.$$