Министерство образования и науки Украины

ХАРЬКОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ АВТОМОБИЛЬНО-ДОРОЖНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

К ВЫПОЛНЕНИЮ ЛАБОРАТОРНЫХ РАБОТ

ПО ДИСЦИПЛИНЕ «ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ»

для студентов заочной формы обучения

направления подготовки 6.050201 – Системная инженерия

2013

Составитель О.А. Подоляка

Кафедра информатики

ВВЕДЕНИЕ

Данные методические указания предназначены студентам заочного отделения направления подготовки «Системная инженерия», специальности 6.050201 - «Компьютерные системы управления движущимися объектами» для проведения лабораторных работ по изучению дисциплины «Исследование операций».

Методические указания содержат необходимый теоретический материал с практическими примерами решения задач.

Предложенные задания предполагают использование при решении задач методов математического программирования, сетевого планирования и управления, комбинаторного анализа, современных информационных технологий электронных таблиц.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА 1
ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Цель работы: исследование возможностей решения задач линейного программирования (ЛП) графическим методом, симплекс-методом и с помощью пакета анализа MS Excel.

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

В *общей постановке* задача линейного программирования выглядит следующим образом:

Имеются некоторые переменные $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ и функция этих переменных $f(x) = f(x_1, x_2, ..., x_n)$, которая носит название целевой функции. Ставится задача: найти экстремум (максимум или минимум) целевой функции $f(x)$ при условии, что переменные x принадлежат некоторой области G:

$$\begin{cases} f(x) \Rightarrow extr \\ x \in G \end{cases}$$

Функция $f(x)$ является линейной функцией переменных $x_1, x_2, ..., x_n$

Область G определяется системой линейных равенств или неравенств.

В наиболее *общей форме* задачу линейного программирования формулируют следующим образом:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \{\le, \ge, =\} b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \{\le, \ge, =\} b_2, \\ \ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \{\le, \ge, =\} b_m. \end{cases} \tag{1}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \ldots, x_n \ge 0 \tag{2}$$

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \max(\min) \tag{3}$$

Коэффициенты $a_{ij}, b_i c_{ij} = 1,2,...,n,\ i = 1,2,...,m$ – любые действительные числа (возможно 0).

Итак, решения, удовлетворяющие системе ограничений (1) условий задачи и требованиям неотрицательности (2), называются допустимыми, а решения, удовлетворяющие одновременно и требованиям минимизации (максимизации) (3) целевой функции, - оптимальными.

В *канонической форме* задача является задачей на максимум (минимум) некоторой линейной функции F, ее система ограничений состоит только из равенств (уравнений). При этом переменные задачи $x_1, x_2, ..., x_n$ являются неотрицательными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \tag{4}$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0 \tag{5}$$

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \max(\min) \tag{6}$$

К канонической форме можно преобразовать любую задачу линейного программирования.

1. Если в исходной задаче некоторое ограничение (например, первое) было неравенством, то оно преобразуется в равенство, введением в левую часть некоторой неотрицательной переменной, причем в неравенства «≤» вводится дополнительная неотрицательная переменная со знаком «+»; в случаи неравенства «≥» - со знаком «-»:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \leq b_1 \tag{7}$$

Вводим переменную

$$x_{n+1} = b_1 - a_{11}x_1 - a_{12}x_2 - \ldots - a_{1n}x_n$$

Тогда неравенство (10) запишется в виде:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1 \tag{8}$$

В каждое из неравенств вводится своя “уравнивающая” переменная, после чего система ограничений становится системой уравнений.

2. Если в исходной задаче некоторая переменная не подчинена условию неотрицательности, то ее заменяют (в целевой функции и во всех ограничениях) разностью неотрицательных переменных

3. Если в ограничениях правая часть отрицательна, то следует умножить это ограничение на (-1).

4. Наконец, если исходная задача была задачей на минимум, то введением новой целевой функции $F1 = -F$ мы преобразуем нашу задачу на минимум функции F в задачу на максимум функции $F1$.

Таким образом, всякую задачу линейного программирования можно сформулировать в канонической форме.

В *стандартной форме* задача линейного программирования является задачей на максимум (минимум) линейной целевой функции. Система ограничений ее состоит из одних линейных неравенств типа « <= » или « >= ». Все переменные задачи неотрицательны.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2, \\ \ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m. \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \ldots, x_n \ge 0 \tag{9}$$

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \max(\min)$$

Всякую задачу линейного программирования можно сформулировать в стандартной форме.

Симплекс-метод решения ЗЛП

Введем в систему ограничений (9) *дополнительные переменные* и приведем в каноническую форму

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1, \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + x_{n+2} - b_2, \\
\ldots\ldots\ldots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m.
\end{cases} \tag{10}
$$

Для системы уравнений (10) назовем переменные $x_1, x_2, ..., x_n$ *свободными*, а переменные $x_{n+1}, x_{n+2}, ..., x_{n+m}$ - *базисными*.

Симплекс-метод осуществляет направленный перебор допустимых базисных решений, в которых базисные переменные неотрицательны, а небазисные равны нулю.

Этот процесс соответствует переходу от одной угловой точки многогранника ограничений к другой в направлении неуменьшения значения целевой функции.

Базисным решением ЗЛП называется такое решение системы уравнений (10), в котором *все свободные переменные равны* 0.

Базисное решение ЗЛП называется *опорным решением* (*опорным планом*), если в нем *все базисные переменные неотрицательны*.

В теории симплекс-метода доказывается, что, если максимум целевой функции при данной в ЗЛП системе ограничений существует, то он достигается на *опорном решении.*

Опорное решение, на котором целевая функция достигает максимума, является *оптимальным планом.*

Этап 1. Формирование симплекс-таблицы

Составим *первую* симплекс-таблицу (Рис.1) по системе (10) и целевой функции (11).

$$
Z = c_0 + \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \tag{11}
$$

целевая строка

Базис		x_1	x_2	…	x_n	x_{n+1}	x_{n+2}	…	x_{n+m}
x_{n+1}	b_1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1n}	1	0	…	0
x_{n+2}	b_2	a_{21}	a_{22}	…	a_{2n}	0	1	…	0
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
x_{n+m}	b_m	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mn}	0	0	…	1
z	c_0	$-c_1$	$-c_2$	…	$-c_n$	0	0	…	0

Рисунок 1 – Вид начальной симплекс-таблицы

Таблице соответствует базисное решение системы (10) вида:

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0,\ x_{n+1} = b_1,\ x_{n+2} = b_2, \ldots, x_{n+m} = b_m.$$

Этап 2. Анализ решения по целевой строке симплекс-таблицы.

Если среди элементов целевой строки, стоящих в столбцах $x_1, x_2, \ldots, x_n$ имеется хотя бы один отрицательный элемент, то решение надо улучшать по правилам этапа 3.

Если же все указанные элементы неотрицательны - это означает, функция z достигает максимума и нужно переходить к выписыванию соответствующего оптимального плана (этап 4).

Этап 3. Улучшение решения по целевой строке симплекс-таблицы.

1. Найдем среди элементов $z_1, z_2, \ldots, z_n$ целевой строки z наибольший по абсолютной величине отрицательный элемент. Пусть это будет элемент z_r, тогда столбец x_r объявим разрешающим.

2. Найдем среди дробей вида b_i / a_{ir}, $(i = 1,2,\ldots,m)$ наименьшую неотрицательную дробь (пусть это будет дробь b_s / a_{sr}), и объявим строку x_{n+s} разрешающей. Если же все дроби вида b_i / a_{ir} окажутся отрицательными, то это означает, что при заданной системе ограничений функция z неограничена, т.е. поставленная ЗЛП решений не имеет.

3. Элемент a_{sr}, стоящий на пересечении разрешающей строки и разрешающего столбца, объявим разрешающим и, для наглядности, его можно обвести в таблице прямоугольником. (Замечание. Иногда

существует несколько возможностей выбора разрешающего элемента. В этом случае для поиска опорного решения разрешающий элемент выбирают отрицательным.)

4. Заготовим новую симплекс-таблицу, заменив в первом столбце переменную x_{n+s} на переменную x_r.

5. Пересчитаем все элементы старой симплекс-таблицы, включая строку z по правилам метода полных жордановых исключений с разрешающим элементом a_{sr}:

1) Разделим элементы разрешающей строки на разрешающий элемент. При этом разрешающий элемент станет равным 1;

2) Все элементы разрешающего столбца, за исключением разрешающего элемента, заменим нулями. При этом разрешающий элемент останется равным 1.

3) Все остальные элементы матрицы пересчитаем в новые элементы, воспользовавшись «правилом прямоугольника» (Рис. 2).

$$\begin{array}{ccc} a_{sr} & \rightarrow & a_{sj} \\ \uparrow & & \downarrow \\ a_{ir} & \leftarrow & a_{ij} \end{array} \qquad \Longrightarrow \qquad a_{ij}^{\text{н}} = \frac{a_{ij}^{\text{с}} \cdot a_{sr}^{\text{с}} - a_{sj}^{\text{с}} \cdot a_{ir}^{\text{с}}}{a_{sr}^{\text{с}}},$$

Рисунок 2 – Иллюстрация правила прямоугольника

где индекс Н означает новый элемент, а С – старый. Результат запишем в новую симплекс-таблицу.

4) После этого возвращаемся к этапу 2.

Этап 4. Запись оптимального плана

В плане указываем значения только исходных переменных x_1, x_2,..., x_n , причем значения тех из них, которые являются свободными, полагаем равными нулю, а значения остальных переменных берем из второго столбца таблицы (столбца свободных членов). Из этого же столбца выписываем максимальное значение z.

ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

Задание 1. Исследовать графический метод решения задачи линейного программирования.

Для производства компьютерных столов I и II видов требуются три типа ресурсов: дерево, пластик и трудозатраты. Потребности в ресурсах для производства одного стола каждого вида, запасы ресурсов, а также прибыль от реализации одного стола каждого вида, заданы в таблице 1.

Таблица 1 - **Исходные данные к заданию 1**

Тип ресурса	Единица продукции вида I	Единица продукции вида II	Запас ресурса
Дерево ($м^2$)	1	4	24
Пластик ($м^2$)	4	1	24
Трудозатраты (чел/час)	3	2	23
Прибыль (грн)	200	300	

Требуется, решив задачу графическим методом, найти план выпуска продукции, позволяющий получить наибольшую прибыль.

Решение

Пусть x_1 - выпуск (число единиц) продукции I вида, x_2 - выпуск (число единиц) продукции II вида, тогда, в соответствии с таблицей, неизвестные x_1 и x_2 будут удовлетворять следующей системе ограничений:

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 \le 24, \\ 4x_1 + x_2 \le 24, \\ 3x_1 + 2x_2 \le 23, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Необходимо найти оптимальный план производства продукции, т.е. такой план (x_1, x_2), который доставляет максимум функции прибыли

$Z = 200\,x_1 + 300\,x_2$.

Решаем графически систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 = 24, \\ 4x_1 + x_2 = 24, \\ 3x_1 + 2x_2 = 23, \\ x_1 \ge 0, \\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

в которой каждое уравнение является уравнением прямой линии.

Таким образом, область, заданная системой ограничений, является пятиугольником *OABCD* (Рис. 3).

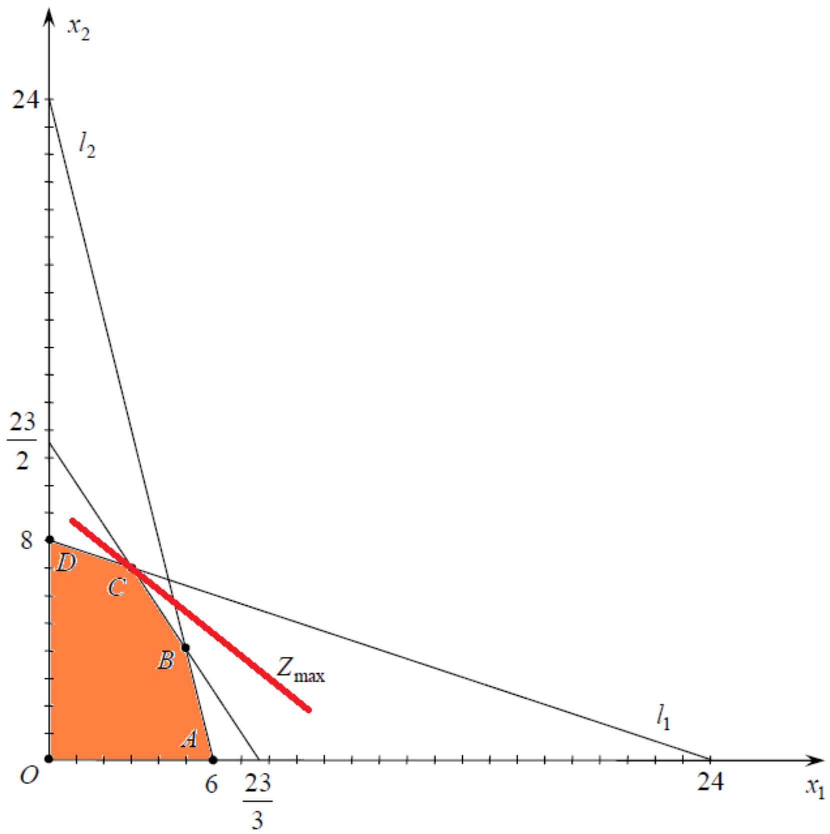


Рисунок 3 – Область ограничений

Построим *линию нулевого уровня прибыли* $Z = 0$ и будем передвигать ее параллельно самой себе до тех пор, пока она пересекается с точками пятиугольника *OABCD*.

Очевидно, что последними точками, в которых передвигаемая линия пересекается с пятиугольником *OABCD*, могут быть только вершины пятиугольника.

Найдем координаты вершин пятиугольника.

Координаты точки B удовлетворяют системе уравнений:

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 = 24, \\ 3x_1 + 2x_2 = 23. \end{cases}$$

$B = (5;4)$.

Координаты точки C удовлетворяют системе уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 = 24, \\ 3x_1 + 2x_2 = 23. \end{cases}$$

$C = (3;7)$.

Аналогично находим $A = (6;0)$, $D = (0;8)$, $O = (0;0)$.

Подсчитаем теперь значения, которые принимает функция прибыли в вершинах пятиугольника:

$Z(O) = Z(0;\ 0) = 200 \cdot 0 + 300 \cdot 0 = 0;$
$Z(A) = Z(6;\ 0) = 200 \cdot 6 + 300 \cdot 0 = 1200;$
$Z(B) = Z(5;\ 4) = 200 \cdot 5 + 300 \cdot 4 = 2200;$
$Z(C) = Z(3;\ 7) = 200 \cdot 3 + 300 \cdot 7 = 2700;$
$Z(D) = Z(8;\ 0) = 200 \cdot 8 + 300 \cdot 0 = 1600.$

Таким образом, наибольшая прибыль достигается в точке C (3; 7), и оптимальный план имеет вид $(x_1, x_2) = (3;\ 7)$.
Наибольшая прибыль 2700 грн. достигается при выпуске 3-х компьютерных столов I вида и 7 компьютерных столов II вида.

Задание 2. Для задач, соответствующих номеру варианта, найдите оптимальное решение графическим методом.

Вариант 1.

Предприятие изготавливает два вида продукции - $P1$ и $P2$, которая поступает в оптовую продажу. Для производства продукции используются два вида сырья - A и B . Максимально возможные запасы сырья в сутки составляют 9 и 13 единиц соответственно.

Расход сырья на единицу продукции вида $P1$ и вида $P2$ задан в таблице 2.

Таблица 2 – **Исходные данные к варианту 1**

Сырье	Расход сырья на 1 ед. продукции		Запас сырья, ед.
	$P1$	$P2$	
A	2	3	9
B	3	2	13

Опыт работы показал, что суточный спрос на продукцию $P1$ никогда не превышает спроса на продукцию $P2$ более чем на 1 ед. Кроме того, известно, что спрос на продукцию $P2$ никогда не превышает 2 ед. в сутки. Оптовые цены единицы продукции равны: 3 д. е. - для $P1$ и 4 д.е. для $P2$.

Какое количество продукции каждого вида должно производить предприятие, чтобы доход от реализации продукции был максимальным?

Вариант 2.

Предприятие выпускает продукцию двух видов: $P1$ и $P2$. Используются три вида ресурсов: оборудование, сырье и электроэнергия. Нормы расхода, лимиты ресурсов и прибыль от единицы продукции представлены в таблице 3.

Таблица 3 – **Исходные данные к варианту 2**

Ресурсы	Норма расхода на единицу продукции		Имеющийся объем ресурса
	$P1$	$P2$	
Оборудование	2	3	30
Сырье	2	1	18
Электроэнергия	2	1	20
Прибыль	30	20	

Найти оптимальный план выпуска продукции.

Вариант 3.

Для производства двух видов изделий *А* и *В* используется токарное, фрезерное и шлифовальное оборудование. Нормы затрат времени каждого из типов оборудования на одно изделие данного вида приведены в таблице 4. В ней же указан общий фонд рабочего времени каждого из типов оборудования, а также прибыль от реализации одного изделия.

Таблица 4 – **Исходные данные к варианту 3**

Тип оборудования	Затраты времени (станко-ч) на обработку одного изделия		Общий фонд полезного рабочего времени оборудования (ч)
	А	*В*	
Фрезерное	10	8	168
Токарное	5	10	180
Шлифовальное	6	12	144
Прибыль	14	18	

Задание 3. Исследовать решение задачи линейного программирования симплекс-методом

Для изготовления двух видов продукции П1 и П2 используются четыре вида ресурсов Р1, Р2, Р3, Р4. Запасы ресурсов, число единиц ресурсов, затрачиваемых на изготовление единицы продукции, приведены в таблице 5.

Таблица 5 – **Исходные данные к заданию 3**

Вид ресурса	Число единиц ресурсов, затрачиваемых на изготовление единицу продукции		Запас ресурса
	П1	П2	
Р1	5	15	90
Р2	10	5	80
Р3	-	5	25
Р4	3	-	21

Решение.

Составим математическую модель задачи.

Обозначим x_1, x_2 - число единиц продукции П1 и П2, запланированных к производству. Связь между потреблением ресурсов и их запасами выразится системой неравенств:

$$\begin{cases} 5x_1 + 15x_2 \le 90 \\ 10x_1 + 5x_2 \le 80 \\ \qquad\quad 5x_2 \le 25 \\ 3x_1 \qquad\quad \le 21 \end{cases}$$

По смыслу задачи переменные $x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$.

Суммарная прибыль составит $z = 2x_1 + 3x_2$.

Таки образом математическая модель задачи имеет вид:

$$z = 2x_1 + 3x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} 5x_1 + 15x_2 \le 90 \\ 10x_1 + 5x_2 \le 80 \\ \qquad\quad 5x_2 \le 25 \\ 3x_1 \qquad\quad \le 21 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Приведем задачу к каноническому виду:

$$\begin{cases} 5x_1 + 15x_2 + x_3 = 90 \\ 10x_1 + 5x_2 + x_4 = 80 \\ 5x_2 + x_5 = 25 \\ 3x_1 + x_6 = 21 \end{cases}$$

Условия неотрицательности примут вид:

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, x_3 \ge 0,\ x_4 \ge 0,\ x_5 \ge 0,\ x_6 \ge 0.$

Целевую функцию прибыли представим в виде:

$z = 2x_1 + 3x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6.$

Заполним первую симлексную таблицу (Таблица 6).

Таблица 6 – **Начальная симплекс-таблица**

Базис		**Переменные**					
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_3	90	5	15	1	0	0	**0**
x_4	80	10	5	0	1	0	**0**
x_5	25	0	5	0	0	1	**0**
x_6	21	3	0	0	0	0	**1**
F	**0**	**–2**	**–3**	**0**	**0**	**0**	**0**

Проверяем критерий оптимальности. В последней строке имеются отрицательные коэффициенты. Выбираем наибольший по модулю (–3), он определит разрешающий столбец.

Переменная x_2 перейдет в базисные. Для положительных элементов столбца находим оценочные отношения и выбираем из них минимальное.

$$\min\left(\frac{90}{15};\frac{80}{5};\frac{25}{5}\right)=\min(6;16;5)=5$$

Третья строка является разрешающей.

Переменная x_5 перейдет из базисных переменных в свободные. На пересечении разрешающих строки и столбца стоит разрешающий элемент 5.

Построим новую симплексную таблицу по правилам:

1. Базисная переменная (в нашем случае - x_5) и свободная переменная (в нашем случае - x_2) меняются местами.

2. Элементы строки новой таблицы, соответствующей переменной, выведенной из базиса (в нашем случае - третьей), равны соответствующим элементам разрешающей строки «старой» таблицы, деленным на разрешающий элемент.

3. В столбцах, соответствующих базисным переменным, проставляем нули и единицы: 1 - против «своей» базисной переменной, 0 - против «чужой» базисной переменной. 0 - в последней строке

для всех основных переменных.

4. Все остальные элементы новой таблицы (Таблицы 7) вычисляем по «правилу прямоугольника».

Таблица 7 – **Симплекс-таблица после первой итерации**

Базис		**Переменные**					
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_3	15	5	0	1	0	-3	**0**
x_4	55	10	0	0	1	-1	**0**
x_2	5	0	1	0	0	1/5	**0**
x_6	21	3	0	0	0	0	**1**
F	**15**	**-2**	**0**	**0**	**0**	**3/5**	**0**

Критерий оптимальности вновь не выполнен. Теперь первый столбец является разрешающим. Переменная x_1 перейдет в базисные.

$$\min\left(\frac{15}{5};\frac{55}{10};\frac{21}{3}\right)=\min(3;5;5;7)=3$$

Первая строка - разрешающая. 5 - разрешающий элемент. Новая симплексная таблица 8 примет вид:

Таблица 8 – **Симплекс-таблица после второй итерации**

Базис		Переменные						**Оценочное отношение**
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_1	3	1	0	1/5	0	-3/5	0	—
x_4	25	0	0	-2	1	5	0	**25/5=5**
x_2	5	0	1	0	0	1/5	0	**5/0,2=25**
x_6	12	0	0	-3/5	0	9/5	1	**12/1,8=**$6\frac{2}{3}$
F	**21**	**0**	**0**	**2/5**	**0**	**-3/5**	**0**	

И на этот раз критерий оптимальности не выполнен. Пятый столбец и вторая строка являются разрешающими. 5 - разрешающий элемент.

Переходим к следующей таблице 9.

Таблица 9 – **Симплекс-таблица после третьей итерации**

Базис		Переменные					
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	6	1	0	-1/25	3/25	0	**0**
x_5	5	0	0	- 2/5	1/5	1	**0**
x_2	4	0	1	2/25	- 1/25	0	**0**
x_6	3	0	0	3/25	- 9/25	0	**1**
F	**24**	**0**	**0**	4/25	3/25	**0**	**0**

В последней строке все элементы неотрицательные, критерий оптимальности выполнен.

$x^* = (6;4;0;0;5;3).$

Значит, максимальное значение целевой функции прибыли составит 24 ден. ед., если будет выпущено 6 ед. продукции первого вида и 4 ед. продукции второго вида. Так как $x_3 = x_4 = 0$ (в последней симплексной таблице они не вошли в базис), то первый и второй ресурс будут израсходованы полностью.

Остаток ресурса P_3 составит 5 ед. ($x_5 = 5$), остаток ресурса P_4 составит 3 ед. ($x_6 = 3$).

Задание 4. Для задач, соответствующих номеру варианта из задания 2, найдите оптимальное решение задачи ЛП табличным методом.

Задание 5. Исследовать решение задачи ЛП с помощью табличного процессора MS Excel.

Для того чтобы решить задачу ЛП в табличном редакторе MS Excel,

необходимо выполнить следующие действия.

1. Ввести условие задачи:

а) создать экранную форму для ввода условия задачи:

– переменных,
– целевой функции (ЦФ),
– ограничений,
– граничных условий;

b) ввести исходные данные в экранную форму:
– коэффициенты ЦФ,
– коэффициенты при переменных в ограничениях,
– правые части ограничений;

c) ввести зависимости из математической модели в экранную форму:
– формулу для расчета ЦФ,
– формулы для расчета значений левых частей ограничений;

d) задать ЦФ (в окне "Поиск решения"):
– целевую ячейку,
– направление оптимизации ЦФ;

e) ввести ограничения и граничные условия (в окне "Поиск решения"):
– ячейки со значениями переменных,
– граничные условия для допустимых значений переменных,
– соотношения между правыми и левыми частями ограничений.

2. Решить задачу:

a) установить параметры решения задачи (в окне "Поиск решения");

b) запустить задачу на решение (в окне "Поиск решения");

c) выбрать формат вывода решения (в окне "Результаты поиска решения").

Рассмотрим пример нахождения решения для следующей задачи ЛП:

$$f(x) = 3x_1 + 5x_2 - 4x_3 - 3x_4 \to \max$$

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 - 4x_3 \le 24, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - 3x_4 \le 3, \\ x_1 - 4x_2 + 3x_4 \le 6, \\ x_2 + x_3 \le 6, \\ x_i \ge 0, \ \ i = \overline{1,4}. \end{cases}$$

Экранная форма для ввода условий задачи вместе с введенными в нее исходными данными представлена на рисунке 4.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1		**Переменные**						
2	Имя	x1	x2	x3	x4			
3	Значение							
4	Нижняя гр	0	0	0	0	ЦФ		
5						**Значение**	Направление	
6	Коэф. ЦФ	3	5	-4	-3		max	
7								
8		Ограничения						
9	Вид					Лев. часть	знак	Прав. часть
10	Огр.1	-1	3	-4	0	0	<=	24
11	Огр.2	2	1	-1	-3	0	<=	3
12	Огр.3	1	-4	0	3	0	<=	6
13	Огр.4	0	1	1	0	0	<=	6

Рисунок 4 – Исходные данные задачи

В экранной форме на рис. 4 каждой переменной и каждому коэффициенту задачи поставлена в соответствие конкретная ячейка в Excel. Имя ячейки состоит из буквы, обозначающей столбец, и цифры, обозначающей строку, на пересечении которых находится объект задачи ЛП. В ячейку F6, в которой будет отображаться значение ЦФ, необходимо ввести формулу, по которой это значение будет рассчитано. Согласно условию значение ЦФ определяется выражением

$$3x_1 + 5x_2 - 4x_3 - 3x_4$$

Используя обозначения соответствующих ячеек в Excel (см. рис. 2), формулу для расчета ЦФ можно записать как сумму произведений каждой из ячеек, отведенных для значений переменных задачи (B3, C3, D3, E3), на соответствующую ячейку, отведенную для коэффициентов ЦФ (B6, C6, D6, E6), то есть: B6*B3 + C6*C3 + D6*D3 + E6*E3.

Чтобы задать формулу необходимо в ячейку F6 ввести следующее выражение и нажать клавишу «Enter» либо воспользоваться мастером функций:

= СУММПРОИЗВ(B$3:E$3;B6:E6)

где символ "$" перед номером строки 3 означает, что при копировании этой формулы в другие места листа Excel номер строки 3 не изменится; символ ":" означает, что в формуле будут использованы все ячейки, расположенные между ячейками, указанными слева и справа от двоеточия. После этого в целевой ячейке появится 0 (нулевое значение).

Дальнейшие действия производятся в окне «Поиск решения» (Рисунок 5), которое вызывается из меню «Сервис» (или лента Данные→Поиск решения для MS Office 10).

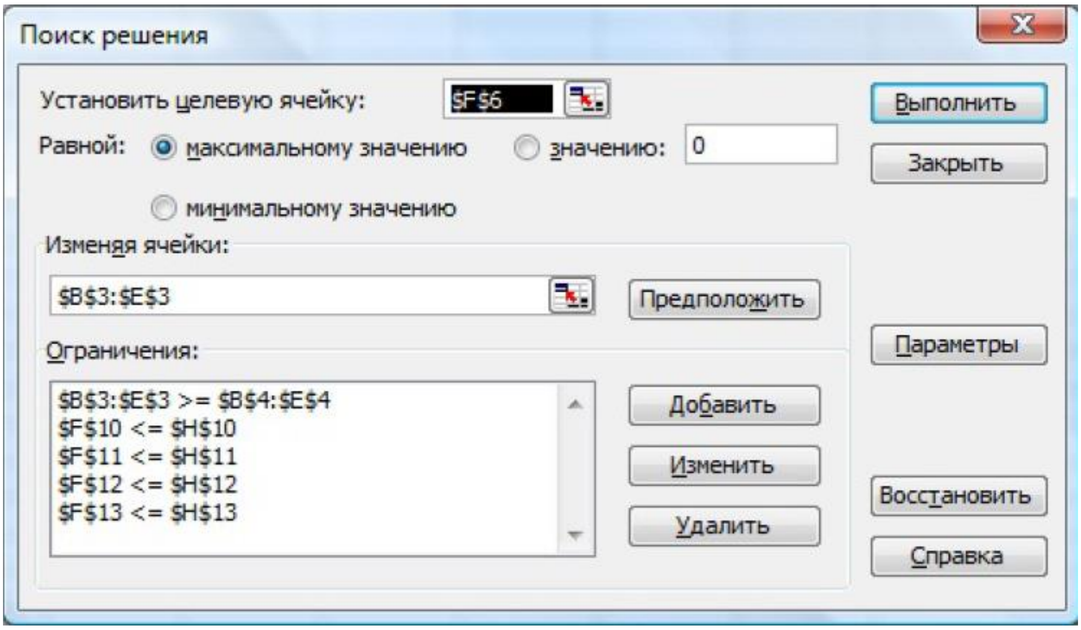


Рисунок 5 – Окно «Поиск решения»

В окне «Поиск решения»:

– поставьте курсор в поле "Установить целевую ячейку";

– введите адрес целевой ячейки $F$6 или сделайте одно нажатие левой клавиши мыши на целевую ячейку в экранной форме - это будет равносильно вводу адреса с клавиатуры;

– введите направление оптимизации ЦФ, установив переключатель "максимальному значению";

– в поле «Изменяя ячейки» впишите адреса $B$3:$E$3 (необходимые адреса можно вносить в поле и автоматически путем выделения мышью соответствующих ячеек переменных непосредственно в экранной форме). В нашем случае на значения переменных накладывается только граничное условие неотрицательности, то есть их нижняя граница должна быть равна нулю.

– нажмите кнопку «Добавить» после чего появится окно «Добавление ограничения» (Рис. 6).

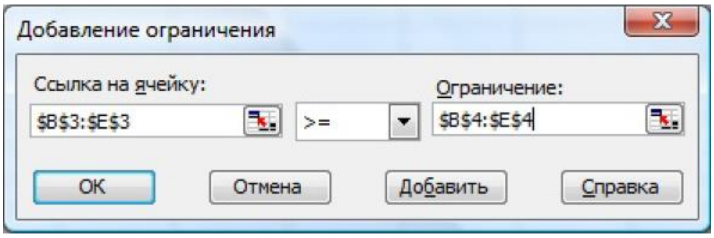


Рисунок 6 – Ограничения задачи

– в поле «Ссылка на ячейку» введите адреса ячеек переменных $B$3:$E$3. Это можно сделать как с клавиатуры, так и путем выделения мышью всех ячеек переменных непосредственно в экранной форме.

– в поле знака откройте список предлагаемых знаков и выберите «≥».

– в поле «Ограничение» введите адреса ячеек нижней границы значений переменных, то есть $B$4:$E$4. Их также можно ввести путем выделения мышью непосредственно в экранной форме.

– нажмите кнопку «Добавить» в окне «Добавление ограничения».

– в поле «Ссылка на ячейку» введите адрес ячейки левой части конкретного ограничения, например $F$10. Это можно сделать как с клавиатуры, так и путем выделения мышью нужной ячейки непосредственно в экранной форме.

– в соответствии с условием задачи выбрать в поле знака необходимый знак.

– в поле «Ограничение» введите адрес ячейки правой части рассматриваемого ограничения, например $H$10.

Аналогично введите ограничения: $F$11>=$H$11, $F$12<=$H$12.

Подтвердите ввод всех перечисленных выше условий нажатием кнопки ОК.

Окно «Поиск решения» после ввода всех необходимых данных задачи представлено на рис. 3.

Если при вводе условия задачи возникает необходимость в изменении или удалении внесенных ограничений или граничных условий, то это делают, нажав кнопки «Изменить» или «Удалить».

Задача запускается на решение в окне «Поиск решения» путем нажатия кнопки «Выполнить».

После запуска на решение задачи ЛП на экране появляется окно «Результаты поиска решения» (Рис. 7)

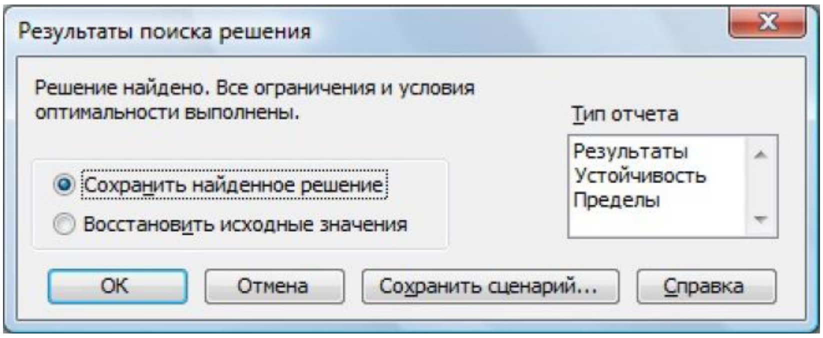
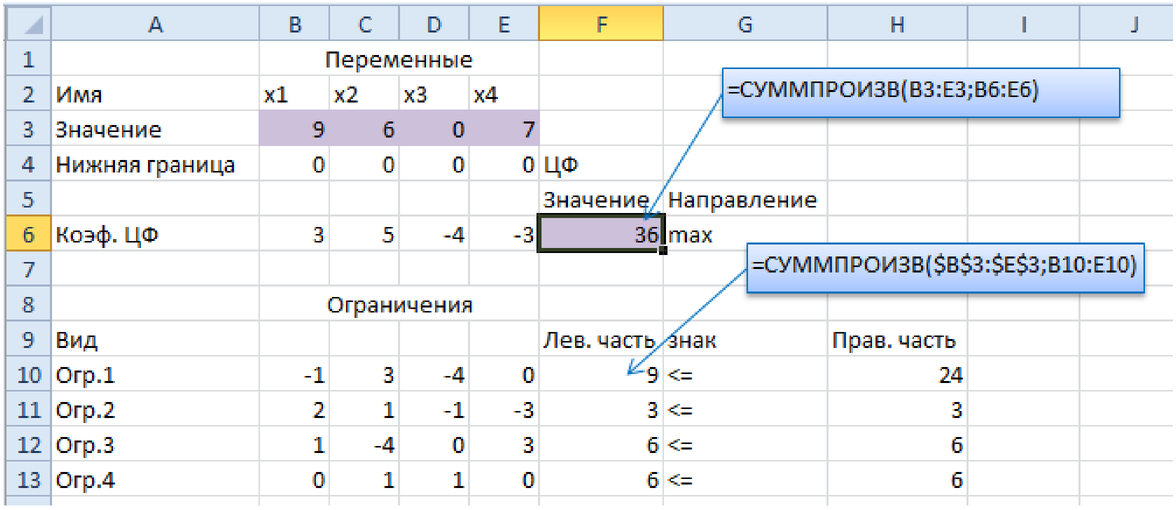


Рисунок 7 – Окно «Результаты поиска решения»

В окне «Результаты поиска решения» представлены названия трех типов отчетов: «Результаты», «Устойчивость» и «Пределы». Они необходимы при анализе полученного решения на чувствительность. Для получения же ответа (значений переменных, ЦФ и левых частей ограничений) прямо в экранной форме просто нажмите кнопку «ОК». После этого в экранной форме появляется оптимальное решение задачи (Рис. 8):



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1		Переменные								
2	Имя	x1	x2	x3	x4					
3	Значение	9	6	0	7					
4	Нижняя граница	0	0	0	0	ЦФ				
5						Значение	Направление			
6	Коэф. ЦФ	3	5	-4	-3	36	max			
7										
8		Ограничения								
9	Вид					Лев. часть	Знак	Прав. часть		
10	Огр.1	-1	3	-4	0	9	<=	24		
11	Огр.2	2	1	-1	-3	3	<=	3		
12	Огр.3	1	-4	0	3	6	<=	6		
13	Огр.4	0	1	1	0	6	<=	6		

Рисунок 8 – Решение задачи

Задание 6. Решить задачу из задания 4 с помощью табличного процессора Microsoft Excel.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Что называется общей задачей линейного программирования (ОЗЛП)?
2. Что называется целевой функцией прибыли?
3. Что называется целевой функцией затрат?
4. Что называется системой ограничений ОЗЛП?
5. Какие ОЗЛП можно решать графическим методом?
6. В чем состоит схема решения задачи линейного программирования графическим методом?
7. Что называется допустимым планом ОЗЛП?
8. Что называется оптимальным планом ОЗЛП?
9. В чем состоит схема введения дополнительных переменных в систему ограничений ОЗЛП?
10. Какие переменные в системе уравнений называются свободными?
11. Какие переменные в системе уравнений называются базисными?
12. Что называется разрешающим столбцом матрицы системы уравнений?

13. Что называется разрешающей строкой матрицы системы уравнений?

14. Что называется разрешающим элементом матрицы системы уравнений?

15. В чем состоит схема преобразования системы уравнений методом полных жордановых исключений?

16. Что называется базисным решением ОЗЛП?

17. Что называется опорным решением ОЗЛП?

18. Из каких этапов состоит симплекс-метод решения ОЗЛП?

19. Как формируется первая симплекс-таблица?

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА 2
ТРАНСПОРТНАЯ ЗАДАЧА

Цель работы: исследовать методы решения транспортных задач линейного программирования, приобрести навыки построения математических моделей стандартных транспортных задач ЛП и решения их в Microsoft Excel.

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Классическая транспортная задача является одной из типичных задач линейного программирования, она возникает при планировании наиболее рациональных перевозок грузов.

Постановка и математическая модель транспортной задачи

Пусть имеется m пунктов отправления (ПО): $A_1, A_2, ..., A_m$, в которых сосредоточены запасы каких-то однородных грузов в количестве соответственно $a_1, a_2, ..., a_m$ единиц. Также имеется n пунктов назначения (ПН): $B_1, B_2, ..., B_n$, подавших заявки соответственно на $b_1, b_2, ..., b_n$ единиц груза. Считаем, что сумма всех заявок равна сумме всех запасов (сбалансированная транспортная задача):

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j . \qquad (1)$$

Известны стоимости c_{ij} перевозки единицы груза от каждого пункта отправления A_i до каждого пункта назначения B_j $i = (\overline{1,m},\ j = \overline{1,n})$. Считается, что стоимость перевозки нескольких единиц груза пропорциональна их числу. Требуется составить такой план перевозок, чтобы все заявки были выполнены, а общая стоимость всех перевозок минимальна.

Экономико-математическая модель задачи имеет вид задачи линейного программирования. Обозначим x_{ij} – количество единиц груза, отправляемого из i-го ПО A_i в j-й ПН B_j. Совокупность чисел (x_{ij}) будем называть *планом перевозок*, а сами величины x_{ij} – *перевозками*.

Необходимо найти такой план перевозок (x_{ij}), при котором целевая функция (суммарная стоимость перевозок) будет минимальной:

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \min \qquad (2)$$

и который удовлетворяет следующим ограничениям:

1) Суммарное количество груза, направляемого из каждого ПО во все ПН должно быть равно запасу груза в данном пункте:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + \ldots + x_{in} = a_1, \\ x_{21} + x_{22} + \ldots + x_{2n} = a_2, \\ \qquad\qquad \ldots \\ x_{m1} + x_{m2} + \ldots + x_{mn} = a_m. \end{cases} \qquad (3)$$

2) Суммарное количество груза, доставляемого в каждый ПН из всех ПО, должно быть равно заявке, поданной данным пунктом:

$$
\begin{cases}
x_{11} + x_{21} + \ldots + x_{im1} = b_1, \\
x_{12} + x_{22} + \ldots + x_{m2} = b_2, \\
\qquad \ldots \\
x_{1n} + x_{2n} + \ldots + x_{mn} = b_n.
\end{cases} \tag{4}
$$

3) Условие неотрицательности:

$$
x_{ij} \geq 0,\ i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}. \tag{5}
$$

Решение транспортной задачи разбивается на два этапа:

1) определение исходного опорного решения;

2) построение последовательных итераций – приближение к оптимальному решению.

Обычно, для решения транспортной задачи используют ее табличную модель (Таблица 10), в которой ячейкам поставлены в соответствие перевозки – переменные x_{ij}, при заполнении таблицы задаются значения неизвестных:

Таблица 10 – **Табличная модель транспортной задачи**

	ПН	B_1	B_2	…	B_n
ПО		b_1	b_2	…	b_n
A_1	a_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	…	c_{1n} x_{1n}
A_2	a_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	…	c_{2n} x_{2n}
…	…	…	…	…	…
A_m	a_m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	…	c_{mn} x_{mn}

Методы определения исходного опорного решения

Существует несколько способов, наиболее популярными являются:

- метод северо-западного угла,

- метод минимального элемента,
- метод аппроксимации Фогеля.

Они перечислены в порядке усложнения алгоритма, но при этом получаемое решение, как правило, меньше отличается от оптимального.

В каждом методе на любом шаге в выбранную ячейку (x_{ij}) таблицы помещается *максимальная допустимая перевозка* – минимальное из того, что есть у соответствующего поставщика (ПО) A_i и требуется соответствующему потребителю (ПН) B_j. При этом каждый раз «закрывается» строка таблицы, если у соответствующего поставщика (ПО) больше нет груза, или «закрывается» столбец, если соответствующему потребителю (ПН) больше не надо груза. Методы отличаются лишь способом построения последовательности заполнения ячеек таблицы.

В *методе северо-западного угла* первой заполняется ячейка x_{11} (северо-западный угол таблицы), а затем последовательно двигаются вправо и вниз без учета стоимости перевозок. Заполнив ячейку x_{ij}, переходят к заполнению ячейки $x_{i,j+1}$ (вправо), если же в нее нельзя помещать ненулевую перевозку, то переходят к ячейке $x_{i+1,j}$ (вниз) и т.д.

В *методе минимального элемента* заполнение начинается с ячейки с минимальной стоимостью. Каждый раз переходят к следующей свободной ячейке (расположенной в «незакрытых» сроках и столбцах) с минимальной стоимостью.

Пример 1. Метод северо-западного угла.

Последовательность заполнения таблицы (Таблица 11):

$$\left(x_{11}=10\right)\to\left(x_{12}=20\right)\to\left(x_{22}=20\right)\to\left(x_{32}=25\right)\to\left(x_{33}=25\right)$$

Стоимость перевозок:

F = 10*6+20*3+20*1+25+4+25*1 = 265.

Таблица 11 – **Опорный план по методу северо-западного угла**

	ПН	B_1	B_2	B_3
ПО		10	65	25
A_1	30	6 10	3 20	2
A_2	20	2	1 20	5
A_3	50	3	4 25	1 25

Пример 2. Метод минимального элемента

Последовательность заполнения таблицы:

$$(x_{22} = 20) \to (x_{33} = 25) \to (x_{12} = 30) \to (x_{31} = 10) \to (x_{32} = 15)$$

Стоимость перевозок:

F = 30*3+20*1+10*3+15*4+25*1=225.

Таблица 12 – **Опорный план по методу минимального элемента**

	ПН	B_1	B_2	B_3
ПО		10	65	25
A_1	30	6	3 30	2
A_2	20	2	1 20	5
A_3	50	3 10	4 15	1 25

Как видно, методом минимального элемента получена стоимость перевозок меньше, чем методом северо-западного угла, но первый метод проще в реализации. Метод аппроксимации Фогеля дает, как правило, еще более близкое к оптимальному опорное решение.

Отыскание оптимального решения с помощью метода потенциалов

Получив первый опорный план перевозок, следует проверить его на оптимальность и, если требуется, перейти к новому опорному плану с меньшей стоимостью перевозок. Для этого можно использовать метод потенциалов.

После построения исходного опорного решения все переменные разбиты на две группы: базисные (заполненные ячейки таблицы) и свободные (пустые, нулевые ячейки таблицы). Сопоставим каждому ПО A_i некоторую величину u_i, которую назовем *потенциалом поставщика* A_i, а каждому ПН B_j поставим в соответствие число v_i – *потенциал потребителя* B_j. Совокупность уравнений $u_i + v_j = c_{ij}$ (где c_{ij} стоимость перевозки из A_i в B_j), составленных для всех базисных переменных, т.е. для заполненных клеток, содержит $(m+n)$ неизвестных потенциалов и $(m+n-1)$ уравнение. Поэтому одну переменную u_i или v_i можно выбрать произвольно, например, $u_1 = 0$. Значения остальных потенциалов находят из системы однозначно.

Для каждой свободной клетки вычисляется числовая характеристика – *косвенная стоимость*: $d_{ij} = c_{ij} - (u_i + v_j)$.

Критерий оптимальности плана перевозок:

Для того, чтобы некоторый опорный план $X^* = \left(x_{ij}^*\right)$ транспортной задачи был оптимальным, необходимо и достаточно, чтобы ему соответствовала система из $(m+n)$ чисел u_i и v_i, удовлетворяющих условиям:

1) $c_{ij} = u_i + v_j$, если $x_{ij} \geq 0$ (для заполненных клеток),

2) $d_{ij} = c_{ij} - (u_i + v_j) \geq 0$ (для свободных клеток).

Т.е. если все косвенные стоимости неотрицательные, то решение оптимальное, в противном случае его можно улучшить.

Если данный план перевозок не оптимальный, то в свободную ячейку, которой соответствует наименьшая отрицательная косвенная стоимость d_{ij}, помещают перевозку λ и составляют *цикл пере-*

счета (замкнутая ломанная линия, состоящая из горизонтальных и вертикальных отрезков прямых, первая вершина которой находится в свободной ячейке с перевозкой λ, а остальные в базисных (заполненных) ячейках). По циклу пересчета восстанавливается баланс, нарушенный ненулевой перевозкой λ (см. Рис. 9)

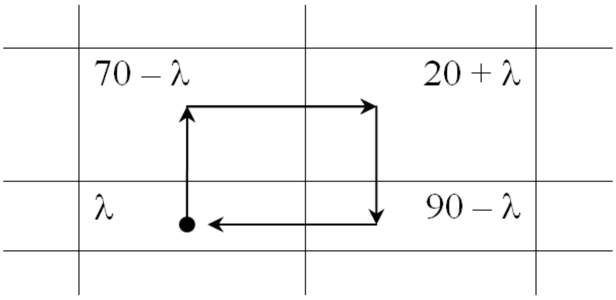


Рисунок 9 – Цикл пересчета

Значение λ определяется как максимально возможное, сохраняющее неотрицательность всех перевозок, т.е. по соотношениям вида $x_{ij} - \lambda$. На рис. 5: $\lambda = \min\{70, 90\}$.

В результате определения λ и пересчета перевозок получаем новый опорный план, который необходимо проверить на оптимальность.

Алгоритм применения метода потенциалов:

1) Определить начальный опорный план, рассчитать стоимость перевозок.

2) Составить систему уравнений $c_{ij} = u_i + v_j$ для заполненных клеток. При $u_1 = 0$ найти потенциалы всех поставщиков u_i и потребителей v_i.

3) Определить косвенные стоимости свободных ячеек по формуле: $d_{ij} = c_{ij} - (u_i + v_j)$.

4) Если все косвенные стоимости неотрицательны, то план перевозок оптимальный.

5) Если есть отрицательные косвенные стоимости, то в свободную ячейку с наименьшей отрицательной косвенной стоимостью поместить перевозку λ и составить цикл пересчета.

6) Найти максимальное значение λ при условии сохранения не-

отрицательности всех перевозок, составить новый опорный план, рассчитать стоимость перевозок.

7) Перейти к п.2.

ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

Задание 1. Взяв данные из Примера 1, исследовать одно улучшение опорного плана методом потенциалов:

Опорный план представлен в таблице 13.

Таблица 13 – **Опорный план в табличной форме**

	ПН	B_1	B_2	B_3
ПО		10	65	25
A_1	30	-λ 6 10	+λ 3 20	2
A_2	20	2	1 20	5
A_3	50	λ 3	-λ 4 25	1 25

Составим систему уравнений $c_{ij} = u_i + v_j$ для заполненных клеток:

$$\begin{cases} c_{11} = u_1 + v_1 \\ c_{12} = u_1 + v_2 \\ c_{22} = u_2 + v_2 \\ c_{32} = u_3 + v_2 \\ c_{33} = u_3 + v_3 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} 6 = u_1 + v_1 \\ 3 = u_1 + v_2 \\ 1 = u_2 + v_2 \\ 4 = u_3 + v_2 \\ 1 = u_3 + v_3 \end{cases}$$

Пусть $u_1 = 0$, найдем потенциалы всех поставщиков u_i и потребителей v_j:

$u_1 = 0, \qquad v_1 = 6$
$u_2 = -2, \qquad v_2 = 3$
$u_3 = 1, \qquad v_3 = 0$

Определим косвенные стоимости свободных ячеек:

$$d_{13} = c_{13} - (\mathrm{u}_1 + v_3) = 2 - (0 + 0) = 2$$
$$d_{21} = c_{21} - (\mathrm{u}_2 + v_1) = 2 - (-2 + 6) = -2$$
$$d_{23} = c_{23} - (\mathrm{u}_2 + v_3) = 5 - (-2 + 0) = 7$$
$$d_{31} = c_{31} - (\mathrm{u}_3 + v_1) = 3 - (1 + 6) = -4$$

Поскольку есть отрицательные косвенные стоимости, то решение не оптимальное. Поместим перевозку λ в ячейку x_{31}, которой соответствует наименьшая отрицательная косвенная стоимость $d_{31} = -4$. Построим цикл пересчета:

$$x_{31}(\lambda) \to x_{13}(10 - \lambda) \to x_{12}(20 + \lambda) \to x_{32}(25 - \lambda) \to x_{31}(\lambda)$$

Найдем максимальное значение λ, сохраняющее неотрицательность всех перевозок: (если взять значение λ больше, то в ячейке x_{13} будет отрицательная перевозка).

Пересчитаем новый план перевозок (Таблица 14).

Таблица 14 – **План перевозок после первой итерации**

	ПН	B_1	B_2	B_3
ПО		10	65	25
A_1	30	6	3 30	2
A_2	20	2	1 20	5
A_3	50	3 10	4 15	1 25

Стоимость перевозок:
F = 30*3+20*1+10*3+15*4+25*1=225.

Задание 2. Решить транспортную задачу методом потенциалов согласно варианту.

Определить опорный план перевозок с помощью метода северо-западного угла.

Заводы предприятия расположены в пунктах А1, А2, А3. Центры распределения (пункты назначения) расположены в пунктах В1,В2, В3.

Объемы производства в пунктах А1, А2, А3, величины спроса в пунктах В1,В2, В3 и стоимости перевозок заданы в соответствующих таблицах.

Вариант 1.

Объем производства в пункте			Величина спроса в пункте		
А1	А2	А3	В1	В2	В3
1400	700	1000	900	800	1400

Стоимости перевозки	В1	В2	В3
А1	20	30	50
А2	40	60	40
А3	70	40	60

Вариант 2.

Объем производства в пункте			Величина спроса в пункте		
А1	А2	А3	В1	В2	В3
1300	1200	1100	1000	1500	1100

Стоимости перевозки	В1	В2	В3
А1	30	20	50
А2	70	60	20
А3	50	50	60

Вариант 3.

Объем производства в пункте			Величина спроса в пункте		
A1	A2	A3	B1	B2	B3
700	600	500	1000	200	60

Стоимости перевозки	B1	B2	B3
A1	20	30	40
A2	50	60	30
A3	30	40	60

Задание 3. Исследовать решение транспортной задачи с помощью табличного процессора MS Excel.

Задача: имеется 3 пункта отправления товаров A1, A2, A3 и три пункта назначения B1, B2, B3. Запасы продукции в пунктах отправления, потребности продукции в пунктах назначения и стоимости перевозок заданы таблицей 15.

Таблица 15 – **Исходные данные к заданию 3**

	ПН	B_1	B_2	B_3
ПО		10	65	25
A_1	30	6	3	2
A_2	20	2	1	5
A_3	50	3	4	1

Необходимо найти такой план перевозок, при котором целевая функция (суммарная стоимость перевозок) будет минимальной.

Решение

Выполняем проверку на сбалансированность транспортной задачи: сумма запасов продукции в пунктах отправления должна быть равной суммарной потребности продукции в пунктах назначения.

30+20+50 = 10+65+25

Таким образом получаем сбалансированную транспортную задачу.

Формальная целевая функция, т.е. суммарные затраты на все возможные перевозки, учитываемые в модели, задаются следующим выражением:

$$\mathrm{F(x)} = 6x_{11} + 3x_{12} + 2x_{13} + 2x_{21} + x_{22} + 5x_{23} + 3x_{31} + 4x_{32} + x_{33} \to \min$$

Все ограничения задачи будут иметь вид:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} = 30 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} = 20 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} = 50 \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} = 10 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = 65 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = 25 \\ x_{ij} \geq 0 \left(i = \overline{1,3};\ j = \overline{1,3}\right) \end{cases}$$

Двухиндексные задачи ЛП вводятся и решаются в Excel аналогично одноиндексным задачам. Специфика ввода условия двухиндексной задачи ЛП состоит лишь в удобстве матричного задания переменных задачи и коэффициентов ЦФ.

Экранные формы, задание переменных, целевой функции, ограничений и граничных условий задачи и ее решение представлены на рисунках 11-12.

Введите исходные данные, как представлено на рисунке 10. Формулы, используемые для решения задачи представлены в таблице 16.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1		**Переменные**				**Ограничения**		
2		целые	Xi1	Xi2	Xi3	Лев. часть	Знак	Прав. часть
3		X1j					=	30
4		X2j					=	20
5		X3j					=	50
6	**Ограничения**	Лев. часть						
7		Знак	=	=	=			100
8		Прав. часть	10	65	25		100	Баланс
9								
10								
11		**Тарифы**	Xi1	Xi2	Xi3			
12		X1j	6	3	2		**ЦФ**	
13		X2j	2	1	5		Значение	Направление
14		X3j	3	4	1			min

Рисунок 10 – Исходные данные

Таблица 16 – **Формулы экранной формы задачи:**

Объект математической модели	Выражение в Excel
Переменные задачи	C3:E5
Формула в целевой ячейке G14	=СУММПРОИЗВ(C3:E5;C12:E14)
Ограничения по строкам в ячейках F3, F4, F5	=СУММ(C3:E3) =СУММ(C4:E4) =СУММ(C5:E5)
Ограничения по столбцам в ячейках C6, D6, E6	=СУММ(C3:C5) =СУММ(D3:D5) =СУММ(E3:E5)
Суммарные запасы и потребности в ячейках H7, G8	=СУММ(H3:H5) =СУММ(C8:E8)

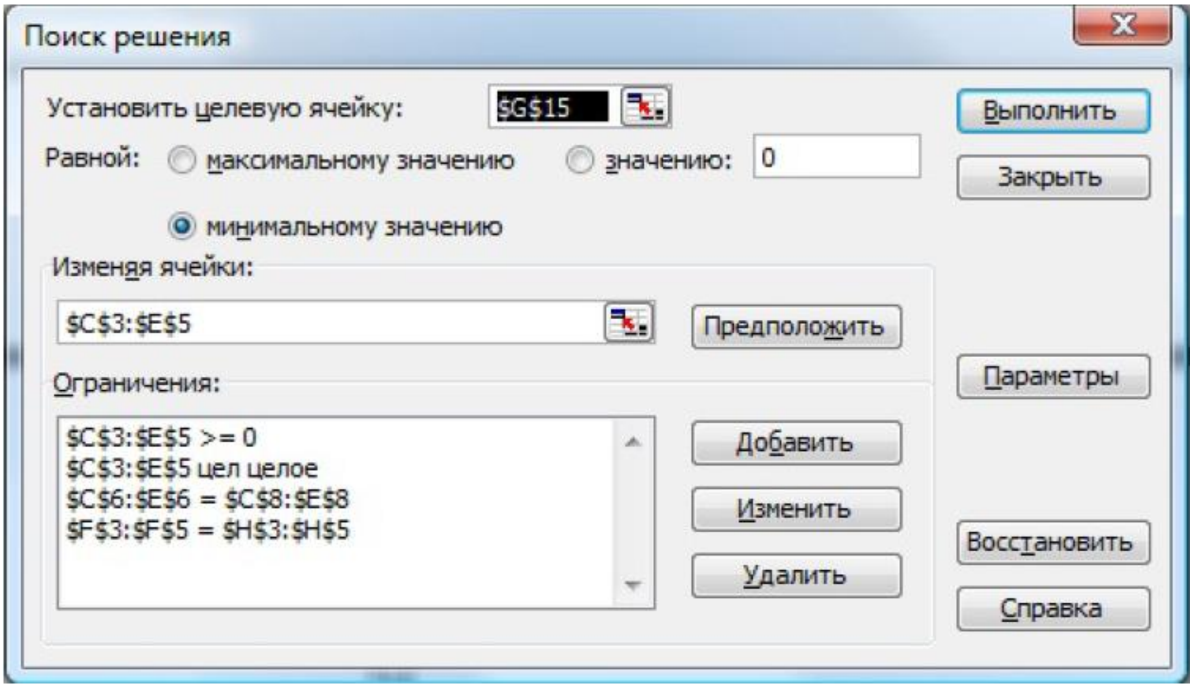


Рисунок 11 – Ограничения и граничные условия задачи

	A	B	C	D	E	F	G	H
1		**Переменные**				**Ограничения**		
2		целые	Xi1	Xi2	Xi3	Лев. часть	Знак	Прав. часть
3		X1j	0	30	0	30	=	30
4		X2j	0	20	0	20	=	20
5		X3j	10	15	25	50	=	50
6	**Ограничения**	Лев. часть	10	65	25			
7		Знак	=	=	=			100
8		Прав. часть	10	65	25		100	Баланс
9								
10								
11		**Тарифы**	Xi1	Xi2	Xi3			
12		X1j	6	3	2		**ЦФ**	
13		X2j	2	1	5		Значение	Направление
14		X3j	3	4	1		225	min

Рисунок 12 – Экранная форма после получения решения задачи

Задание 4. Решить задачу из задания 2 с помощью табличного процессора MS Excel.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Что называется транспортной задачей?
2. Что называется тарифом перевозки в транспортной задаче?
3. Какая транспортная задача называется закрытой?
4. Какая транспортная задача называется открытой?
5. В чем состоит процедура закрытия открытой транспортной задачи?
6. Что называется фиктивным поставщиком?
7. Что называется фиктивным потребителем?
8. Что называется потенциалом в транспортной задаче?
9. В чем состоит схема решения транспортной задачи с помощью метода потенциалов?
10. Как строится первоначальный план перевозок с помощью метода северо-западного угла?
11. Как строится первоначальный план перевозок с помощью метода наименьшей стоимости?
12. Что называется циклом в транспортной таблице?
13. Какие клетки транспортной таблицы называются базисными?
14. Какие клетки транспортной таблицы называются свободными?
15. Какой план перевозок называется вырожденным?
16. Какой план называется ациклическим?
17. В чем состоит схема пополнения вырожденного плана перевозок?
18. В чем состоит критерий оптимальности плана при решении транспортной задачи методом потенциалов?

ЛИТЕРАТУРА

1. Таха, Хемди А. Введение в исследование операций, 7-е издание.: Пер. с англ. – М.: Издательский дом "Вильямс", 2008. – 912 с: ил.

2. Шикин Е. В., Шикина Г. Е. Исследование операций : учеб. – М.: ТК Велби, Изд-во Проспект, 2006. – 280 с.

3. Бодров В.И., Лазарева Т.Я., Мартемьянов Ю.Ф. Методы исследования операций при принятии решений: Учебное пособие. Тамбов: Изд-во Тамб. гос. техн. ун-та, 2004. 160 с.

4. Исследование операций. Теория игр: Учеб.пособие/ Л.С. Костевич, А.А. Лапко. – Мн.: Выш. шк., 2008.

5. Волков И.К., Загоруйко Е.А. Исследование операций: учебное пособие для вузов. 2-е изд. / Под ред. В.С. Зарубина, А.П. Крищенко. – М. Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана. – 2007. – 436 с.

6. М.М. Ковалев, М.М. Писарук. Современное линейное программирование. - Минск, Издательский центр Белгосуниверситета, 1998. – 260 с.

7. Высшая математика: Математическое программирование.: Учеб.пособие/ А.В. Кузнецов, В.А. Сакович, Н.И. Холод; Под общ. ред. А.В. Кузнецова. — Мн.: Выш. шк., 2005. – 278 с.

Учебное издание

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

К ВЫПОЛНЕНИЮ ЛАБОРАТОРНЫХ РАБОТ ПО ДИСЦИПЛИНЕ
«ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ»
для студентов направления подготовки
6.050201 – Системная инженерия
заочной формы обучения

Составитель: Подоляка Оксана Александровна

Ответственный за выпуск О.Я. Никонов
Редактор

План 2013, поз.
Подп. к печати __________ Формат 60х84 1/16.
Условн. печат. лист. ____ Учетн.-изд. лист. ___
Заявка № _______ Тираж ____ прим. Цена договорная

ХНАДУ, 61002, г. Харьков-МСП, ул. Петровского, 25

Свидетельство государственного комитета информационной политики, телевидения и радиовещания Украины о внесении субъекта издательской деятельности в государственный реестр издательств, изготовителей и распространителей издательской продукции, серия ДК, № 407

Подготовлено и напечатано издательством Харьковского национального автомобильно-дорожного университета