Министерство образования и науки Украины

ХАРЬКОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ АВТОМОБИЛЬНО-ДОРОЖНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

К ВЫПОЛНЕНИЮ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ «ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ»

для студентов направления подготовки

6.050201 – Системная инженерия

заочной формы обучения

2013

Составитель О.А. Подоляка

Кафедра информационных технологий и мехатроники

ВВЕДЕНИЕ

Данные методические указания предназначены для самостоятельной работы студентов заочного отделения направления подготовки «Системная инженерия», специальности 6.050201 - «Компьютерные системы управления движущимися объектами» по изучению дисциплины «Исследование операций» и выполнению контрольной работы.

Методические указания содержат необходимый теоретический материал с практическими примерами решения задач.

Контрольная работа выполняется в соответствии с вариантом. Номер варианта определяется по последним двум цифрам номера зачетной книжки следующим образом:

Последние две цифры номера зачетной книжки	Номер варианта
00	10
от 01 до 15	с 1 по 15
от 15 до 30	от этих цифр отнять 15
от 31 до 45	от этих цифр отнять 30
от 46 до 60	от этих цифр отнять 45
от 61 до 75	от этих цифр отнять 60
от 76 до 90	от этих цифр отнять 75
от 90 до 99	с 1 по 9

Контрольная работа выполняется на листах формата А4 в рукописном или машинописном виде.

Каждое задание должно начинаться с новой страницы и обязательно содержать условие, развернутое, пошаговое решение с необходимыми графиками, таблицами или рисунками. Пример оформления титульного листа приводится в приложении.

1. КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

1.1. Основные определения

Исследование операций - теория математических моделей и методов принятия решений, для которых характерно:

1. Наличие некоторого **процесса;**
2. Наличие **управляющих воздействий;**
3. Наличие **цели**, ради которой проводится операция;
4. **Выбор наилучшего (оптимального) управления**, при котором достигается цель.

Операция - система действий, объединенная единым замыслом и направленная на достижение определенной цели.

Основная задача теории оптимальных решений состоит в представлении обоснованных количественных данных и рекомендаций для принятия оптимальных решений.

Набор управляющих параметров (переменных) при проведении операции называется ***решением***. Решение называется ***допустимым***, если оно удовлетворяет набору определенных условий. Решение называется ***оптимальным***, если оно допустимо и, по определенным признакам, предпочтительнее других, или, по крайней мере, не хуже.

Признак предпочтения называется критерием оптимальности. Критерий

оптимальности включает в себя *целевую функцию* и *направление оптимизации* или набор целевых функций и соответствующих направлений оптимизации.

Целевая функция – это количественный показатель предпочтительности или эффективности решений.

Направление оптимизации – это *максимум (минимум),* если наиболее предпочтительным является наибольшее (наименьшее) значение целевой функции.

Например, критерием может быть максимизация прибыли либо минимизация расходов.

Математическая модель задачи исследования операций включает в себя:

1) описание переменных, которые необходимо найти,

2) описание критериев оптимальности,

3) описание множества допустимых решений (ограничений, накладываемых на переменные).

Цель исследования операций - количественно и качественно обосновать принимаемое решение.

Окончательное решение принимает ответственное лицо (либо группа лиц), называемое ***лицо, принимающее решение (ЛПР)***.

1.2. Модели и методы исследования операций

Все модели исследования операций можно разделить на группы по следующим основным признакам:

Вид модели:

– детерминированные;
– вероятностные.

Тип варьируемых переменных:

– дискретные;
– непрерывные.

Вид целевой функции и ограничений:

– линейные;
– нелинейные.

Для их решения используются:

– методы оптимизации;
– методы имитационного моделирования;
– эвристические подходы.

Оптимизация – в математике, информатике и исследовании операций задача нахождения экстремума (минимума или максимума) целевой функции в некоторой области конечномерного векторного пространства, ограниченной набором линейных и/или нелинейных равенств и/или неравенств.

Теорию и методы решения задачи оптимизации изучает математическое программирование.

Имитационное моделирование – это метод исследования, при котором изучаемая система заменяется моделью, с достаточной точностью описывающей реальную систему, с которой проводятся эксперименты с целью получения информации об этой системе. Экспериментирование с моделью называют имитацией (имитация –

это постижение сути явления, не прибегая к экспериментам на реальном объекте).

Имитационное моделирование – это частный случай математического моделирования.

Эвристический алгоритм – это алгоритм решения задачи, правильность которого для всех возможных случаев не доказана, но про который известно, что он даёт достаточно хорошее решение в большинстве случаев.

Проще говоря, эвристика – это не полностью математически обоснованный (или даже «не совсем корректный»), но при этом практически полезный алгоритм.

Важно понимать, что эвристика, в отличие от корректного алгоритма решения задачи, обладает следующими особенностями:

– она не гарантирует нахождение лучшего решения;
– она не гарантирует нахождение решения, даже если оно заведомо существует (возможен «пропуск цели»);
– она может дать неверное решение в некоторых случаях.

Типы задач ИСО:

1. Долгосрочное стратегическое планирование:
– задачи размещения производства,
– развитие нефтяной и газовой промышленности.

2. Среднесрочное планирование:
– транспортные задачи,
– задачи маршрутизации,
– задачи календарного планирования с ограниченными ресурсами.

3. Оперативное управление:
– задачи теории расписаний,
– задачи раскроя и упаковки.

1.3. Линейное программирование (ЛП)

Задачи оптимального планирования, связанные с отысканием оптимума заданной целевой функции (линейной формы) при наличии ограничений в виде линейных уравнений или линейных неравенств относятся к задачам линейного программирования.

Линейное программирование – это направление математического программирования, изучающее методы решения экстремальных задач, которые характеризуются линейной зависимостью между переменными и линейным критерием.

Необходимым условием постановки задачи линейного программирования являются ограничения на наличие ресурсов, величину спроса, производственную мощность предприятия и другие производственные факторы.

Сущность линейного программирования состоит в нахождении точек наибольшего или наименьшего значения некоторой функции при определенном наборе ограничений, налагаемых на аргументы и образующих систему ограничений, которая имеет, как правило, бесконечное множество решений.

Каждая совокупность значений переменных (аргументов функции F), которые удовлетворяют системе ограничений, называется допустимым планом задачи линейного программирования.

Функция F, максимум или минимум которой определяется, называется целевой функцией задачи.

Допустимый план, на котором достигается максимум или минимум функции F, называется оптимальным планом задачи.

Задачей линейного программирования (ЗЛП) является выбор из множества допустимых планов наиболее выгодного (оптимального).

1.3.1. Постановка задачи ЛП

В общей постановке задача линейного программирования выглядит следующим образом:

Имеются некоторые переменные $x=(x_1,x_2,...,x_n)$ и функция этих переменных $f(x)=f(x_1,x_2,...,x_n)$, которая носит название целевой функции. Ставится задача: найти экстремум (максимум или минимум) целевой функции $f(x)$ при условии, что переменные x принадлежат некоторой области G:

$$\begin{cases} f(x) \Rightarrow extr \\ x \in G \end{cases}$$

Функция $f(x)$ является линейной функцией переменных

$x_1, x_2, \ldots, x_n$

Область G определяется системой линейных равенств или неравенств.

Пример 1. Составить математическую модель задачи ЛП.

Пусть имеется два станка (S1, S2), на каждом из которых можно производить два вида продукции (P1, P2). Станок S1 производит единицу продукции P1 за 1 час, а единицу продукции P2 - за 2 часа. Станок S2 затрачивает на единицу продукции P1 - 2 часа, а на единицу продукции P2 - 1 час. Станок S1 может работать в сутки не более 10 ч., а станок S2 - не более 8 ч. Стоимость единицы продукции P1 составляет C1 грн., а стоимость единицы продукции P2 - C2 грн.

Требуется определить такие объемы выпуска продукции P1 и P2 на станок, чтобы выручка от реализации производственной продукции была максимальной.

Вид ресурса	Число ед. ресурса, затрачиваемое на ед. продукции		Запас ресурса
	P1	P2	
S1	1	2	10
S2	2	1	8
Прибыль за ед. продукции	C1	C2	

Составим математическую модель задачи:

Пусть x_1– количество продукции P1; x_2– количество продукции P2. Тогда стоимость произведенной продукции:

$$F = C_1 x_1 + C_2 x_2 \to \max.$$

На изготовление продукции P1 станок S1 тратит $1\,x_1$ часов, а на изготовление продукции P2 – $2\,x_2$ часов. Поскольку время работы станка S1 не превосходит 10 ч, то величины x_1 и x_2 должны удовлетворять неравенству $x_1 + 2x_2 \le 10$.

Аналогично можно получить неравенство для станка S2: $2x_1 + x_2 \le 8$.

Кроме того, величины x_1, x_2 не могут быть отрицательными:

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$, по смыслу задачи.

Такие задачи кратко записываются следующим образом:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 10, \\ 2x_2 + x_1 \leq 8 \end{cases} \tag{1}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \tag{2}$$

$$F = C_1 x_1 + C_2 x_2 \to \max \tag{3}$$

Итак, математическая модель задачи: найти такой план выпуска продукции $X = (x_1, x_2)$, удовлетворяющий системе (1) и условию (2), при котором функция (3) принимает максимальное значение.

Решения, удовлетворяющие системе ограничений (1) и требованиям неотрицательности (2), являются допустимыми, а решения, удовлетворяющие одновременно и требованию (3) оптимальными.

1.3.2. Приведение ЗЛП к каноническому виду

В наиболее общей форме задачу линейного программирования формулируют следующим образом:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \{\leq, \geq, =\} b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \{\leq, \geq, =\} b_2, \\ \ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \{\leq, \geq, =\} b_m. \end{cases} \tag{4}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0 \tag{5}$$

$$F = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n \to \max(\min) \tag{6}$$

Коэффициенты $a_{ij}, b_i c_{ij} = 1,2,\ldots,n$, $i = 1,2,\ldots,m$ – любые действительные числа (возможно 0).

Итак, решения, удовлетворяющие системе ограничений (4) условий задачи и требованиям неотрицательности (5), называются допустимыми, а решения, удовлетворяющие одновременно и требованиям минимизации (максимизации) (6) целевой функции, - оптимальными.

В канонической форме задача является задачей на максимум (минимум) некоторой линейной функции F, ее система ограничений состоит только из равенств (уравнений). При этом переменные задачи $x_1, x_2, ..., x_n$ являются неотрицательными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \quad (7)$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0 \quad (8)$$

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \max(\min) \quad (9)$$

К канонической форме можно преобразовать любую задачу линейного программирования.

1. Если в исходной задаче некоторое ограничение (например, первое) было неравенством, то оно преобразуется в равенство, введением в левую часть некоторой неотрицательной переменной, причем в неравенства «≤» вводится дополнительная неотрицательная переменная со знаком «+»; в случаи неравенства «≥» - со знаком «-»:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \leq b_1 \quad (10)$$

Вводим переменную

$$x_{n+1} = b_1 - a_{11}x_1 - a_{12}x_2 - \ldots - a_{1n}x_n\ )$$

Тогда неравенство (10) запишется в виде:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1 \quad (11)$$

В каждое из неравенств вводится своя «уравнивающая» переменная, после чего система ограничений становится системой уравнений.

2. Если в исходной задаче некоторая переменная не подчинена

условию неотрицательности, то ее заменяют (в целевой функции и во всех ограничениях) разностью неотрицательных переменных

3. Если в ограничениях правая часть отрицательна, то следует умножить это ограничение на (-1).

4. Наконец, если исходная задача была задачей на минимум, то введением новой целевой функции F1 = -F мы преобразуем нашу задачу на минимум функции F в задачу на максимум функции F1.

Таким образом, всякую задачу линейного программирования можно сформулировать в канонической форме.

В стандартной форме задача линейного программирования является задачей на максимум (минимум) линейной целевой функции. Система ограничений ее состоит из одних линейных неравенств типа « <= » или « >= ». Все переменные задачи неотрицательны.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2, \\ \ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m. \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \ldots, x_n \ge 0 \qquad (12)$$

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \max(\min)$$

Всякую задачу линейного программирования можно сформулировать в стандартной форме.

1.3.3. Графический метод решения ЗЛП

Пример 2. Решить графически задачу.

Для производства компьютерных столов I и II видов требуются три типа ресурсов: дерево, пластик и трудозатраты. Потребности в ресурсах для производства одного стола каждого вида, запасы ресурсов, а также прибыль от реализации одного стола каждого вида, заданы в таблице 1:

Таблица 1 – **Исходные данные задачи**

Тип ресурса	Единица продукции вида I	Единица продукции вида II	Запас ресурса
Дерево (м^2)	1	4	24
Пластик (м^2)	4	1	24
Трудозатраты (чел/час)	3	2	23
Прибыль (грн)	200	300	

Требуется, решив задачу графическим методом, найти план выпуска продукции, позволяющий получить наибольшую прибыль.

Пусть x_1 - выпуск (число единиц) продукции I вида, x_2 - выпуск (число единиц) продукции II вида, тогда , в соответствии с таблицей, неизвестные x_1 и x_2 будут удовлетворять следующей системе ограничений:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \le 24, \\ 4x_1 + x_2 \le 24, \\ 3x_1 + x_2 \le 23, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Необходимо найти оптимальный план производства продукции, т.е. такой план (x_1, x_2), который доставляет максимум функции прибыли

Z = 200 x_1 + 300 x_2.

Решаем графически систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 24, \\ 4x_1 + x_2 = 24, \\ 3x_1 + x_2 = 23, \\ x_1 \ge 0, \\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

в которой каждое уравнение является уравнением прямой линии.

Таким образом, область, заданная системой ограничений, является пятиугольником *OABCD* (Рис. 1).

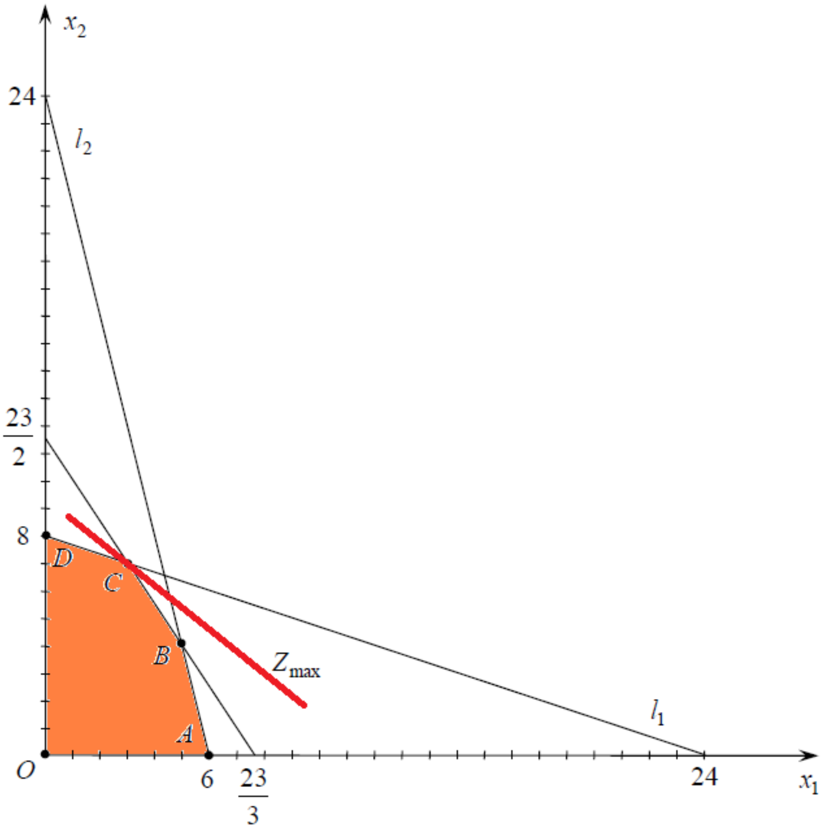

Рисунок 1 – Область ограничений

Построим *линию нулевого уровня прибыли* $Z = 0$ и будем передвигать ее параллельно самой себе до тех пор, пока она пересекается с точками пятиугольника *OABCD*.

Очевидно, что последними точками, в которых передвигаемая линия пересекается с пятиугольником *OABCD*, могут быть только вершины пятиугольника.

Найдем координаты вершин пятиугольника.

Координаты точки B удовлетворяют системе уравнений:

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 = 24, \\ 3x_1 + 2x_2 = 23. \end{cases}$$

$B = (5;4)$.

Координаты точки C удовлетворяют системе уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 24, \\ 3x_1 + 2x_2 = 23. \end{cases}$$

C = (3;7)

Аналогично находим A = (6;0), D = (0;8), O = (0;0).

Подсчитаем теперь значения, которые принимает функция прибыли в вершинах пятиугольника:

$Z(O) = Z(0;\ 0) = 200 \cdot 0 + 300 \cdot 0 = 0;$
$Z(A) = Z(6;\ 0) = 200 \cdot 6 + 300 \cdot 0 = 1200;$
$Z(B) = Z(5;\ 4) = 200 \cdot 5 + 300 \cdot 4 = 2200;$
$Z(C) = Z(3;\ 7) = 200 \cdot 3 + 300 \cdot 7 = 2700;$
$Z(D) = Z(8;\ 0) = 200 \cdot 8 + 300 \cdot 0 = 1600.$

Таким образом, наибольшая прибыль достигается в точке C (3; 7), и оптимальный план имеет вид $(x_1, x_2) = (3;\ 7)$.

Наибольшая прибыль 2700 грн. достигается при выпуске 3-х компьютерных столов I-го вида и 7 компьютерных столов II-го вида.

1.3.4. Симплекс-метод решения ЗЛП

Рассмотрим ЗЛП с системой ограничений в следующей форме:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2, \\ \ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m. \end{cases} \tag{13}$$

Введем в систему ограничений *дополнительные переменные* и приведем (13) в каноническую форму

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + x_{n+2} - b_2, \\ \ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m. \end{cases} \tag{14}$$

Для системы уравнений (14) назовем переменные $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *свободными*, а переменные $x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{n+m}$ - *базисными*.

Симплекс-метод осуществляет направленный перебор допустимых базисных решений, в которых базисные переменные неотрицательны, а небазисные равны нулю.

Этот процесс соответствует переходу от одной угловой точки многогранника ограничений к другой в направлении неуменьшения значения целевой функции.

Базисным решением ЗЛП называется такое решение системы уравнений (14), в котором *все свободные переменные равны* 0.

Базисное решение ЗЛП называется *опорным решением* (*опорным планом*), если в нем *все базисные переменные неотрицательны*.

В теории симплекс-метода доказывается, что, если максимум целевой функции при данной в ЗЛП системе ограничений существует, то он достигается на *опорном решении.*

Опорное решение, на котором целевая функция достигает максимума, является *оптимальным планом.*

Первый этап алгоритма. Формирование симплекс-таблицы

Составим *первую* симплекс-таблицу (Рис. 2) по системе (14) и целевой функции (15).

$$Z = c_0 + \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \tag{15}$$

целевая строка

Базис		x_1	x_2	…	x_n	x_{n+1}	x_{n+2}	…	x_{n+m}
x_{n+1}	b_1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1n}	1	0	…	0
x_{n+2}	b_2	a_{21}	a_{22}	…	a_{2n}	0	1	…	0
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
x_{n+m}	b_m	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mn}	0	0	…	1
z	c_0	$-c_1$	$-c_2$	…	$-c_n$	0	0	…	0

Рисунок 2 – Вид начальной симплекс-таблицы

Таблице соответствует базисное решение системы (14) вида:

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0,\ x_{n+1} = b_1, x_{n+2} = b_2, \ldots, x_{n+m} = b_m.$$

Второй этап алгоритма. Анализ решения по целевой строке

симплекс-таблицы.

Если среди элементов целевой строки, стоящих в столбцах $x_1, x_2, \ldots, x_n$ имеется хотя бы один отрицательный элемент, то решение надо улучшать по правилам этапа 3.

Если же все указанные элементы неотрицательны - это означает, функция z достигает максимума и нужно переходить к выписыванию соответствующего оптимального плана (этап 4).

Третий этап алгоритма. Улучшение решения по целевой строке симплекс-таблицы.

1. Найдем среди элементов $z_1, z_2, \ldots, z_n$ целевой строки z наибольший по абсолютной величине отрицательный элемент. Пусть это будет элемент z_r, тогда столбец x_r объявим разрешающим.

2. Найдем среди дробей вида b_i / a_{ir}, $(i = 1,2,\ldots,m)$ наименьшую неотрицательную дробь (пусть это будет дробь b_s / a_{sr}), и объявим строку x_{n+s} разрешающей. Если же все дроби вида b_i / a_{ir} окажутся отрицательными, то это означает, что при заданной системе ограничений функция z неограничена, т.е. поставленная ЗЛП решений не имеет.

3. Элемент a_{sr}, стоящий на пересечении разрешающей строки и разрешающего столбца, объявим разрешающим, и, для наглядности, его можно обвести в таблице прямоугольником. (Замечание. Иногда существует несколько возможностей выбора разрешающего элемента. В этом случае для поиска опорного решения разрешающий элемент выбирают отрицательным.)

4. Заготовим новую симплекс-таблицу, заменив в первом столбце переменную x_{n+s} на переменную x_r.

5. Пересчитаем все элементы старой симплекс-таблицы, включая строку z по правилам метода полных жордановых исключений с разрешающим элементом a_{sr}:

1) Разделим элементы разрешающей строки на разрешающий элемент. При этом разрешающий элемент станет равным 1;

2) Все элементы разрешающего столбца, за исключением разрешающего элемента, заменим нулями. При этом разрешающий элемент останется равным 1.

3) Все остальные элементы матрицы пересчитаем в новые элементы, воспользовавшись «правилом прямоугольника» (Рис. 3).

$$\begin{array}{ccc} a_{sr} & \rightarrow & a_{sj} \\ \uparrow & & \downarrow \\ a_{ir} & \leftarrow & a_{ij} \end{array} \qquad \Longrightarrow \qquad a_{ij}^{\text{н}} = \frac{a_{ij}^{\text{c}} \cdot a_{sr}^{\text{c}} - a_{sj}^{\text{c}} \cdot a_{ir}^{\text{c}}}{a_{sr}^{\text{c}}},$$

Рисунок 3 – Иллюстрация правила прямоугольника

где индекс Н означает новый элемент, а С – старый. Результат запишем в новую симплекс-таблицу.

4) После этого возвращаемся к этапу 2.

Четвертый этап алгоритма. Запись оптимального плана

В плане указываем значения только исходных переменных x_1, $x_2,\dots, x_n$, причем значения тех из них, которые являются свободными, полагаем равными нулю, а значения остальных переменных берем из второго столбца таблицы (столбца свободных членов). Из этого же столбца выписываем максимальное значение z.

Пример 3. Решение ЗЛП симплекс-методом

Для изготовления двух видов продукции П1 и П2 используются четыре вида ресурсов Р1, Р2, Р3, Р4. Запасы ресурсов, число единиц ресурсов, затрачиваемых на изготовление единицы продукции, приведены в таблице 2.

Таблица 2 – **Исходные данные**

Вид ресурса	Число единиц ресурсов, затрачиваемых на изготовление единицу продукции		Запас ресурса
	П1	П2	
Р1	5	15	90
Р2	10	5	80
Р3	-	5	25
Р4	3	-	21

Прибыль, получаемая от единицы продукции П1 и П2 соответственно равна 2 и 3 ден. ед.

Необходимо составить такой план производства продукции, при котором прибыль от ее реализации будет максимальной.

Решение.

Составим математическую модель задачи.

Обозначим x_1, x_2 - число единиц продукции П1 и П2, запланированных к производству. Связь между потреблением ресурсов и их запасами выразится системой неравенств:

$$\begin{cases} 5x_1 + 15x_2 \le 90 \\ 10x_1 + 5x_2 \le 80 \\ 5x_2 \le 25 \\ 3x_1 \le 21 \end{cases}$$

По смыслу задачи переменные $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$.

Суммарная прибыль составит $z = 2x_1 + 3x_2$.

Таки образом математическая модель задачи имеет вид:

$$z = 2x_1 + 3x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} 5x_1 + 15x_2 \le 90 \\ 10x_1 + 5x_2 \le 80 \\ 5x_2 \le 25 \\ 3x_1 \le 21 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Приведем задачу к каноническому виду:

$$\begin{cases} 5x_1 + 15x_2 + x_3 = 90 \\ 10x_1 + 5x_2 + x_4 = 80 \\ 5x_2 + x_5 = 25 \\ 3x_1 + x_6 = 21 \end{cases}$$

Условия неотрицательности примут вид:

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0, x_6 \geq 0.$

Целевую функцию прибыли представим в виде:

$$z = 2x_1 + 3x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6.$$

Заполним первую симлексную таблицу (Таблица 3).

Таблица 3 – **Начальная симплекс-таблица**

Базис		**Переменные**					
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_3	90	5	15	1	0	0	**0**
x_4	80	10	5	0	1	0	**0**
x_5	25	0	5	0	0	1	**0**
x_6	21	3	0	0	0	0	**1**
F	**0**	**–2**	**–3**	**0**	**0**	**0**	**0**

Проверяем критерий оптимальности. В последней строке имеются отрицательные коэффициенты. Выбираем наибольший по модулю (–3), он определит разрешающий столбец.

Переменная x_2 перейдет в базисные. Для положительных элементов столбца находим оценочные отношения и выбираем из них минимальное.

$$\min\left(\frac{90}{15};\frac{80}{5};\frac{25}{5}\right) = \min(6;16;5) = 5$$

Третья строка является разрешающей.

Переменная x_5 перейдет из базисных переменных в свободные. На пересечении разрешающих строки и столбца стоит разрешающий элемент 5.

Построим новую симплексную таблицу по правилам:

1. Базисная переменная (в нашем случае - x_5) и свободная переменная (в нашем случае - x_2) меняются местами.

2. Элементы строки новой таблицы, соответствующей переменной, выведенной из базиса (в нашем случае - третьей), равны соответствующим элементам разрешающей строки «старой» таблицы,

деленным на разрешающий элемент.

3. В столбцах, соответствующих базисным переменным, проставляем нули и единицы: 1 - против «своей» базисной переменной, 0 - против «чужой» базисной переменной. 0 - в последней строке для всех основных переменных.

4. Все остальные элементы новой таблицы (Таблица 4) вычисляем по «правилу прямоугольника».

Таблица 4 – **Симплекс-таблица после первой итерации**

Базис		**Переменные**					
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_3	15	5	0	1	0	-3	**0**
x_4	55	10	0	0	1	-1	**0**
x_2	5	0	1	0	0	1/5	**0**
x_6	21	3	0	0	0	0	**1**
F	**15**	**-2**	**0**	**0**	**0**	**3/5**	**0**

Критерий оптимальности вновь не выполнен. Теперь первый столбец является разрешающим. Переменная x_1 перейдет в базисные.

$$\min\left(\frac{15}{5};\frac{55}{10};\frac{21}{3}\right)=\min(3;5;5;7)=3$$

Первая строка - разрешающая. 5 - разрешающий элемент. Новая симплексная таблица 5 примет вид:

Таблица 5 – **Симплекс-таблица после второй итерации**

Базис		Переменные						**Оценочное отношение**
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_1	3	1	0	1/5	0	-3/5	0	—
x_4	25	0	0	-2	1	5	0	**25/5=5**
x_2	5	0	1	0	0	1/5	0	**5/0,2=25**
x_6	12	0	0	-3/5	0	9/5	1	**12/1,8=$6\frac{2}{3}$**
F	**21**	**0**	**0**	**2/5**	**0**	**-3/5**	**0**	

И на этот раз критерий оптимальности не выполнен. Пятый столбец и вторая строка являются разрешающими. 5 - разрешающий элемент.

Переходим к следующей таблице 6.

Таблица 6 – **Симплекс-таблица после третьей итерации**

Базис		Переменные					
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	6	1	0	-1/25	3/25	0	**0**
x_5	5	0	0	- 2/5	1/5	1	**0**
x_2	4	0	1	2/25	- 1/25	0	**0**
x_6	3	0	0	3/25	- 9/25	0	**1**
F	**24**	**0**	**0**	4/25	3/25	**0**	**0**

В последней строке все элементы неотрицательные, критерий оптимальности выполнен.

$$x^* = (6;4;0;0;5;3).$$

Значит, максимальное значение целевой функции прибыли составит 24 ден. ед., если будет выпущено 6 ед. продукции первого вида и 4 ед. продукции второго вида. Так как $x_3 = x_4 = 0$ (в последней симплексной таблице они не вошли в базис), то первый и второй ресурс будут израсходованы полностью.

Остаток ресурса P_3 составит 5 ед. ($x_5 = 5$), остаток ресурса P_4 составит 3 ед. ($x_6 = 3$).

1.4. Транспортная задача

Классическая транспортная задача является одной из типичных задач линейного программирования, она возникает при планировании наиболее рациональных перевозок грузов.

1.4.1. Постановка и математическая модель транспортной задачи

Пусть имеется m пунктов отправления (ПО): $A_1, A_2, ..., A_m$, в которых сосредоточены запасы каких-то однородных грузов в количестве соответственно $a_1, a_2, ..., a_m$ единиц. Также имеется n пунктов назначения (ПН): $B_1, B_2, ..., B_n$, подавших заявки соответственно на $b_1, b_2, ..., b_n$ единиц груза. Считаем, что сумма всех заявок равна сумме всех запасов (сбалансированная транспортная задача):

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j . \tag{16}$$

Известны стоимости c_{ij} перевозки единицы груза от каждого пункта отправления A_i до каждого пункта назначения B_j $\left(i = \overline{1, m},\ \ j = \overline{1, n}\right)$. Считается, что стоимость перевозки нескольких единиц груза пропорциональна их числу. Требуется составить такой план перевозок, чтобы все заявки были выполнены, а общая стоимость всех перевозок минимальна.

Экономико-математическая модель задачи имеет вид задачи линейного программирования. Обозначим x_{ij} – количество единиц груза, отправляемого из i-го ПО A_i в j-й ПН B_j. Совокупность чисел (x_{ij}) будем называть *планом перевозок*, а сами величины x_{ij} – *перевозками*.

Необходимо найти такой план перевозок (x_{ij}), при котором целевая функция (суммарная стоимость перевозок) будет минимальной:

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \min \tag{17}$$

и который удовлетворяет следующим ограничениям:

1) Суммарное количество груза, направляемого из каждого ПО во все ПН должно быть равно запасу груза в данном пункте:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + \ldots + x_{1n} = a_1, \\ x_{21} + x_{22} + \ldots + x_{2n} = a_2, \\ \qquad \ldots \\ x_{m1} + x_{m2} + \ldots + x_{mn} = a_m. \end{cases} \quad (18)$$

2) Суммарное количество груза, доставляемого в каждый ПН из всех ПО, должно быть равно заявке, поданной данным пунктом:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{21} + \ldots + x_{m1} = b_1, \\ x_{12} + x_{22} + \ldots + x_{m2} = b_2, \\ \qquad \ldots \\ x_{1n} + x_{2n} + \ldots + x_{mn} = b_n. \end{cases} \quad (19)$$

3) Условие неотрицательности:

$$x_{ij} \geq 0,\ i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n} \quad (20)$$

Решение транспортной задачи разбивается на два этапа:

1) определение исходного опорного решения;

2) построение последовательных итераций – приближение к оптимальному решению.

Обычно, для решения транспортной задачи используют ее табличную модель (Таблица 6).

Таблица 6 – **Табличная модель транспортной задачи**

	ПН	B_1		B_2		…	B_n	
ПО		b_1		b_2		…	b_n	
A_1	a_1		c_{11}		c_{12}			c_{1n}
		x_{11}		x_{12}		…	x_{1n}	
A_2	a_2		c_{21}		c_{22}			c_{2n}
		x_{21}		x_{22}		…	x_{2n}	
…	…	…		…		…	…	
A_m	a_m		c_{m1}		c_{m2}			c_{mn}
		x_{m1}		x_{m2}		…	x_{mn}	

В таблице ячейкам поставлены в соответствие перевозки – переменные x_{ij}, при заполнении таблицы задаются значения неизвестных:

1.4.2. Методы определения исходного опорного решения

Существует несколько способов, наиболее популярными являются:

- метод северо-западного угла,
- метод минимального элемента,
- метод аппроксимации Фогеля.

Они перечислены в порядке усложнения алгоритма, но при этом получаемое решение, как правило, меньше отличается от оптимального.

В каждом методе на любом шаге в выбранную ячейку (x_{ij}) таблицы помещается *максимальная допустимая перевозка* – минимальное из того, что есть у соответствующего поставщика (ПО) A_i и требуется соответствующему потребителю (ПН) B_j. При этом каждый раз «закрывается» строка таблицы, если у соответствующего поставщика (ПО) больше нет груза, или «закрывается» столбец, если соответствующему потребителю (ПН) больше не надо груза. Методы отличаются лишь способом построения последовательности заполнения ячеек таблицы.

В *методе северо-западного угла* первой заполняется ячейка x_{11} (северо-западный угол таблицы), а затем последовательно двигаются вправо и вниз без учета стоимости перевозок. Заполнив ячейку x_{ij}, переходят к заполнению ячейки $x_{i,j+1}$ (вправо), если же в нее нельзя помещать ненулевую перевозку, то переходят к ячейке $x_{i+1,j}$ (вниз) и т.д.

В *методе минимального элемента* заполнение начинается с ячейки с минимальной стоимостью. Каждый раз переходят к следующей свободной ячейке (расположенной в «незакрытых» сроках и столбцах) с минимальной стоимостью.

Пример 4. Метод северо-западного угла.
Последовательность заполнения таблицы (Таблица 7):

$$(x_{11}=10)\rightarrow(x_{12}=20)\rightarrow(x_{22}=20)\rightarrow(x_{32}=25)\rightarrow(x_{33}=25)$$

Таблица 7 – **Таблица, заполненная по методу северо-западного угла**

	ПН	B_1	B_2	B_3
ПО		10	65	25
A_1	30	6 10	3 20	2
A_2	20	2	1 20	5
A_3	50	3	4 25	1 25

Стоимость перевозок:

F = 10*6+20*3+20*1+25+4+25*1 = 265.

Пример 5. Метод минимального элемента
Последовательность заполнения таблицы 8:

$$(x_{22}=20)\rightarrow(x_{33}=25)\rightarrow(x_{12}=30)\rightarrow(x_{31}=10)\rightarrow(x_{32}=15)$$

Стоимость перевозок:

F = 30*3+20*1+10*3+15*4+25*1=225.

Таблица 8 – **Таблица, заполненная по методу минимального элемента**

	ПН	B_1	B_2	B_3
ПО		10	65	25
A_1	30	6	3 30	2
A_2	20	2	1 20	5
A_3	50	3 10	4 15	1 25

Как видно, методом минимального элемента получена стоимость перевозок меньше, чем методом северо-западного угла, но первый метод проще в реализации. Метод аппроксимации Фогеля дает, как правило, еще более близкое к оптимальному опорное решение.

1.4.3. Отыскание оптимального решения с помощью метода потенциалов

Получив первый опорный план перевозок, следует проверить его на оптимальность и, если требуется, перейти к новому опорному плану с меньшей стоимостью перевозок. Для этого можно использовать метод потенциалов.

После построения исходного опорного решения все переменные разбиты на две группы: базисные (заполненные ячейки таблицы) и свободные (пустые, нулевые ячейки таблицы). Сопоставим каждому ПО A_i некоторую величину u_i, которую назовем *потенциалом поставщика* A_i, а каждому ПН B_j поставим в соответствие число v_i – *потенциал потребителя* B_j. Совокупность уравнений $u_i + v_j = c_{ij}$ (где c_{ij} стоимость перевозки из A_i в B_j), составленных для всех базисных переменных, т.е. для заполненных клеток, содержит $(m+n)$ неизвестных потенциалов и $(m+n-1)$ уравнение. Поэтому одну переменную u_i или v_i можно выбрать произвольно, например, $u_1 = 0$. Значения остальных потенциалов находят из системы однозначно.

Для каждой свободной клетки вычисляется числовая характеристика – *косвенная стоимость*: $d_{ij} = c_{ij} - (u_i + v_j)$.

Критерий оптимальности плана перевозок:

Для того, чтобы некоторый опорный план $X^* = (x_{ij}^*)$ транспортной задачи был оптимальным, необходимо и достаточно, чтобы ему соответствовала система из $(m+n)$ чисел u_i и v_i, удовлетворяющих условиям:

1) $c_{ij} = u_i + v_j$, если $x_{ij} \geq 0$ (для заполненных клеток),

2) $d_{ij} = c_{ij} - (u_i + v_j) \geq 0$ (для свободных клеток).

Т.е. если все косвенные стоимости неотрицательные, то решение оптимальное, в противном случае его можно улучшить.

Если данный план перевозок не оптимальный, то в свободную ячейку, которой соответствует наименьшая отрицательная косвенная стоимость d_{ij}, помещают перевозку λ и составляют *цикл пересчета* (замкнутая ломанная линия, состоящая из горизонтальных и вертикальных отрезков прямых, первая вершина которой находится в свободной ячейке с перевозкой λ, а остальные в базисных (заполненных) ячейках). По циклу пересчета восстанавливается баланс, нарушенный ненулевой перевозкой λ (см. рис. 4)

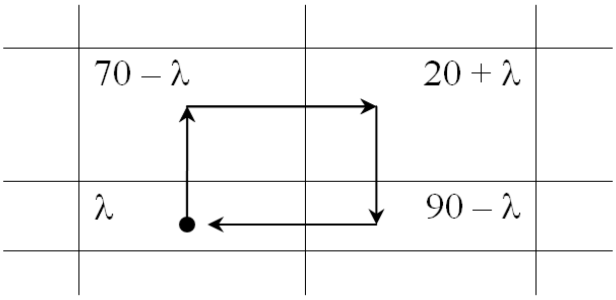

Рисунок 4 – Цикл пересчета

Значение λ определяется как максимально возможное,

сохраняющее неотрицательность всех перевозок, т.е. по соотношениям вида $x_{ij} - \lambda$. На рис. 4: $\lambda = \min\{70, 90\}$.

В результате определения λ и пересчета перевозок получаем новый опорный план, который необходимо проверить на оптимальность

Алгоритм применения метода потенциалов:

1) Определить начальный опорный план, рассчитать стоимость перевозок.

2) Составить систему уравнений $c_{ij} = u_i + v_j$ для заполненных клеток. При $u_1 = 0$ найти потенциалы всех поставщиков u_i и потребителей v_i.

3) Определить косвенные стоимости свободных ячеек по формуле: $d_{ij} = c_{ij} - (u_i + v_j)$.

4) Если все косвенные стоимости неотрицательны, то план пе-

ревозок оптимальный.

5) Если есть отрицательные косвенные стоимости, то в свободную ячейку с наименьшей отрицательной косвенной стоимостью поместить перевозку λ и составить цикл пересчета.

6) Найти максимальное значение λ при условии сохранения неотрицательности всех перевозок, составить новый опорный план, рассчитать стоимость перевозок.

7) Перейти к п.2.

Пример 6. Провести одно улучшение опорного плана методом потенциалов.

Опорный план представлен в таблице 9.

Таблица 9 – **Опорный план в табличной форме**

	ПН	B_1	B_2	B_3
ПО		10	65	25
A_1	30	-λ $\boxed{6}$ 10	+λ $\boxed{3}$ 20	$\boxed{2}$
A_2	20	$\boxed{2}$	$\boxed{1}$ 20	$\boxed{5}$
A_3	50	λ $\boxed{3}$	-λ $\boxed{4}$ 25	$\boxed{1}$ 25

Составим систему уравнений $c_{ij} = u_i + v_j$ для заполненных клеток:

$$\begin{cases} c_{11} = u_1 + v_1 \\ c_{12} = u_1 + v_2 \\ c_{22} = u_2 + v_2 \\ c_{32} = u_3 + v_2 \\ c_{33} = u_3 + v_3 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} 6 = u_1 + v_1 \\ 3 = u_1 + v_2 \\ 1 = u_2 + v_2 \\ 4 = u_3 + v_2 \\ 1 = u_3 + v_3 \end{cases}$$

Пусть $u_1 = 0$, найдем потенциалы всех поставщиков u_i и потребителей v_j:

$u_1 = 0, \qquad v_1 = 6$
$u_2 = -2, \qquad v_2 = 3$
$u_3 = 1, \qquad v_3 = 0$

Определим косвенные стоимости свободных ячеек:

$d_{13} = c_{13} - (\mathrm{u}_1 + v_3) = 2 - (0 + 0) = 2$
$d_{21} = c_{21} - (\mathrm{u}_2 + v_1) = 2 - (-2 + 6) = -2$
$d_{23} = c_{23} - (\mathrm{u}_2 + v_3) = 5 - (-2 + 0) = 7$
$d_{31} = c_{31} - (\mathrm{u}_3 + v_1) = 3 - (1 + 6) = -4$

Поскольку есть отрицательные косвенные стоимости, то решение не оптимальное. Поместим перевозку λ в ячейку x_{31}, которой соответствует наименьшая отрицательная косвенная стоимость $d_{31} = -4$. Построим цикл пересчета:

$$x_{31}(\lambda) \to x_{13}(10 - \lambda) \to x_{12}(20 + \lambda) \to x_{32}(25 - \lambda) \to x_{31}(\lambda)$$

Найдем максимальное значение λ, сохраняющее неотрицательность всех перевозок: (если взять значение λ больше, то в ячейке x_{13} будет отрицательная перевозка).

Пересчитаем новый план перевозок (Таблица 10).

Таблица 10 – **План перевозок после первой итерации**

	ПН	B_1	B_2	B_3
ПО		10	65	25
A_1	30	6	3 30	2
A_2	20	2	1 20	5
A_3	50	3 10	4 15	1 25

Стоимость перевозок:
F = 30*3+20*1+10*3+15*4+25*1=225.

1.5. Сети

1.5.1. Графы. Основные определения и термины

Фигура, состоящая из точек (вершин) и соединяющих их линий (ребер), называется графом (Рис. 5). Тем самым, начало и конец каждого ребра графа суть его вершины.

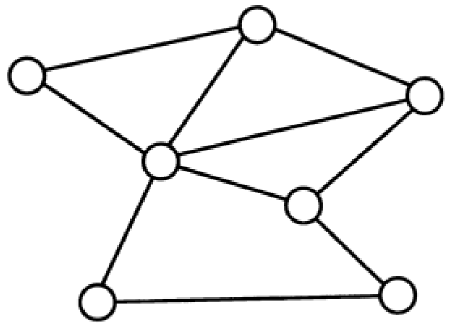

Рисунок 5 – Граф

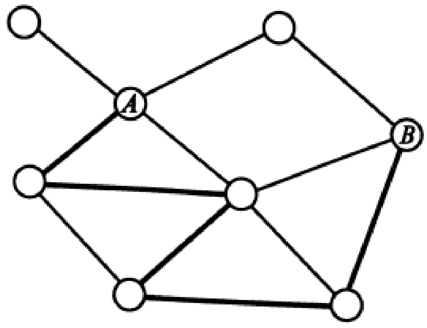

Рисунок 6 – Связанные вершины

Путем, соединяющим вершины А и В графа, называется упорядоченная совокупность его ребер, обладающая следующим свойством: начало каждого ребра, начиная со второго, совпадает с концом предыдущего ребра, при этом начало первого ребра совпадает с вершиной А, а конец последнего – с вершиной В (Рис. 6).

Вершины А и В называются связанными, если существует путь, соединяющий эти вершины.

Граф называется связным, если связаны любые две его вершины.

Вершина графа называется четной, если число всех выходящих из нее (или, что то же, входящих в нее) ребер четно, и нечетной, если число всех выходящих из нее (или, что то же, входящих в нее) ребер нечетно.

Последовательность смежных вершин графа и связывающих их ребер, называют *цепью*.

Замкнутую цепь называют *циклом*. Каждая цепь состоит из *звеньев*.

Звеном называют две последовательные вершины цепи и связывающее их ребро.

Граф называется конечным, если конечны и число его ребер, и число его вершин.

Две вершины графа, соединенные ребром, называют *смежными вершинами*.

Ребро графа называют *дугой*, если на нем *при помощи стрелки указано направление*.

Граф, в котором *каждое* ребро имеет направление (т.е. является дугой), называют *ориентированным графом.* В противном случае граф называют *неориентированным.*

Ребро, соединяющее две смежные вершины, называют ребром, *инцидентным* этим вершинам.

Всякий граф, у которого есть замкнутый путь, проходящий через каждое его ребро в точности по одному разу, называют *эйлеровым*, а всякий граф, у которого есть замкнутый путь, проходящий через каждую его вершину в точности один раз, *гамильтоновым*.

Важный класс графов составляют графы, называемые деревьями. Дерево – это связный граф, который вовсе не имеет замкнутых путей (Рис. 7).

Этот граф обладает следующим оптимальным свойством: среди всех связных графов с данным числом вершин дерево имеет наименьшее число ребер, а именно: число V вершин дерева и число E его ребер различаются на единицу.

Справедливо и обратное утверждение: $V = E + 1$, если число вершин связного графа на единицу больше числа его ребер, то этот граф является деревом.

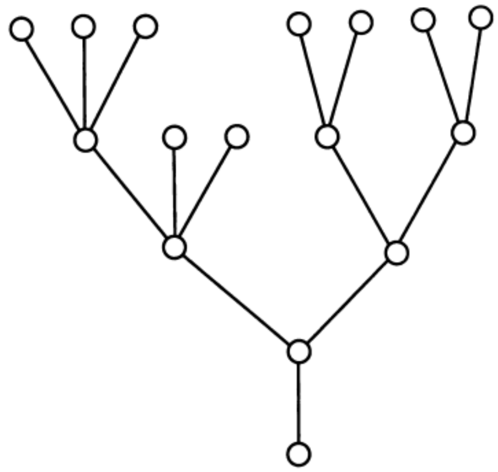

Рисунок 7 – Дерево

Если граф – конечный и связный, то легко построить дерево (и, как правило, не одно), множество вершин которого совпадало бы с множеством всех вершин заданного графа, а все ребра дерева одновременно были бы ребрами этого графа.

Всякое такое дерево называют деревом, порождающим граф, или остовным деревом графа. На рисунке 8 показано остовное дерево для графа с семью вершинами.

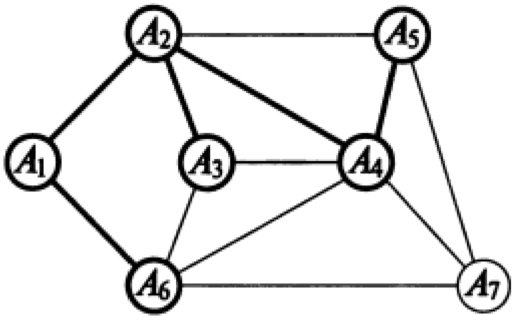

Рисунок 8 – Остовное дерево

Остовных деревьев у конечного связного графа может быть много.

Часто приходится рассматривать задачи, в которых каждому ребру заданного графа приписано некоторое положительное (неотрицательное) число (его вес). Обычно граф, нагруженный подобным образом, называют *сетью*, его вершины *узлами*, а ребра *дугами*.

В зависимости от приложений описанная числовая нагрузка дуги графа может иметь разный смысл и обозначать длину, стоимость, пропускную способность, временную протяженность и т.д.

Рассмотрим несколько характерных задач.

1.5.2. Минимальное остовное дерево

Минимальным остовным деревом связного графа с заданными длинами ребер называют остовное дерево, сумма длин ребер которого минимальна.

Опишем алгоритм, предложенный Примом, считая, что число вершин заданного графа $n \geq 2$. Этот алгоритм приводит к искомому результату за $n-1$ шаг.

1-й шаг. Пометим произвольную вершину графа. Из ребер звезды, порожденной этой вершиной, выберем ребро наименьшей длины (если таких ребер несколько, выбираем любое из них) и пометим вершину, в которую входит это выбранное ребро. В результате две вершины графа оказываются помеченными.

Если других вершин в графе нет, то искомое остовное дерево построено и поставленная задача решена. В противном случае потребуется новый шаг.

2-й шаг. Каждая из двух помеченных вершин графа порождает свою звезду. Рассмотрим все ребра этих звезд, за исключением тех, которые соединяют между собой уже помеченные вершины, выберем ребро наименьшей длины (если таких ребер несколько, выбираем любое из них) и пометим вершину, в которую входит это выбранное ребро. В результате выделенными оказываются два ребра графа, а помеченными уже три его вершины. Если других вершин в графе нет, то искомое остовное дерево построено и поставленная задача решена. В противном случае потребуется прейти на шаг 2.

На каждом шаге и число выделенных ребер графа, и число помеченных вершин увеличиваются ровно на единицу. Тем самым, после $n-1$-го шага количество выбранных ребер станет равным $n-1$ и все n вершин графа окажутся помеченными.

Пример 7. Построить минимальное остовное дерево

На рисунке 9 изображены населенные пункты (вершины графа) и связывающие их грунтовые дороги (ребра графа):

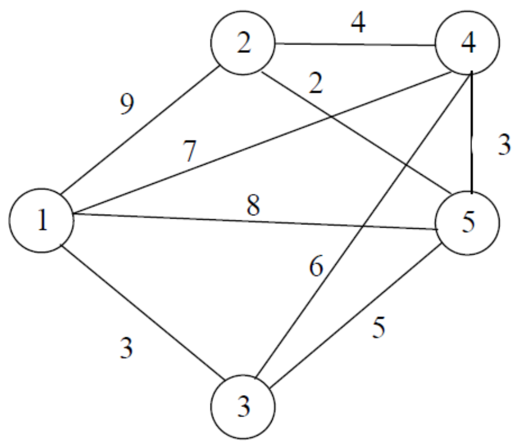

Рисунок 9 – Исходный граф

На рисунке также отмечены расстояния между населенными пунктами, выраженные в условных единицах. Требуется спланировать наиболее экономичную сеть дорог с твердым покрытием, заменяющих часть грунтовых дорог и связывающую все населенные пункты.

Решение.

Рассмотрим какую-нибудь из вершин графа, изображенного на рис. 6, например, вершину № 3. Из всех ребер, соединяющих вершину № 3 с остальными вершинами графа, *самым коротким* является ребро, соединяющее вершины № 3 и № 1.

Теперь рассмотрим множество всех ребер, соединяющих вершины № 3 и № 1 с остальными вершинами графа. *Самым коротким* из них является ребро, соединяющее вершины № 3 и № 5.

Действуя по аналогии, рассмотрим множество всех ребер, соединяющих вершины № 3, № 1 и № 5 с остальными вершинами графа. *Самым коротким* из них является ребро, соединяющее вершины № 5 и № 2.

Наконец, рассмотрим множество всех ребер, соединяющих вершины № 3, № 1, № 5 и № 2 с остальными вершинами графа. *Самым коротким* из них является ребро, соединяющее вершины № 5 и № 4.

В результате мы получаем граф, изображенный на рисунке 10:

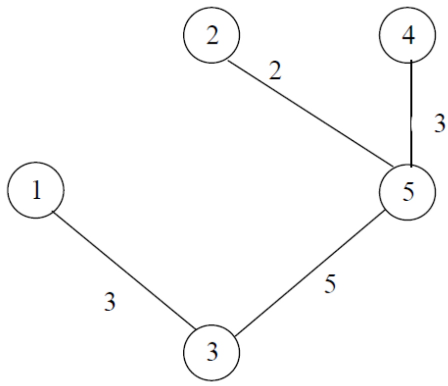

Рисунок 10 – Порождающее дерево

Этот граф является порождающим деревом для графа, изображенного на рис. 5, причем таким порождающим деревом, которое обладает наименьшей суммой длин ребер, а дорожная сеть, изображенная на рис. 5, является решением рассматриваемой задачи. Длина этой дорожной сети равна 13 условным единицам.

Замечание. Если в качестве первого шага расчетного алгоритма, использованного при решении данной задачи, избрать не вершину с № 3, а любую другую вершину графа, то полученное в результате работы алгоритма минимальное остовное дерево будет тем же.

1.5.3. Кратчайший маршрут

Дана сеть, каждая дуга которой нагружена числом, равным его длине. Требуется найти кратчайший маршрут, ведущий от выделенного узла к каждому из других узлов сети.

Алгоритм решения этой задачи был предложен в 1959 году. Е. Дейкстрой. Он представляет собой итерационную процедуру, в которой каждому узлу присваивается метка либо постоянная и при этом показывающая расстояние от этого узла до выделенного (выделенный узел имеет постоянную метку), либо временная, где это расстояние оценивается сверху. В результате каждой итерации оценки уточняются, и ровно одна временная метка меняет свой статус на постоянную (после чего уже не меняется).

Алгоритм Дейкстры

Начнем с того, что пометим начальный узел и объявим эту метку постоянной.

1-й шаг. Рассмотрим все дуги, исходящие из начального узла, и припишем всем узлам, которые эти дуги с ним соединяют, временные метки.

Временная метка узла на 1-м шаге строится по следующему правилу: это упорядоченная пара, первый элемент которой – начальный узел (уже имеющий постоянную метку), а второй элемент – число, равное длине дуги, соединяющей этот узел с начальным.

Затем среди всех узлов с временными метками выбираем узел, расстояние которого от начального узла минимально. Если таких узлов несколько, выбираем любой. И объявляем временную метку выбранного узла постоянной.

2-й шаг. Рассмотрим все дуги, исходящие из узлов с постоянными метками (теперь их уже два), и снабдим все узлы, в которые идут эти дуги, временными метками по следующему правилу:

1) если новый узел не был помечен ранее, то временная метка – это упорядоченная пара, первый элемент которой – узел с постоянной меткой, из которого выходит выбранная дуга, а второй элемент – число, равное длине маршрута, ведущего в этот узел по узлам с постоянными метками, считая от начального узла,

2) если же узел уже имел временную метку, необходимо поступить так – сравнить длины старого и нового маршрутов, связывающих этот узел с начальным узлом, и либо заменить прежнюю временную метку на новую (если длина нового маршрута оказалась меньше длины старого), либо оставить ту же временную метку (если это не так).

В результате мы получим новый набор узлов с временными метками. Выберем тот из узлов, длина маршрута до которого от начального узла является наименьшей. Если таких узлов несколько, выбираем любой и объявляем его временную метку постоянной.

Последующие шаги проводятся по тому же правилу, что и 2-й шаг, и заканчиваются присвоением постоянной метки очередному узлу сети.

Так как на каждом шаге число узлов с постоянными метками увеличивается на единицу, то, сделав $n-1$ шаг (считаем, что в сети n узлов), мы присвоим постоянные метки всем n узлам сети.

По этим постоянным меткам кратчайшие маршруты, ведущие из начального узла в каждый из остальных узлов сети, легко восстанавливаются.

Пример 8. Отыскание кратчайшего пути в графе

Рассмотрим сеть с выделенным узлом A_0, заданную на рис. 11, и найдем кратчайшие маршруты, ведущие по дугам сети от этого выделенного узлам ко всем остальным узлам сети.

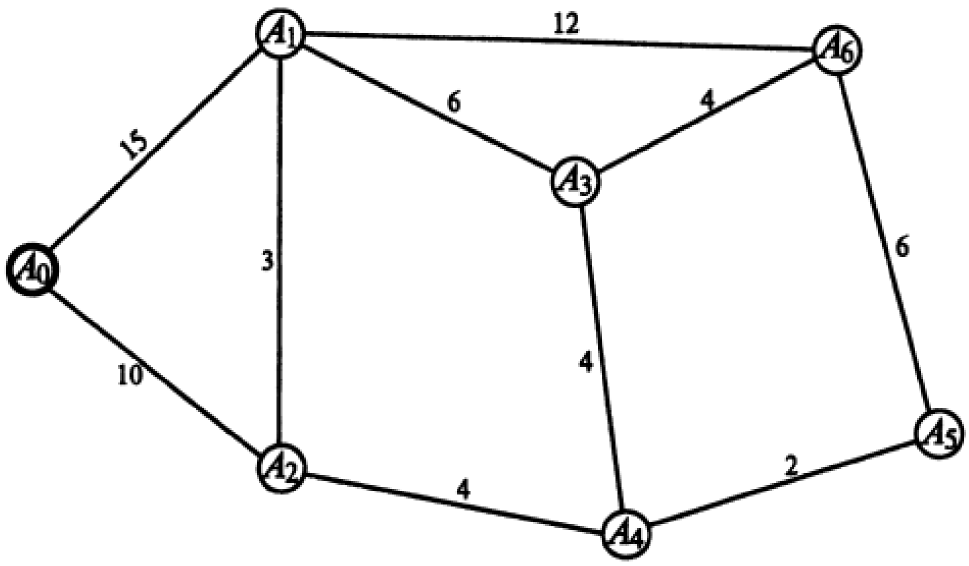

Рисунок 11 – Сеть с выделенным узлом A_0

1-й шаг. Все узлы, соединенные с выделенным узлом A_0 одной дугой, это узлы A_2 и A_3, метятся так, как показано на рисунке 12 – число в метке равно расстоянию от помеченного узла до узла A_0. Эти метки $\langle A_0{,}15\rangle$ и $\langle A_0{,}10\rangle$ временные.

Дуга, связывающая узлы A_0 и A_2, является самой короткой. Это, в частности, означает, что любой маршрут от узла A_0 к узлу A_2, отличный от дуги A_0A_2, будет длиннее.

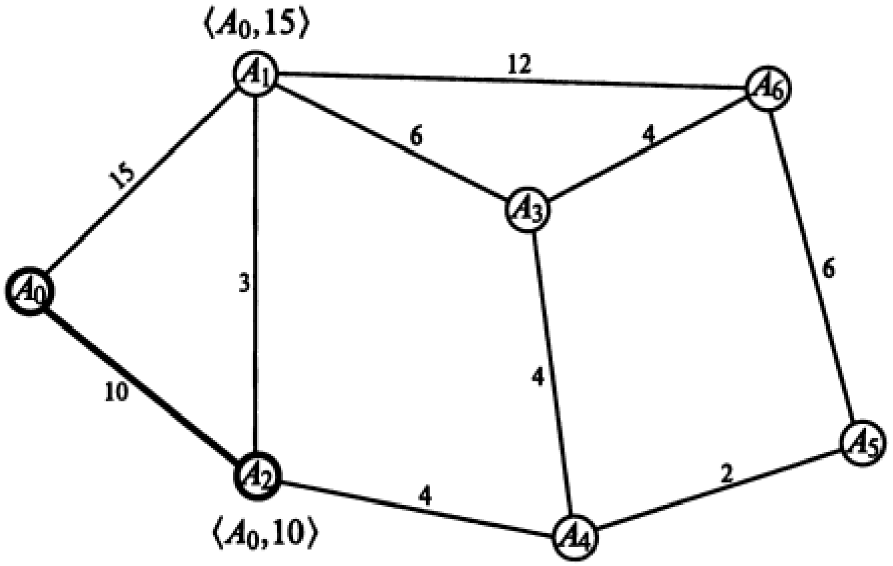

Рисунок 12 – Сеть с временными метками

Тем самым, выбранная дуга определяет самый короткий путь от узла A_0 к узлу A_2. Метка $\langle A_0,10\rangle$ узла A_2 объявляется постоянной.

При получении постоянной метки узел A_2 выделяется так же, как и узел A_0. Дуга A_0A_2 выделяется жирной линией (Рис. 12).

Таким образом, по окончании 1-го шага узлы A_0 и A_2 имеют постоянные метки.

2-й шаг. Отбираются все узлы, не имеющие постоянных меток, которые можно соединить с узлами A_0 и A_2 одной дугой. Это узлы A_1 и A_4.

Сравнивая длины маршрутов A_0A_1 и $A_0A_2A_1$ замечаем, что длина первого (15) больше длины второго, 15 > 10 + 3. Поэтому временная метка $\langle A_0,15\rangle$ узла A_1 меняется на метку $\langle A_2,13\rangle$.

В этой метке число 13 равно длине пути $A_0A_2A_1$ от узла A_0 до узла A_1, а A_2 – узел на этом пути, предшествующий узлу A_1.

Узел A_4 получает временную метку $\langle A_2,14\rangle$.

Маршрут $A_0A_2A_1$ связывающий узлы A_0 и A_1, определяет кратчайшее расстояние от узла A_0 к узлу A_1. Поэтому узлу A_1 дается постоянная метка $\langle A_2,13\rangle$; выделяется и дуга A_2A_1.

Таким образом, по окончании 2-го шага узлы A_0, A_1 и A_2 имеют постоянные метки.

Шаги алгоритма повторяем до тех пор, пока все узлы не получат постоянные метки (Рис. 13).

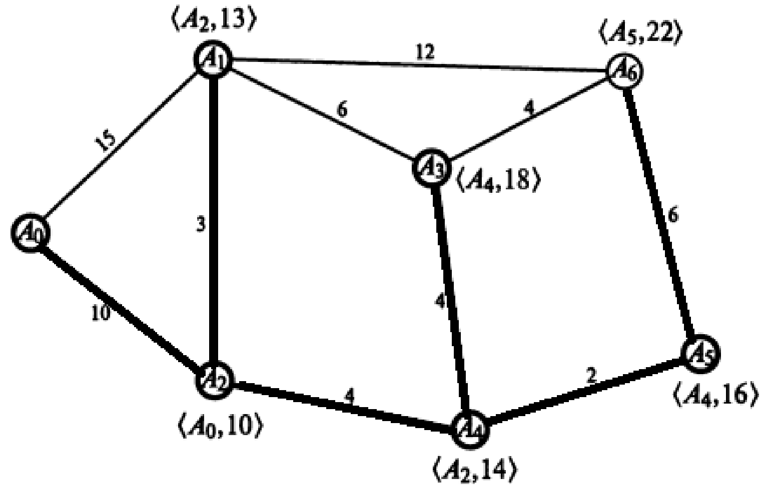

Рисунок 13 – Сеть с постоянными метками

В таблице 9 указаны длины кратчайших маршрутов (они выделены жирным) от узла A_0 до каждого из остальных узлов сети.

Строки этой таблицы представляю собой шаги алгоритма

Таблица 9 – **Длины кратчайших маршрутов**

	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
1	**0**	15	**10**				
2		13			**14**		
3				19	14		
4				18		**16**	25
5				**18**			22
6							**22**

Ответ: $L(A_0, A_2, A_1)$=13; $L(A_0, A_2)$=10;
$L(A_0, A_2, A_4, A_3)$=18; $L(A_0, A_2, A_4)$=14;
$L(A_0, A_2, A_4, A_5)$=16; $L(A_0, A_2, A_4, A_5)$=22

2. ПЕРЕЧЕНЬ ЗАДАНИЙ К КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЕ

Задание 1. Решить задачу линейного программирования.

1.1. Составить математическую модель задачи линейного программирования.
1.2. Преобразовать задачу к каноническому виду.
1.3. Решить задачу графическим методом.
1.4. Решить задачу с помощью Симплекс-метода.

Вариант 1.

Предприятие производит продукцию двух видов: $P1$ и $P2$. Объем сбыта продукции $P1$ составляет не менее 60% общего объема реализации продукции обоих видов. Для изготовления продукции $P1$ и $P2$ используется одно и то же сырье, суточный запас которого равен 100 кг. Расход сырья на единицу продукции $P1$ равен 2 кг, а на единицу продукции $P2$ - 4 кг. Цены продукции $P1$ и $P2$ - 25 и 30 ден. ед. соответственно.

Определить оптимальное распределение сырья для изготовления продукции $P1$ и $P2$.

Вариант 2.

Процесс изготовления промышленных изделий двух видов $P1$ и $P2$ состоит в последовательной обработке каждого из них на трех станках. Время использования этих станков для производства данных изделий ограничено 10 ч в сутки. Время обработки одного изделия (в минутах) и прибыль от продажи одного изделия каждого вида указаны в таблице.

Станок	Выпускаемая продукция		Лимит времени
	$P1$	$P2$	
I	10	5	10
II	6	20	10
III	8	15	10
Удельная прибыль	200	300	

Найти оптимальные объемы производства изделий каждого вида, максимизирующие прибыль.

Вариант 3.

Предприятие изготавливает два вида продукции - $P1$ и $P2$, которая поступает в оптовую продажу. Для производства продукции используются два вида сырья - A и B . Максимально возможные запасы сырья в сутки составляют 9 и 13 единиц соответственно. Расход сырья на единицу продукции вида $P1$ и вида $P2$ дан в таблице.

Сырье	Расход сырья на 1 ед. продукции		Запас сырья, ед.
	$P1$	$P2$	
A	2	3	9
B	3	2	13

Опыт работы показал, что суточный спрос на продукцию $P1$ никогда не превышает спроса на продукцию $P2$ более чем на 1 ед.

Кроме того, известно, что спрос на продукцию $P2$ никогда не превышает 2 ед. в сутки. Оптовые цены единицы продукции равны: 3 д. е. - для $P1$ и 4 д.е. для $P2$.

Какое количество продукции каждого вида должно производить предприятие, чтобы доход от реализации продукции был максимальным?

Вариант 4.

Предприятие выпускает продукцию двух видов: $P1$ и $P2$. Используются три вида ресурсов: оборудование, сырье и электроэнергия. Нормы расхода, лимиты ресурсов и прибыль от единицы продукции представлены в таблице.

Ресурсы	Норма расхода на единицу продукции		Имеющийся объем ресурса
	$P1$	$P2$	
Оборудование	2	3	30
Сырье	2	1	18
Электроэнергия	2	1	20
Прибыль	30	20	

Найти оптимальный план выпуска продукции.

Вариант 5.

Для производства двух видов изделий A и B используется токарное, фрезерное и шлифовальное оборудование. Нормы затрат времени каждого из типов оборудования на одно изделие данного вида приведены в таблице.

Тип оборудования	Затраты времени (станко-ч) на обработку одного изделия		Общий фонд полезного рабочего времени оборудования (ч)
	A	B	
Фрезерное	10	8	168
Токарное	5	10	180
Шлифовальное	6	12	144
Прибыль	14	18	

В ней же указан общий фонд рабочего времени каждого из типов оборудования, а также прибыль от реализации одного изделия.Найти план выпуска изделий A и B , обеспечивающий максимальную прибыль от их реализации.

Вариант 6.

На мебельной фабрике из стандартных листов фанеры необходимо вырезать заготовки трех видов в количествах, соответственно равных 24, 31 и 18 шт.

Каждый лист фанеры может быть разрезан на заготовки двумя способами. Количество получаемых заготовок при данном способе раскроя приведено в таблице. В ней же указана величина отходов, которые получаются при данном способе раскроя одного листа фанеры.

Вид заготовки	Количество заготовок (шт) при раскрое по способу	
	1	2
I	2	2
II	5	4
III	2	3
Величина отходов (см^2)	12	16

Определить, сколько листов фанеры, и по какому способу следует раскроить так, чтобы было получено не меньше нужного количества заготовок при минимальных отходах.

Вариант 7.

На звероферме могут выращиваться лисицы и песцы. Для обеспечения нормальных условий их выращивания используется три вида кормов. Количество корма каждого вида, которое должны ежедневно получать лисицы и песцы, приведено в таблице. В ней же указаны общее количество корма каждого вида, которое может быть использовано зверофермой, и прибыль от реализации одной шкурки лисицы и песца.

Определить, сколько лисиц и песцов следует выращивать на звероферме, чтобы прибыль от реализации их шкурок была максимальной.

Вид корма	Количество единиц корма, которое ежедневно должны получать		Общее количество корма
	лисица	песец	
I	2	3	180
II	4	1	240
III	6	7	426
Прибыль	16	12	

Вариант 8. Предприятие электронной промышленности выпускает две модели радиоприемников. Каждая модель производится на отдельной технологической линии.

Суточный объем производства первой линии - 60 изделий, второй - 75. На радиоприемник первой модели расходуется 10 однотипных элементов электронных схем, второй модели - 8. Наибольший суточный запас используемых элементов равен 800 ед. Прибыль от реализации одного радиоприемника первой и второй моделей - соответственно 3000 и 2000 ден. ед.

Определить оптимальные суточные объемы производства первой и второй моделей.

Вариант 9.

Предприятие выпускает продукцию двух видов: $P1$ и $P2$. Используются три вида ресурсов: оборудование, сырье и электроэнергия. Нормы расхода, лимиты ресурсов и прибыль от единицы продукции представлены в таблице.

Ресурсы	Норма расхода на единицу продукции		Имеющийся объем ресурса
	$P1$	$P2$	
Оборудование	2	3	31
Сырье	1	1	12
Электроэнергия	2	1	20
Прибыль	40	25	

Найти оптимальный план выпуска продукции.

Вариант 10.

При откорме каждое животное должно получить не менее 9 ед. белков, 8 ед. углеводов и 11 ед. протеина. Для составления рациона используют два вида корма, представленных в следующей таблице.

Питательные вещества	Количество единиц питательных веществ на 1 кг	
	корма 1	корма 2
белки	3	1
углеводы	1	2
протеин	1	6

Стоимость 1 кг корма первого вида 4 д.е., второго - 6 д.е. Необходимо составить дневной рацион питательности, имеющий минимальную стоимость.

Вариант 11.

Цех выпускает трансформаторы двух видов. Для изготовления трансформаторов обоих видов используются железо и проволока. Общий запас железа - 3 тонны, проволоки - 18 тонн.

На один трансформатор первого вида расходуются 5 кг железа и 3 кг проволоки, а на один трансформатор второго вида расходуются 3 кг железа и 2 кг проволоки. За каждый реализованный трансформатор первого вида завод получает прибыль 3 д.е., второго - 4 д.е.

Необходимо составить план выпуска трансформаторов, обеспечивающий заводу максимальную прибыль.

Вариант 12.

Предприятие выпускает продукцию двух видов: $P1$ и $P2$.

Используются три вида ресурсов: оборудование, сырье и электроэнергия. Нормы расхода, лимиты ресурсов и прибыль от единицы продукции представлены в таблице.

Найти оптимальный план выпуска продукции.

Ресурсы	Норма расхода на единицу продукции		Имеющийся объем ресурса
	$P1$	$P2$	
Оборудование	2	3	32
Сырье	1	1	12
Электроэнергия	2	1	20
Прибыль на единицу продукции	50	20	

Вариант 13.

Компания производит погрузчики и тележки. От одного погрузчика компания получает доход в размере 80 д.е. и от одной тележки в размере 40 д.е. Имеется три обрабатывающих центра, на которых выполняются операции металлообработки, сварки и сборки, необходимые для производства любого из продуктов. Для интервала планирования, равного месяцу, задана предельная производственная мощность каждого обрабатывающего центра в часах, а также количество часов на этом центре для производства одного погрузчика и одной тележки. Эта информация представлена в таблице.

Центры обработки	Норма расхода на единицу продукции (часы)		Общая мощность (часы)
	Погрузчик	*Тележка*	
Мет. обработка	2	3	32
Сварка	1	1	12
Сборка	2	1	20
Прибыль	80	40	

Найти оптимальный план работ на месяц, позволяющий получить максимальную прибыль.

Вариант 14.

Для изготовления двух видов изделий А и В используется токарное, фрезерное, сварочное и шлифовальное оборудование. Затраты времени на обработку одного изделия для каждого из типов оборудования указаны в таблице. В ней же указан общий фонд рабочего времени каждого из типов используемого оборудования, а также прибыль от реализации одного изделия каждого вида.

Тип оборудования	Затраты времени (*станко-часы*) на обработку одного изделия		Общий фонд рабочего времени оборудования (*часы*)
	A	*B*	
Фрезерное	2	4	120
Токарное	1	8	280
Сварочное	7	4	240
Шлифовальное	4	6	360
Прибыль (д.ед.)	10	14	

Определить, сколько изделий и какого вида следует изготовить предприятию, чтобы прибыль от их реализации была максимальной.

Вариант 15.

Для изготовления двух видов продукции A и B используется четыре вида ресурсов P1,P2, P3, P4.

Запасы ресурсов, число единиц ресурсов, затрачиваемых на изготовление единицы продукции и соответствующая прибыль приведены в таблице.

Вид ресурса	Затраты ресурсов на изготовление единицы продукции		Запас ресурса
	A	*B*	
P1	5	15	90
P2	10	5	80
P3	-	5	25
P4	3	-	21
Прибыль (д.ед.)	2	3	

Найти такой план производства продукции, при котором прибыль от ее реализации будет максимальной.

Задание 2. Решить транспортную задачу

Заводы производственной фирмы расположены в пунктах А1, А2, А3. Центры распределения (пункты назначения) расположены в пунктах В1,В2, В3.

Объемы производства в пунктах А1, А2, А3, величины спроса в пунктах В1,В2, В3 и стоимости перевозок заданы в соответствующих таблицах.

2.1. Составить первоначальный план перевозок для нечетных вариантов с помощью метода северо-западного угла, а для четных вариантов с помощью метода минимальной стоимости.

2.2. С помощью метода потенциалов найти оптимальный план перевозок, обеспечивающий их минимальную стоимость;

2.3. Найти минимальную стоимость перевозок.

Вариант 1.

Объем производства в пункте			Величина спроса в пункте		
А1	А2	А3	В1	В2	В3
1000	2000	1200	2000	1100	1100

Стоимости перевозки	В1	В2	В3
А1	40	30	70
А2	60	50	40
А3	20	70	60

Вариант 2.

Объем производства в пункте			Величина спроса в пункте		
А1	А2	А3	В1	В2	В3
1500	1000	800	2000	900	400

Стоимости перевозки	В1	В2	В3
А1	30	20	60
А2	50	70	30
А3	40	80	60

Вариант 3.

Объем производства в пункте			Величина спроса в пункте		
A1	A2	A3	B1	B2	B3
1400	700	1000	900	800	1400

Стоимости перевозки	B1	B2	B3
A1	20	30	50
A2	40	60	40
A3	70	40	60

Вариант 4.

Объем производства в пункте			Величина спроса в пункте		
A1	A2	A3	B1	B2	B3
1300	1200	1100	1000	1500	1100

Стоимости перевозки	B1	B2	B3
A1	30	20	50
A2	70	60	20
A3	50	50	60

Вариант 5.

Объем производства в пункте			Величина спроса в пункте		
A1	A2	A3	B1	B2	B3
700	600	500	1000	200	60

Стоимости перевозки	B1	B2	B3
A1	20	30	40
A2	50	60	30
A3	30	40	60

Вариант 6.

Объем производства в пункте			Величина спроса в пункте		
A1	A2	A3	B1	B2	B3
1400	1700	1600	2000	1000	1700

Стоимости перевозки	B1	B2	B3
A1	10	20	50
A2	40	60	20
A3	30	30	60

Вариант 7.

Объем производства в пункте			Величина спроса в пункте		
A1	A2	A3	B1	B2	B3
1200	1600	1600	1800	900	1700

Стоимости перевозки	B1	B2	B3
A1	10	25	50
A2	35	60	15
A3	30	30	60

Вариант 8.

Объем производства в пункте			Величина спроса в пункте		
A1	A2	A3	B1	B2	B3
1400	1500	1400	2000	1800	1500

Стоимости перевозки	B1	B2	B3
A1	15	20	40
A2	40	50	20
A3	30	30	60

Вариант 9.

Объем производства в пункте			Величина спроса в пункте		
A1	A2	A3	B1	B2	B3
1300	1600	150	1900	900	1600

Стоимости перевозки	B1	B2	B3
A1	10	20	40
A2	40	50	30
A3	20	30	50

Вариант 10.

Объем производства в пункте			Величина спроса в пункте		
A1	A2	A3	B1	B2	B3
1550	1650	1750	2150	1150	1850

Стоимости перевозки	B1	B2	B3
A1	10	30	40
A2	40	50	20
A3	20	30	50

Вариант 11.

Объем производства в пункте			Величина спроса в пункте		
A1	A2	A3	B1	B2	B3
1130	2130	1330	2130	1230	1230

Стоимости перевозки	B1	B2	B3
A1	40	30	65
A2	60	45	40
A3	30	70	60

Вариант 12.

Объем производства в пункте			Величина спроса в пункте		
A1	A2	A3	B1	B2	B3
1400	800	500	1900	700	100

Стоимости перевозки	B1	B2	B3
A1	20	10	50
A2	55	70	35
A3	40	80	60

Вариант 13.

Объем производства в пункте			Величина спроса в пункте		
A1	A2	A3	B1	B2	B3
1450	650	1100	2000	1100	1100

Стоимости перевозки	B1	B2	B3
A1	10	20	50
A2	40	55	40
A3	60	40	60

Вариант 14.

Объем производства в пункте			Величина спроса в пункте		
A1	A2	A3	B1	B2	B3
1370	1100	1100	1000	1570	1000

Стоимости перевозки	B1	B2	B3
A1	40	25	50
A2	65	60	30
A3	50	50	60

Вариант 15.

Объем производства в пункте			Величина спроса в пункте		
А1	А2	А3	В1	В2	В3
790	650	600	1100	290	110

Стоимости перевозки	В1	В2	В3
А1	20	30	35
А2	50	70	30
А3	25	40	70

Задание 3. Построить минимальное остовное дерево

В графе, представленном на рисунке 14 построить минимальное остовное дерево с помощью алгоритма Прима.

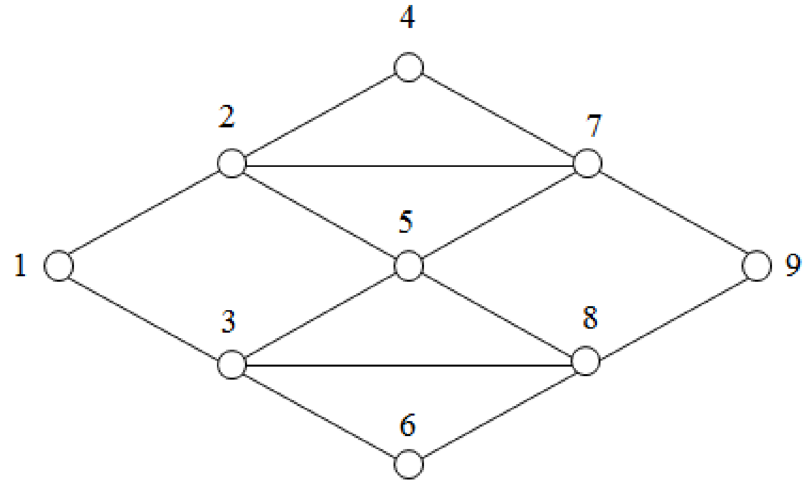

Рисунок 14 – Исходный граф

Веса дуг заданы в таблицах, соответствующих варианту.

Вариант 1.

Дуги	1,2	1,3	2,4	2,7	2,5	3,5	3,8
Веса	3	1	4	2	5	3	2
Дуги	3,6	4,7	5,7	5,8	6,8	7,9	8,9
Веса	4	5	1	3	2	4	2

Вариант 2.

Дуги	1,2	1,3	2,4	2,7	2,5	3,5	3,8
Веса	3	2	3	6	4	1	3
Дуги	3,6	4,7	5,7	5,8	6,8	7,9	8,9
Веса	1	3	4	2	3	5	1

Вариант 3.

Дуги	1,2	1,3	2,4	2,7	2,5	3,5	3,8
Веса	2	1	3	3	4	8	7
Дуги	3,6	4,7	5,7	5,8	6,8	7,9	8,9
Веса	4	2	3	2	4	1	1

Вариант 4.

Дуги	1,2	1,3	2,4	2,7	2,5	3,5	3,8
Веса	4	2	1	1	2	2	3
Дуги	3,6	4,7	5,7	5,8	6,8	7,9	8,9
Веса	8	4	2	7	6	4	5

Вариант 5.

Дуги	1,2	1,3	2,4	2,7	2,5	3,5	3,8
Веса	5	1	3	4	7	3	4
Дуги	3,6	4,7	5,7	5,8	6,8	7,9	8,9
Веса	8	6	4	4	2	3	1

Вариант 6.

Дуги	1,2	1,3	2,4	2,7	2,5	3,5	3,8
Веса	3	1	4	2	5	3	2
Дуги	3,6	4,7	5,7	5,8	6,8	7,9	8,9
Веса	4	3	2	1	8	5	4

Вариант 7.

Дуги	1,2	1,3	2,4	2,7	2,5	3,5	3,8
Веса	3	2	2	4	3	2	1
Дуги	3,6	4,7	5,7	5,8	6,8	7,9	8,9
Веса	2	1	1	5	3	6	1

Вариант 8.

Дуги	1,2	1,3	2,4	2,7	2,5	3,5	3,8
Веса	3	1	4	2	5	3	2
Дуги	3,6	4,7	5,7	5,8	6,8	7,9	8,9
Веса	4	5	1	3	2	4	2

Вариант 9.

Дуги	1,2	1,3	2,4	2,7	2,5	3,5	3,8
Веса	5	3	3	2	2	1	7
Дуги	3,6	4,7	5,7	5,8	6,8	7,9	8,9
Веса	2	4	4	3	8	2	1

Вариант 10.

Дуги	1,2	1,3	2,4	2,7	2,5	3,5	3,8
Веса	5	5	1	6	2	3	1
Дуги	3,6	4,7	5,7	5,8	6,8	7,9	8,9
Веса	2	4	2	3	3	1	2

Вариант 11.

Дуги	1,2	1,3	2,4	2,7	2,5	3,5	3,8
Веса	2	4	4	6	2	3	1
Дуги	3,6	4,7	5,7	5,8	6,8	7,9	8,9
Веса	3	2	1	5	1	2	4

Вариант 12.

Дуги	1,2	1,3	2,4	2,7	2,5	3,5	3,8
Веса	2	8	3	4	6	1	2
Дуги	3,6	4,7	5,7	5,8	6,8	7,9	8,9
Веса	2	3	4	7	2	1	1

Вариант 13.

Дуги	1,2	1,3	2,4	2,7	2,5	3,5	3,8
Веса	2	5	5	3	1	4	2
Дуги	3,6	4,7	5,7	5,8	6,8	7,9	8,9
Веса	5	4	6	2	1	7	2

Вариант 14.

Дуги	1,2	1,3	2,4	2,7	2,5	3,5	3,8
Веса	3	1	4	2	2	4	3
Дуги	3,6	4,7	5,7	5,8	6,8	7,9	8,9
Веса	5	3	8	6	2	4	3

Вариант 15.

Дуги	1,2	1,3	2,4	2,7	2,5	3,5	3,8
Веса	3	4	5	2	1	3	4
Дуги	3,6	4,7	5,7	5,8	6,8	7,9	8,9
Веса	7	5	3	9	1	2	1

Задание 4. Решить задачу определения кратчайшего пути

В графе, представленном на Рис. 8 найти кратчайшие пути из вершины 1 во все остальные вершины графа. Направленность дуг и их веса взять из предыдущего задания

3. СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Таха, Хемди А. Введение в исследование операций, 7-е издание.: Пер. с англ. – М.: Издательский дом "Вильямс", 2008. – 912 с: ил.
2. Шикин Е. В., Шикина Г. Е. Исследование операций : учеб. – М.: ТК Велби, Изд-во Проспект, 2006. – 280 с.
3. Бодров В.И., Лазарева Т.Я., Мартемьянов Ю.Ф. Методы исследования операций при принятии решений: Учебное пособие. Тамбов: Изд-во Тамб. гос. техн. ун-та, 2004. 160 с.
4. Исследование операций. Теория игр: Учеб.пособие/ Л.С. Костевич, А.А. Лапко. – Мн.: Выш. шк., 2008.
5. Волков И.К., Загоруйко Е.А. Исследование операций: учебное пособие для вузов. 2-е изд. / Под ред. В.С. Зарубина, А.П. Крищенко. – М. Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана. – 2007. – 436 с.
6. М.М. Ковалев, М.М. Писарук. Современное линейное программирование. - Минск, Издательский центр Белгосуниверситета, 1998. – 260 с.
7. Высшая математика: Математическое программирование.: Учеб.пособие/ А.В. Кузнецов, В.А. Сакович, Н.И. Холод; Под общ. ред. А.В. Кузнецова. — Мн.: Выш. шк., 2005. – 278 с.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Министерство образования и науки Украины
ХАРЬКОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ АВТОМОБИЛЬНО-
ДОРОЖНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра информационных технологий и мехатроники

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА

по дисциплине «Исследование операций»

Выполнил: студент группы РКз-21

Иванов О.Н.

2013

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ 2
1. КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ 4
1.1. Основные определения 4
1.2. Модели и методы исследования операций 5
1.3. Линейное программирование (ЛП) 6
1.3.1. Постановка задачи ЛП 7
1.3.2. Приведение ЗЛП к каноническому виду 9
1.3.3. Графический метод решения ЗЛП 11
1.3.4. Симплекс-метод решения ЗЛП 14
1.4. Транспортная задача 21
1.4.1. Постановка и математическая модель транспортной задачи 22
1.4.2. Методы определения исходного опорного решения 24
1.4.3. Отыскание оптимального решения с помощью метода потенциалов 26
1.5. Сети 30
1.5.1. Графы. Основные определения и термины 30
1.5.2. Минимальное остовное дерево 32
1.5.3. Кратчайший маршрут 35
2. ПЕРЕЧЕНЬ ЗАДАНИЙ К КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЕ 39
3. СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ 56
ПРИЛОЖЕНИЕ 57

Учебное издание

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

К ВЫПОЛНЕНИЮ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ
«ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ»
для студентов направления подготовки
6.050201 – Системная инженерия
заочной формы обучения

Составитель: Подоляка Оксана Александровна

Ответственный за выпуск О.Я. Никонов
Редактор

План 2013, поз.
Подп. к печати __________ Формат 60х84 1/16.
Условн. печат. лист. ____ Учетн.-изд. лист. ___
Заявка № _______ Тираж ____ прим. Цена договорная

ХНАДУ, 61002, г. Харьков-МСП, ул. Петровского, 25

Свидетельство государственного комитета информационной политики, телевидения и радиовещания Украины о внесении субъекта издательской деятельности в государственный реестр издательств, изготовителей и распространителей издательской продукции, серия ДК, № 407

Подготовлено и напечатано издательством Харьковского национального автомобильно-дорожного университета