

АППРОКСИМАЦИЯ ФУНКЦИЙ. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Постановка задачи. Основу математических моделей многих процессов и явлений в физике, химии, биологии, экономике и других областях составляют уравнения различного вида: нелинейные уравнения, обыкновенные дифференциальные уравнения, дифференциальные уравнения в частных производных и т.д. Для решения подобных уравнений необходимо иметь возможность вычислять значения функций, входящих в описание математической модели рассматриваемого процесса или явления, при произвольном значении аргумента. Для сложных моделей подобные вычисления могут быть трудоемкими даже при использовании компьютера.

Используемые в математических моделях функции могут быть заданы как аналитическим способом (в виде формулы), так и табличным, при котором функция известна только при определенных дискретных значениях аргумента. В частности, если функциональная зависимость получена в результате расчетов, проведенных на ЭВМ, или в процессе измерений, осуществленных в рамках какого-либо эксперимента, то она оказывается заданной именно табличным способом. На практике нам могут понадобиться значения функции и в других точках, отличных от тех, что заданы в таблице. Однако получить эти значения можно только путем сложных расчетов или проведением дорогостоящих экспериментов.

Таким образом, с точки зрения экономии времени и средств мы приходим к задаче вычисления приближенных значений функции при любом значении аргумента на основе имеющихся табличных данных.

Эта задача решается путем приближенной замены функции $f(x)$ более простой функцией $\varphi(x)$, которую нетрудно вычислять при любом значении аргумента x в заданном интервале его изменения. Введенную функцию можно использовать не только для приближенного определения численных значений $f(x)$, но и для проведения аналитических расчетов при теоретическом исследовании модели.

Приближение функции $f(x)$ более простой функцией $\varphi(x)$ называется аппроксимацией (от латинского *approximare* – приближаюсь). Аппроксимирующую функцию $\varphi(x)$ строят таким образом, чтобы отклонения (в некотором смысле) $\varphi(x)$ от $f(x)$ в заданной области было наименьшим. Понятие “малого отклонения” зависит от того, каким способом оценивается близость двух функций, поэтому оно будет уточняться в дальнейшем при рассмотрении конкретных методов аппроксимации.

Непрерывная аппроксимация. Если исходная функция $f(x)$ задана аналитическим выражением, то при построении аппроксимирующей функции $\varphi(x)$ возможно требовать минимальности отклонения одной функции от другой на некотором непрерывном множестве точек, например, на отрезке $[a, b]$. Такой вид аппроксимации называется непрерывным или интегральным.

Теоретически для наилучшего приближения целесообразно требовать, чтобы во всех точках некоторого отрезка $[a, b]$ отклонения аппроксимирующей функции $\varphi(x)$ от функции $f(x)$ было по абсолютной величине меньше заданной величины $\varepsilon > 0$:

$$|f(x) - \varphi(x)| < \varepsilon, \quad a \leq x \leq b.$$

В этом случае говорят, что функция $\varphi(x)$ равномерно приближает функцию $f(x)$ с точностью ε на интервале $[a, b]$. Практическое получение равномерного приближения

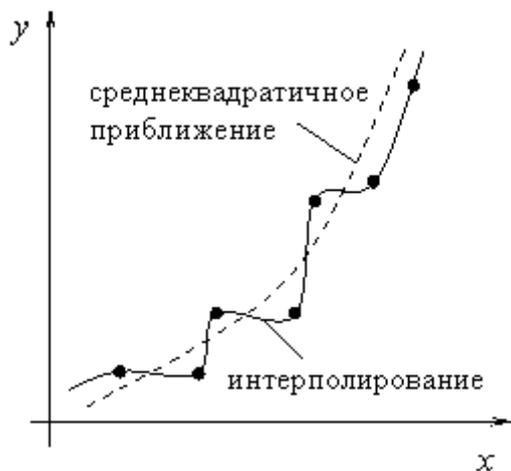
представляет большие трудности, и поэтому этот способ применяется главным образом в теоретических исследованиях.

Наиболее употребительным является так называемое среднее квадратичное приближение, для которого наименьшее значение имеет величина

$$M = \int_a^b [f(x) - \varphi(x)]^2 dx$$

Потребовав обращения в нуль частных производных от M по параметрам, определяющим функцию $\varphi(x)$, получают уравнения, позволяющие найти наилучшие (в указанном смысле) значения этих параметров.

Аппроксимация, при которой приближение строится на заданном дискретном множестве точек $\{x_i\}$, называется точечной.



Для получения точечного среднее квадратичного приближения функции $y = f(x)$, заданной таблично, аппроксимирующую функцию $\varphi(x)$ строят из условия минимума величины

$$S = \sum_{i=0}^n [y_i - \varphi(x_i)]^2$$

где y_i — значения функции $f(x)$ в точках x_i .

Основная сфера применения среднее квадратичного приближения — обработка экспериментальных данных (построение эмпирических формул).

Другим видом точечной аппроксимации является интерполирование, при котором аппроксимирующая функция принимает в заданных точках x_i , те же значения y_i , что и функция $f(x)$, т.е. $\varphi(x_i) = y_i$, $i = 0, 1, \dots, n$.

В этом случае, близость интерполирующей функции к заданной функции состоит в том, что их значения совпадают на заданной системе точек.

На рисунке показаны качественные графики интерполяционной функции (сплошная линия) и результаты среднее квадратичного приближения (пунктирная линия).

Точками отмечены табличные значения функции $f(x)$.

ИНТЕРПОЛИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ИНТЕРПОЛЯЦИИ

Пусть известные значения некоторой функции f образуют следующую таблицу:

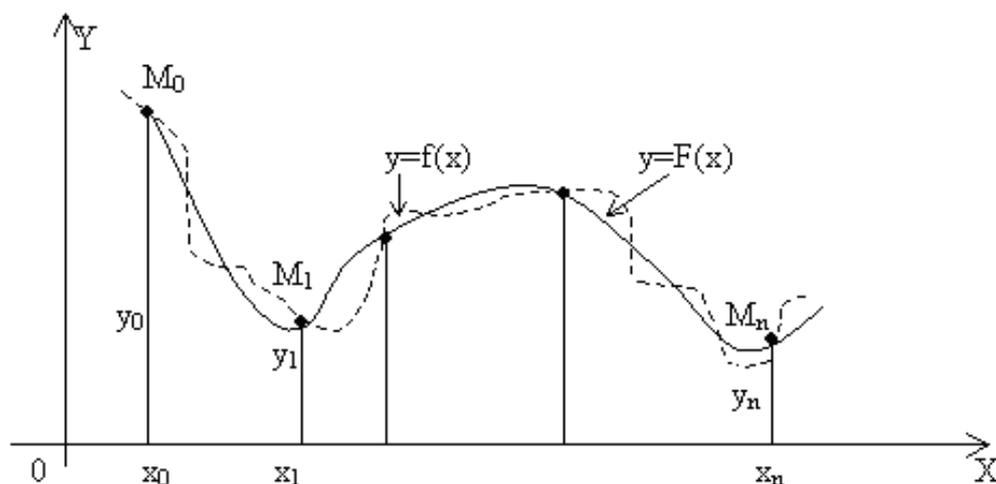
x	x_0	x_1	\dots	x_n
$f(x)$	y_0	y_1	\dots	y_n

При этом требуется получить значение функции f для такого значения аргумента x , которое входит в отрезок $[x_0; x_n]$, но не совпадает ни с одним из значений x_i ($i=0, 1, \dots, n$).

Классический подход к решению задачи построения приближающей функции основывается на требовании строгого совпадения значений $f(x)$ и $F(x)$ в точках x_i ($i=0, 1, 2, \dots, n$), т.е.

$$F(x_0)=y_0, F(x_1)=y_1, \dots, F(x_n)=y_n. \quad (1)$$

В этом случае нахождение приближенной функции называют интерполяцией (или интерполированием), а точки x_0, x_1, \dots, x_n — узлами интерполяции. Геометрически это означает, что нужно найти кривую $y=F(x)$ некоторого определенного типа, проходящую через заданную систему точек $M_i(x_i, y_i)$ ($i=0, 1, 2, \dots, n$) (см. рис.). В случае, если $x \notin [x_0, x_n]$ нахождение искомой функции называют экстраполяцией. В дальнейшем, под термином интерполяция будем понимать как первую, так и вторую операции.



Задача интерполирования может иметь в общей постановке бесчисленное множество решений или совсем их не иметь. Однако эта задача становится однозначной, если вместо произвольной функции $F(x)$ искать некоторую функцию конкретного вида, удовлетворяющую условиям (1).

Наиболее удобной в практическом использовании функцией является алгебраический многочлен степени n :

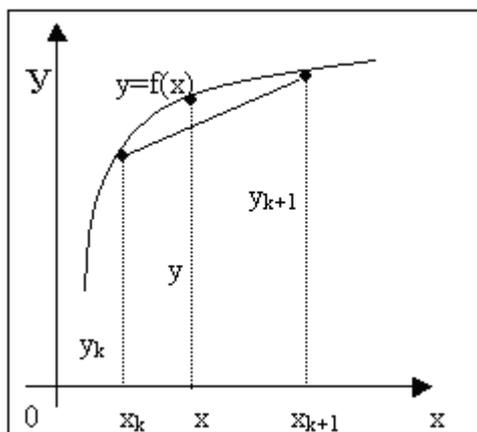
$$P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n$$

Чтобы задать многочлен n -ой степени достаточно задать его $n+1$ коэффициент. Значения многочлена просто вычисляются, его легко продифференцировать, проинтегрировать и т.д. Поэтому алгебраические многочлены нашли широкое применение для приближения функций.

Ниже будут подробно изложены широко используемые в географических исследованиях случаи интерполяции линейной функцией (линейная интерполяция) и квадратичной функцией (квадратичная интерполяция).

ЛИНЕЙНАЯ ИНТЕРПОЛЯЦИЯ

Итак, пусть мы имеем функцию, заданную таблично. Решая задачу интерполяции, найдем в таблице два соседних значения аргумента (обозначим их x_k и x_{k+1}), между которыми лежит заданное значение x ($x_k < x < x_{k+1}$), пусть $y_k = f(x_k)$ и $y_{k+1} = f(x_{k+1})$ – соответствующие им значения функции. Будем считать, что в промежутке (x_k, x_{k+1}) данную функцию с достаточной степенью точности можно заменить линейной функцией, т.е. дугу графика функции можно заменить стягивающей ее хордой (см. рис.). Такая замена называется линейной интерполяцией.



Уравнение прямой, проходящей, через точки (x_k, y_k) и (x_{k+1}, y_{k+1}) , имеет следующий вид:

$$\frac{y - y_k}{y_{k+1} - y_k} = \frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k}$$

или в более привычной форме уравнения с угловым коэффициентом:

$$y = y_k + \frac{y_{k+1} - y_k}{x_{k+1} - x_k} (x - x_k) \tag{1}$$

Применение линейной интерполяции для приближенного вычисления значений функции обосновано в том случае, когда возникающая при этом погрешность невелика. Для нахождения погрешности обозначим разность между неизвестным нам точным значением функции $f(x)$ и ее приближенным значением, определяемым формулой (1) через $\varphi(x)$:

$$\varphi(x) \equiv f(x) - y_k - \Delta y_k \frac{x - x_k}{h}$$

Будем предполагать также, что вторая производная функции $f(x)$ на рассматриваемом участке непрерывна и удовлетворяет неравенству

$$|f''(x)| \leq M_2,$$

где $M_2 = \max_{x \in [a, b]} |f''(x)|$.

Используя аппарат математического анализа можно доказать [27], что для любого x из интервала (x_k, x_{k+1}) оценка погрешности линейной интерполяции будет иметь следующий вид:

$$\varphi(x) \leq \frac{M_2 h^2}{8}$$

Заметим, что вторая производная функции $f(x)$ имеет конкретный механический смысл. Если $f(x)$ описывает закон движения материальной точки, то вторая производная этой функции задает ускорение этой точки в момент времени x . Факт существования ограничения на ускорение (ограниченность второй производной) с физической точки зрения означает, что процесс описываемый функцией $f(x)$ протекает относительно равномерно и функция изменяется не очень быстро. Таковой, например, будет функция, задающая изменение суточной температуры воздуха от времени. На практике именно этим критерием "плавности" скорости изменения процесса можно вполне воспользоваться для ответа на вопрос об обоснованности применения линейной интерполяции.

Окончательно линейная интерполяция считается применимой, если вносимая ею дополнительная погрешность заметно меньше погрешности измерений натуральных данных. Если обозначить через m номер последнего разряда приводимых в таблице значений функции, то погрешность измерений будет равна

$0.5 \cdot 10^{-m}$ и условие применимости линейной интерполяции запишется в виде неравенства:

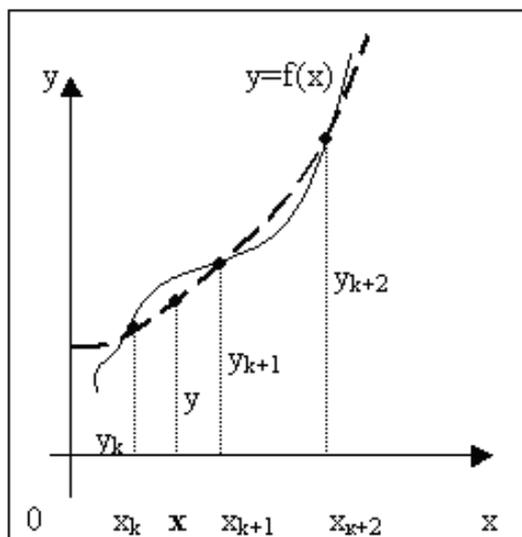
$$M_2 h^2 < 4 \cdot 10^{-m} \quad (2)$$

Шаг и точность таблицы обычно стараются согласовать так, чтобы условие (2) было выполнено.

Бывает, однако, что для выполнения этого условия требуется выбирать слишком малый шаг. В таком случае не считаются с этим условием, а для отыскания промежуточных значений функции пользуются более сложной квадратичной интерполяцией или другими приемами.

КВАДРАТИЧНАЯ ИНТЕРПОЛЯЦИЯ

Пусть снова дана функция $f(x)$, заданная таблично. Считая, что на промежутке (x_k, x_{k+2}) данную функцию с достаточной степенью точности можно заменить квадратичной функцией, то есть часть графика функции можно заменить параболой (см. рис.), необходимо найти значение функции $f(x)$ в некоторой точке x , принадлежащей интервалу (x_k, x_{k+2}) .



Будем искать квадратичную функцию в следующем виде: $y = ax^2 + bx + c$.

Исходя из условия совпадения значений искомой квадратичной функции с табличными значениями функции в трех заданных точках, составим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} y_0 = a(x_0)^2 + bx_0 + c \\ y_1 = a(x_1)^2 + bx_1 + c \\ y_2 = a(x_2)^2 + bx_2 + c \end{cases}$$

Это система трех линейных уравнений с тремя неизвестными a , b и c . Ее определитель не равен 0 (если только точки не лежат на одной прямой). Решая составленную систему уравнений матричным способом, получим следующую зависимость для коэффициентов a , b и c :

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x_0)^2 & x_0 & 1 \\ (x_1)^2 & x_1 & 1 \\ (x_2)^2 & x_2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

Таким образом значение функции $f(x)$ в точке x можно приближенно считать равным

$$f(x) \approx ax^2 + bx + c$$

Естественно поставить вопрос о погрешности полученной формулы.

Рассмотрим разность между точным значением функции $f(x)$ и ее приближенным значением. Обозначим эту разность через $\varphi(x)$:

$$\varphi(x) = f(x) - ax^2 - bx - c.$$

Мы подошли к задаче об оценке значений функции $j(x)$ для x , пробегающих промежуток (x_k, x_{k+2}) .

В рассматриваемом случае нам придется предполагать, что третья производная функции $f(x)$ на рассматриваемом промежутке непрерывна и удовлетворяет неравенству: $|f'''(x)| \leq M_3$.

Тогда для $\varphi(x)$ справедлива следующая оценка:

$$\varphi(x) \leq \frac{M_3 \cdot (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)}{6}.$$

РЕГРЕССИОННЫЙ АНАЛИЗ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Одной из типовых задач обработки экспериментальных данных (ЭД) является определение количественной зависимости показателей качества объекта от значений его параметров и характеристик внешней среды. Примером такой постановки задачи является установление зависимости между временем обработки запросов к базе данных и интенсивностью входного потока. Время обработки зависит от многих факторов, в том числе от размещения искомой информации на внешних носителях, сложности запроса. Следовательно, время обработки конкретного запроса можно считать случайной величиной. Но вместе с тем, при увеличении интенсивности потока запросов следует ожидать возрастания его среднего значения, т.е. считать, что время обработки и интенсивность потока запросов связаны корреляционной зависимостью.

Постановка задачи регрессионного анализа формулируется следующим образом.

Имеется совокупность результатов наблюдений. В этой совокупности один столбец соответствует показателю, для которого необходимо установить функциональную зависимость с параметрами объекта и среды, представленными остальными столбцами. Будем обозначать показатель через y^* и считать, что ему соответствует первый столбец матрицы наблюдений. Остальные $m-1$ ($m > 1$) столбцов соответствуют параметрам (факторам) x_2, x_3, \dots, x_m .

Требуется: установить количественную взаимосвязь между показателем и факторами. В таком случае задача регрессионного анализа понимается как задача выявления такой функциональной зависимости $y^* = f(x_2, x_3, \dots, x_m)$, которая наилучшим образом описывает имеющиеся экспериментальные данные.

Допущения:

количество наблюдений достаточно для проявления статистических закономерностей относительно факторов и их взаимосвязей;

обрабатываемые ЭД содержат некоторые ошибки (помехи), обусловленные погрешностями измерений, воздействием неучтенных случайных факторов;

матрица результатов наблюдений является единственной информацией об изучаемом объекте, имеющейся в распоряжении перед началом исследования.

Функция $f(x_2, x_3, \dots, x_m)$, описывающая зависимость показателя от параметров, называется уравнением (функцией) регрессии. Термин "регрессия" (regression(лат.) – отступление, возврат к чему-либо) связан со спецификой одной из конкретных задач, решенных на стадии становления метода, и в настоящее время не отражает всей сущности метода, но продолжает применяться.

Решение задачи регрессионного анализа целесообразно разбить на несколько этапов:

предварительная обработка ЭД;

выбор вида уравнений регрессии;

вычисление коэффициентов уравнения регрессии;

проверка адекватности построенной функции результатам наблюдений.

ВЫБОР ВИДА УРАВНЕНИЯ РЕГРЕССИИ

Задача определения функциональной зависимости, наилучшим образом описывающей ЭД, связана с преодолением ряда принципиальных трудностей. В общем случае для стандартизованных данных функциональную зависимость показателя от параметров можно представить в виде

$$y = f(u_1, u_2, \dots, u_p) + e \quad (1)$$

где f – заранее не известная функция, подлежащая определению;
 e – ошибка аппроксимации ЭД.

Указанное уравнение принято называть выборочным уравнением регрессии y на u . Это уравнение характеризует зависимость между вариацией показателя и вариациями факторов. А мера корреляции измеряет долю вариации показателя, которая связана с вариацией факторов. Иначе говоря, корреляцию показателя и факторов нельзя трактовать как связь их уровней, а регрессионный анализ не объясняет роли факторов в создании показателя.

Еще одна особенность касается оценки степени влияния каждого фактора на показатель. Регрессионное уравнение не обеспечивает оценку отдельного влияния каждого фактора на показатель, такая оценка возможна лишь в случае, когда все другие факторы не связаны с изучаемым. Если изучаемый фактор связан с другими, влияющими на показатель, то будет получена смешанная характеристика влияния фактора. Эта характеристика содержит как непосредственное влияние фактора, так и опосредованное влияние, оказанное через связь с другими факторами и их влиянием на показатель.

В регрессионное уравнение не рекомендуется включать факторы, слабо связанные с показателем, но тесно связанные с другими факторами. Не включают в уравнение и факторы, функционально связанные друг с другом (для них коэффициент корреляции равен 1). Включение таких факторов приводит к вырождению системы уравнений для оценок коэффициентов регрессии и к неопределенности решения.

Функция f должна подбираться так, чтобы ошибка e в некотором смысле была минимальна. Существует бесконечное множество функций, описывающих ЭД абсолютно точно ($e = 0$), т.е. таких функций, которые для всех значений параметров $u_{j,2}, u_{j,3}, \dots, u_{j,m}$ принимают в точности соответствующие значения показателя $y_i, i = 1, 2, \dots, n$. Вместе с тем, для всех других значений параметров, отсутствующих в результатах наблюдений, значения показателя могут принимать любые значения. Понятно, что такие функции не соответствуют действительной связи между параметрами и показателем.

В целях выбора функциональной связи заранее выдвигают гипотезу о том, к какому классу может принадлежать функция f , а затем подбирают "лучшую" функцию в этом классе. Выбранный класс функций должен обладать некоторой "гладкостью", т.е. "небольшие" изменения значений аргументов должны вызывать "небольшие" изменения значений функции (ЭД содержат некоторые ошибки измерений, а само поведение объекта подвержено влиянию помех, маскирующих истинную связь между параметрами и показателем).

Простым, удобным для практического применения и отвечающим указанному условию является класс полиномиальных функций

$$y = a_0 + \sum_{j=2}^m a_j u_j + \sum_{j=2}^{m-1} \sum_{k=j+1}^m a_{jk} u_j u_k + \sum_{j=2}^m a_{jj} u_j^2 + \dots + \varepsilon. \quad (2)$$

Для такого класса задача выбора функции сводится к задаче выбора значений коэффициентов $a_0, a_j, a_{jk}, \dots, a_{jj}, \dots$. Однако универсальность полиномиального представления обеспечивается только при возможности неограниченного увеличения степени полинома, что не всегда допустимо на практике, поэтому приходится применять и другие виды функций.

Частным случаем, широко применяемым на практике, является полином первой степени или уравнение линейной регрессии

$$y = a_0 + \sum_{j=2}^m a_j u_j + \varepsilon \quad (3)$$

Это уравнение в регрессионном анализе следует трактовать как векторное, ибо речь идет о матрице данных

$$y_i = a_0 + \sum_{j=2}^m a_j u_{ij} + \varepsilon_i, \quad i=1, 2, \dots, n. \quad (4)$$

Обычно стремятся обеспечить такое количество наблюдений, которое превышало бы количество оцениваемых коэффициентов модели. Для линейной регрессии при $n > m$ количество уравнений превышает количество подлежащих определению коэффициентов полинома. Но и в этом случае нельзя подобрать коэффициенты таким образом, чтобы ошибка в каждом скалярном уравнении обращалась в ноль, так как к неизвестным относятся a_j и ε_i , их количество $n + m - 1$, т.е. всегда больше количества уравнений n . Аналогичные рассуждения справедливы и для полиномов степени, выше первой.

Для выбора вида функциональной зависимости можно рекомендовать следующий подход:

в пространстве параметров графически отображают точки со значениями показателя. При большом количестве параметров можно строить точки применительно к каждому из них, получая двумерные распределения значений;

по расположению точек и на основе анализа сущности взаимосвязи показателя и параметров объекта делают заключение о примерном виде регрессии или ее возможных вариантах;

после расчета параметров оценивают качество аппроксимации, т.е. оценивают степень близости расчетных и фактических значений;

если расчетные и фактические значения близки во всей области задания, то задачу регрессионного анализа можно считать решенной. В противном случае можно попытаться выбрать другой вид полинома или другую аналитическую функцию, например периодическую.

ВЫЧИСЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ УРАВНЕНИЯ РЕГРЕССИИ. МЕТОД НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

Систему уравнений (4) на основе имеющихся ЭД однозначно решить невозможно, так как количество неизвестных всегда больше количества уравнений. Для преодоления этой проблемы нужны дополнительные допущения. Здравый смысл подсказывает: желательно выбрать коэффициенты полинома так, чтобы обеспечить минимум ошибки аппроксимации ЭД. Могут применяться различные меры для оценки ошибок аппроксимации. В качестве такой меры нашла широкое применение среднеквадратическая ошибка. На ее основе разработан специальный метод оценки коэффициентов уравнений регрессии – метод наименьших квадратов (МНК). Этот метод позволяет получить оценки максимального правдоподобия неизвестных коэффициентов уравнения регрессии при нормальном распределении вариантов, но его можно применять и при любом другом распределении факторов.

В основе МНК лежат следующие положения:

- значения величин ошибок и факторов независимы, а значит, и некоррелированы, т.е. предполагается, что механизмы порождения помехи не связаны с механизмом формирования значений факторов;
- математическое ожидание ошибки ϵ должно быть равно нулю (постоянная составляющая входит в коэффициент a_0), иначе говоря, ошибка является центрированной величиной;

- выборочная оценка дисперсии ошибки $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \epsilon_i^2$ должна быть минимальна.

Рассмотрим применение МНК применительно к линейной регрессии стандартизованных величин. Для центрированных величин u_j коэффициент a_0 равен нулю, тогда уравнения линейной регрессии

$$\hat{y}_i = \sum_{j=2}^m a_j u_{i,j} + \epsilon_i, \quad i = \overline{1, n} \quad (5)$$

Здесь введен специальный знак " $\hat{}$ ", обозначающий значения показателя, рассчитанные по уравнению регрессии, в отличие от значений, полученных по результатам наблюдений.

По МНК определяются такие значения коэффициентов уравнения регрессии, которые обеспечивают безусловный минимум выражению

$$w = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \epsilon_i^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(y_i - \sum_{j=2}^m a_j u_{i,j} \right)^2 \quad (6)$$

Минимум находится приравнением нулю всех частных производных выражения (6), взятых по неизвестным коэффициентам, и решением системы уравнений

$$\frac{\partial w}{\partial a_k} = -\frac{2}{n} \sum_{i=1}^n \left(y_i - \sum_{j=2}^m a_j u_{i,j} \right) u_{i,k} = 0, \quad k = \overline{2, m} \quad (7)$$

Последовательно проведя преобразования и используя введенные ранее оценки коэффициентов корреляции

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(y_i u_{i,k} - \sum_{j=2}^m a_j u_{i,j} u_{i,k} \right) = 0, \quad k = \overline{2, m};$$

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i u_{i,k} - \sum_{j=2}^m a_j \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n u_{i,j} u_{i,k} = 0, \quad k = \overline{2, m},$$

получим

$$\rho_{y,k} - \sum_{j=2}^m a_j \rho_{j,k} = 0, \quad k = \overline{2, m} \quad (8)$$

Итак, получено $m-1$ линейных уравнений, что позволяет однозначно вычислить значения a_2, a_3, \dots, a_m .

Применение МНК для нелинейных функций практически ничем не отличается от рассмотренной схемы (только коэффициент a_0 в исходном уравнении не равен нулю).

Например, пусть необходимо определить коэффициенты параболической регрессии $\hat{y} = a_0 + a_2 u_2 + a_{22} u_2^2$.

Выборочная дисперсия ошибки

$$w = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(y_i - a_0 - a_2 u_{i,2} - a_{22} u_{i,2}^2 \right)^2$$

На ее основе можно получить следующую систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{\partial w}{\partial a_0} = -\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(y_i - a_0 - a_2 u_{i,2} - a_{22} u_{i,2}^2 \right) = 0, \\ \frac{\partial w}{\partial a_1} = -\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(y_i - a_0 - a_2 u_{i,2} - a_{22} u_{i,2}^2 \right) u_{i,2} = 0, \\ \frac{\partial w}{\partial a_2} = -\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(y_i - a_0 - a_1 u_{i,2} - a_{22} u_{i,2}^2 \right) u_{i,2}^2 = 0. \end{cases}$$

После преобразований система уравнений примет вид

$$\begin{cases} \mu_1(y) - a_0 - a_2 \mu_1(u_2) - a_{22} = 0, \\ \rho_{y,2} - a_0 \mu_1(u_2) - a_2 - a_{22} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n u_{i,2}^3 = 0, \\ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i u_{i,2}^2 - a_0 - a_2 \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n u_{i,2}^3 - a_{22} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n u_{i,2}^4 = 0. \end{cases}$$

Учитывая свойства моментов стандартизованных величин, запишем

$$a_0 + a_{22} = 0,$$

$$\rho_{y,2} - a_2 - a_{22} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n u_{i,2}^3 = 0,$$

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i u_{i,2}^2 - a_0 - a_2 \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n u_{i,2}^3 - a_{22} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n u_{i,2}^4 = 0.$$

Определение коэффициентов нелинейной регрессии основано на решении системы линейных уравнений. Для этого можно применять универсальные пакеты численных методов или специализированные пакеты обработки статистических данных.

С ростом степени уравнения регрессии возрастает и степень моментов распределения параметров, используемых для определения коэффициентов. Так, для

определения коэффициентов уравнения регрессии второй степени используются моменты распределения параметров до четвертой степени включительно. Известно, что точность и достоверность оценки моментов по ограниченной выборке ЭД резко снижается с ростом их порядка. Применение в уравнениях регрессии полиномов степени выше второй нецелесообразно.

Качество полученного уравнения регрессии оценивают по степени близости между результатами наблюдений за показателем и предсказанными по уравнению регрессии значениями в заданных точках пространства параметров. Если результаты близки, то задачу регрессионного анализа можно считать решенной. В противном случае следует изменить уравнение регрессии (выбрать другую степень полинома или вообще другой тип уравнения) и повторить расчеты по оценке параметров.

При наличии нескольких показателей задача регрессионного анализа решается независимо для каждого из них.

Анализируя сущность уравнения регрессии, следует отметить следующие положения. Рассмотренный подход не обеспечивает отдельной (независимой) оценки коэффициентов – изменение значения одного коэффициента влечет изменение значений других. Полученные коэффициенты не следует рассматривать как вклад соответствующего параметра в значение показателя. Уравнение регрессии является всего лишь хорошим аналитическим описанием имеющихся ЭД, а не законом, описывающим взаимосвязи параметров и показателя. Это уравнение применяют для расчета значений показателя в заданном диапазоне изменения параметров.