ПЕРЕМЕННЫЕ И ПОСТОЯННЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

В результате измерения физических величин (время, площадь, объем, масса, скорость и т.д.) определяются их числовые значения. Математика занимается величинами, отвлекаясь от их конкретного содержания. В дальнейшем, говоря о величинах, мы будем иметь в виду их числовые значения. В различных явлениях некоторые величины изменяются, а другие сохраняют свое числовое значение. Например, при равномерном движении точки время и расстояние меняются, а скорость остается постоянной.

Переменной величиной называется величина, которая принимает различные числовые значения. Величина, числовые значения которой не меняются, называется *постоянной*. Переменные величины будем обозначать буквами $x,\ y,\ z,\ldots$, постоянные – $a,\ b,\ c,\ldots$

Заметим, что в математике постоянная величина часто рассматривается как частный случай переменной, у которой все числовые значения одинаковы.

Областью изменения переменной величины называется совокупность всех принимаемых ею числовых значений. Область изменения может состоять как из одного или нескольких промежутков, так и из одной точки.

УПОРЯДОЧЕННАЯ ПЕРЕМЕННАЯ ВЕЛИЧИНА. ЧИСЛОВАЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ

Будем говорить, что переменная x есть *упорядоченная переменная величина*, если известна область ее изменения, и про каждые из двух любых ее значений можно сказать, какое из них предыдущее и какое последующее.

Частным случаем упорядоченной переменной величины является переменная величина, значения которой образуют *числовую последовательность* $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ Для таких величин при $i < j,\ i,\ j \in N$, значение x_i считается предшествующим, а x_j – последующим независимо от того, какое из этих значений больше. Таким образом, числовая последовательность – это переменная величина, последовательные значения которой могут быть перенумерованы. Числовую последовательность будем обозначать $x = \{x_n\} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$. Отдельные числа последовательности называются ее *элементами*.

Например, числовую последовательность образуют следующие величины:

1. $x = \left\{\frac{1}{n}\right\} = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\right\}$,
2. $x = \left\{n + (-1)^n\right\} = \{0, 3, 2, 5, 4, \ldots\}$,
3. $x = \{a + d(n-1)\}$, где $a,\ d$ – постоянные числа.

ФУНКЦИЯ

При изучении различных явлений природы и решении технических задач, а, следовательно, и в математике приходится рассматривать изменение одной величины в зависимости от изменения другой. Так, например, известно, что площадь круга выражается через радиус формулой $S = \pi r^2$. Если радиус r принимает различные числовые значения, то площадь S также принимает различные числовые значения, т.е. изменение одной переменной влечет изменение другой.

Если каждому значению переменной x, принадлежащему некоторой области, соответствует одно определенное значение другой переменной y, то y называется *функцией переменной x*. Символически будем записывать $y=f(x)$. При этом переменная x называется *независимой переменной* или *аргументом*.

Запись $y=C$, где C – постоянная, обозначает функцию, значение которой при любом значении x одно и то же и равно C.

Множество значений x, для которых можно определить значения функции y по правилу $f(x)$, называется *областью определения функции*.

Заметим, что числовая последовательность также является функцией, область определения которой совпадает с множеством натуральных чисел.

К основным элементарным функциям относятся все функции, изучаемые в школьном курсе математики:

$$y = x^{\alpha},\ y = a^{x},\ y = \log_a x,\ y = \sin x,\ y = \cos x,\ y = \operatorname{tg} x,\ y = \operatorname{ctg} x,\ y = \arcsin x,$$

$$y = \arccos x,\ y = \operatorname{arctg} x,\ y = \operatorname{arcctg} x.$$

Элементарной функцией называется функция, которая может быть задана основными элементарными функциями и постоянными при помощи конечного числа операций сложения, вычитания, умножения, деления и взятия функции от функции.

ПОНЯТИЕ ПРЕДЕЛА ЧИСЛОВОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

В дальнейшем курсе математики понятие предела будет играть фундаментальную роль, так как с ним непосредственно связаны основные понятия математического анализа – производная, интеграл и др.

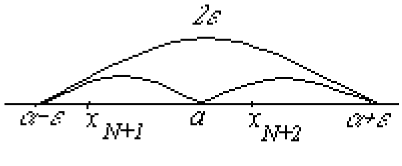
Начнем с понятия предела числовой последовательности.

Число a называется *пределом* последовательности $x = \{x_n\}$, если для произвольного заранее заданного сколь угодно малого положительного числа ε найдется такое натуральное число N, что при всех $n>N$ выполняется неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$.

Если число a есть предел последовательности $x = \{x_n\}$, то говорят, что x_n стремится к a, и пишут $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

Чтобы сформулировать это определение в геометрических терминах введем следующее понятие.

Окрестностью точки x_0 называется произвольный интервал (a, b), содержащий эту точку внутри себя. Часто рассматривается окрестность точки x_0, для которой x_0 является серединой, тогда x_0 называется *центром* окрестности, а величина $(b–a)/2$ – *радиусом* окрестности.



Итак, выясним, что же означает геометрически понятие предела числовой последовательности. Для этого запишем последнее неравенство из определения в виде

$$-\varepsilon < x_n - a < \varepsilon \qquad \text{или} \qquad a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon.$$

Это неравенство означает, что все элементы последовательности с номерами $n>N$ должны лежать в интервале $(a – \varepsilon;\ a + \varepsilon)$.

Следовательно, постоянное число a есть предел числовой последовательности $\{x_n\}$, если для любой малой окрестности с центром в точке a радиуса ε (ε – окрестности точки a) найдется такой элемент последовательности с номером N, что все последующие элементыс номерами $n>N$ будут находиться внутри этой окрестности.

Примеры.

1. Пусть переменная величина x последовательно принимает значения

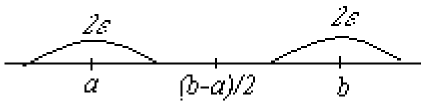
$$x_1 = 1+1,\ x_2 = 1+\frac{1}{2},\ x_3 = 1+\frac{1}{3},\ \dots,\ x_n = 1+\frac{1}{n},\dots$$

Докажем, что предел этой числовой последовательности равен 1. Возьмем произвольное положительное число ε. Нам нужно найти такое натуральное число N, что при всех $n>N$ выполняется неравенство $|x_n - 1| < \varepsilon$. Действительно, т.к.

$$|x_n - 1| = \left|1+\frac{1}{n}-1\right| = \frac{1}{n},$$

то для выполнения соотношения $|x_n - a| < \varepsilon$ достаточно, чтобы $\frac{1}{n} < \varepsilon$ или $n > \frac{1}{\varepsilon}$. Поэтому, взяв в качестве N любое натуральное число, удовлетворяющее неравенству $N > \frac{1}{\varepsilon}$, получим что нужно. Так если взять, например, $\varepsilon = \frac{1}{5}$, то, положив N=6, для всех n>6 будем иметь $|x_n - 1| = \frac{1}{n} < \frac{1}{6} < \varepsilon$.

2. Используя определение предела числовой последовательности, доказать что $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{2n-1} = \frac{1}{2}$.



Возьмем произвольное ε > 0. Рассмотрим

$$\left|x_n - \frac{1}{2}\right| = \left|\frac{n}{2n-1} - \frac{1}{2}\right| = \left|\frac{2n-2n+1}{2n-1}\right| = \frac{1}{2n-1}.$$

Тогда $\left|x_n - \frac{1}{2}\right| < \varepsilon$, если $\frac{1}{2n-1} < \varepsilon$ или $2n-1 > \frac{1}{\varepsilon}$, т.е. $n > \frac{1}{2\varepsilon} + \frac{1}{2}$. Поэтому выберем любое натуральное число, удовлетворяющее неравенству $N > \frac{1}{2\varepsilon} + \frac{1}{2}$.

Сделаем несколько замечаний.

Замечание 1. Очевидно, что если все элементы числовой последовательности принимают одно и то же постоянное значение $x_n = c$, то предел этой последовательности будет равен самой постоянной. Действительно, при любом ε всегда выполняется неравенство $|x_n - c| = |c - c| = 0 < \varepsilon$.

Замечание 2. Из определения предела следует, что последовательность не может иметь двух пределов. Действительно, предположим, что $x_n \to a$ и одновременно $x_n \to b$. Возьмем любое $\varepsilon < \frac{b-a}{2}$ и отметим окрестности точек a и b радиуса ε (см. рис.). Тогда по определению предела, все элементы последовательности, начиная с некоторого, должны находиться как в окрестности точки a, так и в окрестности точки b, что невозможно.

Замечание 3. Не следует думать, что каждая числовая последовательность имеет предел. Пусть, например, переменная величина принимает значения $x = \left\{\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1, \dots\right\}$. Несложно заметить, что эта последовательность не стремится ни к какому пределу.

ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ

Пусть функция $y=f(x)$ определена в некоторой окрестности точки a. Предположим, что не
переменная x неограниченно приближается к числу a. Это означает, что мы можем придавать
сколь угодно близкие к a, но не равные a. Будем обозначать это так $x \to a$. Для таки
соответствующие значения функции. Может случиться, что значения $f(x)$ также неог
приближаются к некоторому числу b.Тогда говорят, что число b есть предел функции $f(x)$ при $x \to a$

Введем строгое определение предела функции.

Функция *$y=f(x)$ стремится к пределу b при $x \to a$*, если для каждого положительного числа
мало оно не было, можно указать такое положительное число δ, что при всех х ≠ а из области оп
функции, удовлетворяющих неравенству $|x - a| < \delta$, имеет место неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$. Если b е
функции $f(x)$ при $x \to a$, то пишут $\lim_{x \to a} f(x) = b$ или $f(x) \to b$ при $x \to a$.

Проиллюстрируем это определение на графике функции. Т.к. из неравенства $|x - a| <$
следовать неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$, т.е. при x Î $(a - \delta, a + \delta)$ соответствующие значения функции $f(x)$
ε), то, взяв произвольное $\varepsilon > 0$, мы можем подобрать такое число δ, что для всех точек x, лежа
окрестности точки a, соответствующие точки графика функции должны лежать внутри полосы ш
ограниченной прямыми $y = b - \varepsilon$ и $y = b + \varepsilon$.

Несложно заметить, что предел функции должен обладать теми же свойствами, что и предел
последовательности, а именно $\lim_{x \to a} C = C$ и если при $x \to a$ функция имеет предел, то он единственн

Примеры.

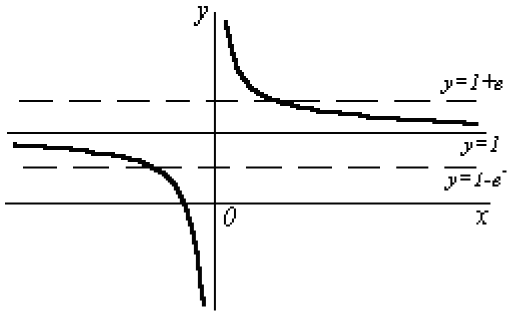
1. Найти предел функции $y=2x+1$ при $x \to 1$. Используя график функции, можно ув
если $x \to 1$ с любой стороны, то соответствующие точки $M(x, y)$ графика стремятся к точке $M(1, 3)$,
предположить, что $\lim_{x \to 1} (2x+1) = 3$. Докажем это. Зададим произвольное число $\varepsilon > 0$. Нам нуж
выполнялось неравенство $|(2x+1) - 3| < \varepsilon$ или $|2x-2| < \varepsilon$, откуда $|x- 1| < \varepsilon$. Таким образом, если пол
ε/2, то при всех x, удовлетворяющих неравенству $|x- 1| < \delta$, будет выполняться неравенство $|y -$
определению предела это и означает, что 3 есть предел функции $y=2x+1$ при $x \to 1$.

2. Найти предел функции $y=e^{x+1}$ при $x \to 0$.

Используя график заданной функции, несложно заметить, $\lim_{x \to 0} e^{x+1} = e$.

ПОНЯТИЕ ПРЕДЕЛА ФУНКЦИИ В БЕСКОНЕЧНО УДАЛЕННОЙ ТОЧКЕ

До сих пор мы рассматривали пределы для случая, когда переменная величина x стремилась к определенному постоянному числу.



Будем говорить, что переменная x *стремится к бесконечности*, если для каждого заранее заданного положительного числа M (оно может быть сколь угодно большим) можно указать такое значение $x=x_0$, начиная с которого, все последующие значения переменной будут удовлетворять неравенству $|x|>M$.

Например, пусть переменная x принимает значения $x_1=-1$, $x_2=2$, $x_3=-3$, ..., $x_n=(-1)^n n$, ... Ясно, что это бесконечно большая переменная величина, так как при всех $M>0$ все значения переменной, начиная с некоторого, по абсолютной величине будут больше M.

Переменная величина $x\to+\infty$, если при произвольном $M>0$ все последующие значения переменной, начиная с некоторого, удовлетворяют неравенству $x>M$.

Аналогично, $x\to-\infty$, если при любом $M>0$ $x<-M$.

Будем говорить, что функция $f(x)$ стремится к пределу b при $x\to\infty$, если для произвольного малого положительного числа ε можно указать такое положительное число M, что для всех значений x, удовлетворяющих неравенству $|x|>M$, выполняется неравенство $|f(x)-b|<\varepsilon$.

Обозначают $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=b$.

Примеры.

1. Используя определение, доказать, что $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)=1$.

Нужно доказать, что при произвольном ε будет выполняться неравенство $\left|\left(1+\frac{1}{x}\right)-1\right|<\varepsilon$, как только $|x|>M$, причем число M должно определяться выбором ε. Записанное неравенство эквивалентно следующему $\left|\frac{1}{x}\right|<\varepsilon$, которое будет выполняться, если $|x|>1/\varepsilon=M$. Это и значит, что $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)=1$ (см. рис.).

2. Несложно заметить, что $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{2^x}=0$.

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\sin x$ не существует.

БЕСКОНЕЧНО БОЛЬШИЕ ФУНКЦИИ

Ранее мы рассмотрели случаи, когда функция $f(x)$ стремилась к некоторому конечному пределу b при $x \to a$ или $x \to \infty$.

Рассмотрим теперь случай, когда функция $y=f(x)$ стремится к бесконечности при некотором способе изменения аргумента.

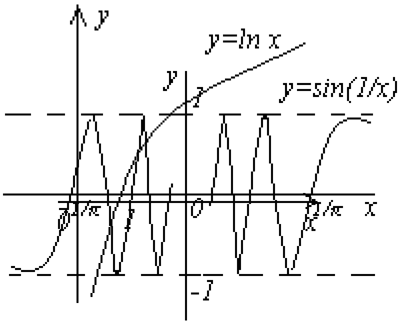
Функция $f(x)$ стремится к бесконечности при $x \to a$, т.е. является *бесконечно большой* величиной, если для любого числа M, как бы велико оно ни было, можно найти такое $\delta > 0$, что для всех значений $x \neq a$, удовлетворяющих условию $|x-a| < \delta$, имеет место неравенство $|f(x)| > M$.

Если $f(x)$ стремится к бесконечности при $x \to a$, то пишут $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$ или $f(x) \to \infty$ при $x \to a$.

Сформулируйте аналогичное определение для случая, когда $x \to \infty$.

Если $f(x)$ стремится к бесконечности при $x \to a$ и при этом принимает только положительные или только отрицательные значения, соответственно пишут $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ или $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$.

Примеры.



1. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x} = \infty$.
2. $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty, \quad \lim\limits_{x \to 0} \ln x = -\infty$ (см. рис.).
3. $\lim\limits_{x \to \infty} e^{x^2} = +\infty$.
4. Функция $y = \sin\frac{1}{x}$ при $x \to 0$ не стремится ни к какому пределу (см. рис.).

ОГРАНИЧЕННЫЕ ФУНКЦИИ

Пусть задана функция $y=f(x)$, определенная на некотором множестве D значений аргумента.

Функция $y=f(x)$ называется *ограниченной* на множестве D, если существует положительное число M такое, что для всех значений x из рассматриваемого множества, выполняется неравенство $|f(x)|\le M$. Если же такого числа M не существует, то функция $f(x)$ называется*неограниченной* на множестве D.

Примеры.

1. Функция $y=\sin x$, определенная при $-\infty<x<+\infty$, является ограниченной, так как при всех значениях x $|\sin x|\le 1 = M$.

2. Функция $y=x^2+2$ ограничена, например, на отрезке [0, 3], так как при всех x из этого отрезка $|f(x)| \le f(3) = 11$.

3. Рассмотрим функцию $y=\ln x$ при x Î (0; 1). Эта функция неограниченна на указанном отрезке, так как при $x\to 0$ $\ln x\to -\infty$.

Функция $y=f(x)$ называется *ограниченной при $x \to a$*, если существует окрестность с центром в точке a, в которой функция ограничена.

Функция $y=f(x)$ называется *ограниченной при $x\to\infty$*, если найдется такое число $N>0$, что при всех значениях x, удовлетворяющих неравенству $|x|>N$, функция $f(x)$ ограничена.

Установим связь между ограниченной функцией и функцией, имеющей предел.

Теорема 1. Если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ и b – конечное число, то функция $f(x)$ ограничена при $x\to a$.

<u>Доказательство</u>. Т.к. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, то при любом $\varepsilon>0$ найдется такое число $\delta>0$, что при вех значениях x, удовлетворяющих неравенству $|x-a|<\delta$, выполняется неравенство $|f(x)-b|<\varepsilon$. Воспользовавшись свойством модуля $|f(x) - b|\ge|f(x)| - |b|$, последнее неравенство запишем в виде $|f(x)|<|b|+ \varepsilon$. Таким образом, если положить $M=|b|+ \varepsilon$, то при $x\to a$ $|f(x)|<M$.

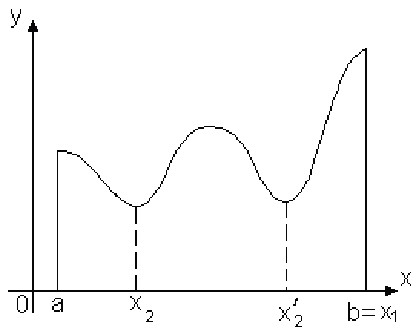
Замечание. Из определения ограниченной функции следует, что если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$, то она является неограниченной. Однако обратное неверно: неограниченная функция может не быть бесконечно большой. Приведите пример.

Теорема 2. Если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b \ne 0$, то функция $y=1/f(x)$ ограничена при $x\to a$.

<u>Доказательство</u>. Из условия теоремы следует, что при произвольном $\varepsilon>0$ в некоторой окрестности точки a имеем $|f(x) - b|<\varepsilon$. Т.к. $|f(x) - b|=|b - f(x)| \ge|b| - |f(x)|$, то $|b| - |f(x)|< \varepsilon$. Следовательно, $|f(x)|>|b| - \varepsilon >0$. Поэтому и $\left|\frac{1}{f(x)}\right| = \frac{1}{|f(x)|} < \frac{1}{|b| - \varepsilon} = M$.

СВОЙСТВА ФУНКЦИЙ, НЕПРЕРЫВНЫХ НА ОТРЕЗКЕ

Рассмотрим некоторые свойства функций непрерывных на отрезке. Эти свойства приведём без доказательства.



Функцию $y = f(x)$ называют *непрерывной на отрезке* [a, b], если она непрерывна во всех внутренних точках этого отрезка, а на его концах, т.е. в точках a и b, непрерывна соответственно справа и слева.

Теорема 1. Функция, непрерывная на отрезке [a, b], хотя бы в одной точке этого отрезка принимает наибольшее значение и хотя бы в одной – наименьшее.

Теорема утверждает, что если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке [a, b], то найдётся хотя бы одна точка x_1 Î [a, b] такая, что значение функции $f(x)$ в этой точке будет самым большим из всех ее значений на этом отрезке: $f(x_1) \geq f(x)$. Аналогично найдётся такая точка x_2, в которой значение функции будет самым маленьким из всех значений на отрезке: $f(x_1) \leq f(x)$.

Ясно, что таких точек может быть и несколько, например, на рисунке показано, что функция$f(x)$ принимает наименьшее значение в двух точках x_2 и x_2'.

<u>Замечание</u>. Утверждение теоремы можно стать неверным, если рассмотреть значение функции на интервале (a, b). Действительно, если рассмотреть функцию $y = x$ на (0, 2), то она непрерывна на этом интервале, но не достигает в нём ни наибольшего, ни наименьшего значений: она достигает этих значений на концах интервала, но концы не принадлежат нашей области.

Также теорема перестаёт быть верной для разрывных функций. Приведите пример.

Следствие. Если функция $f(x)$ непрерывна на [a, b], то она ограничена на этом отрезке.

Теорема 2. Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке [a, b] и на концах этого от принимает значения разных знаков, тогда внутри отрезка [a, b] найдется, по крайней мере, одна т $= C$, в которой функция обращается в ноль: $f(C) = 0$, где a < C< b

Эта теорема имеет простой геометрический смысл: если точки графика непрерывной фун $= f(x)$, соответствующие концам отрезка [a, b] лежат по разные стороны от оси Ox, то этот графи бы в одной точке отрезка пересекает ось Ox. Разрывные функции этим свойством могут не обладат

Эта теорема допускает следующее обобщение.

Теорема 3 (теорема о промежуточных значениях). Пусть функция$y = f(x)$ непрерыв отрезке [a, b] и $f(a) = A$, $f(b) = B$. Тогда для любого числа C, заключённого между A и B, найдётся в этого отрезка такая точка CÎ [a, b], что $f(c) = C$.

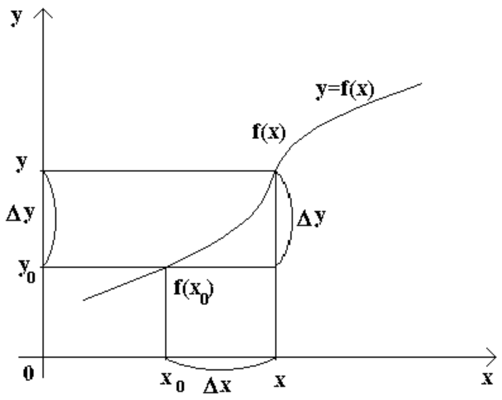
Эта теорема геометрически очевидна. Рассмотрим график функции $y = f(x)$. Пусть $f(a) = A$, B. Тогда любая прямая $y = C$, где C – любое число, заключённое между A и B, пересечёт г функции, по крайней мере, в одной точке. Абсцисса точки пересечения и будет тем значением $x =$ котором $f(c) = C$.

Таким образом, непрерывная функция, переходя от одного своего значения к дру обязательно проходит через все промежуточные значения. В частности:

Следствие. Если функция $y = f(x)$ непрерывна на некотором интервале и принимает наибо и наименьшее значения, то на этом интервале она принимает, по крайней мере, один раз значение, заключённое между её наименьшим и наибольшим значениями.

ПРОИЗВОДНАЯ И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ

Пусть имеем некоторую функцию $y=f(x)$, определенную на некотором промежутке. Для каждого значения аргумента x из этого промежутка функция $y=f(x)$ имеет определенное значение.



Рассмотрим два значения аргумента: исходное x_0 и новое x. Разность $x-x_0$ называется *приращением аргумента* x в точке x_0 и обозначается Δx. Таким образом, $\Delta x = x - x_0$ (приращение аргумента может быть как положительным, так и отрицательным). Из этого равенства следует, что $x=x_0+\Delta x$, т.е. первоначальное значение переменной получило некоторое приращение. Тогда, если в точке x_0 значение функции было $f(x_0)$, то в новой точке x функция будет принимать значение $f(x) = f(x_0 + \Delta x)$.

Разность $y - y_0 = f(x) - f(x_0)$ называется *приращением функции* $y = f(x)$ в точке x_0 и обозначается символом Δy. Таким образом,

$$\Delta y = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0). \qquad 1)$$

Обычно исходное значение аргумента x_0 считается фиксированным, а новое значение x – переменным. Тогда $y_0 = f(x_0)$ оказывается постоянной, а $y = f(x)$ – переменной. Приращения Δy и Δx также будут переменными и формула (1) показывает, что Dy является функцией переменной Δx.

Составим отношение приращения функции к приращению аргумента

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_o + \Delta x) - f(x_o)}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_o)}{\Delta x}$$

Найдем предел этого отношения при $\Delta x \to 0$. Если этот предел существует, то его называют производной данной функции $f(x)$ в точке x_0 и обозначают $f'(x_0)$. Итак,

$$f'(x_o) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_o + \Delta x) - f(x_o)}{\Delta x}.$$

Производной данной функции $y = f(x)$ в точке x_0 называется предел отношения приращения функции Δy к приращению аргумента Δx, когда последнее произвольным образом стремится к нулю.

Заметим, что для одной и той же функции производная в различных точках x может принимать различные значения, т.е. производную можно рассматривать как функцию аргумента x. Эта функция обозначается $f'(x)$

Производная обозначается символами $f'(x)$, y', $\frac{dy}{dx}$. Конкретное значение производной при $x = a$ обозначается $f'(a)$ или $y'|_{x=a}$.

Операция нахождения производной от функции $f(x)$ называется дифференцированием этой функции.

Для непосредственного нахождения производной по определению можно применить следующее *практическое правило*:

1. Придать x приращение Δx и найти наращенное значение функции $f(x + \Delta x)$.
2. Найти приращение функции $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$.
3. Составить отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ и найти предел этого отношения при $\Delta x \infty 0$.

Примеры.

1. Найти производную функции $y = x^2$

а) в произвольной точке;

б) в точке x= 2.

а)

1. $f(x + \Delta x) = (x + \Delta x)^2$;
2. $\Delta y = (x + \Delta x)^2 - x^2 = 2x\Delta x - x^2$;
3. $$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x\Delta x - \Delta x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(2x - \Delta x\right) = 2x$$.

б) $f\,'(2) = 4$

2. Используя определение найти производную функции $y = \sqrt{1+2x}$ в произвольной точке.

1. $f\,(x + \Delta x) = \sqrt{1 + 2(x + \Delta x)}$.
2. $\Delta y = \sqrt{1 + 2(x + \Delta x)} - \sqrt{1 + 2x}$
3. $$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{1+2x+2\Delta x} - \sqrt{1+2x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\Delta x}{\Delta x(\sqrt{1+2x+2\Delta x} + \sqrt{1+2x}} = \frac{1}{\sqrt{1+2x}}.$$

МЕХАНИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ПРОИЗВОДНОЙ

Из физики известно, что закон равномерного движения имеет вид $s = v \cdot t$, где s – путь, пройденный к моменту времени t, v– скорость равномерного движения.

Однако, т.к. большинство движений происходящих в природе, неравномерно, то в общем случае скорость, а, следовательно, и расстояние s будет зависеть от времени t, т.е. будет функцией времени.

Итак, пусть материальная точка движется по прямой в одном направлении по закону $s=s(t)$.

Отметим некоторый момент времени t_0. К этому моменту точка прошла путь $s=s(t_0)$. Определим скорость v материальной точки в момент времени t_0.

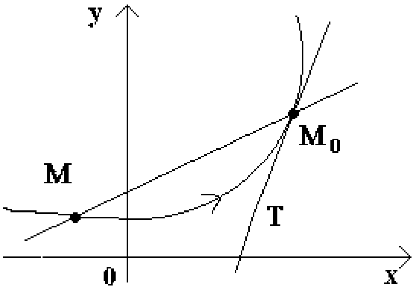
Для этого рассмотрим какой-нибудь другой момент времени $t_0+\Delta t$. Ему соответствует пройденный путь $s=s(t_0+\Delta t)$. Тогда за промежуток времени Δt точка прошла путь $\Delta s=s(t_0+\Delta t)-s(t)$.

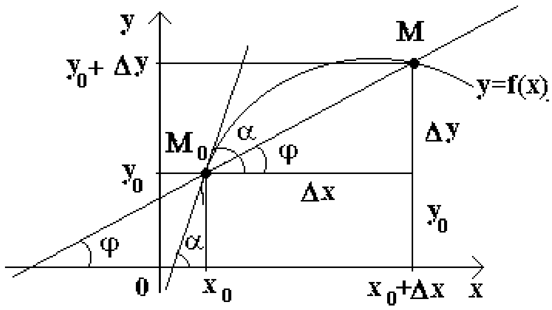
Рассмотрим отношение $\frac{\Delta s}{\Delta t} = v_{cp}$. Оно называется средней скоростью в промежутке времени Δt. Средняя скорость не может точно охарактеризовать быстроту перемещения точки в момент t_0 (т.к. движение неравномерно). Для того, чтобы точнее выразить эту истинную скорость с помощью средней скорости, нужно взять меньший промежуток времени Δt.

Итак, скоростью движения в данный момент времени t_0 (мгновенной скоростью) называется предел средней скорости в промежутке от t_0 до $t_0+\Delta t$, когда $\Delta t \to 0$:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = s'(t),$$

т.е. *скорость неравномерного движения* это производная от пройденного пути по времени.





ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ПРОИЗВОДНОЙ

Введем сначала определение касательной к кривой в данной точке.

Пусть имеем кривую и на ней фиксированную точку M_0 (см. рисунок).Рассмотрим другую точку Mэтой кривой и проведем секущую M_0M. Если точка M начинает перемещаться по кривой, а точкаM_0 остается неподвижной, то секущая меняет свое положение. Если при неограниченном приближении точки M по кривой к точке M_0 с любой стороны секущая стремится занять положение определенной прямой M_0T, то прямая M_0T называется касательной к кривой в данной точке M_0.

Т.о., *касательной* к кривой в данной точке M_0 называется предельное положение секущей M_0M, когда точка M стремится вдоль кривой к точке M_0.

Рассмотрим теперь непрерывную функцию $y=f(x)$ и соответствующую этой функции кривую. При некотором значении x_0 функция принимает значение $y_0=f(x_0)$. Этим значениям x_0 и y_0 на кривой соответствует точка $M_0(x_0; y_0)$. Дадим аргументу x_0приращение Δx. Новому значению аргумента соответствует наращенное значение функции $y_0+\Delta y=f(x_0–\Delta x)$. Получаем точку $M(x_0+\Delta x; y_0+\Delta y)$. Проведем секущую M_0M и обозначим через φ угол, образованный секущей с положительным направлением осиOx. Составим отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ и заметим, что $tg\varphi = \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Если теперь $\Delta x \to 0$, то в силу непрерывности функции $\Delta y \to 0$, и поэтому точка M, перемещаясь по кривой, неограниченно приближается к точке M_0. Тогда секущаяM_0M будет стремиться занять положение касательной к кривой в точке M_0, а угол $\varphi \to \alpha$ при $\Delta x \to 0$, где через α обозначили угол между касательной и положительным направлением оси Ox. Поскольку функция tg φ непрерывно зависит от φ при $\varphi \neq \pi/2$ то при $\varphi \to \alpha$ tg $\varphi \to$ tg α и, следовательно, угловой коэффициент касательной будет:

$$tg\alpha = \lim_{\Delta x \to 0} tg\varphi = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$$

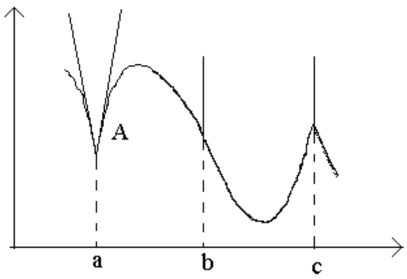
т.е. $f'(x)$ = tg α .

Т.о., геометрически $y'(x_0)$ представляет угловой коэффициент касательной к графику этой функции в точке x_0, т.е. при данном значении аргумента x, производная равна тангенсуугла, образованного касательной к графику функции $f(x)$ в соответствующей точке $M_0 (x; y)$ с положительным направлением оси Ox.

Пример. Найти угловой коэффициент касательной к кривой $y = x^2$ в точке $M(-1; 1)$.

Ранее мы уже видели, что $(x^2)' = 2x$. Но угловой коэффициент касательной к кривой есть tg $\alpha = y'|_{x=-1} = -2$.

ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТЬ ФУНКЦИЙ.
НЕПРЕРЫВНОСТЬ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОЙ ФУНКЦИИ



Функция $y=f(x)$ называется *дифференцируемой* в некоторой точке x_0, если она имеет в этой точке определенную производную, т.е. если предел отношения $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ существует и конечен.

Если функция дифференцируема в каждой точке некоторого отрезка $[a; b]$ или интервала $(a; b)$, то говорят, что она *дифференцируема* на отрезке $[a; b]$ или соответственно в интервале $(a; b)$.

Справедлива следующая теорема, устанавливающая связь между дифференцируемыми и непрерывными функциями.

Теорема. Если функция $y=f(x)$ дифференцируема в некоторой точке x_0, то она в этой точке непрерывна.

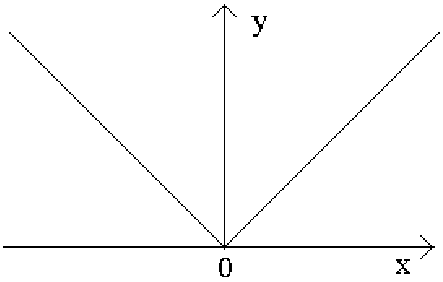
Таким образом,из дифференцируемости функции следует ее непрерывность.

Доказательство. Если $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0)$, то

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0)+\alpha(\Delta x),$$

где α бесконечно малая величина, т.е. величина, стремящаяся к нулю при $\Delta x\to 0$. Но тогда

$\Delta y=f'(x_0)\,\Delta x+\alpha\Delta x \Rightarrow \Delta y\to 0$ при $\Delta x\to 0$, т.е $f(x)-f(x_0)\to 0$ при $x\to x_0$, а это и означает, что функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0. Что и требовалось доказать.



Таким образом, в точках разрыва функция не может иметь производной. Обратное утверждение неверно: существуют непрерывные функции, которые в некоторых точках не являются дифференцируемыми (т.е. не имеют в этих точках производной).

Рассмотрим на рисунке точки *a, b, c.*

В точке a при $\Delta x\to 0$ отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ не имеет предела (т.к. односторонние пределы различны при $\Delta x\to 0-0$ и $\Delta x\to 0+0$). В точке A графика нет определенной касательной, но есть две различные односторонние касательные с угловыми коэффициентами κ_1 и κ_2. Такой тип точек называют угловыми точками.

В точке b при $\Delta x\to 0$ отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ является знакопостоянной бесконечно большой величиной $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=+\infty$. Функция имеет бесконечную производную. В этой точке график имеет вертикальную касательную. Тип точки – "точка перегиба" свертикальной касательной.

В точке c односторонние производные являются бесконечно большими величинами разных знаков. В этой точке график имеет две слившиесявертикальные касательные. Тип – "точка возврата" с вертикальной касательной – частный случай угловой точки.

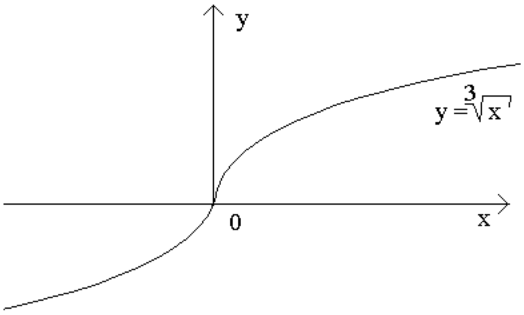
Примеры.

1. Рассмотрим функцию $y=|x|$. Эта функция непрерывна в точке $x = 0$, т.к. $\lim_{x\to 0}|x| = 0 = f(0)$.

Покажем, что она не имеет производной в этой точке.

$f(0+\Delta x) = f(\Delta x) = |\Delta x|$. Следовательно, $\Delta y = f(\Delta x) - f(0) = |\Delta x|$

Но тогда при $\Delta x< 0$ (т.е. при Δx стремящемся к 0 слева) $\lim_{\Delta x\to 0-0}\frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0-0} -\frac{\Delta x}{\Delta x} = -1.$



А при $\Delta x > 0$

$$\lim_{\Delta x\to 0+0}\frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0+0}\frac{\Delta x}{\Delta x} = 1.$$

Т.о., отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ при $\Delta x\to 0$ справа и слева имеет различные пределы, а это значит, что отношение предела не имеет, т.е. производная функции $y=|x|$ в точке $x= 0$ не существует. Геометрически это значит, что в точке $x= 0$ данная "кривая" не имеет определенной касательной (в этой точке их две).

2. Функция $y=\sqrt[3]{x}$ определена и непрерывна на всей числовой прямой. Выясним, имеет ли эта функция производную при $x= 0$.

$$f(x+\Delta x) = f(\Delta x) = \sqrt[3]{\Delta x}$$

$$\Delta y = f(\Delta x) - f(0) = \sqrt[3]{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt[3]{\Delta x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x^{2/3}} = +\infty$$

Следовательно, рассматриваемая функция не дифференцируема в точке $x= 0$. Касательная к кривой в этой точке образует с осью абсцисс угол р/2, т.е. совпадает с осью Oy.