

ХНАДУ
Кафедра прикладної математики

Укладачі:
В.М. Колодяжний
О.Ю. Лісіна

Комп'ютерні математичні технології

Конспект лекцій матеріали практичних занять

Методичні вказівки з курсу

Харків-2011

ВСТУП ДО ДИСЦИПЛІНИ

ПРИЗНАЧЕННЯ. ЦІЛІ. ПРЕДМЕТ. ПОНЯТТЯ ПРО МОДЕЛІ ТА ПРОЦЕСИ МОДЕЛЮВАННЯ. ПРОЦЕДУРИ МОДЕЛЮВАННЯ ПРИ ДОСЛІДЖЕННІ ПРОБЛЕМ ЕКОЛОГІЇ. ПРИКЛАДИ МОДЕЛЕЙ, ЩО ОПИСУЮТЬ ЕКОЛОГІЧНІ СИТУАЦІЇ.

Курс знайомить студентів із застосуваннями систем комп'ютерної математики (СКМ) в інженерній та науковій роботі. Надається огляд програмних засобів, корисних інженеру, фахівцю, науковцю в повсякденній роботі. Враховується специфіка роботи фахівця-еколога – розглядаються математичні моделі різних екосистем. В процесі навчання студенти повинні познайомитися з можливостями, які представляє екологу використання СКМ; завданнями, які можуть бути розв'язані за допомогою таких систем. Студенти повинні навчитися основним прийомам роботи з програмним продуктом (у нашому випадку – система MatLab), і познайомитися з принципами, які лежать в основі його функціонування. Зрозуміло, що в семестровому курсі неможливо вивчити детально систему, що розглядається в лабораторному практикумі. Цей курс повинен допомогти слухачам з'ясувати, що можна чекати від використання СКМ в роботі і дати студентам достатньо інформації для свідомого вибору програмного продукту для розв'язання конкретних . Система MatLab покликана служити, перш за все, ілюстрацією можливостей і особливостей програм такого роду. До того ж, знайомство з цією системою допоможе студентів в майбутньому швидше освоїти аналогічні за призначенням програми. Орієнтація на екологічну аудиторію зумовила відбір матеріалу і стиль викладу. Основна увага приділена засобам обробки і візуалізації експериментальних даних, а також формуванню математичних моделей екосистем та засобам розв'язування задач, які виникають при вирішенні екологічних проблем.

У практичній частині курсу, тобто у лабораторних роботах, для ознайомлення з великими можливостями систем комп'ютерної математики як предмет узятя дисципліна «Вища математика» (деякі розділи), а як інструмент – система MatLab. Дисципліна «Вища математика» обрана по двох причинах: по-перше, ця дисципліна є обов'язковою і вивчається на початкових курсах; по-друге, її основні поняття використовуються при розробці сучасних пристроїв та написанні комп'ютерних програм, які активно застосовують комп'ютерну графіку. Вибір MatLab обумовлений найбільшою популярністю цієї системи в технічних дослідженнях і наявності в її складі мови програмування 4-го покоління.

Математика – наука про кількісні відношення та просторові форми оточуючого реального світу.

В человеческом развитии математика оказывала и оказывает существенное влияние. И ее проявления невозможно не оценить. Возможности применения математики всегда зависели от двух факторов: от степени развития математической мысли и математических понятий и от степени изученности объекта, который подвергается математическому исследованию. Математические понятия в процессе своего становления и развития основываются на изучении предметов и объектов исследования с их неповторимыми свойствами во всем их многообразии. Исходя из

вышесказанного необходимо видеть и четко представлять себе взаимосвязи, возникающие между объектами. И эти отношения также должны быть отражены в математических исследованиях.

Отсюда следует, что для более точного, детального описания предметов и объектов необходимо использовать специальную методику описания, позволяющую учесть все нюансы подвергающихся исследованию предметов. Иными словами, требуется доступным языком описать объект, который будет являться моделью изучаемого объекта. Поскольку зачастую необходимо получать численные значения, то язык описания должен быть математическим. Далее математическое описание объекта используется при постановке задачи численной реализации. Непосредственно процесс математического описания взаимодействия объектов и систем получил название моделирования.

-----Небольшое отступление -----

В 1870 г. английское Адмиралтейство спустило на воду новый броненосец "Кэптен". Корабль вышел в море и перевернулся. Погиб корабль и все находящиеся на нем люди. Это было совершенно неожиданно для всех, кроме английского ученого-кораблестроителя В.Рида, который предварительно провел исследования на модели броненосца и установил, что корабль опрокинется даже при небольшом волнении. Но ученому, проделывающему, как казалось, несерьезные опыты с "игрушкой", не поверили лорды из Адмиралтейства. И случилось непоправимое...

С понятием «модель» мы сталкиваемся с детства. Игрушечный автомобиль, самолет, являющиеся моделями реальных объектов. Мы имеем образ реального объекта или явления, «заместителя» некоторого «оригинала», воспроизводящего его с некоторой достоверностью. Использование моделей является мощным орудием познания. Реальные объекты и процессы бывают столь сложны, что лучшим способом их изучения часто является построение модели, более простой. Модель может быть похожей копией объекта, выполненной из другого материала, в другом масштабе, с отсутствием ряда деталей (игрушечный кораблик, самолетик, домик из кубиков). Модель может отображать реальность более абстрактно-словесным описанием, по каким-то правилам.

Модели и моделирование.

Модели и моделирование используются человечеством давно. С помощью моделей и модельных отношений развились разговорные языки, письменность, графика. Наскальные изображения наших предков, затем картины и книги - это модельные, информационные формы передачи знаний об окружающем мире последующим поколениям. Модели применяются при изучении сложных явлений, процессов, конструировании новых сооружений. Хорошо построенная модель, как правило, доступнее для исследования, нежели реальный объект. Более того, некоторые объекты вообще не могут быть изучены непосредственным образом: недопустимы, например, эксперименты с экономикой страны в познавательных целях; принципиально неосуществимы эксперименты с прошлым или, скажем, с планетами Солнечной системы и т.п.

*Все то, на что направлена человеческая деятельность, называется объектом (от латинского *objectum* – предмет).* Выработка методологии направлена

на упорядочение получения и обработки информации об объектах, которые существуют вне нашего сознания и взаимодействуют между собой и внешней средой.

В научных исследованиях большую роль играют гипотезы, то есть определенные предсказания, основывающиеся на небольшом количестве опытных данных, наблюдений, догадок. Быстрая и полная проверка гипотез может быть проведена в ходе специально поставленного эксперимента. При формулировании и проверке правильности гипотез большое значение в качестве метода суждений имеет аналогия.

Аналогией называют суждение о каком-либо частном сходстве двух объектов, причем такое сходство может быть существенным и несущественным. Необходимо отметить, что понятия существенности и несущественности сходства или различия объектов условны и относительны. Существенность сходства (различия) зависит от уровня абстрагирования и в общем случае определяется конечной целью проводимого исследования. Современная научная гипотеза создается, как правило, по аналогии с проверенными на практике научными положениями. Таким образом, аналогия связывает гипотезу с экспериментом.

Гипотезы и аналогии, отражающие реальный, объективно существующий мир, должны обладать наглядностью или сводится к удобным для исследования логическим схемам. Такие логические схемы, упрощающие рассуждения и логические построения или позволяющие проводить эксперименты, уточняющие природу явлений, называются моделями. Другими словами модель (от латинского *modus* – образец) – это условный образ (изображение, схема, описание и т.п.) какого-либо объекта (или системы объектов), это объект-заместитель объекта-оригинала.

Первоначальное значение слова было связано со строительным искусством, и почти во всех европейских языках оно употреблялось для обозначения образа или вещи, сходной в каком-то отношении с другой вещью. По мнению многих авторов модель использовалась первоначально как изоморфная теория (две теории называются изоморфными, если они обладают структурным подобием по отношению друг к другу).

С другой стороны, в таких науках о природе, как астрономия, механика, физика термин "модель" стал применяться для обозначения того, что она описывает. Доктор философских наук Виктор Александрович Штофф отмечает, что "здесь со словом "модель" связаны два близких, но несколько различных понятия" [16]. ***В.А. Штофф: «Под моделью понимается такая мысленно представляемая или материально реализованная система, которая, отображая или воспроизводя объект исследования, способна замещать его, и изучение которой дает нам информацию об изучаемом объекте»*** В широком смысле модель – мысленно или практически созданная структура, воспроизводящая часть действительности в упрощенной и наглядной форме. Таковы, в частности представления Анаксимандра о Земле как плоском цилиндре, вокруг которого вращаются наполненные огнем полые трубки с отверстиями. Модель в этом смысле выступает как некоторая идеализация, упрощение действительности, хотя сам характер и степень упрощения, вносимые моделью, могут со временем меняться. В более узком смысле термин "модель" применяют тогда, когда хотят изобразить некоторую область явлений с помощью другой, более изученной, легче понимаемой. Так, физики XIX века пытались изобразить оптические и электрические явления посредством механических ("планетарная модель атома" –

строение атома изображалось как строение солнечной системы). Таким образом, в этих двух случаях под моделью понимается либо конкретный образ изучаемого объекта, в котором отображаются реальные или предполагаемые свойства, либо другой объект, реально существующий наряду с изучаемым и сходный с ним в отношении некоторых определенных свойств или структурных особенностей. В этом смысле модель – не теория, а то, что описывается данной теорией – своеобразный предмет данной теории.

В зависимости от поставленной задачи, способа создания модели и предметной области различают множество типов моделей:

1. По области использования выделяют учебные, опытные, игровые, имитационные, научно-исследовательские модели.

2. По временному фактору выделяют статические и динамические модели.

3. По форме представления модели бывают математические, геометрические, словесные, логические, специальные (ноты, химические формулы и т.п.).

4. По способу представления модели делят на информационные (нематериальные, абстрактные) и материальные. Информационные модели, в свою очередь, делят на знаковые и вербальные, знаковые – на компьютерные и некомпьютерные.

Информационная модель – это совокупность информации, характеризующая свойства и состояние объекта, процесса или явления. Вербальная модель – информационная модель в мысленной или разговорной форме. Знаковая модель – информационная модель, выраженная специальными знаками, то есть средствами любого формального языка.

Математическая модель – система математических соотношений, описывающих процесс или явление.

Особенности математической модели состоят в том, что существенные черты объекта или процесса описываются языком уравнений и других математических средств. Компьютерная модель – математическая модель, выраженная средствами программной среды.

К моделям выдвигается ряд обязательных требований. Во-первых, модель должна быть адекватной объекту, т. е. как можно более полно соответствовать ему с точки зрения выбранных для изучения свойств. Во-вторых, модель должна быть полной. Это означает, что она должна давать возможность с помощью соответствующих способов и методов изучения модели исследовать и сам объект, т. е. получить некоторые утверждения относительно его свойств, принципов работы, поведения в заданных условиях.

Таким образом, модель выступает как своеобразный инструмент для познания, который исследователь ставит между собой и объектом и с помощью которого изучает интересующий его объект.

В теоретических науках (особенно в математике, физике) моделью какой-либо системы обычно называют другую систему, служащую описанием исходной системы на языке данной науки. Например, систему дифференциальных уравнений, описывающих протекание во времени какого-либо физического процесса, называют моделью этого процесса [2]. Вообще, моделью – в этом смысле – какой-либо области явлений называют научную теорию, предназначенную для

изучения явлений из этой области. В этом смысле физическая модель — это модель, создаваемая путем замены объектов моделирующими устройствами, которые имитируют определенные характеристики либо свойства этих объектов. При этом моделирующее устройство имеет ту же качественную природу, что и моделируемый объект. Физические модели используют эффект масштаба в случае возможности пропорционального применения всего комплекса изучаемых свойств.

Модель позволяет научиться правильно работать с объектом, апробируя различные варианты управления на его модели. Экспериментировать в этих целях с реальным объектом в лучшем случае бывает неудобно, а зачастую просто вредно или вообще невозможно в силу ряда причин (большой продолжительности эксперимента во времени, риска привести объект в нежелательное и необратимое состояние и т. п.)

Моделирование – воспроизведение характеристик некоторого объекта на другом объекте, специально созданном для их изучения [8]. То есть моделирование может быть определено как представление объекта моделью для получения информации об этом объекте путем проведения экспериментов с его моделью. Академик Иван Тимофеевич Фролов отмечал, что **“моделирование означает материальное или мысленное имитирование реально существующей системы путем специального конструирования аналогов (моделей), в которых воспроизводятся принципы организации и функционирования этой системы”**. Здесь в основе мысль, что модель есть средство познания, главный ее признак – отображение. **Теория замещения одних объектов (оригиналов) другими объектами (моделями) и исследование свойств объектов на их моделях называется теорией моделирования.**

В силу многозначности понятия «модели» в науке и технике не существует единой классификации видов моделирования: классификацию можно проводить по характеру моделей, по характеру моделируемых объектов, по сферам приложения моделирования (в технике, физических науках, кибернетике и т. д.).

Другими словами, моделирование - это процесс изучения строения и свойств оригинала с помощью модели. Приведем одну из возможных классификаций моделей.



Различают материальное и идеальное моделирование. Материальное моделирование, в свою очередь, делится на физическое и аналоговое моделирование.

Физическим принято называть моделирование, при котором реальному объекту противопоставляется его увеличенная или уменьшенная копия, допускающая исследование (как правило, в лабораторных условиях) с помощью последующего перенесения свойств изучаемых процессов и явлений с модели на объект на основе теории подобия. Примерами моделей такого рода служат: в астрономии - планетарий, в архитектуре - макеты зданий, в самолетостроении - модели летательных аппаратов и т. п.

Аналоговое моделирование основано на аналогии процессов и явлений, имеющих различную физическую природу, но одинаково описываемых формально (одними и теми же математическими уравнениями).

От предметного моделирования принципиально отличается **идеальное моделирование**, которое основано не на материальной аналогии объекта и модели, а на аналогии идеальной, мыслимой. Основным типом идеального моделирования является знаковое моделирование.

Знаковым называется моделирование, использующее в качестве моделей знаковые преобразования какого-либо вида: схемы, графики, чертежи, формулы, наборы символов. **Важнейшим видом знакового моделирования является математическое моделирование**, при котором исследование объекта осуществляется посредством модели, сформулированной на языке математики. Классическим примером математического моделирования является описание и исследование законов механики Ньютона средствами математики.

Пример. *Посмотрите на следующую запись и попробуйте определить, что скрывается за этими знаками:*

$$\begin{cases} a_1x_1 + b_1x_2 = c_1 \\ a_2x_1 + b_2x_2 = c_2 \end{cases}$$

Ответы, полученные от людей, имеющих различные специальности, будут сильно различаться. Вот некоторые из возможных вариантов.

Математик: "Это система двух линейных алгебраических уравнений с двумя неизвестными, но что именно она выражает, сказать не могу".

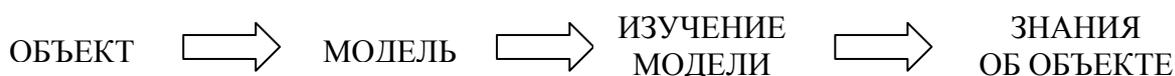
Инженер-электрик: "Это уравнения электрического напряжения или токов с активными напряжениями".

Инженер-механик: "Это уравнения равновесия сил для системы рычагов или пружин".

Инженер-строитель: "Это уравнения, связывающие силы деформации в какой-то строительной конструкции".

Какой же из ответов правильный? Не удивляйтесь, но каждый из них в некотором смысле верен. Все зависит от того, что скрывается за постоянными коэффициентами a , b , c и символами неизвестных x_1 и x_2 .

Схема процесса моделирования



Для построения моделей используют два принципа: **дедуктивный** (от общего к частному) и **индуктивный** (от частного к общему). При первом подходе рассматривается частный случай общеизвестной фундаментальной модели, которая приспособляется к условиям моделируемого объекта с учетом конкретных

обстоятельств. Второй способ предполагает выдвижение гипотез, декомпозицию сложного объекта, анализ, а затем синтез. Здесь широко используется подобие, поиск аналогий, умозаключение с целью формирования каких-либо закономерностей в виде предположений о поведении системы.

Технология моделирования требует от исследователя умения корректно формулировать проблемы и задачи, прогнозировать результаты, проводить разумные оценки, выделять главные и второстепенные факторы для построения моделей, находить аналогии и выражать их на языке математики.

В современном мире все шире применяется процесс компьютерного моделирования, подразумевающий использование вычислительной техники для проведения экспериментов с моделью.

Сам процесс моделирования может быть представлен в виде цикла, в котором можно выделить пять этапов.

1. Постановка проблемы и ее анализ — выделяются важные черты и свойства объекта, исследуются взаимосвязи элементов в структуре объекта, формулируются гипотезы, объясняется поведение и развитие объекта.

2. Построение модели — выбирается тип модели, оценивается возможность ее применения для решения поставленных задач, уточняется перечень отображаемых параметров моделируемого объекта и связи между ними. Для сложных объектов определяется возможность построения нескольких моделей, отражающих различные аспекты функционирования объекта.

3. Подготовка исходной информации — осуществляется сбор данных об объекте (на основании изучения модели). Затем происходит их обработка с помощью методов теории вероятности, математической статистики и экспертных процедур.

4. Проведение расчетов и анализ результатов эксперимента — производится оценка достоверности результатов.

5. Применение результатов на практике — работа с моделируемым объектом с учетом его предполагаемых свойств, полученных при изучении моделей. При этом полагается, что эти свойства с достаточным уровнем вероятности действительно присущи данному объекту. Последнее положение должно основываться на результатах предыдущего этапа.

Если полученные на пятом этапе результаты недостаточны, изменился сам объект или его окружающая среда, то происходит возврат к первому этапу и новое прохождение цикла моделирования.

Перейдем к понятию *математического моделирования*

Работа над любой математической моделью начинается со сбора и анализа фактического материала. Определяются цели моделирования. Выделяются главные черты изучаемого объекта или явления. Вводятся формализованные характеристики. Принимаются правила работы с ними. В результате возникает математический объект, который и называется математической моделью. Разрабатываются методы математического анализа модели, которыми она исследуется. Полученные результаты математического моделирования интерпретируются в рамках исходного фактического материала, что позволяет оценить степень адекватности модели. Результаты моделирования не должны противоречить выделенным ранее ключевым экспериментальным фактам.

Одновременно, модель не может объяснить все стороны изучаемого объекта или явления.

Хорошая модель, кроме объяснения известных, должна давать возможность предсказывать новые свойства. **Математическое моделирование широко используется там, где экспериментальные исследования трудоемки и дорогостоящи, или вообще невозможны (например, в изучении проблем экологии).**

Кроме задачи о прогнозе, математическое моделирование помогает классифицировать и систематизировать фактический материал, увидеть существующие связи в мозаике фактов. Это вытекает из того, что модель является специфически-ярким и выразительным языком, предназначенным для описания для описания изучаемого объекта или явления.

Предпочтение отдается более простым моделям. Отметим, что "простота" (иногда в ущерб точности) – один из принципов, о котором всегда нужно помнить при разработке математической модели.

Математические модели могут быть разделены на два класса: детерминистские и стохастические (вероятностные). В данной работе рассматриваются модели только первого типа. Математическое моделирование, использующее детерминированный подход содержит следующие этапы:

1. Физический анализ изучаемого явления и создание физической модели объекта.
2. Определение реакционных свойств среды, коэффициентов переноса и структурных параметров среды и вывод основной системы уравнений с соответствующими начальными и граничными условиями.
3. Выбор метода численного или аналитического метода решения поставленной краевой задачи.
4. Получение дискретного аналога для соответствующей системы уравнений, если предполагается численное решение.
5. Выбор метода получения решения для дискретного аналога.
6. Разработка программы расчета для вычислительной машины. Тестовые проверки программы расчета. Получение численного решения системы дифференциальных уравнений.
7. Сравнение полученных результатов с известными экспериментальными данными, их физическая интерпретация. Параметрическое изучение исследуемого объекта.

Главное требование к математической модели – согласованность полученных результатов численного анализа с данными экспериментальных исследований. Для выполнения этого достаточного условия необходимо чтобы:

- в математической модели выполнялись фундаментальные законы сохранения массы, энергии и импульса;
- математическая модель правильно отражала сущность изучаемого явления.

Математическая экология

В экологии можно выделить три основные части:

- **Эмпирическая часть содержит фактические сведения, полученные в экспериментах и наблюдениях, а также из первичной систематизации.**

- Теоретическая часть развивает основные концепции, позволяющие объединить и объяснить с единых позиций эмпирические закономерности и явления.
- Математическая часть конструирует математические модели, служащие для проверки основных теоретических концепций, дает методы обработки экспериментальных данных и планирования экспериментов и наблюдений.
Математическое моделирование стимулирует накопление фактического материала, уточняет направление проводимых экспериментов.

Исторический обзор математических моделей экосистем

Первые исследования по применению математического моделирования в экологии относятся к двадцатым - тридцатым годам XX - го столетия. Исключение составляет работа Ферхюльста, появившаяся задолго до того, как сама экология сформировалась в виде целостной науки. Наиболее широкое использование математические модели в экологии получили с развитием электронно-вычислительной техники и методологии моделирования в конце шестидесятых годов.

Необходимым условием для построения содержательных математических моделей является наличие подробной естественнонаучной информации об устройстве и механизмах функционирования системы. Основными принципами, используемыми при построении моделей, являются универсальные законы сохранения. Уравнения должны содержать количественные выражения принятых гипотез о специфических экологических процессах (рождаемости, смертности, питании и т.д.).

Развитие математико-экологических моделей можно проследить по эволюции тех научных и прикладных вопросов, для ответа на которые эти модели создавались. Вопросы эти усложнялись по мере развития экологии и совершенствования методики моделирования. Если вначале сами вопросы и результаты математического моделирования представляли отвлеченный теоретический интерес, то в дальнейшем они стали носить конкретный практический характер.

Первой математической моделью была модель Ферхюльста, она описывала численность популяции, ее динамику.

Классическими можно считать работы Райли, занимавшегося моделированием фитопланктона с учетом влияния освещенности и температуры на основные физиологические процессы.

Значительный вклад в методологию моделирования динамики водных растений был внесен В.В.Меншуткиным. В его монографии систематически изложены основные принципы моделирования водных экосистем с учетом пространственного распределения биогенных веществ, а также гидродинамических факторов.

Наиболее распространенным приемом построения пространственно-распределенных моделей является использование уравнений в частных производных, чаще всего уравнений турбулентной диффузии.

Значительная часть работ по моделированию природных экосистем имеет прикладной характер. Некоторые работы посвящены описанию систем, подвергаемых воздействию со стороны человека.

Математические модели открытых систем

Пространственно-временная упорядоченность, согласованность пространственных структур и динамических режимов являются фундаментальными

свойствами биосистем и основой их функционирования на всех уровнях организация: от биохимического и клеточного до организменного, популяционного, биогеоценотического.

Патологические состояния в биосистемах можно интерпретировать как рассогласование системных параметров, дезорганизацию пространственно-временной структуры, проявлением чего являются аномальные осцилляции (Mager, 1980).

Процесс выздоровления, наоборот, возвращает систему к естественному режиму осцилляций ее компонент. Формирование устойчивых пространственно-временных структур сделалось в последние годы одним из основных объектов исследования биофизики и теоретической биологии.

Многочисленные примеры систем, в которых из хаотических состояний возникают высокоупорядоченные пространственные, временные или пространственно-временные структуры, известны также в физике (лазеры, кристаллизация) и в химии (реакция Белоусова-Жаботинского).

Удивительно сложные, высокоупорядоченные структуры от кристаллов до организмов биосферы конструируются без "архитекторов", измерений и чертежей. Сейчас исследователям ясно, что образование таких структур является следствием нелинейных динамических взаимодействий внутри систем на стадии формирования при наличии некоторых внешних условий, основным из которых является подвод потока энергии извне.

Пространственные структуры, возникающие в открытых системах, И. Пригожин назвал диссипативными. Развито новое научное направление, названное Г. Хакеном (1980) синергетикой (наука о явлениях кооперативности), целью которого является точное количественное описание процессов развития и самоорганизации систем.

Наряду с экспериментом одним из основных методов исследования явления формирования структур стало математическое моделирование. В математическую модель закладываются биологические представления, гипотезы о кинетических свойствах процессов (скоростях роста, размножения, гибели, интенсивностях взаимодействия). Синтезируя эту информацию, модель позволяет изучить качественно и количественно пространственно-временную структуру, формирующуюся в реальной или гипотетической системе, вскрыть причинно-следственные связи.

Исследуемое явление настолько сложно, что проанализировать его традиционными биологическими методами было бы невозможно. В свою очередь построение и исследование сложных математических моделей требует развития новых математических методов, служит импульсом развития математической теории. Так осуществляется научный *симбиоз математики и биологии*.

Берущая начало от работ А. Лотки (Lotka, 1925) и В. Вольтерры (1931) математическая экология накопила большой арсенал моделей исследования временных закономерностей, цикличностей в экосистемах. В последние годы развиваются модели и методы изучения пространственной структуры популяций и сообществ.

Основы анализа пространственно-временных структур в биохимических системах заложены в работах А. Тьюринга и И. Пригожина.

Традиционным объектом эколого-математического моделирования является фитопланктон, кинетические процессы роста которого хорошо изучены количественно, а причины наблюдаемого в природе пространственно-временного

структурирования не вполне ясны. Мы будем анализировать явления "пятнистости" пространственного распределения, цикличности и некоторых других особенностей динамики планктона, а также исследовать пространственно-временную перестройку конкретного планктонного сообщества под воздействием антропогенных факторов. Впервые математическое описание колебательных процессов в биосистеме было получено на модели хищник-жертва (Lotka).

Следует отметить, что математическое моделирование не подменяет собой экспериментальные исследования, а, напротив, стимулирует накопление фактического материала, уточняет направление проводимых экспериментов.

Разработка математической модельной части науки необходима также для построения прогнозов динамики реальных объектов, для научно обоснованных количественных предсказаний последствий различных воздействий на изучаемые объекты. В некоторых случаях ответы на указанные вопросы могут быть получены путем лабораторного моделирования на физических, химических, биологических моделях; это не относится, однако, к природным экосистемам, эксперименты с которыми весьма затруднены и часто недопустимы.

Основными принципами, используемыми при построении моделей, являются универсальные законы сохранения: балансовые уравнения математико-экологических моделей основаны, как правило, на следующих законах: сохранения числа частиц (например, численности особей); сохранения вещества; сохранения энергии.

Кроме этого, уравнения содержат количественные выражения принятых гипотез о специфических экологических процессах (рождаемости, смертности, питания).

Природные экосистемы являются сложными комплексными системами. Для изучения этих систем их расчленяют на простые подсистемы посредством абстрагирования от относительно слабых взаимодействий.

Первоначально математическому моделированию подвергалась такая единица, как популяция. По мере развития методики моделирования и расширения знаний в области экологии популяций модели совершенствовались и усложнялись, становились более адекватными.

Параллельно, начиная с работ В. Вольтерры, развивались исследования по моделированию сообществ водных животных и растений. С появлением возможности реализации моделей на ЭВМ были начаты работы по описанию с помощью математических моделей динамики экосистем в целом.

Однако до недавнего времени подавляющее число работ по математической экологии не учитывало пространственной неоднородности исследуемых систем и использовало лишь кинетические уравнения. В то же время все больше исследователей признают, что пространственные явления имеют принципиальное значение в функционировании экологических систем. Холдинг отмечает, что реальный мир состоит из мозаики пространственных элементов с различными биологическими, физическими и химическими характеристиками, соединенных механизмами биологического и физического транспорта. В гетерогенных системах возможны большие флуктуации, и они менее устойчивы, чем однородные. Однако упругость этих систем выше.

Вариабельность в пространстве и времени ведет к вариабельности численности популяции, удержанию в ней генетических и поведенческих типов, способных не

только к выживанию в неблагоприятных условиях, но и к использованию возможностей бурного роста. Чем ниже гетерогенность, тем более вероятны низкие колебания численности и низкая упругость. Эксплуатация рыбных ресурсов Великих озер – пример разрушения человеком чувствительной экосистемы, характеризующейся пространственной однородностью, изолированностью, демпфированием климатических воздействий.

Первая в математической экологии работа, направленная на изучение пространственной неоднородности, принадлежит Дж. Скеламу (Skellam, 1951). Им исследованы процессы распределения планктона в природных и лабораторных условиях.

Как отмечает С. Левин, пассивная диффузия редко применима к движению животных. Но диффузионная гипотеза имеет ряд преимуществ как отправная точка. Даже если движение не диффузионно, диффузионная аппроксимация часто обеспечивает приемлемое описание в больших пространственных масштабах. Более того, небольшое ослабление предположения чистой диффузии позволяет включить эффекты адвекции, таксиса, направленную локальную диффузию. Каждая модификация порождает возрастающие математические трудности, но наиболее важные классы решений остаются теми же, что и в простейшем случае.

Классы задач и математический аппарат.

Современные математические модели в экологии можно разбить на три класса. Первый - описательные модели: регрессионные и другие эмпирически установленные количественные зависимости, не претендующие на раскрытие механизма описываемого процесса. Они применяются обычно для описания отдельных процессов и зависимостей и включаются как фрагменты в имитационные модели. Второй - модели качественные, которые строятся с целью выяснения динамического механизма изучаемого процесса, способные воспроизвести наблюдаемые динамические эффекты в поведении систем, такие, например, как колебательный характер изменения биомассы или образование неоднородной в пространстве структуры. Обычно эти модели не слишком громоздкие, поддающиеся качественному исследованию с применением аналитических и компьютерных методов. Третий класс - имитационные модели конкретных экологических и эколого-экономических систем, учитывающие всю имеющуюся информацию об объекте. Цель построения таких моделей - детальное прогнозирование поведения сложных систем или решение оптимизационной задачи их эксплуатации.

Чем лучше изучена сложная экологическая система, тем более полно может быть обоснована ее математическая модель. При условии тесной связи наблюдений, экспериментального исследования и математического моделирования математическая модель может служить необходимым промежуточным звеном между опытными данными и основанной на них теорией изучаемых процессов. Для решения практических задач можно использовать модели всех трех типов. При этом особенно важны вопросы идентифицируемости (соответствия реальной системе) и управляемости таких моделей.

Обычно при математическом моделировании задача состоит в том, чтобы получить обоснованный прогноз кинетики компонентов экологической системы. При

этом делаются различные исходные предположения и преследуются соответствующие цели при изучении моделей, которые один из пионеров математической биологии А.А. Ляпунов сформировал следующим образом (Ляпунов, 1968, 1972).

А. Биологические характеристики компонентов неизменны, так же как и взаимоотношения между ними. Система считается однородной в пространстве. Изучаются изменения во времени численности (биомассы) компонентов системы.

Б. При сохранении гипотезы однородности вводится предположение о закономерном изменении системы отношений между компонентами. Это может соответствовать либо закономерному изменению внешних условий (например, сезонному), либо заданному характеру эволюций форм, образующих систему. При этом по-прежнему изучается кинетика численности компонентов.

Аппаратом для изучения этих двух классов задач служат системы обыкновенных дифференциальных и дифференциально-разностных уравнений с постоянными (А) и переменными (Б) коэффициентами.

В. Объекты считаются разнородными по своим свойствам и подверженными действию отбора. Предполагается, что эволюция форм определяется условиями существования системы. В этих условиях изучается, с одной стороны, кинетика численности компонентов, с другой - дрейф характеристик популяций. При решении таких задач используют аппарат теории вероятностей. К ним относятся многие задачи популяционной генетики.

Г. Отказ от территориальной однородности и учет зависимости усредненных концентраций от координат. Здесь возникают вопросы, связанные с пространственным перераспределением живых и косных компонентов системы. Например, численность (биомасса) видов - гидробионтов меняется с изменением глубины водоема. Для описания таких систем необходимо привлечение аппарата дифференциальных уравнений в частных производных. В имитационных моделях часто вместо непрерывного пространственного описания применяют разбиение всей системы на несколько пространственных блоков.

Примеры.

1. Уравнение нормального размножения

$$\frac{dx}{dt} = kx, \quad k > 0$$

(в большом пруду разводят карасей, караси не мешают друг другу, корма им хватает.)

2. **Логистическая модель или модель размножения.** Если наш пруд с карасями невелик, или если число карасей в большом пруду сильно возросло, то конкуренция из-за пищи приводит к уменьшению скорости прироста. Простейшее предположение состоит в том, что коэффициент k зависит от числа карасей линейно, т.е. $k = a - bx$. Таким образом, мы приходим к уравнению размножения с учетом конкуренции или так называемому логистическому уравнению:

$$\frac{dx}{dt} = (a - bx)x$$

Комп'ютерне моделювання

Современное моделирование сложных процессов и явлений невозможно без компьютера, без компьютерного моделирования. Компьютерное моделирование – основа представления (актуализации) знаний как в компьютере, так и с помощью компьютера и с использованием любой информации, которую можно актуализировать с помощью ЭВМ.

Компьютерное моделирование от начала и до завершения проходит следующие этапы.

- Постановка задачи.
- Предмодельный анализ.
- Анализ задачи.
- Исследование модели.
- Программирование, проектирование программы.
- Тестирование и отладка.
- Оценка моделирования.
- Документирование.
- Сопровождение.
- Использование (применение) модели.

Пример 1. Рассмотрим популяцию рыб, из которой в текущий момент времени изымается некоторое количество особей (идет лов рыбы). Динамика такой системы определяется моделью вида:

$$x_{i+1} = x_i + ax_i - kx_i, x_0 = c,$$

где k – коэффициент вылова (скорость изъятия особей). Стоимость одной пойманной рыбы равна b руб. Цель моделирования — прогноз прибыли при заданной квоте вылова. Для этой модели можно проводить имитационные вычислительные эксперименты и далее модифицировать модель, например следующим образом.

Эксперимент 1. Для заданных параметров a , c изменяя параметр k , определить его наибольшее значение, при котором популяция не вымирает.

Эксперимент 2. Для заданных параметров c, k изменяя параметр a , определить его наибольшее значение, при котором популяция вымирает.

Модификация 1. Учитываем естественную гибель популяции (за счет нехватки пищи, например) с коэффициентом смертности, равным b :

$$x_{i+1} = x_i + ax_i - (k + b)x_i, x_0 = c$$

Модификация 2. Учитываем зависимость коэффициента k от x (например, $k = dx$):

$$x_{i+1} = x_i + ax_i - dx_i^2, x_0 = c.$$

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

Разновидность компьютерного моделирования – вычислительный эксперимент, осуществляемый экспериментатором над исследуемой системой или процессом с помощью орудия эксперимента – компьютера, компьютерной технологии. Вычислительный эксперимент позволяет находить новые закономерности, проверять гипотезы, визуализировать события и т.д.

Научное исследование реального процесса можно проводить теоретически или экспериментально, которые проводятся независимо друг от друга. Такой путь познания истины носит односторонний характер. В современных условиях развития науки и техники стараются проводить комплексное исследование объекта. Этого можно добиться на основе новой, удовлетворяющей требованиям времени, методологии и технологии научных исследований.

Широкое применение ЭВМ в математическом моделировании, достаточно мощная теоретическая и экспериментальная база позволяют говорить о вычислительном эксперименте как о новой технологии и методологии в научных и прикладных исследованиях.

Итак, что же такое вычислительный эксперимент?

Вычислительный эксперимент - это эксперимент над математической моделью объекта на ЭВМ, который состоит в том, что по одним параметрам модели вычисляются другие её параметры и на этой основе делаются выводы о свойствах явления, описываемого математической моделью.

В проведении вычислительного эксперимента участвует коллектив исследователей – специалисты с конкретной предметной области, математики теоретики, вычислители, прикладники, программисты. Это связано с тем, что моделирование реальных объектов на ЭВМ включает в себя большой объём работ по исследованию их физической и математической моделей, вычислительных алгоритмов, программированию и обработке результатов. Здесь можно заметить аналогию с работами по проведению натуральных экспериментов: составление программы экспериментов, создание экспериментальной установки, выполнение контрольных экспериментов, проведение серийных опытов, обработки экспериментальных данных и их интерпретация и т.д. Таким образом, проведение крупных комплексных расчётов следует рассматривать как эксперимент, проводимый на ЭВМ или вычислительный эксперимент.

Вычислительный эксперимент играет ту же роль, что и обыкновенный эксперимент при исследованиях новых гипотез. Современная гипотеза почти всегда имеет математическое описание, над которым можно выполнять эксперименты.

При введении этого понятия следует особо выделить способность компьютера выполнять большой объём вычислений, реализующих математические исследования. Иначе говоря, **компьютер позволяет произвести замену физического, химического и т. д. эксперимента экспериментом вычислительным.**

При проведении вычислительного эксперимента можно убедиться в необходимости и полезности последнего, особенно в случаях, когда провести натуральный эксперимент затруднительно или невозможно. Вычислительный эксперимент, по сравнению с натурным, значительно дешевле и доступнее, его подготовка и проведение требует меньшего времени, его легко переделывать, он даёт более подробную информацию. Кроме того, в ходе вычислительного эксперимента выявляются границы применимости математической модели, которые позволяют прогнозировать эксперимент в естественных условиях. Поэтому использование вычислительного эксперимента ограничивается теми математическими моделями, которые участвуют в проведении исследования. По этой причине вычислительный эксперимент не может заменить полностью эксперимент натуральный и выход из этого положения состоит в их разумном сочетании. В это случае в проведении сложного

эксперимента используется широкий спектр математических моделей: прямые задачи, обратные задачи, оптимизированные задачи, задачи идентификации.

ОСНОВНЫЕ ЭТАПЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОГО ЭКСПЕРИМЕНТА.

Использование вычислительного эксперимента как средства решения сложных прикладных проблем имеет в случае каждой конкретной задачи и каждого конкретного научного коллектива свои специфические особенности. И тем не менее всегда чётко просматриваются общие характерные основные черты, позволяющие говорить о единой структуре этого процесса. В настоящее время технологический цикл вычислительного эксперимента принято подразделять на ряд технологических этапов. И хотя такое деление в значительной степени условно, тем не менее оно позволяет лучше понять существо этого метода проведения теоретических исследований. Теперь давайте рассмотрим основные этапы вычислительного эксперимента.

В общем случае, основные этапы решения задачи с применением ЭВМ можно рассматривать как один технологический цикл вычислительного эксперимента. А вообще, вычислительный эксперимент как новая методика исследования "состоялся" после того, как удалось на каждом из этапов традиционной цепочки эффективно использовать вычислительную машину.

Все этапы технологического цикла вычислительного эксперимента тесно связаны между собой и служат единой цели – получению с заданной точностью за короткое время адекватного количественного описания поведения изучаемого реального объекта в тех или иных условиях. Поэтому все этапы технологического цикла должны быть одинаково прочными. Слабость в одном звене влечёт за собой слабость в остальных звеньях технологии.

Вычислительный эксперимент включает в себя следующие этапы (рис. 1):

- физическое описание процесса, то есть уяснение закономерности протекаемых явлений;
- разработка математической модели;
- алгоритм или метод решения уравнений;

- разработка программ;
- проведение расчетов, анализ результатов и оптимизация.

Видоизмененная цепочка реализованная в виде единого программного комплекса и составляет "технология" вычислительного эксперимента:

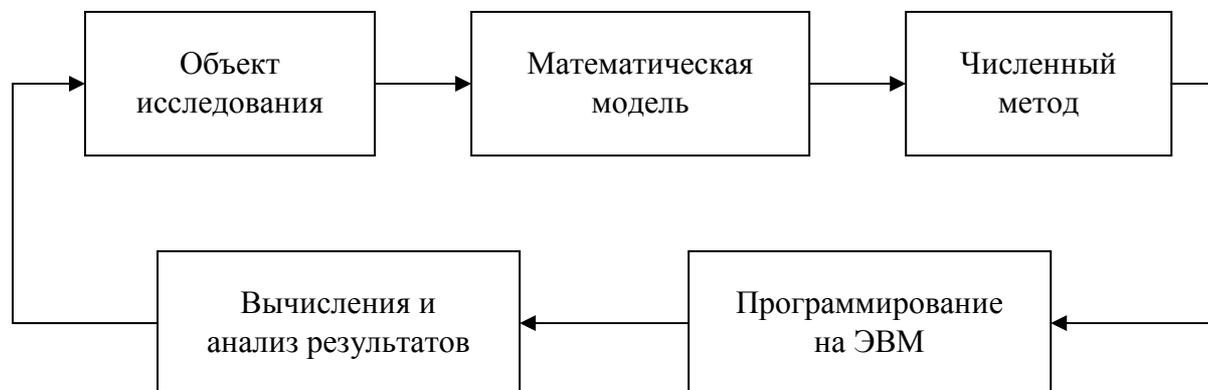


Рис. 1. Схема вычислительного эксперимента

К основным *преимуществам вычислительного эксперимента* можно отнести следующие:

- возможность исследования объекта без модификации установки или аппарата;
- возможность исследования каждого фактора в отдельности, в то время как в реальности они действуют одновременно;
- возможность исследования нереализуемых на практике процессов (важно для задач экологии!!!);

Опыт решения крупных задач показывает, что метод математического моделирования и вычислительный эксперимент соединяют в себе преимущества традиционных теоретических и экспериментальных методов исследования.

Стоит заметить, что на практике результаты первых расчетов, как правило, весьма далеки от реальных. Поэтому происходит постоянное усовершенствование алгоритма, уточнение математической модели до совпадения с какими-то тестовыми или контрольными данными. Этот этап, называемый идентификацией математической модели, всегда присутствует в вычислительном эксперименте. Поэтому нельзя говорить об одной модели любого явления. Всегда

существует иерархия математических моделей, начиная от простых и кончая более сложными. Следует выбирать некоторый уровень сложности модели, соответствующей данной конкретной задаче.

Для проведения крупномасштабных научных исследований используется модульная технология, основанная на модульном представлении: математических моделей; вычислительных алгоритмов; программ для ЭВМ; технических средств. Сборка программ из модулей проводится автоматически, с помощью специальной программы. Создаются программные комплексы и проблемно-ориентированные пакеты прикладных программ многоцелевого назначения. Характерная особенность пакетов состоит в возможности постоянного развития, расширения благодаря включению новых модулей, реализующих новые возможности. Следует отметить, что один и тот же пакет прикладных программ может быть использован в вычислительных экспериментах для исследований различных реальных объектов.



СФЕРЫ ПРИМЕНЕНИЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОГО ЭКСПЕРИМЕНТА И МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ.

В современной науке и технике появляется всё больше областей, задачи в которых можно и нужно решать методом вычислительного эксперимента, с помощью математического моделирования. Обратим внимание на некоторые из них.

Энергетическая проблема. Прогнозирование атомных и термоядерных реакторов на основе детального математического моделирования происходящих

в них физических процессов. В этой области работа ведётся очень успешно. Вычислительный эксперимент тесно сопрягается с натурным экспериментом и помогает, заменяет и удешевляет весь исследовательский цикл, существенно его ускоряя.

Экологические проблемы. Вопросы прогнозирования и управления экологическими системами могут решаться лишь на основе математического моделирования, поскольку эти системы существуют в “единственном экземпляре”: моделирование загрязнения экологических систем, прогноз причинно-следственных связей в экологической системе, откликов системы на те или иные воздействия экологических факторов и т.д.;

Гео– и астрофизические явления. Моделирование климата, долгосрочный прогноз погоды, землетрясений и цунами, моделирование развития звёзд и солнечной активности, фундаментальные проблемы происхождения и развития Вселенной.

Химия. Расчёт химических реакций, определение их констант, исследование химических процессов на макро- и микроуровне для интенсификации химической технологии.

Космонавтика: расчет траекторий и управления полетом космических аппаратов, моделирование конструкций летательных аппаратов, обработка спутниковой информации и т.д.;

Медицина: моделирование, прогнозирование эпидемий, инфекционных процессов, управление процессом лечения, диагностика болезней и выработка оптимальных стратегий лечения и т.д.;

Производство: управление техническими и технологическими процессами и системами, ресурсами (запасами), планирование, прогнозирование оптимальных процессов производства и т.д.;

Образование: моделирование междисциплинарных связей и систем, стратегий и тактик обучения и т.д.;

Военное дело: моделирование и прогнозирование военных конфликтов, боевых ситуаций, управления войсками, обеспечение армий и т.д.;

Политика: моделирование и прогнозирование политических ситуаций, поведения коалиций различного характера и т.д.;

Социология, общественные науки: моделирование и прогнозирование поведения социологических групп и процессов, общественного поведения и влияния, принятие решений и т.д.;

СМИ: моделирование и прогнозирование эффекта от воздействия тех или иных сообщений на группы людей, социальные слои и др.;

Туризм: моделирование и прогнозирование потока туристов, развития инфраструктуры туризма и др.;

Проектирование: моделирование, проектирование различных систем, разработка оптимальных проектов, автоматизация управления процессом проектирования и т.д.

ВВОД, ОБРАБОТКА И ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ИНФОРМАЦИИ В КОМПЬЮТЕРЕ

В процессе моделирования специалисту приходится иметь дело с различной информацией, которую необходимо обрабатывать. Как известно, для ввода информации, а именно – численных значений, в компьютере используется определенный формат.

Прежде чем перейти к представлению информации в компьютере введем понятие: что такое «информация», которое имеет различные трактовки в разных предметных областях. Например, информация может пониматься как:

- абстракция, абстрактная модель рассматриваемой системы (в математике);
- сигналы для управления, приспособления рассматриваемой системы (в кибернетике);
- мера хаоса в рассматриваемой системе (в термодинамике);
- вероятность выбора в рассматриваемой системе (в теории вероятностей);
- мера разнообразия в рассматриваемой системе (в биологии) и др.

Рассмотрим это фундаментальное понятие информатики на основе понятия "алфавит" ("алфавитный", формальный подход). Дадим формальное определение алфавита.

Алфавит – конечное множество различных знаков, символов, для которых определена операция конкатенации (приписывания, присоединения символа к символу или цепочке символов); с ее помощью по определенным правилам соединения символов и слов можно получать слова (цепочки знаков) и словосочетания (цепочки слов) в этом алфавите (над этим алфавитом).

Буквой или знаком называется любой элемент x алфавита X , где $.$ Понятие знака неразрывно связано с тем, что им обозначается ("со смыслом"), они вместе могут рассматриваться как пара элементов (x, y) , где x – сам знак, а y – обозначаемое этим знаком.

Пример 2. Примеры алфавитов: множество из десяти цифр, множество из знаков русского языка, точка и тире в азбуке Морзе и др. В алфавите цифр знак 5 связан с понятием "быть в количестве пяти элементов".

Конечная последовательность букв алфавита называется словом в алфавите (или над алфавитом). Длиной $|p|$ некоторого слова p над алфавитом X называется число составляющих его букв. Слово (обозначаемое символом \emptyset) имеющее нулевую длину, называется пустым словом: $|\emptyset| = 0$. Множество различных слов над алфавитом X обозначим через $S(X)$ и назовем словарным запасом (словарем) алфавита (над алфавитом) X . В отличие от конечного алфавита, словарный запас может быть и бесконечным. Слова над некоторым заданным алфавитом и определяют так называемые сообщения.

Пример 3. Слова над алфавитом кириллицы – "Информатика", "инто", "иини", "и". Слова над алфавитом десятичных цифр и знаков арифметических операций – "1256", "23+78", "35–6+89", "4". Слова над алфавитом азбуки Морзе – ".", ". . –", "– – –".

В алфавите должен быть определен порядок следования букв (порядок типа "предыдущий элемент – последующий элемент"), то есть любой алфавит имеет упорядоченный вид $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$.

Таким образом, алфавит должен позволять решать задачу лексикографического (алфавитного) упорядочивания, или задачу расположения слов над этим алфавитом, в соответствии с порядком, определенным в алфавите (то есть по символам алфавита).

Таким образом,

информация – это некоторая упорядоченная последовательность сообщений, отражающих, передающих и увеличивающих наши знания.

Информация актуализируется с помощью различной формы сообщений – определенного вида сигналов, символов.

Информация может быть:

- по отношению к источнику или приемнику бывает трех типов: входная, выходная и внутренняя.
- по изменчивости бывает постоянная, переменная и смешанная.
- по отношению к конечному результату бывает исходная, промежуточная и результирующая;
- по стадии использования бывает первичная и вторичная.
- по полноте бывает избыточная, достаточная и недостаточная.
- по доступу бывает открытая и закрытая.

Есть и другие типы классификации информации.

Пример 4. В философском аспекте информация делится на мировозренческую, эстетическую, религиозную, научную, бытовую, техническую, экономическую, технологическую.

Основные свойства информации:

- полнота;
- актуальность;
- адекватность;
- понятность;
- достоверность;
- массовость;
- устойчивость;
- ценность и др.

Проще: информация – содержание сообщения, сообщение – форма информации .

Любые сообщения в компьютере измеряются в байтах, килобайтах, мегабайтах, гигабайтах, терабайтах, петабайтах и эксабайтах, а кодируются,

например, в компьютере, с помощью алфавита из нулей и единиц, записываются и реализуются в ЭВМ в битах.

Люди в арифметике используют десятичную систему счисления (с основанием 10). Большинство компьютеров использует арифметику с двоичной системой счисления (основание 2). Может показаться, что это не так, поскольку общение с компьютером (ввод-вывод) происходит в числах с основанием 10. Но это не означает, что компьютеры используют основание 10. На самом деле они приводят входные числа к основанию 2 (или, возможно, к основанию 16), затем выполняют арифметику при основании 2 и наконец преобразовывают ответ к основанию 10 прежде, чем показать результат. Для подтверждения этого требуется несколько экспериментов. Компьютер, который выполняет вычисления с точностью девять десятичных знаков, дает ответ

$$\sum_{k=1}^{100000} 0.1 = 9999,99447. \quad (1)$$

Естественно, нам нужно сложить число $\frac{1}{10}$ 100 000 раз. Точный результат – 10 000.

ДВОИЧНЫЕ ЧИСЛА

Основание 10 используется в большинстве математических задач. Для иллюстрации число 1372 представим в форме

$$1372 = (1 \times 10^3) + (3 \times 10^2) + (7 \times 10^1) + (2 \times 10^0).$$

В общем случае, когда N — положительное целое число, существуют однозначные числа a_0, a_1, \dots, a_k , такие, что число N представимо при основании 10 в виде

$$N = (a_k \times 10^k) + (a_{k-1} \times 10^{k-1}) + \dots + (a_1 \times 10^1) + (a_0 \times 10^0)$$

где числа a_k принимают значения $\{0, 1, 2, \dots, 8, 9\}$. Таким образом, N в десятичной записи представимо как

$$N = a_k a_{k-1} \dots a_1 a_0 \text{ дес.} \quad (2)$$

Если понятно, что 10 является основанием, то (2) можно записать как

$$N = a_k a_{k-1} \dots a_1 a_0$$

Например, мы понимаем, что $1372 = 1372_{\text{дес}}$. Если использовать степени 2, то число 1372 можно записать в виде

$$1372 = (1 \times 2^{10}) + (0 \times 2^9) + (1 \times 2^8) + (0 \times 2^7) + (1 \times 2^6) + (0 \times 2^5) + (1 \times 2^4) + (1 \times 2^3) + (1 \times 2^2) + (0 \times 2^1) + (0 \times 2^0) \quad (3)$$

Это можно подтвердить, выполнив вычисления

$$1372 = 1024 + 256 + 64 + 16 + 8 + 4$$

В общем, пусть N — положительное целое число; существуют однозначные числа b_0, b_1, \dots, b_j , такие, что число N при основании 2 можно представить в виде

$$N = (b_j \times 2^j) + (b_{j-1} \times 2^{j-1}) + \dots + (b_1 \times 2^1) + (b_0 \times 2^0), \quad (4)$$

где каждое число b_j равно или 0, или 1. Таким образом, N в двоичном обозначении можно выразить в виде

$$N = b_j b_{j-1} \dots b_1 b_0 \text{ два} \quad (5)$$

Используя обозначения (5) и результат (3), получим

$$1372 = 10101011100.$$

Ясно, что для двоичного представления числа N потребуется больше цифр, чем для десятичного. Известно, что степень 2 растет намного медленнее, чем 10. Эффективный алгоритм нахождения представления целого числа N с основанием 2 можно вывести из равенства (4). Разделив обе части равенства (4) на 2, получим

$$\frac{N}{2} = (b_j \times 2^{j-1}) + (b_{j-1} \times 2^{j-2}) + \dots + (b_1 \times 2^0) + \frac{b_0}{2} \quad (6)$$

Таким образом, остаток от деления числа N на 2 и есть цифра b_0 . Сейчас определим b_1 . Если (6) записать как $N/2 = Q_0 + b_0/2$, то

$$Q_0 = (b_j \times 2^{j-1}) + (b_{j-1} \times 2^{j-2}) + \dots + (b_1 \times 2^0) \quad (7)$$

Разделив обе части (7) на 2, получим

$$\frac{Q_0}{2} = (b_j \times 2^{j-2}) + (b_{j-1} \times 2^{j-3}) + \dots + \frac{b_1}{2}$$

Следовательно, остаток от деления Q_0 на 2 равен цифре b_1 . Продолжая этот процесс, получим последовательности $\{Q_k\}$ и b_k отношений и остатков соответственно. Процесс завершится, когда найдется такое целое число J , что $Q_J = 0$.

Последовательность удовлетворяет следующим равенством:

$$\begin{aligned}
N &= 2Q_0 + b_0; \\
Q_0 &= 2Q_1 + b_1; \\
&\dots \\
Q_{j-2} &= 2Q_{j-1} + b_{j-1}; \\
Q_{j-1} &= 2Q_j + b_j \quad (Q_j = 0).
\end{aligned}
\tag{8}$$

Пример 5. Покажем, как получить $1372 = 10110011000_{\text{два}}$.

Начнем с $N = 1372$ и построим отношения и остатки согласно уравнению (8).

$$\begin{aligned}
1372 &= 2 \times 686 + 0; \\
686 &= 2 \times 343 + 0; \\
343 &= 2 \times 171 + 1; \\
171 &= 2 \times 85 + 1; \\
85 &= 2 \times 42 + 1; \\
42 &= 2 \times 21 + 0; \\
21 &= 2 \times 10 + 1; \\
10 &= 2 \times 5 + 0; \\
5 &= 2 \times 2 + 1; \\
2 &= 2 \times 1 + 0; \\
1 &= 2 \times 0 + 1;
\end{aligned}$$

Таким образом, двоичным представлением числа 1372 является:

$$1372 = 10101011100_{\text{два}}.$$

Приведем основные соотношения между единицами измерения сообщений:

- 1 бит (binary digit – двоичное число) = 0 или 1,
- 1 байт 8 бит,
- 1 килобайт (1К) = 2¹⁰ бит,
- 1 мегабайт (1М) = 2²⁰ бит,
- 1 гигабайт (1Г) = 2³⁰ бит,
- 1 терабайт (1Т) = 2⁴⁰ бит,
- 1 петабайт (1П) = 2⁵⁰ бит,
- 1 эксабайт (1Э) = 2⁶⁰ бит.

Пример 6. Найти неизвестные x и y , если верны соотношения: $128y$ (К) = $32x$ (бит); $2x$ (М) = $2y$ (байт).

Выравниваем единицы измерения информации:

$$27y$$
 (К) = $27y + 13$ (бит);

$$2x (M) = 2x+20 \text{ (байт)}.$$

Подставляя в уравнения и отбрасывая размерности информации, получаем:

$$27y+13 = 25x$$

$$2x+20=2y$$

Отсюда получаем систему двух алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} 7y + 13 = 5x \\ x + 20 = y \end{cases}$$

или, решая эту систему, окончательно получаем, $x = -76,5$, $y = -56,5$.

ПАКЕТЫ ПРИКЛАДНЫХ ПРОГРАММ.

При вирішенні задач технічної направленості сучасний інженер вже не може обійтись без систем автоматизованого проектування (САПР), в яких виділяються три основних розділів: CAD – Computer Aided Design, CAM – Computer Aided Manufacturing, CAE – Computer Aided Engineering. Останні 10 років CAD/CAM/CAE-системи набули масового застосування і дають можливість інженерам та математикам використовувати на своїх персональних робочих місцях ці найновіші досягнення в області інженерних технологій для розв'язання проблем математичного моделювання.

Одно из направлений развития вычислительных технологий в настоящее время - это появление мощных математических пакетов, позволяющих максимально упростить процесс подготовки задачи, ее решения и анализа результатов.

Важно!! Для того чтобы пользоваться пакетом и, значит, грамотно вести расчёты, совсем не обязательно самому обладать высокой квалификацией программиста или математика-вычислителя (ведь именно они должны создавать эти пакеты). Поэтому пакеты программ должны быть такими, чтобы к их помощи могли прибегнуть не только математики, но и специалисты других сфер научной деятельности, прошедшие сравнительно небольшой курс математического обучения.

Существование большого количества информационных систем проектирования и моделирования (ИСПРиМ) позволяют их подразделить на системы компьютерной математики, технического и имитационного моделирования (рис. 1).

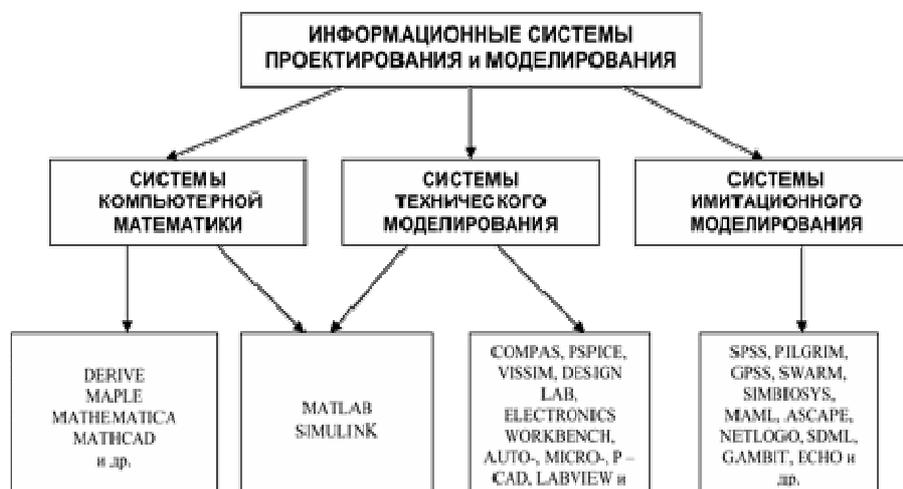


Рис. 2. Системы проектирования

Разберем подробнее составные части блок-схемы.

Системы компьютерной математики. К этим системам можно отнести пакеты **Derive, Mathematica, MathCad, Maple, MatLAB** и др.

Эти пакеты разработаны различными фирмами и имеют свои особенности. Каждый из этих пакетов имеет свой интерфейс. В этих пакетах алгоритмизированы, систематизированы и заложены в виде процедур практически все известные методы аналитического и численного решения математических задач. Все эти системы развиваются, в них вносятся дополнения, и разработчики этих систем предлагают новые модернизированные версии.

Системы технического моделирования. Наряду с развитием цифровых вычислительных машин формировалось направление аналоговых вычислительных машин (АВМ), с помощью которых решались различные физические и математические задачи. АВМ позволяли решать различные виды математических моделей, представленных в виде дифференциальных уравнений с помощью натурного схмотехнического моделирования. Аналоговые ЭВМ в настоящее время не разрабатываются. Однако появились технические информационные СПРиМ (компьютерные виртуальные конструкторы), в частности **Electronics Workbench, Simulink, Vissim, LabVIEW** и др., решающие математические задачи с помощью схмотехнического моделирования.

Системы технического моделирования построены по принципу конструктора из блоков. В системах технического моделирования можно решать как

математические, так и инженерные задачи. В этих компьютерных системах можно собирать и конструировать виртуально любые электротехнические схемы с использованием компьютерных аналогов электротехнических и измерительных деталей, а также визуальное моделирование и конструирование инженерных, технических имитаторов электронных приборов и логических устройств. Более того, спроектированные и созданные виртуальные инженерные и производственные компьютерные объекты и установки можно использовать для натурального эксперимент и производственных испытаний в реальном масштабе времени.

Системы имитационного моделирования. В настоящее время активно разрабатываются системы имитационного моделирования: **SimBioSys**: C++ оболочки агентно-базового эволюционного моделирования в биологических и общественных науках; системы моделирования **SWARM** и его расширения **MAML** (Multi-Agent Modelling Language) для моделирования искусственного мира; пакеты **Ascape** (Agent Landscape) и **RePast** (Recursive Porous Agent Simulation Toolkit), написанные на платформе языка Java, для поддержки агентно-базового моделирования; информационные системы **NetLogo** и **MIMOSE** (Micro- and Multilevel Modelling Software), предназначенные для создания имитационных моделей и технологий моделирования в общественных науках; **SPSS, PilGrim, GPSS, Z-Tree** для исследования экономических статистических явлений и процессов и др.

Знание и применение систем компьютерной математики, технического и имитационного моделирования позволяют модельщикам оперативно выбрать систему моделирования, построить адекватные модели, найти способы их решения, перейти полномасштабному исследованию реального явления или процесса на модели, оценить решения моделей и представить поведение и закономерности изучаемого явления.

При компьютерном моделировании с помощью систем математического моделирования важен также субъективный фактор. Глубокое знание и освоение технологий математического моделирования в системах MathCAD, Maple, MatLAB и в других пакетах существенно влияет на оперативность решения математической модели реального объекта.

Изучить в полной мере все системы компьютерного моделирования и технологии достаточно сложно в связи с ограниченностью по времени, однако знать об этих информационных системах, и уметь использовать в своей профессиональной деятельности некоторые из них является необходимым условием компетентности специалиста в соответствующей области знаний.

Развитие ЭВМ стимулировало более интенсивное развитие вычислительных методов, создало предпосылки решения сложных задач науки, техники, экономики. Широкое применение при решении таких задач получили методы прикладной математики и математического моделирования.

В настоящее время прикладная математика и ЭВМ являются одним из определяющих факторов научно-технического прогресса. Они способствуют ускорению развития ведущих отраслей народного хозяйства, открывают принципиально новые возможности моделирования и проектирования сложных систем с выбором оптимальных параметров технологических процессов.

Новий науковий напрямок, що інтенсивно розвивається на межі класичної математики та інформатики отримав назву «комп'ютерна математика».

Компьютерная математика – наука о математических вычислениях и преобразованиях с помощью компьютеров.

Лекція 3.

Понятие математического алгоритма решения. Формы представления чисел. Анализ ошибок при практической реализации алгоритмов решения.

Виды погрешностей. Источники ошибок .

Никакие компьютеры сами по себе не могут решить ни одной содержательной задачи. Они способны выполнять лишь небольшое число очень простых действий. Вся их интеллектуальная сила определяется программами, составленными человеком. Программы также реализуют последовательности простых действий. Но эти действия целенаправленные. Поэтому искусство решать задачи на компьютере есть искусство превращения процесса поиска решения в процесс выполнения последовательности простых действий. Называется такое искусство **разработкой алгоритмов**.

Понятие алгоритма – одно из основных понятий программирования и математики.

Алгоритм — это последовательность действий, направленных на получение определённого результата за конечное число шагов.

Алгоритм записывается на формальном языке, исключающем неоднозначность толкования. Исполнитель – это человек, компьютер, автоматическое устройство и т.п. Он должен уметь выполнять все команды, составляющие алгоритм, причем механически, "не раздумывая".

Запись алгоритма на формальном языке называется программой. Иногда само понятие алгоритма отождествляется с его записью, так что слова "алгоритм" и "программа" – почти синонимы. Небольшое различие заключается в том, что при упоминании алгоритма, как правило, имеют в виду основную идею его построения, общую для всех алгоритмических языков. Программа же всегда связана с записью алгоритма на конкретном формальном языке.

Пример 1. Составить алгоритм нахождения значения функции $y = 1/x$.

- 1) Ввод переменной x .
- 2) Если $x = 0$, то шаг 5, иначе шаг 3.
- 3) Вычислить $y = 1/x$.
- 4) Вывод y .
- 5) Конец.

В математике рассматриваются различные виды алгоритмов – программы для машин Тьюринга, алгоритмы Маркова (нормальные алгоритмы), частично рекурсивные функции и т.п.

Различные определения алгоритма в явной или неявной форме содержат следующий ряд общих требований:

Дискретность (от лат. *discretus* — разделенный, прерывистый) – это разбиение алгоритма на ряд отдельных законченных действий (шагов).

Данное свойство указывает, что любой алгоритм должен состоять из конкретных действий, следующих в определенном порядке. Так как выполнение алгоритма может быть поручено компьютеру, то, следовательно, для реализации алгоритма на компьютере необходимо выполнение требования дискретности

вычислительных операций, т.е. возможно разделить задачи на элементарные операции для выполнения их счета.

Детерминированность (от лат. *determinate* — определенность, точность) - любое действие алгоритма должно быть строго и недвусмысленно определено в каждом случае.

Например, если к остановке подходят автобусы разных маршрутов, то в алгоритме должен быть указан конкретный номер маршрута — 5. Кроме того, необходимо указать точное количество остановок, которое надо проехать, — скажем, три.

Конечность - каждое действие в отдельности и алгоритм в целом должны иметь возможность завершения.

Массовость - один и тот же алгоритм можно использовать с разными исходными данными.

Свойство массовости означает, что алгоритм должен быть применен к целому классу однотипных задач, для которых меняются исходные условия. Например, не имеет смысла строить алгоритм нахождения наибольшего общего делителя только для одной пары чисел 10 и 15.

Результативность - в алгоритме не было ошибок.

Результативность алгоритма означает, что данный процесс является пошаговым и должен быть завершен через конечное число шагов, т.е. в алгоритме не должно быть ошибок.

Понятие результативности алгоритма связано с областью его применения. В том случае, если условия задачи взяты из области применения, то алгоритм перерабатывает их в конечное решение, после чего наступает остановка вычислительного процесса; если условия взяты не из области применения, то либо никогда не наступит остановка, либо наступает, но нельзя узнать, какое из полученных чисел является результатом.

Пример 2. Рассмотрим алгоритм нахождения большего из двух заданных чисел А и В:

1. Из числа А вычесть число В.

2. Если получилось отрицательное значение, то сообщить, что число В больше.
3. Если получилось положительное значение, то сообщить, что число А больше.

При всей простоте и очевидности алгоритма, не каждый сразу поймет его ошибочность. Ведь если оба числа равны, то не получится никакого сообщения. Значит, надо обязательно предусмотреть это вариант, например:

1. Из числа А вычесть число В.
2. Если получилось отрицательное значение, то сообщить, что число В больше.
3. Если получилось положительное значение, то сообщить, что число А больше.
4. Если получился ноль, то сообщить, что числа равны.

Поясним эти свойства на простом примере.

Пример 3. Рассмотрим следующую формулу вычисления числа π :

$$\pi = 4 \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots \right) = 4 \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{2i+1}$$

Является ли эта формула алгоритмом вычисления числа π ? Ответ на этот вопрос — «нет», так как здесь нет ни свойства массовости (нет входных данных), ни свойства конечности (сумма бесконечного количества чисел)

Важную роль играют рекурсивные алгоритмы (алгоритмы, вызывающие сами себя до тех пор, пока не будет достигнуто некоторое условие возвращения).

Для каждого алгоритма есть некоторое множество объектов, допустимых в качестве исходных данных.

Пример 4. В алгоритме деления вещественных чисел делимое может быть любым, а делитель не может быть равен нулю.

Алгоритм служит, как правило, для решения не одной конкретной задачи, а некоторого класса задач.

Пример 5. Алгоритм сложения применим к любой паре натуральных чисел. В этом выражается его свойство массовости, то есть одного класса.

Если математическая модель построена, то следующее, что надо сделать, — это разработать алгоритм решения задачи, описывающей модель.

Алгоритмы строятся для решения тех или иных вычислительных задач. Формулировка задачи описывает, каким требованиям должно удовлетворять решение задачи, а алгоритм, решающий эту задачу, находит объект, этим требованиям удовлетворяющий.

Принято различать два вида алгоритмов:

Комбинаторным (нечисленным) алгоритмом называется алгоритм, объектом обработки которого являются комбинаторные объекты (сочетания, размещения, перестановки), построенные из элементов конечного множества. К данному виду алгоритмов относятся алгоритмы генерации комбинаторных объектов, графовые алгоритмы, потоковые алгоритмы, алгоритмы кодирования и т.д. .

Численным алгоритмом называется алгоритм, объектом обработки которого служат числа. В данный класс относят различные вычислительные алгоритмы, алгоритмы численного решения дифференциальных уравнений и т.д.

Анализ алгоритмов и их порядок роста

Для алгоритмов существует два основных критерия:

Правильность

Сложность (трудоемкость).

Алгоритм считается правильным если он дает верный результат для решаемой задачи.

Что касается трудоемкости алгоритмов, то она составляется из четырех позиций:

- **Логическая сложность** оценивается числом человеко-месяцев, затраченных на выполнение алгоритма. Основной недостаток - человеческий фактор.
- **Статическая сложность** это длина описания алгоритма, измеряемая числом операторов языка программирования.
- **Временная сложность** это математическое время выполнения алгоритма, измеряемое в условных единицах времени.
- **Емкостная сложность** это число условных единиц памяти, необходимых для выполнения алгоритма.

Важно отметить, что временная и емкостная сложности не привязываются к конкретным языкам программирования и к конкретным компьютерам, и поэтому являются основными критериями в оценке алгоритмов и заключаются в построении функций сложности и асимптотической оценке этих функций.

Функции временной и емкостной сложности строятся по аналогии. Для современной машины время выполнения алгоритма наиболее важно нежели занимаемая память.

Раздел математики, изучающий общие свойства алгоритмов, называется теорией алгоритмов.

Представление чисел

Научное обозначение

Стандартный метод представления действительного числа, называемый научным обозначением, получается посредством сдвига десятичной точки и присвоения соответствующей степени 10, например:

$$0,0000575 = 5,75 \times 10^{-5},$$

$$230000000 = 2,3 \times 10^8.$$

В химии, к примеру, важной константой является число Авогадро, равное $6,02252 \times 10^{23}$. Это число атомов в грамм-атоме любого химически простого вещества.

В компьютерной терминологии $1K = 1,024 \times 10^3$, а скорость света в вакууме $c = 2,99792458 \times 10^8$ м/с, заряд электрона $e = 1,6021892 \times 10^{-19}$ Кл.

Машинные числа

В компьютерах для действительных чисел используется нормированное двоичное представление с плавающей точкой. Это означает, что математическая величина x на самом деле не хранится в компьютере. Вместо нее в компьютере хранится двоичное приближение x :

$$x \approx \pm q \times 2^n \quad (1)$$

Число q является мантиссой, и это конечное двоичное представление, которое удовлетворяет неравенству $1/2 < q < 1$. Целое число n называется показателем степени.

В компьютере используется только небольшое подмножество системы представления действительных чисел. Типично, что это подмножество содержит только часть двоичного числа, предложенного в (1). **Количество двоичных знаков ограничено двумя числами q и n .**

Пример 6:

$$133,21 = 10^2 * 1.3321, 10^2\text{- порядок, } 1.3321\text{- мантисса.}$$

$$1332.1 = 10^3 * 1.3321$$

$$0.13321 = 10^{-1} * 1.3321$$

Важно понять, что когда мантисса и показатель степени в (1) ограничены, то у компьютера имеется ограниченное количество выбора из памяти вариантов приближений действительного числа x .

Компьютерные числа с плавающей точкой

В компьютере имеются как целая форма представления чисел, так и форма с плавающей точкой. Целая форма используется для вычислений с целыми числами и имеет ограниченное применение в численном анализе. Должно быть понятно, что любой компьютер, выполняя (1), ограничивает количество цифр, используемых в мантиссе q , и возможный диапазон показателя степени n должен быть ограничен.

Компьютеры с 32 двоичными разрядами, представляя действительное число с обычной точностью, используют 8 двоичных разрядов для показателя степени и 24 двоичных разряда для мантиссы. Они могут представлять действительные числа в интервале

$$\text{от } 2,938736E - 39 \text{ до } 1,701412E + 38$$

(т. е. от 2^{-128} до 2^{127}) с шестью десятичными знаками точности.

Компьютеры с 48 двоичными разрядами, представляя действительное число с обычной точностью, могут использовать 8 двоичных разрядов для показателя степени и 40 двоичных разрядов для мантиссы. Они могут представлять действительные числа в интервале от

$$2,938735877E - 39 \text{ до } 1,7014118346E + 38$$

(т. е. от 2^{-128} до 2^{127}) с 11 десятичными знаками точности.

Анализ ошибок

В практике численного анализа важно сознавать, что численное решение — это не точное математическое решение. Точность численного решения уменьшается по многим причинам несколькими тонкими способами. Понимание этих трудностей часто может привести профессионала к правильному выполнению и/или усовершенствованию численного алгоритма.

Определение. Предположим, что \bar{p} является приближением p . Абсолютная

ошибка равна $E_p = |p - \bar{p}|$, относительная ошибка равна $R_p = \frac{|p - \bar{p}|}{|p|}$ при условии, что $p \neq 0$.

Ошибка — это простая разность между истинным и приближенным значениями, тогда как относительная ошибка — это доля истинного значения.

Пример 7. Найдем абсолютную и относительную ошибки в следующих трех случаях. Пусть $x = 3,141592$ и $\bar{x} = 3,14$, тогда абсолютная ошибка равна

$$E_x = |x - \bar{x}| = |3,141592 - 3,14| = 0,001592$$

и относительная ошибка равна

$$R_x = \frac{|x - \bar{x}|}{|x|} = \frac{|3,141592 - 3,14|}{|3,141592|} = 0,00507.$$

Пусть $y = 1000000$ и $\bar{y} = 999996$, тогда ошибка равна

$$E_y = |y - \bar{y}| = |1000000 - 999996| = 4$$

и относительная ошибка равна

$$R_y = \frac{|y - \bar{y}|}{|y|} = \frac{|1000000 - 999996|}{|1000000|} = 0,000004.$$

Пусть $z = 0,000012$ и $\bar{z} = 0,000009$, тогда ошибка равна:

$$E_z = |z - \bar{z}| = |0,000012 - 0,000009| = 0,000003$$

и относительная ошибка равна

$$R_z = \frac{|z - \bar{z}|}{|z|} = \frac{|0,000012 - 0,000009|}{|0,000012|} = 0,25.$$

В случае x между абсолютной и относительной погрешностями нет большой разницы и любая из них может быть использована для оценки точности \bar{x} . Во втором случае значение y — величина размера 10^6 , абсолютная ошибка велика, относительная ошибка мала и \bar{y} можно рассматривать как хорошее приближение y . В третьем случае z — величина размера 10^{-6} , абсолютная ошибка является наименьшей из всех трех ошибок, но относительная ошибка — наибольшая. В процентном отношении она составляет 25%, и такое значение \bar{z} является плохим

приближением z . Заметим, что чем больше $|p|$ удаляется от 1 (в сторону увеличения или уменьшения), тем относительная ошибка становится лучшим индикатором точности приближения, чем абсолютная ошибка. Относительная ошибка предпочтительнее для представления с плавающей точкой, так как она связана непосредственно с мантиссой.

Источники погрешности решения задачи на ЭВМ

(Пример – методы поиска корней нелинейных уравнений по своей природе являются приближенными в отличие от прямых методов, дающих точное решение.)

Однако на самом деле при решении задачи на компьютере ответ все равно будет содержать погрешность.

В качестве основных источников погрешности обычно рассматривают три вида ошибок. Это так называемые ошибки усечения, ошибки округления и ошибки распространения.

Рассмотрим их.

Ошибки усечения

Этот вид ошибок связан с погрешностью, заложенной в самой задаче. Он может быть обусловлен неточностью определения исходных данных. Например, если в условии задачи заданы какие-либо размеры, то на практике для реальных объектов эти размеры известны всегда с некоторой точностью. То же самое касается любых других физических параметров. Сюда же можно отнести неточность расчетных формул и входящих в них числовых коэффициентов.

Большое число расчетных формул являются эмпирическими и дают результат с некоторой погрешностью, содержат подгоночные коэффициенты, обеспечивающие приемлемую ошибку в ограниченном диапазоне входных параметров. Поэтому, как правило, если исходные данные известны с некоторой погрешностью, вряд ли стоит пытаться получить результат с меньшей погрешностью.

Понятие ошибки усечения используется, если ошибка возникает из-за того, что более сложное математическое выражение "заменяется" более простой формулой. Эта

терминология возникла из техники замены сложной функции укороченными рядами Тейлора

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k .$$

Пример 8. Разложим в ряд Тейлора функцию:

$$e^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!} + \dots + \frac{x^{2n}}{n!} + \dots$$

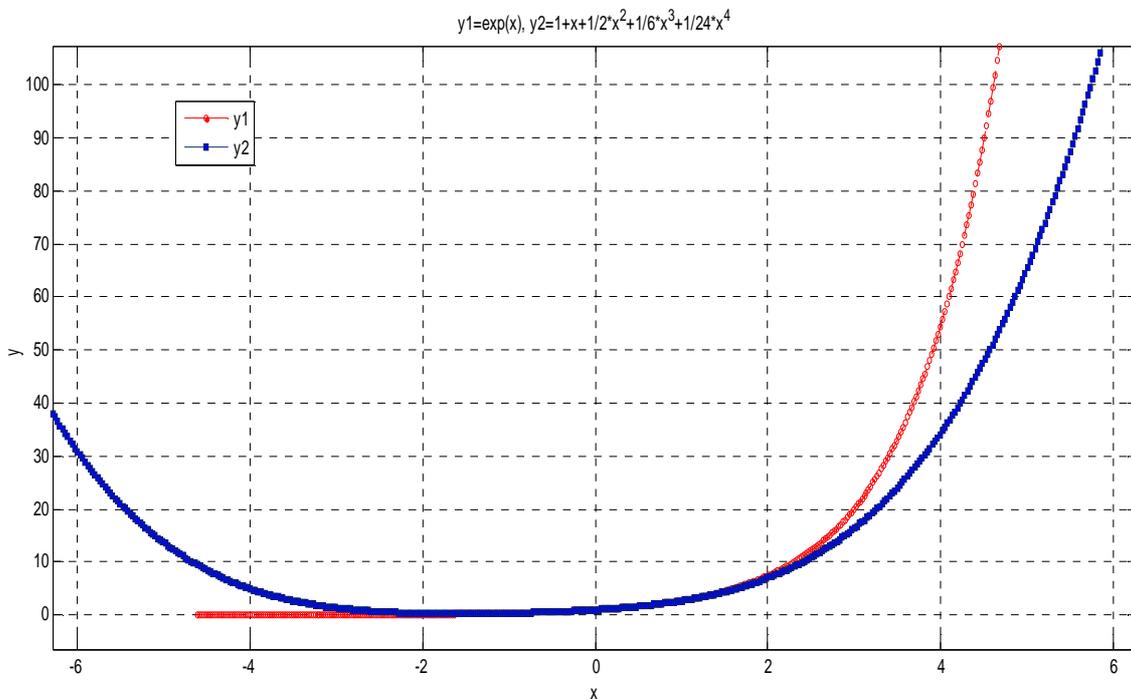
Функцию можно представить только лишь пятью членами ряда, которые могут быть использованы при нахождении приближенных значений интеграла.

Пример 9. Вычислить значение определенного интеграла $\int_0^1 e^x dx$. Определить точность приближения, полученную при замене подынтегральной функции $f(x) = e^x$ усеченным рядом Тейлора (взять пять членов ряда).

Выполняя операции в MatLab, получим:

```
>> int(exp(x),0,.5)
ans =
-1+exp(1/2)
>> -1+exp(1/2)
ans =
0.648721270700128
>> int(1+x+1/2*x^2+1/6*x^3+1/24*x^4,0,0.5)
ans =
0.648697916666667
Находим абсолютную погрешность:
>> E=0.648721270700128-0.648697916666667
E =
2.335403346098719e-005
Находим относительную погрешность:
>> R=E/0.648721270700128
R =
3.600010438347815e-005
```

Графики функций:



Ошибки распространения

Данный вид ошибок связан с применением того или иного способа решения задачи. В ходе вычислений неизбежно происходит накопление или, иначе говоря, распространение ошибки. Помимо того, что сами исходные данные не являются точными, новая погрешность возникает при их перемножении, сложении и т. п. Накопление ошибки зависит от характера и количества арифметических действий, используемых в расчете.

Обычно для решения одной и той же задачи может быть использован ряд различных методов решения. Например, систему линейных алгебраических уравнений можно решить методом Гаусса или через определители (методом Крамера). Теоретически оба метода позволяют получить точное решение. Однако на практике при решении больших систем уравнений метод Гаусса обеспечивает меньшую погрешность, чем метод Крамера, так как использует меньший объем вычислений.

Ошибки округления

Это тип ошибок связан с тем, что истинное значение числа не всегда точно сохраняется компьютером. При сохранении вещественного числа в памяти компьютера оно записывается в виде мантииссы и порядка, примерно так же, как отображается число на дисплее калькулятора (см. рис. 12).

±	R_1	R_2	R_3	R_n	±	D_1	D_2	.	.	.	D_m
Мантисса									Порядок						

Рис. 1. Структура записи вещественного числа

Здесь R_1, R_2, R_n – разряды мантиссы, D_1, D_2, \dots, D_m – разряды порядка. На самом деле конечно, в отличие от дисплея калькулятора, мантисса и порядок числа, включая их знаки, в памяти компьютера хранятся в двоичном виде. Но для обсуждения природы ошибок округления это различие не столь принципиально.

Понятно, что иррациональные числа такие, как $\pi = 3.14159\dots$ и $e = 2,712\dots$ не могут быть представлены в памяти компьютера в принципе. Однако же и рациональные числа, если количество их значащих цифр превышает число отведенных разрядов мантиссы (см. рис. 1), будут представлены не точно. При этом цифра последнего сохраняемого в ЭВМ разряда может быть записана с округлением или без него.

Фактически при заданной структуре хранения числа компьютер может использовать не бесконечное, а конечное число рациональных чисел, которые вписываются в приведенную на рис. 1 схему. Поэтому любой входной параметр решаемой задачи, ее промежуточный результат и окончательной ответ всегда округляются до разрешенных в компьютере чисел.

Следующий важный вывод касается диапазона представления чисел в ЭВМ. Если проводить рассуждения для десятичной системы счисления, то максимальное по модулю число, которое может быть представлено в соответствии со схемой на рис. 1, равно

$$\pm X_{\infty} = \pm 999\dots 9 \times 10^{+99\dots 9}.$$

Все числа, превышающие по модулю X_{∞} , не представимы в ЭВМ и рассматриваются как машинная бесконечность (**пример в MatLab – inf**). Если в ходе расчетов будет получен результат, превышающий X_{∞} , то произойдет аварийное завершение вычислений по переполнению.

Минимальное по модулю число, сохраняемое в памяти компьютера, по схеме на рис. 1 равно

$$\pm X_0 = \pm 000\dots 1 \times 10^{-99\dots 9}$$

Числа, модуль которых меньше X_0 , воспринимаются ЭВМ как нуль, точнее как машинный нуль. Если при выполнении расчетов будет получен результат меньше, чем X_0 , то это будет воспринято как потеря порядка. Обычно в подобной ситуации результат полагается равным нулю, и вычисления продолжаются.

Пример 10. Минимальное по модулю число в Matlab, сохраняемое в памяти компьютера, равно:

```
>> realmin
ans =
2.225073858507201e-308
```

Максимальное по модулю число равно:

```
>> realmax
ans =
1.797693134862316e+308
```

Потеря значащих цифр

Рассмотрим два приблизительно равных числа $p = 3,1415926536$ $q = 3,1415957341$, имеющих точность, равную 11 десятичным цифрам. Предположим, что разность между числами равна $p - q = -0,0000030805$. Поскольку первые шесть цифр p и q одинаковы, разность между $p - q$ состоит только из пяти точных десятичных цифр. Этот феномен называется **потерей значащих цифр** или потерями из-за вычитания. Эта потеря точности окончательного ответа может подкрасться, когда о ней не подозреваешь.

Пример 11. Сравним результаты вычисления $f(500)$ и $g(500)$, используя шесть цифр и округление. Функциями являются $f(x) = x(\sqrt{x+1} - \sqrt{x})$ и $g(x) = \frac{x}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}$ соответственно. Для первой функции

$$f(500) = 500(\sqrt{500+1} - \sqrt{500}) = 500(22,3830 - 22,3607) = 11,1500.$$

Для второй функции

$$g(500) = \frac{500}{\sqrt{500+1} + \sqrt{500}} = \frac{500}{22,3830 + 22,3607} = 11,1748.$$

Вторая функция $g(x)$, является алгебраическим эквивалентом $f(x)$:

$$f(x) = \frac{x(\sqrt{x+1} - \sqrt{x})(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = \frac{x((\sqrt{x+1})^2 - (\sqrt{x})^2)}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = \frac{x}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}.$$

Ответ, $g(500) = 11,1748$, имеет меньшую ошибку и является таким же, как полученный округлением истинного ответа $11,174755300747198\dots$ с шестью знаками.

Лекція 4.

Обработка данных. Цели обработки данных. Виды эксперимента.

Аппроксимация. Интерполяция.

Локальная и глобальная интерполяции

На настоящий момент, единственное, известное человеку, «устройство для обработки информации» – это сам человек. Поэтому, то, что называют «современными информационными технологиями», сводится, по большей части, к обработке данных с помощью различных методов, включая применение современных компьютеров и программ для них, а также – методы создания и издания:

- книг,
- фильмов,
- музыки,
- веб-сайтов,
- справочников,
- учебных пособий.

При этом данные, по сути, являются формой представления информации вне сознания отдельного человека.

Типичные цели обработки данных

- собрать всю доступную информацию, представленную в данных различной природы;
- отделить существенную информацию, представленную данными, от несущественной, для рассмотрения в данный момент;

- представить существенную информацию в виде, наиболее удобном для восприятия человеком.

Эти цели, в свою очередь, приводят к постановке задач обработки данных.

Общие задачи:

- сбор данных;
- ввод данных в различные информационные системы;
- накопление данных;
- хранение накопленных данных, в том числе;
- доступ к данным;
- передача данных и обмен данными;
- представление данных.

Экспериментальные данные – все исходные и выходные числовые данные эксперимента, сведенные в таблицу экспериментальных данных.

Обработка экспериментальных данных – различные методы построения математической модели объекта по таблице экспериментальных данных.

Регрессионный анализ – наиболее распространенный метод обработки данных, который включает в себя метод наименьших квадратов. При регрессионном анализе таблица экспериментальных данных обычно отражается алгебраическими степенными полиномами, которые называют полиномами или уравнениями регрессии. Отсюда термины – задача регрессии, коэффициенты регрессии и т.п. Сам термин регрессия отражает тот факт, что с увеличением степени полинома точность отражения таблицы экспериментальных данных обычно возрастает, а ошибка отражения соответственно уменьшается, регрессирует.

Управляемые факторы – это такие воздействия на объект исследования, численные значения которых определяются и контролируются самим экспериментатором.

Активный эксперимент – это эксперимент, в котором задействованы только управляемые факторы. Пример – изучение зависимости урожайности какой-либо сельскохозяйственной культуры от объемов орошения. Эти объемы для различных экспериментальных полей посева назначаются самим исследователем.

Контролируемые факторы – это такие воздействия на объект исследования, численные значения которых экспериментатором не устанавливаются, но значения их исследователь может измерять, контролировать и фиксировать.

Пассивный эксперимент – это эксперимент, в котором задействованы только контролируемые факторы. Пример – изучение зависимости урожайности сельскохозяйственной культуры от объемов атмосферных осадков, которыми экспериментатор управлять не может.

Активно-пассивный (или пассивно-активный) **эксперимент** – это совмещение обоих видов эксперимента, когда зависимость урожайности изучается от совместного объема и орошения и атмосферных осадков.

Основным «рабочим инструментом» и эксперимента и обработки экспериментальных данных является численное значение факторов воздействия и откликов объекта исследования, т.е. число. Какова ни была бы природа факторов и откликов, включая в том числе эмоции или впечатления, они должны быть выражены количественно, числом.

Числа при экспериментировании получают тремя способами:

- подсчетом,
- измерением,
- методом экспертных оценок.

Примером последнего способа является балльная оценка членами жюри выступления спортсменки по художественной гимнастике. Сюда же относится и оценка, выставляемая студенту преподавателем на экзамене.

Обработка данных. Аппроксимация. Интерполяция.

Многим из тех, кто сталкивается с научными и инженерными расчётами часто приходится оперировать наборами значений, полученных экспериментальным путём или методом случайной выборки. Как правило, на основании этих наборов требуется построить функцию, на которую могли бы с высокой точностью попадать другие получаемые значения. Такая задача называется аппроксимацией кривой.

Аппроксимацией (приближением) функции $f(x)$ называется нахождение такой функции $F(x)$ (аппроксимирующей функции), которая была бы близка заданной. Критерии близости функций $f(x)$ и $F(x)$ могут быть различные.

В том случае, когда приближение строится на дискретном наборе точек, аппроксимацию называют точечной или дискретной. Наиболее часто встречающимся видом точечной аппроксимации является интерполяция (в широком смысле).

В том случае, когда аппроксимация проводится на непрерывном множестве точек (отрезке), аппроксимация называется непрерывной или интегральной. Примером такой аппроксимации может служить разложение функции в ряд Тейлора, то есть замена некоторой функции степенным многочленом.

Теорема. Предположим, что $f \in C^{n+1}[a; b]$ и $x_0 \in [a; b]$ – некоторое фиксированное значение. Если $x \in [a; b]$, то

$$f(x) = P_n(x) + E_n(x),$$

где $P_n(x)$ – полином, который можно использовать для приближения $f(x)$:

$$f(x) \approx P_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n,$$

ошибка приближения $E_n(x)$ имеет вид

$$E_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1},$$

для некоторого $c = c(x)$, которое лежит между x и x_0 .

Необходимыми данными для построения полинома Тейлора являются значение функции $f(x)$ и ее производных в точке x_0 . **Недостаток** состоит в том, что **должны быть известны производные высокого порядка** и часто они либо неизвестны, либо сложны для вычислений.

Интерполяцией называют такую разновидность аппроксимации, при которой кривая построенной функции проходит точно через имеющиеся точки данных.

Существует также близкая к интерполяции задача, которая заключается в аппроксимации какой-либо сложной функции другой, более простой функцией.

Если некоторая функция слишком сложна для производительных вычислений, можно попытаться вычислить её значение в нескольких точках, а по ним построить, то есть интерполировать, более простую функцию. Разумеется, использование упрощенной функции не позволяет получить такие же точные результаты, какие давала бы первоначальная функция. Но в некоторых классах задач достигнутый выигрыш в простоте и скорости вычислений может перевесить получаемую погрешность в результатах.

Необходимость интерполяции функций в основном связана с двумя причинами:

- 1. Функция $f(x)$ имеет сложное аналитическое описание, вызывающее определенные трудности при его использовании (например, $f(x)$ является спецфункцией: гамма-функцией, эллиптической функцией и др.).**
- 2. Аналитическое описание функции $f(x)$ неизвестно, т. е. $f(x)$ задана таблично. При этом необходимо иметь аналитическое описание, приближенно представляющее $f(x)$ (например, для вычисления значений $f(x)$ в произвольных точках, определения интегралов и производных от $f(x)$ и т. п.)**

Постановка задачи интерполяции

Простейшая задача *интерполяции* заключается в следующем. На отрезке $[a, b]$ заданы $n + 1$ точки $x_i = x_0, x_1, \dots, x_n$, которые называются *узлами интерполяции*, и значения некоторой функции $f(x)$ в этих точках

$$f(x_0) = y_0, f(x_1) = y_1, \dots, f(x_n) = y_n. \quad (1)$$

Требуется построить функцию $F(x)$ (*интерполяционная функция*), принадлежащую известному классу и принимающую в узлах интерполяции те же значения, что и $f(x)$, т. е. такую, что

$$F(x_0) = y_0, F(x_1) = y_1, \dots, F(x_n) = y_n. \quad (2)$$

Геометрически это означает, что нужно найти кривую $y = F(x)$ некоторого определенного типа, проходящую через заданную систему точек $M(x_i, y_i)$ ($i = 0, 1, \dots, n$) (Рис. 1).

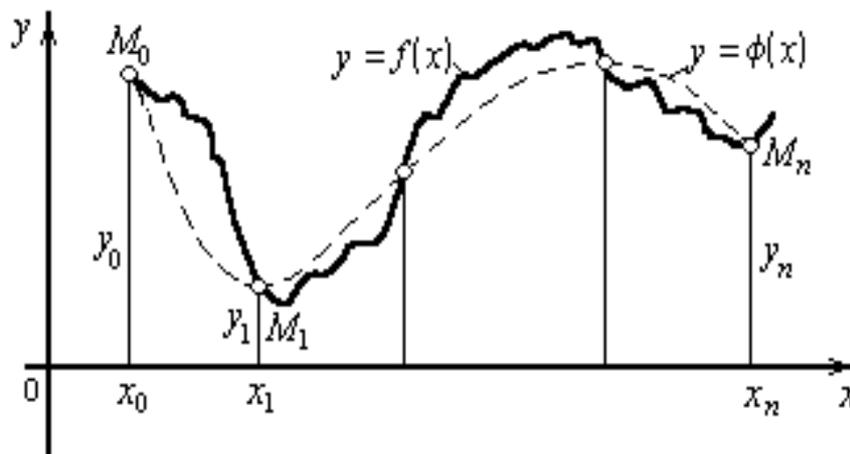


Рисунок 1.

В такой общей постановке задача может иметь бесконечное множество решений или совсем не иметь решений. Однако эта задача становится однозначной, если вместо произвольной функции $F(x)$ искать полином $P(x)$ (**интерполяционный полином**) степени не выше n , удовлетворяющий условиям (2), т. е. такой, что

$$P(x_0) = y_0, P(x_1) = y_1, \dots, P(x_n) = y_n \quad (3)$$

Полученную интерполяционную формулу

$$\varphi(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \quad (4)$$

обычно используют для приближенного вычисления значений данной функции $P(x)$ для значений аргумента x , отличных от узлов интерполяции. Такая операция называется **интерполяцией функций**.

Различают два вида интерполяции:

- **глобальная** – соединение всех точек $f(x)$ единым интерполяционным полиномом;
- **локальная** – соединение точек отрезками прямой (по двум точкам), отрезками параболы (по трем точкам).

Заметим, что здесь приходится различать два случая:

1) *интерполяцию* (от лат. *interpolar* — подновлять) — восстановление промежуточных значений функции внутри интервала $[x_0, x_n]$ по ряду известных ее значений;

2) *экстраполяцию* (лат. приставка *extra* означает «вне») — когда $[x_0, x_n]$.

Вообще говоря, задачи восстановления непрерывной функции по ее дискретным значениям делятся на задачи экстраполяции и интерполяции.

Экстраполяцией называют определение будущих значений функции с момента очередного отсчета до момента поступления следующего отсчета. **Интерполяцией** называют определение промежуточных значений функции между двумя полученными отсчетами. Когда $x_0 < x < x_n$, приближение полиномом $P(x)$ называется **значением интерполяции**. Если либо $x < x_0$, либо $x_n < x$, то $P(x)$ называют **значением экстраполяции**. Следует иметь в виду, что точность экстраполяции обычно очень невелика.

Локальная интерполяция.

Линейная интерполяция

Простейшим и часто используемым видом локальной интерполяции является *линейная интерполяция*. Она состоит в том, что заданные точки $M(x_i, y_i)$ ($i = 0, 1, \dots, n$) соединяются прямолинейными отрезками, и функция $f(x)$ приближается к ломаной с вершинами в данных точках (Рисунок 2).

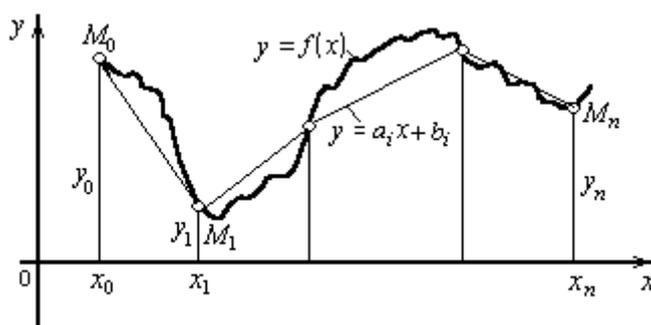


Рисунок 2. Линейная интерполяция

Уравнения каждого отрезка ломаной линии в общем случае разные. Поскольку имеется n интервалов (x_i, x_{i+1}) , то для каждого из них в качестве уравнения интерполяционного полинома используется уравнение прямой, проходящей через две

точки. В частности, для i – го интервала можно написать уравнение прямой, проходящей через точки (x_i, y_i) и (x_{i+1}, y_{i+1}) , в виде:

$$\frac{y - y_i}{y_{i+1} - y_i} = \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i}, \quad x_i \leq x \leq x_{i+1}.$$

Имея в виду, что $y = m(x - x_1) + y_1$, а $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ – тангенс угла наклона касательной,

получаем:

$$y = (y_2 - y_1) \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} + y_1. \quad (5)$$

Такая интерполяция называется кусочно-линейной.

Следовательно, при использовании линейной интерполяции сначала нужно определить интервал, в который попадает значение аргумента x , а затем подставить его в формулу (20) и найти приближенное значение функций в этой точке.

Пример 1. Даны точки $K_1(1, 1)$, $K_2(2, 2)$, $K_3(3, 0)$, $K_4(4, -1)$. Произвести кусочно-линейную интерполяцию.

Соединяем каждые две точки. Для нахождения интерполяционных полиномов первой степени применим (5). Тогда получим:

$$y_1 = x - 1, \quad y_2 = 4 - 2x, \quad y_3 = 3 - x.$$

Квадратичная интерполяция

В случае *квадратичной интерполяции* в качестве интерполяционной функции на отрезке (x_{i-1}, x_{i+1}) принимается квадратный трехчлен. Уравнения квадратичного трехчлена

$$y_i = a_i x^2 + b_i x + c_i, \quad x_{i-1} \leq x \leq x_{i+1} \quad (6)$$

содержат три неизвестных коэффициента a_i, b_i, c_i , для определения которых необходимы три уравнения. Ими служат условия прохождения параболы (6) через три точки $(x_{i-1}, y_{i-1}), (x_i, y_i), (x_{i+1}, y_{i+1})$. Эти условия можно записать в виде:

$$\begin{aligned} a_i x_{i-1}^2 + b_i x_{i-1} + c_i &= y_{i-1}, \\ a_i x_i^2 + b_i x_i + c_i &= y_i, \\ a_i x_{i+1}^2 + b_i x_{i+1} + c_i &= y_{i+1}. \end{aligned} \tag{7}$$

Интерполяция для любой точки $x \in [x_0, x_n]$ проводится по трем ближайшим точкам.

Пример 2. Данные из примера 1 применим для построения квадратичных трехчленов. Используя первые три точки $K_1(1, 1), K_2(2, 2), K_3(3, 0)$, составим систему уравнений:

$$\begin{cases} a + b + c = 1 \\ 4a + 2b + c = 2, \\ 9a + 3b + c = 0 \end{cases}$$

Откуда методом Крамера получаем следующие коэффициенты: $a = -1.5, b = 5.5, c = -3$ и квадратичный трехчлен принимает вид:

$$P(x) = -1.5x^2 + 5.5x - 3.$$

Используя следующие три точки $K_2(2, 2), K_3(3, 0), K_4(4, -1)$, составляя систему и, решая ее, получим:

$$P(x) = 0.5x^2 - 0.5x + 9.$$

Кубическая сплайн-интерполяция

В последние годы интенсивно развивается новый раздел современной вычислительной математики – теория *сплайнов*. Сплайны позволяют эффективно

решать задачи обработки экспериментальных зависимостей между параметрами, имеющих достаточно сложную структуру.

Наравне с рациональной интерполяцией, сплайн-интерполяция является одной из альтернатив полиномиальной интерполяции.

В основе сплайн-интерполяции лежит следующий принцип. Интервал интерполяции разбивается на небольшие отрезки, на каждом из которых функция задается полиномом третьей степени. Коэффициенты полинома подбираются таким образом, чтобы выполнялись определенные условия (какие именно, зависит от способа интерполяции). Общие для всех типов сплайнов третьего порядка требования – непрерывность функции и, разумеется, прохождение через предписанные ей точки. Дополнительными требованиями могут быть линейность функции между узлами, непрерывность высших производных и т.д.

Основными достоинствами сплайн-интерполяции являются её устойчивость и малая трудоемкость. Системы линейных уравнений, которые требуется решать для построения сплайнов, очень хорошо обусловлены, что позволяет получать коэффициенты полиномов с высокой точностью. В результате даже про очень больших N вычислительная схема не теряет устойчивость. Построение таблицы коэффициентов сплайна требует $O(N)$ операций, а вычисление значения сплайна в заданной точке – всего лишь $O(\log(N))$.

Рассмотренные выше методы локальной интерполяции, по существу, являются простейшим сплайном первой степени (для линейной интерполяции) и второй степени (для квадратичной интерполяции).

Наиболее широкое практическое применение, в силу их простоты, нашли кубические сплайны. Интерполяция сплайнами третьего порядка – это быстрый, эффективный и устойчивый способ интерполяции функций. Основные идеи теории кубических сплайнов сформировались в результате попыток математически описать гибкие рейки из упругого материала (механические сплайны), которыми издавна пользовались чертежники в тех случаях, когда возникала необходимость проведения через заданные точки достаточно гладкой кривой. Известно, что рейка из упругого

материала, закрепленная в некоторых точках и находящаяся в положении равновесия, принимает форму, при которой ее энергия является минимальной. Это фундаментальное свойство позволяет эффективно использовать сплайны при решении практических задач обработки экспериментальной информации.

В общем случае для функции $y = f(x)$ требуется найти приближение $y = P(x)$ таким образом, чтобы $f(x_i) = P(x_i)$ в точках $x = x_i$, а в остальных точках отрезка $[a, b]$ значения функций $f(x)$ и $P(x)$ были близкими между собой. При малом числе экспериментальных точек (например, 6-8) для решения задачи интерполяции можно использовать один из методов построения интерполяционных полиномов. Однако при большом числе узлов интерполяционные полиномы становятся практически непригодными. Это связано с тем, что степень интерполяционного полинома лишь на единицу меньше числа экспериментальных значений функций. Можно, конечно, отрезок, на котором определена функция, разбить на участки, содержащие малое число экспериментальных точек, и для каждого из них построить интерполяционные полиномы. Однако в этом случае аппроксимирующая функция будет иметь точки, где производная не является непрерывной, т. е. график функции будет содержать точки “излома”.

Кубические сплайны лишены этого недостатка. Исследования теории балок показали, что гибкая тонкая балка между двумя узлами достаточно хорошо описывается кубическим полиномом, и поскольку она не разрушается, то аппроксимирующая функция должна быть по меньшей мере непрерывно дифференцируемой. Это означает, что функции $P(x)$, $P'(x)$, $P''(x)$ должны быть непрерывными на отрезке $[a, b]$.

Кубическим интерполяционным сплайном, соответствующим данной функции $f(x)$ и данным узлам x_i , называется функция $S(x)$, удовлетворяющая следующим условиям:

- 1. на каждом сегменте $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 1, \dots, N$ функция $S(x)$ является полиномом третьей степени,**

2. функция $S(x)$, а также ее первая и вторая производные непрерывны на отрезке $[a, b]$,
3. $S(x_i) = f(x_i), i = 0, 1, \dots, N$.

На каждом из отрезков $[x_i, x_{i+1}], i = 1, \dots, N$ будем искать функцию $S(x) = S_i(x)$ в виде полинома третьей степени:

$$S(x) = S_i(x) = a_0^{(i)} + a_1^{(i)}(x - x_i) + a_2^{(i)}(x - x_i)^2 + a_3^{(i)}(x - x_i)^3, \quad (8)$$

$$x_i \leq x \leq x_{i+1}$$

где a_0, a_1, a_2, a_3 – коэффициенты, подлежащие определению на всех n элементарных отрезках и удовлетворяет условиям

$$S(x_i) = y_i.$$

Если всего n узлов, то интервалов $n - 1$. Значит, требуется определить $4(n - 1)$ неизвестных коэффициентов полиномов. Условие дает нам n уравнений. Условие непрерывности функции и ее первых двух производных во внутренних узлах интервала дает дополнительно $3(n - 2)$ уравнений

$$\begin{aligned} S_i(x_{i+1}) &= S_{i+1}(x_{i+1}) \\ S_i'(x_{i+1}) &= S_{i+1}'(x_{i+1}) \\ S_i''(x_{i+1}) &= S_{i+1}''(x_{i+1}) \end{aligned}$$

Всего имеем $4(n - 2)$ различных уравнений. Два недостающих уравнения можно получить, задавая условия на краях интервала. В частности, можно потребовать нулевой кривизны функции на краях интервала, то есть $S''(a) = S''(b) = 0$. Задавая различные условия на концах интервала, можно получить разные сплайны.

Полиномы используются для составления схем алгоритмов для программного обеспечения для приближения функций, численного дифференцирования, численного интегрирования и рисунков кривых на компьютере, которые должны проходить через заданные точки.

Глобальная интерполяция

При глобальной интерполяции ищется единый полином для всего интервала. Если среди узлов $\{x_i, y_i\}$ нет совпадающих, то такой полином будет единственным, и его степень не будет превышать n .

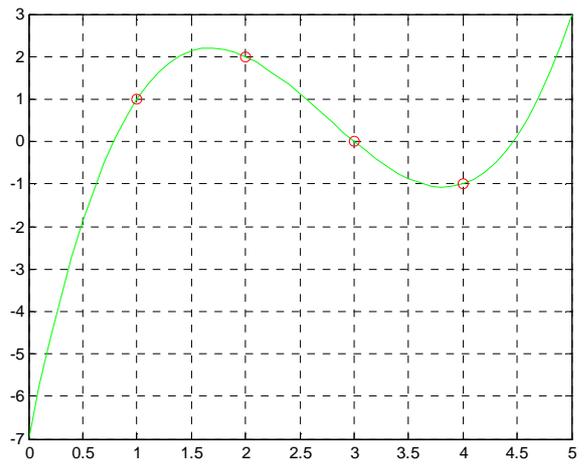
Запишем систему уравнений для определения коэффициентов полинома

$$\begin{aligned} c_0 + c_1 x_0 + c_2 x_0^2 + \dots + c_{n-1} x_0^{n-1} &= y_0 \\ c_0 + c_1 x_1 + c_2 x_1^2 + \dots + c_{n-1} x_1^{n-1} &= y_1 \\ &\vdots \\ c_0 + c_1 x_{n-1} + c_2 x_{n-1}^2 + \dots + c_{n-1} x_{n-1}^{n-1} &= y_{n-1} \end{aligned}$$

Пример 3. Для точек $K_1(1, 1)$, $K_2(2, 2)$, $K_3(3, 0)$, $K_4(4, -1)$ найти интерполяционный полином третьей степени.

Решение можно производить средствами СКМ – MatLab.

```
>> A=[1 1 1 1;8 4 2 1;27 9 3 1;64 16 4 1];
>> b=[1;2;0;-1];x=A\b
x =
 0.6666666666666666
 -5.499999999999995
 12.833333333333320
 -6.999999999999991
>> A*x
ans =
 1.0000000000000000
 1.9999999999999998
 0.0000000000000002
 -0.9999999999999998
>> x=0:.1:5;p=0.6666666666666666*x.^3-...
5.499999999999995*x.^2+12.833333333333320*x...
-6.999999999999991;
>> x1=[1 2 3 4];p1=[1 2 0 -1];
>> plot(x,p,'-g',x1,p1,'or');grid
```



Существуют некоторые стандартные формы записи интерполяционных полиномов. Интерполяционный многочлен в форме Лагранжа имеет вид

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^n \left[f(x_i) \prod_{j \neq i} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \right]$$

Пример 4. Положим $n=1$. Ясно, что мы имеем в этом случае две точки и интерполяционная формула Лагранжа дает уравнение прямой, проходящей через две

заданные точки. Обозначив абсциссы этих точек через a и b , получим интерполяционный полином в виде

$$L_1(x) = \frac{x-b}{a-b}y_0 + \frac{x-a}{b-a}y_1$$

Примем $n = 2$. Тогда получим уравнение параболы, проходящей через три точки x_0, x_1, x_2 :

$$L_2(x) = f(x_0) \frac{x-x_1}{x_0-x_1} \frac{x-x_2}{x_0-x_2} + f(x_1) \frac{x-x_2}{x_1-x_2} \frac{x-x_0}{x_1-x_0} + f(x_2) \frac{x-x_1}{x_2-x_1} \frac{x-x_0}{x_2-x_0} \quad (*)$$

Пример 5. Пусть заданы значения $x_0 = 1, x_1 = 2, x_2 = 3, y_0 = 1, y_1 = 2, y_2 = 0$ (см. пример 1). Определить значение неизвестной функции для $x = 2.5$.

Для данного случая, когда мы имеем три значения функции, интерполяционная формула Лагранжа представляется в виде (*) и, после подстановки заданных значений в формулу Лагранжа получаем:

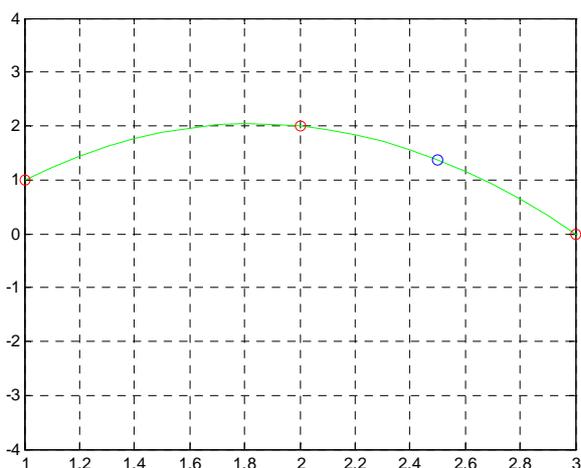
$$L_2(x) = 1 \cdot \frac{x-2}{1-2} \cdot \frac{x-3}{1-3} + 2 \cdot \frac{x-3}{2-3} \cdot \frac{x-1}{2-1} + 0 \cdot \frac{x-2}{3-2} \cdot \frac{x-1}{3-1}.$$

После преобразований получаем:

$$L_2(x) = -1.5x^2 + 5.5x - 3.$$

Определим значение

$$L_2(x) \text{ при } x = 2.5: L_2(2.5) = 1.375.$$



Еще один из видов интерполяционных многочленов - многочлен в форме Ньютона имеет вид:

$$P_n(x) = f(x_0) + \sum_{i=1}^n (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{i-1}) y(x_0; x_1; \dots; x_i),$$

$$y(x_i; x_j) = \frac{y(x_i) - y(x_j)}{x_i - x_j},$$

где

Лекція 5.

Метод наименьших квадратов. Уравнения линейной и квадратичной регрессий. Построение линейных систем для определения коэффициентов регрессии.

Регрессионный анализ – наиболее распространенный метод обработки данных, который включает в себя метод наименьших квадратов. При регрессионном анализе таблица экспериментальных данных обычно отражается алгебраическими степенными полиномами, которые называют полиномами или уравнениями регрессии. Отсюда термины – задача регрессии, коэффициенты регрессии и т.п. Сам термин регрессия отражает тот факт, что с увеличением степени полинома точность отражения таблицы экспериментальных данных обычно возрастает, а ошибка отражения соответственно уменьшается, регрессирует.

Рассмотрим один из методов, позволяющих проанализировать и обработать данные, полученные в результате эксперимента. Пусть в результате измерений получена таблица зависимости одной величины y от другой x .

Пусть зависимость между двумя переменными x и y выражается в виде таблицы, полученной опытным путем. Это могут быть результаты опыта или наблюдений, статистической обработки материала и т.п.

Таблица 1

x	x_1	x_2	...	x_i	...	x_n
$f(x)$	y_1	y_2	...	y_i	...	y_n

Требуется наилучшим образом сгладить экспериментальную зависимость между переменными x и y , т.е. по возможности точно отразить общую тенденцию зависимости y от x , исключив при этом случайные отклонения, связанные с неизбежными погрешностями измерений или статистических наблюдений. Такую сглаженную зависимость стремятся представить в виде формулы $y = f(x)$.

Необходимо найти формулу $y = f(x)$, выражающую таблично заданную зависимость аналитически. Применение интерполяции в данном случае нецелесообразно, т.к. значения y_i в узлах получены экспериментально и поэтому являются сомнительными (в ходе эксперимента возникает неустранимая погрешность, обусловленная неточностью измерений). Кроме того, совпадение значений в узлах не означает совпадения характеров поведения исходной и интерполирующей функции. Поэтому необходимо найти такой метод подбора эмпирической формулы, который не только позволяет найти саму формулу, но и оценить погрешность подгонки.

Постановка задачи. Найдем функцию заданного вида $y = f(x)$ которая в точках $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ принимает значения как можно более близкие к табличным значениям $y_1, y_2, y_3, \dots, y_n$. Практически вид приближающей функции можно определить визуально: по таблице 1 строится точечный график функции, а затем проводится кривая, по возможности наилучшим образом отражающая характер расположения точек (рис.1).

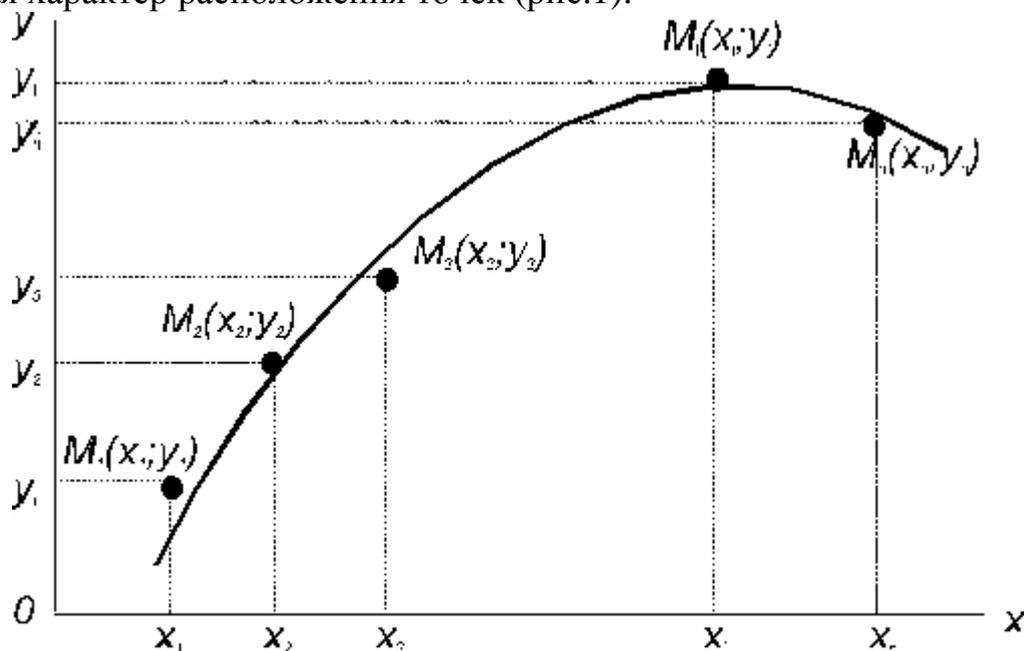


Рис. 1

Формулы, служащие для аналитического представления опытных данных, получили название *эмпирических формул*.

Задача нахождения эмпирических формул разбивается на два этапа. На первом этапе нужно установить **вид зависимости** $y = f(x)$, т.е. решить, является ли она линейной, квадратичной, логарифмической или какой-либо другой.

Предположим, например, что результаты экспериментальных исследований нанесены на плоскость, т.е. паре чисел (x, y) соответствует точка на плоскости с

такими же координатами. Разумеется, существует множество кривых, проходящих через эти точки.

Обычно предполагают, что кривая истинной зависимости - это наиболее «гладкая» кривая, согласованная с эмпирическими данными.

Для проверки правильности вывода проводятся дополнительные исследования, т.е. производится еще ряд одновременных измерений величин x и y . Дополнительные точки наносятся на плоскость. Если они оказываются достаточно близкими к выбранной кривой, то можно считать, что вид кривой установлен. В противном случае, кривую надо скорректировать и вновь провести дополнительные измерения.

Кроме того, для выбора функции $y = f(x)$ привлекаются дополнительные соображения, как правило, не математического характера (теоретические предпосылки, опыт предшествующих исследований и т.п.).

Предположим, первый этап завершен – вид функции $y = f(x)$ установлен. Тогда переходят ко второму этапу – определению неизвестных параметров этой функции.

Согласно наиболее распространенному и теоретически обоснованному методу наименьших квадратов в качестве неизвестных параметров функции $f(x)$ выбирают такие значения, чтобы сумма квадратов невязок δ_i , или отклонений «теоретических» значений $f(x_i)$, найденных по эмпирической формуле $y = f(x)$, от соответствующих опытных значений y_i , т.е.

$$S = \sum_{i=1}^n \delta_i^2 = \sum_{i=1}^n (f(x_i) - y_i)^2$$

была минимальной.

В качестве величины отклонения S эмпирических точек (x_i, y_i) от точек сглаживающей экспериментальную зависимость кривой $y = f(x)$ в принципе можно было взять обычную сумму невязок $\sum_{i=1}^n \delta_i = \sum_{i=1}^n (f(x_i) - y_i)$ или сумму их абсолютных величин $\sum_{i=1}^n |\delta_i| = \sum_{i=1}^n |f(x_i) - y_i|$. Но делать это нецелесообразно, так как в первом случае $\sum_{i=1}^n \delta_i$ может быть малой или даже равняться нулю при значительном разбросе эмпирических точек, так как положительные отклонения δ_i компенсируются отрицательными.

Во втором случае функция $\sum_{i=1}^n |\delta_i|$ лишена этого недостатка, но имеет другой – она не является дифференцируемой, что существенно затрудняет решение задачи.

Пусть в качестве функции $y = f(x)$ взята линейная функция $y = a + bx$ и задача сводится к отысканию таких значений параметров a и b , при которых функция

$$S = \sum_{i=1}^n (ax_i + b - y_i)^2$$

принимает наименьшее значение.

Заметим, что функция $S = S(a; b)$ есть функция двух *переменных* a и b до тех пор, пока не найдены, а затем не зафиксированы их «наилучшие» (в смысле метода наименьших квадратов) значения, а x_i, y_i – *постоянные* числа, найденные экспериментально.

Таким образом, для нахождения прямой, наилучшим образом согласованной с опытными данными, достаточно решить систему

$$\begin{cases} S'_a = 0, \\ S'_b = 0, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \sum_{i=1}^n 2(ax_i + b - y_i)x_i = 0, \\ \sum_{i=1}^n 2(ax_i + b - y_i) = 0. \end{cases}$$

После алгебраических преобразований эта система принимает вид:

$$\begin{cases} \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) a + \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) b = \sum_{i=1}^n x_i y_i, \\ \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) a + nb = \sum_{i=1}^n y_i. \end{cases}$$

Эта система называется *системой нормальных уравнений*. Она имеет единственное решение, так как ее определитель

$$|A| = \begin{vmatrix} \sum_{i=1}^n x_i^2 & \sum_{i=1}^n x_i \\ \sum_{i=1}^n x_i & n \end{vmatrix} = n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 \neq 0$$

(а точнее $|A| > 0$, что можно доказать методом математической индукции при $n \geq 2$).

Убедимся, что найденные из системы нормальных уравнений значения дают минимум функции $S = S(a; b)$. Найдем частные производные

$$S''_{aa} = 2 \sum_{i=1}^n x_i^2 = A; \quad S''_{ab} = 2 \sum_{i=1}^n x_i = B; \quad S''_{bb} = 2n = C.$$

Выражение $\Delta AB - C^2 = 4 \left(n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 \right) > 0$ в силу изложенного выше и

$A = 2 \sum_{i=1}^n x_i^2 > 0$, следовательно, согласно достаточному условию функция имеет единственную точку минимума, определяемую из системы нормальных уравнений. Заметим, что в этой точке функция $S = S(a; b)$ имеет не просто локальный минимум, но наименьшее значение (глобальный минимум).

Пример. Имеются следующие данные о цене на нефть x (ден. ед.) и индексе акций нефтяных компаний y (усл. ед.).

x	17,28	17,05	18,30	18,80	19,20	18,50
y	537	534	550	555	560	552

Предполагая, что между переменными x и y существует линейная зависимость, найти эмпирическую формулу вида $y = ax + b$, используя метод наименьших квадратов.

Решение. Найдем необходимые для расчетов суммы $\sum_{i=1}^n x_i$, $\sum_{i=1}^n y_i$, $\sum_{i=1}^n x_i y_i$, $\sum_{i=1}^n x_i^2$.

Промежуточные вычисления оформим в виде вспомогательной таблицы.

x_i	y_i	$x_i y_i$	x_i^2
17,28	537	9279,36	298,5984
17,05	534	9104,70	290,7025
18,30	550	10065,00	334,8900
18,80	555	10434,00	353,4400
19,20	560	10752,00	368,6400
18,50	552	10212,00	342,2400
\sum 109,13	3288	59847,06	1988,5209

Система нормальных уравнений имеет вид

$$\begin{cases} 1988,5209a + 109,13b = 59847,06, \\ 109,13a + 6b = 3288. \end{cases}$$

Ее решение $a = 12,078$, $b = 328,32$ дает искомую зависимость: $y = 12,078x + 328,32$. Таким образом, с увеличением цены нефти на 1 ден. ед. индекс акций нефтяных компаний в среднем растет на 12,08 ед.

Пример. Динамика численности населения.

Вся история развития человечества неразрывно связана с изменениями динамики численности и воспроизводства населения. Из-за отсутствия достоверных данных трудно однозначно оценить динамику численности мирового населения практически вплоть до начала XIX века, когда во многих европейских странах стали проводиться переписи населения в их современном понимании.

Тем не менее, основываясь на приблизительных данных учета мирового населения, о котором упоминается еще в Библии, где приводится численность «сынов Израилевых» – более 600 тысяч человек, можно говорить о постоянном, хотя и очень медленном, росте населения мира.

Динамика численности населения Америки в целом со времени Рождества Христова (млн. человек) (По А.Я. Кваша, В.А. Ионцевой, 1995):

Начало нашей эры	1000	1200	1500	1750	1900
3	13	23	41	15	144

Наближене обчислення інтегралів. Формули прямокутників та трапецій.

Нехай треба обчислити значення визначеного інтегралу $\int_a^b f(x) dx$, де $f(x)$ є деяка задана на проміжку $[a, b]$ неперервна функція. Існує багато прикладів обчислення подібних інтегралів, або за допомогою первісної, якщо вона виражається в скінченному вигляді, або ж – минаючи первісну – за допомогою різних прийомів, як правило, штучних. Потрібно відмітити, однак, що всім цим вичерпується вузький клас інтегралів; за його межами зазвичай вдаються до різних методів наближеного обчислення.

В даній роботі можна ознайомитися з основними із цих методів, в яких наближені формули для інтегралів складаються по деякому числу значень підінтегральної функції, обчислених для ряду (зазвичай рівновіддалених) значень незалежної змінної.

Перші формули, які сюди відносяться, простіші всього отримуються із геометричних міркувань. Витлумачуючи визначений інтеграл $\int_a^b f(x) dx$ як площу деякої фігури, яка обмежена кривою $y = f(x)$, ми і ставимо перед собою задачу знаходження цієї площі.

Перш за все, вдруге використовуючи ту думку, яка привела нас до самого поняття о визначеному інтегралі, можна розбити усю фігуру (мал. 1) на смуги, скажемо однієї і той же ширини $\Delta x_i = \frac{b-a}{n}$, а потім кожен смугу наближено замінити прямокутником, за висоту якого прийнята будь-яка із його ординат. Це приведе нас до формули

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{n} [f(\xi_1) + f(\xi_2) + \dots + f(\xi_{n-1})],$$

де $x_i \leq \xi_i \leq x_{i+1}$ ($i = 0, 1, \dots, n-1$). Тут шукана площа криволінійної фігури замінюється площею деякої ступінчатої фігури, яка складається із прямокутників (або ж, можна сказати, що визначений інтеграл замінюється інтегральною сумою). Ця наближена формула і називається формулою прямокутників.

На практиці зазвичай беруть $\xi_i = \frac{x_i + x_{i+1}}{2} = x_{i+1/2}$; якщо відповідну середню

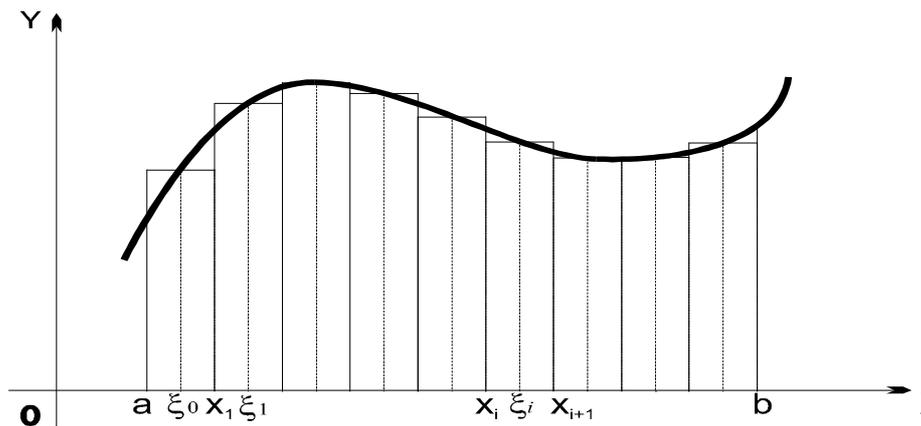


Рис. 1.

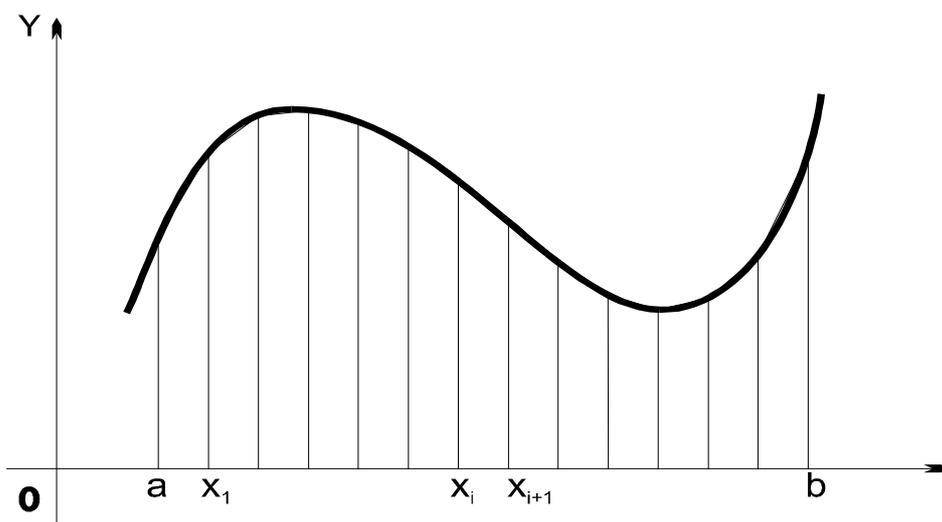
ординату $f(\xi_i) = f(x_{i+1/2})$ позначити через $y_{i+1/2}$, то формула переписеться у вигляді

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{n} (y_{1/2} + y_{3/2} + \dots + y_{n-1/2}). \quad (1)$$

Надалі, кажучи про формулу прямокутників, ми будемо мати на увазі якраз цю формулу.

Геометричні міркування природно приводять і до другої, часто використовуваний наближеній формулі. Замінивши дану криву вписаною в неї ламаною, з вершинами у точках (x_i, y_i) , где $y_i = f(x_i)$ ($i = 0, 1, \dots, n-1$). Тоді наша криволінійна фігура заміниться іншою, яка складається із ряду трапецій (рис2.). Якщо, як і раніш рахувати, що проміжок $[a, b]$ розбитий на рівні частини, то площі цих трапецій будуть

$$\frac{b-a}{n} \frac{y_0 + y_1}{2}, \frac{b-a}{n} \frac{y_1 + y_2}{2}, \dots, \frac{b-a}{n} \frac{y_{n-1} + y_n}{2}.$$



Мал. 2

Додаючи, прийдемо до нової наближеної формули

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{n} \left(\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1} \right). \quad (2)$$

Це так звана формула трапецій.

Можна показати, що при зростанні n до нескінченності похибка формули прямокутників і формули трапецій нескінченно зменшується. Таким чином, при достатньо великому n обидві ці формули відтворюють шукане значення з довільним рівнем точності.

Параболічне інтерполювання.

Для наближеного обчислення інтеграла $\int_a^b f(x)dx$ можна спробувати замінити функцію $f(x)$ близьким до неї багаточленом

$$y = P_k(x) = a_0x^k + a_1x^{k-1} + \dots + a_{k-1}x + a_k \quad (3)$$

і покласти

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b P_k(x)dx$$

Можна сказати, що тут – при обрахуванні площі – дана крива $y = f(x)$ замінюється на параболу k -го порядку (3), в зв'язку з чим цей процес отримав назву параболічного інтерполювання.

Сам вибір інтерполюючого многочлена $P_k(x)$ частіше всього виконують наступним чином. У проміжку $[a, b]$ беруть $k + 1$ значень незалежної змінної $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_k$ і підбирають многочлен $P_k(x)$ так, щоб при усіх взятих значеннях x його значення співпадало зі значенням функції $f(x)$. Цією умовою, як ми знаємо, многочлен $P_k(x)$ визначається однозначно, і його вираз дається інтерполяційною формулою Лагранжа:

$$P_k(x) = \frac{(x - \xi_1)(x - \xi_2) \dots (x - \xi_k)}{(\xi_0 - \xi_1)(\xi_0 - \xi_2) \dots (\xi_0 - \xi_k)} f(\xi_0) + \frac{(x - \xi_0)(x - \xi_2) \dots (x - \xi_k)}{(\xi_1 - \xi_0)(\xi_1 - \xi_2) \dots (\xi_1 - \xi_k)} f(\xi_1) + \dots$$

$$\dots + \frac{(x - \xi_0)(x - \xi_1) \dots (x - \xi_{k-1})}{(\xi_k - \xi_0)(\xi_k - \xi_1) \dots (\xi_k - \xi_{k-1})} f(\xi_k)$$

При інтерполюванні виходить лінійний, відносно значень $f(\xi_0), \dots, f(\xi_k)$ вираз, коефіцієнти якого вже не залежать від цих значень. Вирахувавши коефіцієнти раз і назавжди, можна їх використовувати для будь-якої функції $f(x)$ в даному проміжку $[a, b]$.

В найпростішому випадку, при $k = 0$, функція $f(x)$ просто замінюється сталою $f(\xi_0)$, де ξ_0 – будь-яка точка у проміжку $[a, b]$, скажемо, середня:

$$\xi_0 = \frac{a + b}{2}. \text{ Тоді наближено}$$

$$\int_a^b f(x) dx = (b - a) f\left(\frac{a + b}{2}\right) \quad (4)$$

Геометрично – площа криволінійної фігури замінюється тут площею прямокутника з висотою, яка рівна середній її ординаті.

При $k = 1$ функція $f(x)$ замінюється лінійною функцією $P_1(x)$, яка має однакові з нею значення при $x = \xi_0$ і $x = \xi_1$. Якщо взяти $\xi_0 = a$, $\xi_1 = b$, то

$$P_1(x) = \frac{x - b}{a - b} f(a) + \frac{x - a}{b - a} f(b) \quad (5)$$

і, як легко обчислити,

$$\int_a^b P_1(x) dx = (b - a) \frac{f(a) + f(b)}{2}.$$

Таким чином, тут ми наближено вважаємо

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a) \frac{f(a) + f(b)}{2}$$

На цей раз площа криволінійної фігури замінюється площею трапеції: замість кривої береться хорда, яка сполучає її кінці.

Менш тривіальний результат отримаємо взявши $k=2$. Якщо покласти $\xi_0 = a_0$, $\xi_1 = \frac{a+b}{2}$, $\xi_2 = b$, то інтерполяційний многочлен $P_2(x)$ буде мати вигляд

$$\begin{aligned} P_2(x) = & \frac{\left(x - \frac{a+b}{2}\right)(x-b)}{\left(a - \frac{a+b}{2}\right)(a-b)} f(a) + \\ & + \frac{(x-a)(x-b)}{\left(\frac{a+b}{2} - a\right)\left(\frac{a+b}{2} - b\right)} f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{(x-a)\left(x - \frac{a+b}{2}\right)}{(b-a)\left(b - \frac{a+b}{2}\right)} f(b). \end{aligned} \quad (7)$$

За допомогою легкого обчислення вираховуємо

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{\left(x - \frac{a+b}{2}\right)(x-b)}{\left(a - \frac{a+b}{2}\right)(a-b)} dx &= \frac{2}{(b-a)^2} \int_a^b \left[(x-b) + \frac{b-a}{2} \right] (x-b) = \\ &= \frac{2}{(b-a)^2} \left[\frac{(x-b)^3}{3} + \frac{b-a}{2} \frac{(x-b)^2}{2} \right]_a^b = \frac{b-a}{6} \end{aligned}$$

і, аналогічно

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{(x-a)(x-b)}{\left(\frac{a+b}{2} - a\right)\left(\frac{a+b}{2} - b\right)} dx &= 4 \frac{b-a}{6}, \\ \int_a^b \frac{(x-a)\left(x - \frac{a+b}{2}\right)}{(b-a)\left(b - \frac{a+b}{2}\right)} dx &= \frac{b-a}{6}. \end{aligned}$$

Таким чином, приходимо до наближеної формули

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2} \left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right].$$

Тут площа фігури під даною кривою замінюється площею фігури, яка обмежена звичайною параболою (з вертикальною віссю), що проходить через крайні і середню точки кривої.

При збільшенні степені k інтерполяційного поліному, тобто якщо побудувати параболу (3) через все більше число даної кривої, можна розраховувати отримати більшу точність. Но більш практичним виявляється інший шлях, якій ґрунтується на поєднанні ідеї параболічного інтерполювання із ідеєю дроблення.

Лекція 6.

Дифференциальные уравнения как математические модели.

Понятия дифференциального уравнения. Виды дифференциальных уравнений первого порядка.

Дифференциальная модель популяции.

Закон гиперболического роста численности населения Земли

Существует легенда (скорее всего, не соответствующая действительности), будто бы человек, который изобрел шахматы, доставил этим такое удовольствие своему султану, что тот пообещал исполнить любую его просьбу. Человек попросил, чтобы султан положил на первую клетку шахматной доски одно зерно пшеницы, на вторую — два, на третью — четыре и так далее. Султан, посчитав это требование ничтожным по сравнению с оказанной им услугой, попросил своего подданного придумать другую просьбу, но тот отказался. Естественно, к 64-му удвоению число зерен стало таким, что во всем мире не нашлось бы нужного количества пшеницы, чтобы удовлетворить эту просьбу. В той версии легенды, которая известна мне, султан в этот момент приказал отрубить голову изобретателю. Мораль, как я говорю моим студентам, такова: иногда не следует быть чересчур умным!

Пример с шахматной доской (как и с воображаемыми бактериями) показывает нам, что никакая популяция не может расти вечно. Рано или поздно она попросту

исчерпает ресурсы — пространство, энергию, воду, что угодно. Поэтому популяции могут расти по экспоненциальному закону лишь некоторое время, и рано или поздно их рост должен замедлиться. Для этого нужно изменить уравнение так, чтобы при приближении численности популяции к максимально возможной (которая может поддерживаться внешней средой) скорость роста замедлялась. Назовем эту максимальную численность популяции K . Тогда видоизмененное уравнение будет выглядеть так:

$$dN = rN(1 - (N/K)) dt$$

Когда N намного меньше K , членом N/K можно пренебречь, и мы возвращаемся к первоначальному уравнению обычного экспоненциального роста. Однако когда N приближается к своему максимальному значению K , значение $1 - (N/K)$ стремится к нулю, соответственно стремится к нулю и прирост численности популяции. Общая численность популяции в этом случае стабилизируется и остается на уровне K . Кривая, описываемая этим уравнением, а также само уравнение, имеют несколько названий — S-кривая, логистическое уравнение, уравнение Вольтерра, уравнение Лотка—Вольтерра. (Вито Вольтерра (1860–1940) — выдающийся итальянский математик и преподаватель; Альфред Лотка (1880–1949) — американский математик и страховой аналитик.) Как бы она ни называлась, это — достаточно простое выражение численности популяции, резко возрастающей экспоненциально, а затем замедляющейся при приближении к некоему пределу. И она гораздо лучше отражает рост численности реальных популяций, чем обычная экспоненциальная функция.

Для исследования сложных процессов в объектах, изменяющихся с течением времени, применяются дескриптивные (описательные) математические модели в виде дифференциальных уравнений (или систем дифференциальных уравнений).

Уравнения моделей составляются на основании физических, химических, биологических законов.

Решения таких систем дифференциальных уравнений являются функциями времени и, следовательно, могут описывать изменения во времени процессов, происходящих внутри моделируемых объектов.

Модели делятся на два основных типа:

- *с сосредоточенными параметрами* – в виде обыкновенных дифференциальных уравнений: эти модели действительны для

описания процессов, которые не зависят от координат (сосредоточены в точке);

- **с *распределенными параметрами* – в виде дифференциальных уравнений с частными производными: их решения зависят как от времени, так и от координат области решения.**

Уравнения классифицируются по числу координат области решения на:

- **одномерные;**
- **двумерные (на плоскости);**
- **трехмерные (пространственные).**

Большинство уравнений математических моделей представляют собой весьма сложные системы уравнений, как правило, не допускающие аналитического (в виде единой функции) решения. Их решения приходится находить приближенно, путем дискретизации решений по времени и по пространственным координатам, то есть с помощью построения пространственно–временных сеток.

Деления сетки по времени обычно называют временными слоями. Координатные сетки состояются из узлов – фиксированных значений координат, в которых и вычисляются значения функций решения.

Интервал времени между временными слоями называют шагом по времени, а интервал между узлами координат – шагом по координате.

Выбор указанных выше значений шага является фундаментальной математической задачей аппроксимации (приближения) дифференциальных уравнений разностными уравнениями и подробнейшим образом обсуждается в классических работах из области математики.

Эта задача является принципиально важной по той причине, что точность получаемого решения существеннейшим образом зависит от выбора шага сетки решения. Вообще говоря, для повышения точности шаг следует уменьшать (но при этом возрастает время решения).

При выборе завышенного шага решения может также возникнуть явление, называемое потерей устойчивости решения. При этом функция решения очень

быстро возрастает (или меняет знак). Выбор шага для получения устойчивого решения также подробно обсуждается в литературе.

Приведем ряд примеров различных процессов, представленных различными типами дифференциальных уравнений.

Модели динамики популяций

- Дифференциальная модель популяции;
- Простая модель "хищник–жертва" (модель Лотки–Вольтерры);
- Усовершенствованная модель "хищник–жертва";
- Модель "хищник–жертва" в частных производных;
- Модель роста фитопланктона;
- Модель роста фитопланктона в частных производных.

Модели диффузионных процессов

- Моделирование эпидемии;
- Процессы размножения и гибели;
- Уравнение диффузии вещества;
- Одномерная модель распространения загрязняющих веществ.

Теория обыкновенных дифференциальных уравнений

Как известно, теория обыкновенных дифференциальных уравнений начала развиваться в XVII веке одновременно с возникновением дифференциального и интегрального исчисления. Можно сказать, что необходимость решать дифференциальные уравнения для нужд механики, то есть находить траектории движений, в свою очередь, явилась толчком для создания Ньютоном нового исчисления. Законы Ньютона представляют собой математическую модель механического движения. Через обыкновенные дифференциальные уравнения шли приложения нового исчисления к задачам геометрии и механики; при этом удалось решить задачи, которые в течение долгого времени не поддавались решению. В небесной механике оказалось возможным не только получить и объяснить уже известные факты, но и сделать новые открытия (например,

открытие Леверье в 1846 году планеты Нептун на основе анализа дифференциальных уравнений).

Обыкновенные дифференциальные уравнения возникают тогда, когда неизвестная функция зависит лишь от одной независимой переменной. Соотношение между независимой переменной, неизвестной функцией и ее производными до некоторого порядка составляет дифференциальное уравнение. В настоящее время теория обыкновенных дифференциальных уравнений представляет собой богатую, широко разветвленную теорию. Одними из основных задач этой теории являются существование у дифференциальных уравнений таких решений, которые удовлетворяют дополнительным условиям (начальные данные Коши, когда требуется определить решение, принимающее заданные значения в некоторой точке и заданные значения производных до некоторого конечного порядка, краевые условия и другие), единственность решения, его устойчивость. Под устойчивостью решения понимают малые изменения решения при малых изменениях дополнительных данных задачи и функций, определяющих само уравнение. Важными для приложений являются исследование характера решения, или, как говорят, качественного поведения решения, нахождение методов численного решения уравнений. Теория должна дать в руки инженера и физика методы экономного и быстрого вычисления решения.

Обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнение вида

$$F(x, y(x), y'(x)) = 0,$$

где F – заданная функция трех переменных, которая определена в области G (одномерной области), x – независимая переменная из интервала, $y(x)$ – неизвестная искомая функция, $y'(x)$ – ее производная.

Обыкновенные дифференциальные уравнения, которые решены относительно производной, то есть уравнения вида $y' = f(x, y)$ называют уравнениями в нормальной форме.

Функция $y = y(x)$ называется решением дифференциального уравнения на интервале (a, b) , если она может быть непрерывно дифференцирована на (a, b) и при всех x из интервала (a, b) удовлетворяет уравнению $F(x, y(x), y'(x)) = 0$.

График решения дифференциального уравнения называют *интегральной кривой* дифференциального уравнения.

Если дифференциальное уравнение первого порядка $y' = f(x, y)$ решается, то решений можно получить бесконечное множественное число и эти решения могут быть записаны в виде, где C – произвольная константа. Выражение

$$y(x, C) \quad (1)$$

называют *общим решением* дифференциального уравнения 1-го порядка: при всех допустимых значениях C функция $y = y(x, C)$ является решением уравнения $y'(x, C) = f(x, y(x, C))$.

Частным решением дифференциального уравнения называется такое решение, которое получается из общего решения (1) при некотором частном значении произвольной постоянной; для любого заранее заданного решения $y = \varphi(x)$ найдется такое значение константы, что $y(x, C^*) = \varphi(x)$.

Произвольная постоянная определяется из так называемых начальных условий. Если поставить задание: найти решение ОДУ, которое удовлетворяет условию, то такое дифференциальное уравнение имеет единственное решение.

Важным элементом задач, которые содержат дифференциальные уравнения, являются дополнительные условия, которые необходимы для получения количественного решения.

Относительно обыкновенных дифференциальных уравнений различают два вида задач: задача с начальными условиями (задача Коши) и задача с граничными условиями, так называемая краевая задача.

Задача об отыскании решения $y = y(x)$ дифференциального уравнения, которое удовлетворяет начальному условию, называется задачей Коши. Решение задачи Коши является частным решением.

Решение дифференциального уравнения, которое не может быть получено из общего решения ни при одном частном значении произвольной постоянной (включая случаи, когда стала следует к $\pm \infty$), называется *особенным решением* дифференциального уравнения.

Рассмотрим некоторые примеры дифференциальных уравнений первого порядка. Они состоят из однородных

$$y' + P(x)y = 0,$$

линейных

$$y' + P(x)y = Q(x),$$

уравнения Бернулли

$$y' + P(x)y = Q(x)y^n, \quad n \neq 1, 0,$$

уравнение Рикатти

$$y' = P(x)y^2 + Q(x)y + R(x)$$

Абеля 2-го рода

$$yy' = P(x)y^2 + Q(x)y + R(x)$$

и множества других.

Мы ограничиваемся рассматриванием определений лишь одного типа обычных дифференциальных уравнений, так называемых линейных уравнений.

Рассмотрим линейное уравнение первого порядка:

$$y' + P(x)y = Q(x) \tag{2}$$

Функции $P(x)$ и $Q(x)$ называются коэффициентами. Если $Q(x) = 0$, то линейное уравнение называется однородным или дифференциальным уравнением без правой части. Если $Q(x) \neq 0$, то линейное уравнение называется *неоднородным* или с правой частью.

Для решения ОДУ типа (2) можно использовать несколько практических подходов. В частности, представить $y(x)$ в виде произведения $y = u(x) \cdot v(x)$, где считается, что $u(x)$ решением однородного линейного уравнения, то есть

$$u' + P(x)u = 0. \tag{3}$$

Если в (3) перенести $P(x)u$ вправо, то получим уравнение с разделяющимися переменными, частное решение которого имеет вид

$$u(x) = e^{-\int P(x)dx}. \quad (4)$$

После подстановки искомой функции $y = u(x) \cdot v(x)$ в уравнение (2) получим:

$$[u' + P(x)u]v + uv' = Q(x). \quad (5)$$

Поскольку выражение в квадратных скобках благодаря (3) равняется нулю, то после решения имеем:

$$v' = \frac{Q(x)}{u(x)}; \quad v(x) = \int \frac{Q(x)}{u(x)} dx + C. \quad (6)$$

После подстановки функций $u(x)$ и $v(x)$ в функцию $y = u(x) \cdot v(x)$, получим общее решение линейного уравнения

$$y_{\text{зн}}(x) = e^{-\int P(x)dx} \left[\int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx + C \right]. \quad (7)$$

Из представления (7) следует, что

а) линейное уравнение первого порядка может быть всегда выражено через интегралы от $P(x)$ и $Q(x)$;

б) общее решение линейного неоднородного уравнения может быть представлено в виде суммы общего решения однородного уравнения и решения частного решения неоднородного уравнения :

$$y_{\text{зн}}(x) = y_{\text{зо}}(x) + y_{\text{чн}}(x), \quad (8)$$

$$y_{\text{зо}}(x) = C e^{-\int P(x)dx}, \quad y_{\text{чн}}(x) = e^{-\int P(x)dx} \left[\int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx \right].$$

При решении конкретных уравнений использования формулы (7) не является удобным, потому лучше воспользоваться схемой решения, которая приводит к выражению (8).

Простейшая дифференциальная модель популяции

Модель отражает количественное изменение числа особей в данной популяции (размножение или вымирание) в зависимости от некоторых

параметров, зависящих как от окружающей среды, так и от свойств данной популяции.

Обозначим

- плотность особей данной популяции (на единицу площади) в данный момент времени как $N(t)$,
- коэффициент рождаемости особей в зависимости от плотности как a ,
- коэффициент смертности особей в зависимости от их плотности как b .

Коэффициенты (или параметры) модели a и b зависят от того, какой конкретно вид живых существ мы моделируем и для каждого вида должны определяться отдельно. Этот процесс называется калибровкой модели.

В дальнейшем будем полагать, что во всех моделях $a > 0$ и $b > 0$.

С учетом сказанного выше, динамика роста популяции может быть описана обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\frac{dN}{dt} = (a - b)x \quad (1)$$

Это – линейное однородное дифференциальное уравнение и его решение легко может быть записано как

$$N(t) = N_0 e^{(a-b)t} \quad (2)$$

Из (2) видно, что если $a > b$, то число особей со временем возрастает и стремится к бесконечности (неограниченный рост популяции). В случае, когда $a < b$ число особей стремится к нулю (вымирание популяции). Такие модели являются простейшими и не могут правильно описать множество процессов, происходящих в популяциях, хотя с точки зрения теории динамики популяций они описывают биотический потенциал популяции.

Обратите внимание, что разность $a - b$ является так называемой *удельной скоростью роста*. Обозначая, $r = a - b$, получаем:

$$N(t) = N_0 e^{rt} \quad (3)$$

Логарифмируя обе части равенства, получаем уравнение в форме, удобной для расчета:

$$\ln N = \ln N_0 + rt,$$

откуда

$$r = \frac{\ln N - \ln N_0}{t}.$$

Когда популяция переходит в стационарное состояние, r называют внутренней скоростью естественного роста – *биотическим потенциалом* и обозначают r_{\max} . Экспоненциальная кривая (3) выражает биотический потенциал популяции. Разницу между биотическим потенциалом и скоростью роста в реальных условиях называют сопротивлением среды. *Сопротивление среды* – это сумма всех лимитирующих факторов, препятствующих реализации r_{\max} .

В природе в основном наблюдается иная картина. Прежде всего, коэффициент прироста не остается постоянным, так как рождаемость и смертность меняются в зависимости от условий среды и возраста организмов, а пища и территория редко предоставлены в достаточном объеме.

Чаще всего реальный рост численности популяции выражается S-образной зависимостью, которую называют логистической кривой роста (рис. 1,б).

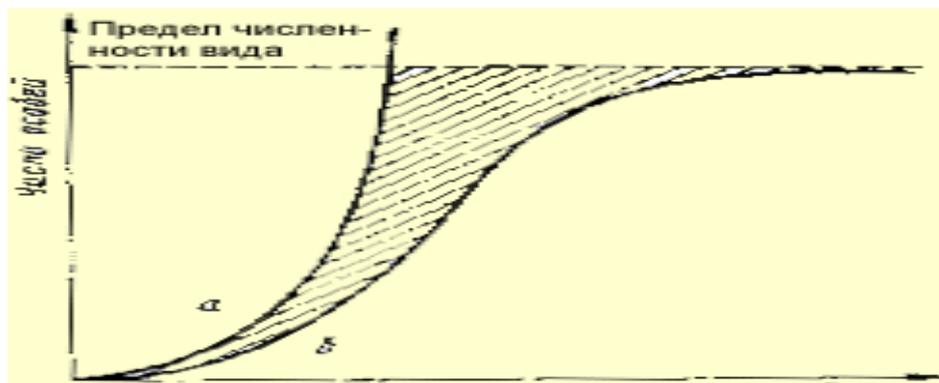


Рис.1. Экспоненциальная (а) и логистическая (б) кривые роста популяции.

Заштрихованная площадь – сопротивление среды.

В большинстве случаев используют так называемые нелинейные модели, имеющие вид

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \quad (3)$$

где $f(x)$ – некоторая нелинейная функция от величины x , имеющая также и параметры.

Логистическое уравнение, также известное, как уравнение Ферхюльста (по имени впервые сформулировавшего его бельгийского математика), изначально появилось при рассмотрении модели роста численности населения.

Исходные предположения для вывода уравнения при рассмотрении популяционной динамики выглядят следующим образом:

- скорость размножения популяции пропорциональна её текущей численности, при прочих равных условиях
- скорость размножения популяции пропорциональна количеству доступных ресурсов, при прочих равных условиях. Таким образом, второй член уравнения отражает конкуренцию за ресурсы, которая ограничивает рост популяции.

Обозначая через P численность популяции (в экологии часто используется обозначение N), а время — t , модель сводится к дифференциальному уравнению:

$$\frac{dP}{dt} = rP \left(1 - \frac{P}{K} \right),$$

где параметр r характеризует скорость роста (размножения), а K — ёмкость среды (то есть, максимально возможную численность популяции).

Константы r и K из логистического уравнения характеризуют два типа естественного отбора, которые позволяют обосновать разные *типы экологических стратегий*:

- r -стратегия характерна для популяций в начальный период увеличения её численности. Она определяется отбором в условиях, когда плотность популяции мала и соответственно слабо выражено тормозящее воздействие конкуренции. Эта стратегия характерна, например, для временных водоёмов, заполняющихся водой только в период дождей. r -отбор направлен на высокую плодовитость, быстрое достижение половой зрелости, достижение короткого жизненного цикла, способности выживания в неблагоприятный период в виде покоящихся стадий;
- K -стратегия связана с отбором, направленным на повышение выживаемости и величины предельной плотности K в условиях

стабилизирующейся численности популяции при сильном воздействии конкуренции. *K*-отбор направлен на оценку конкурентоспособности и предусматривает возможные пути защищенности от хищников и паразитов, и выживаемости потомства, а также совершенствования механизмов регуляции численности.

- *r*-стратегия предполагает бурное размножение и короткую продолжительность жизни особей.
- а *K*-стратегия — низкий темп размножения и долгую жизнь.

Точным решением уравнения (где P_0 — начальная численность популяции) является логистическая функция, S-образная кривая, логистическая кривая:

$$P(t) = \frac{KP_0 e^{rt}}{K + P_0(e^{rt} - 1)},$$

где

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P(t) = K.$$

Пример. В южных регионах распространено растение амброзия. Она растет по свалкам, залежам и другим недавно нарушенным местообитаниям. С другой стороны, в умеренном поясе в стабильном нижнем ярусе леса обитают травянистые растения. Если сравнить эти растения по продукции семян, окажется, что амброзия продуцирует семян в 50 раз больше, чем растения леса, и тратит в 5 раз больше чистой энергии на размножение. Амброзия – пример *r*-отбора, растения лесного сообщества – *K*-отбора.

Выделение *r*- и *K*-стратегий в чистом виде условно. На самом деле каждый вид организмов испытывает некую комбинацию *r*- и *K*-отбора, т. е. оставляемые отбором особи должны обладать и достаточно высокой плодовитостью, и развитой способностью выживания при наличии конкуренции.

Пример нелинейного уравнения

Довольно часто в моделировании развития популяций используется сравнительно простая нелинейная модель вида

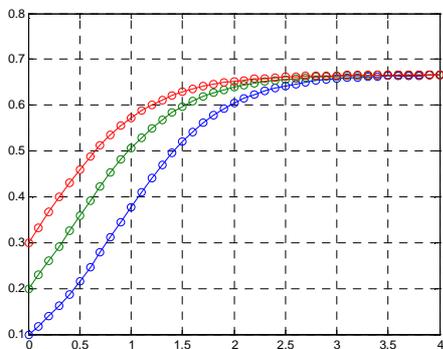
$$\frac{dx}{dt} = ax - bx^2 \quad (4)$$

Из уравнения (4) видно, что с ростом количества особей вымирание преобладает над размножением (например, из-за нехватки пищи). Известно, что у некоторых видов живых существ этот процесс регулируется химическим путем (в среде обитания распространяется вещество, замедляющее размножение).

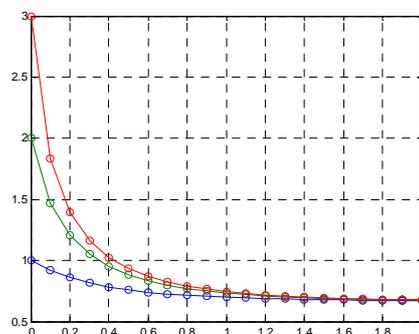
Поведение такой модели популяции зависит от соотношения параметров рождаемости a и смертности b , а также от начального значения плотности особей популяции $x(0)$. С ростом времени t значение плотности популяции неограниченно (асимптотически) приближается к установившемуся значению $x = a/b$.

Однако, если $x(0) > a/b$, то плотность уменьшается, стремясь к a/b сверху. В случае, когда $x(0) < a/b$, плотность популяции сначала быстро растет, а затем скорость роста начинает падать и кривая приближается к a/b снизу. Такая кривая называется логистической кривой и хорошо известна из теории динамики популяций.

Рассмотрим случай, когда $a > b$, например, $a/b = \frac{2}{3}$

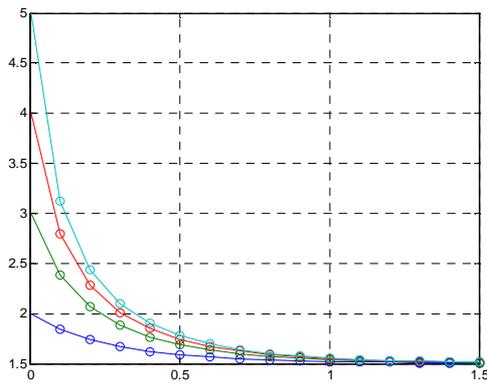


$x(0) > a/b$

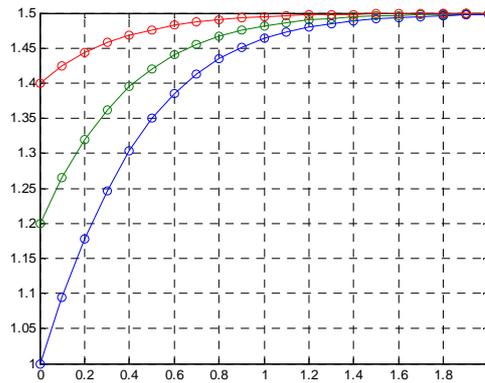


$x(0) < a/b$

Рассмотрим случай, когда $a < b$, например, $a/b = \frac{3}{2}$



$x(0) > a/b$



$x(0) < a/b$

Закон гиперболического роста численности населения Земли

Закон гиперболического роста численности населения Земли — скорость роста численности населения Земли примерно пропорциональна квадрату его численности

В работах Хайнца фон Фёрстера, С. П. Капицы, Майкла Кремера, А. В. Коротаева и других учёных показано, что рост населения Земли, в течение последних 100 тыс. лет (вплоть до 60-х–70-х годов прошлого века), следовал этому гиперболическому закону. В данный период Мир-Система развивалась в режиме с обострением.

Почему этот закон роста называется гиперболическим? Уравнение, математически описывающее гиперболу, может быть записано как:

$$y = \frac{k}{x}$$

При этом гиперболу будет описывать и такой вариант этого уравнения как:

$$y = \frac{k}{x_0 - x}$$

Перепишав переменные: y как $N(t)$ (население мира в год t), k — как C , x_0 — как

t_0 , x — как t , получаем:
$$N(t) = \frac{C}{t_0 - t},$$

здесь t_0 — момент обострения, когда население мира стало бы бесконечным, если бы продолжило бы расти в режиме с обострением и после начала 1970–х годов (2026 год, согласно расчетам фон Фёрстера).

Между тем, это гиперболическое уравнение является аналитическим решением дифференциального уравнения вида:

$$\frac{dN}{dt} = \frac{1}{C} N^2,$$

как раз и подразумевающего, что скорость роста численности населения Земли $\frac{dN}{dt}$ примерно пропорциональна квадрату его численности.

Начиная с 1960–х годов относительные темпы роста населения стали все больше замедляться, и на смену мировому гиперболическому демографическому росту пришел прямо противоположный тип роста, логистический. С 1989 г. стали снижаться и абсолютные темпы прироста численности населения мира. К 2100 году прирост может снизиться до величины менее 5 млн человек за десятилетие. По модели французского медика Жана–Ноэля Бирабена предел роста составит 10–12 млрд человек, большинство других моделей предполагает несколько менее высокий уровень стабилизации численности населения мира. Достаточно правдоподобными представляются и сценарии снижения численности населения Земли после достижения ею своего максимального значения. Окончательный сценарий динамики численности населения мира пока не ясен.

Лекція 8.

Анализ простейших моделей, описывающих динамику роста популяции.

Моделирование динамики эпидемии. Модель войны или сражения.

Простейшая модель "хищник-жертва"

1. Анализ простейших моделей, описывающих динамику роста популяции

Рассмотрим понятие жесткой и мягкой моделей на примере динамики популяции.

Простейшая модель роста $\dot{x} = kx$ предложена Мальтусом (для роста населения Земли). Она ведет, как хорошо известно, к экспоненциальному (т. е. очень быстрому) росту численности популяции x с течением времени. Такая модель называется жесткой (коэффициент не зависит от населения). Эта жесткая модель применима (разумеется, с оговорками), например, к развитию науки в 1700-1950 годах (измеряемому, скажем, числом научных статей) (рис. 1). Продолжение экспоненциального роста науки в следующем веке быстро привело бы к исчерпанию бумаги и чернил, причем число ученых должно было бы достичь половины населения земного шара.



Рис. 1. Рост науки.

Ясно, что общество (во всех странах) не может этого допустить, и следовательно развитие науки должно быть подавлено (что мы и наблюдаем во многих странах; в России реформирование академической науки происходит как раз сейчас).

Аналогичные явления насыщения происходят в любой популяции (и, вероятно, вскоре произойдут с человечеством в целом): когда популяция становится слишком большим, мальтусовская жесткая модель с постоянным коэффициентом роста k перестает быть применимой. Естественно, при слишком больших x конкуренция за ресурсы (пищу, гранты и т. д.) приводит к уменьшению k , и жесткая модель Мальтуса должна быть заменена мягкой моделью

$$\dot{x} = k(x)x$$

с зависящим от населения коэффициентом размножения. Простейшим примером является выбор $k(x) = a - bx$, что приводит к так называемой логистической модели (рис. 5):

$$\dot{x} = ax - bx^2, \text{ например, } \dot{x} = x - x^2.$$

Выбором системы единиц x и t можно превратить коэффициенты a и b в 1. Подчеркну, однако, что выводы, которые будут сделаны ниже, остаются (с точностью до числовых значений констант) справедливыми и при любых значениях коэффициентов a и b и даже для широкого класса моделей с различными (убывающими с x) функциями $k(x)$. Иными словами, дальнейшие

выводы относятся ко всей мягкой модели, а не к специальной жесткой логистической модели.

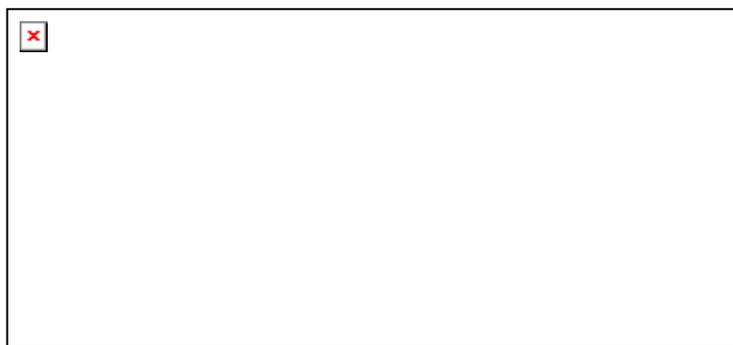


Рис. 2. Логистическая модель.

На рис. 2 слева изображен график функции $k(x)x$, положительной между точками A и B . В центре изображено векторное поле на изображающей всевозможные состояния системы оси x . Оно указывает скорость эволюции состояния. В точках A и B скорость равна нулю: это стационарные состояния. Между A и B скорость положительна (население растет), а за точкой B -- отрицательна (население убывает). Справа изображена результирующая зависимость населения от времени при разных начальных условиях.

Модель предсказывает, что с течением времени устанавливается стационарный режим B , который устойчив: большее население уменьшается, меньшее -- увеличивается.

Логистическая модель удовлетворительно описывает многочисленные явления насыщения. Вблизи A , когда население мало, она очень близка к мальтузианской модели. Но при достаточно больших x (порядка $1/2$ при нашем выборе коэффициентов) наблюдается резкое отличие от мальтузианского роста (обозначенного на рис. 2 пунктиром): вместо ухода x на бесконечность население приближается к стационарному значению B . Население Земли сейчас приближается к 6 миллиардам. Стационарное значение (по разным оценкам) 10-12 миллиардов человек.

Анализ логистической модели

Логистическая модель является обычной в экологии. Можно себе представить, например, что x -- это количество рыб в озере или в мировом океане. Посмотрим теперь, как скажется на судьбе этих рыб рыболовство с интенсивностью c :

$$\dot{x} = x - x^2 - c.$$

Вычисления показывают, что ответ резко меняется при некотором критическом значении квоты вылова, c . Для нашей жесткой модели это критическое значение есть $c = 1/4$, но аналогичные явления имеют место и для мягкой модели

$$\dot{x} = x - k(x)x - c$$

(критическое значение c в этом случае максимум функции $k(x)x$).

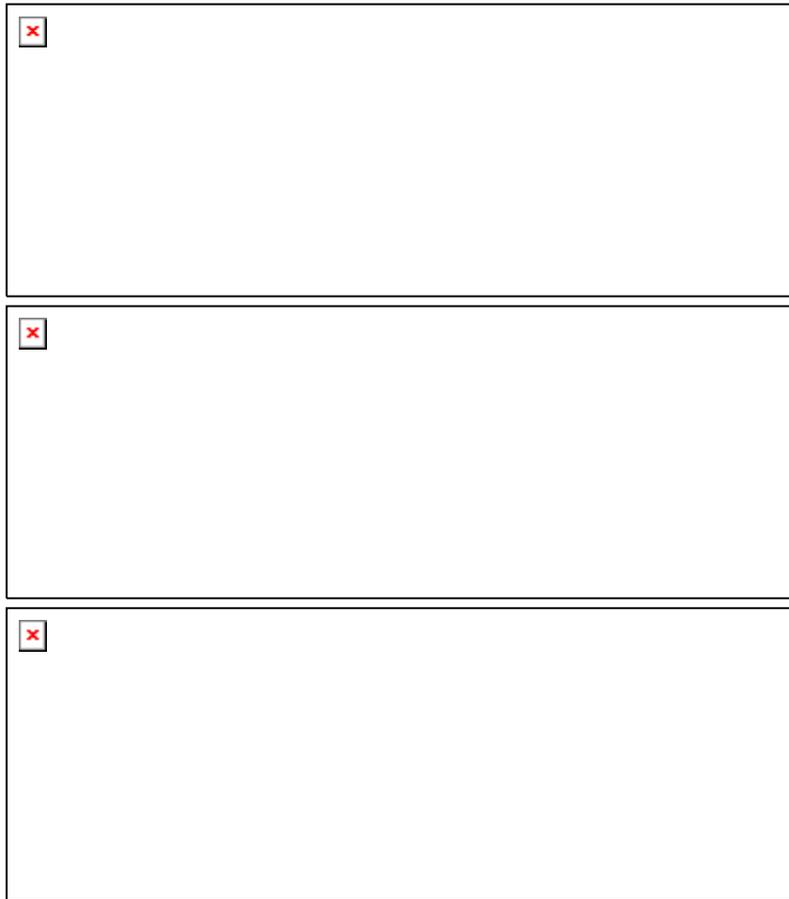


Рис. 3. Недолов (а), перелов (б) и оптимизация (в) рыболовства.

Ход эволюции числа рыб x с течением времени t изображен на рис. 3. Если квота c мала, то изменения (по сравнению со свободной популяцией, для которой $c = 0$) состоят в следующем.

Система имеет два равновесных состояния, A и B . Состояние B устойчиво: популяция в этом случае несколько меньше, чем необлавливаемая, но она восстанавливается при малых отклонениях x от равновесного значения B .

Состояние A неустойчиво: если вследствие каких-либо причин (скажем, браконьерства или мора) размер популяции упадет хоть немного ниже уровня A , то в дальнейшем популяция (хотя и медленно, если отличие от A невелико) будет уничтожена полностью за конечное время.

По моему мнению, состояние науки в России в настоящее время описывается примерно точкой A : оно еще стационарно, но, как говорят физики, квазистационарно в том смысле, что небольшое встряхивание может легко привести к необратимому уничтожению.

При больших критической квотах вылова c популяция x уничтожается за конечное время, как бы велика она ни была в начальный момент.

Это – судьба мамонтов, бизонов, многих китов: экологи подсчитали, сколько видов погибает *ежедневно* под влиянием деятельности человека, и эти цифры ужасают. Модели этого рода описывают также банкротство фирм, концернов и

государств. Опасность уничтожения в нашей модели появляется тогда, когда неустойчивое состояние A приближается к устойчивому состоянию B , т. е. когда величина x опускается примерно до половины исходной стационарной величины необлавливаемой популяции.

Население Украины, мне кажется, еще не понизилось до этого смертельно опасного уровня, но, по-видимому, движется к нему. Наука же в Украине находится в настоящее время именно в таких условиях "перелома". Например, заработная плата главного научного сотрудника раз в сто меньше зарплаты научных работников в США (и раз в 50 меньше, чем во Франции). Понятно, что в таких условиях величина c (скорость убыли числа ученых в Украине) ограничивается в основном дискриминационными мерами, принимаемыми Западом (например, США) для охраны своих рабочих мест от наплыва лучше подготовленных иностранных аспирантов и докторантов (в основном из Китая и из России).

Из сказанного видно, что выбор значения параметра c является чрезвычайно важным моментом управления эксплуатацией популяции x . Стремясь к увеличению квоты эксплуатации c , разумная планирующая организация не должна превосходить критический уровень (в нашем случае $c=1/4$). Оптимизация приводит к выбору именно критического значения $c=1/4$, при котором эксплуатируемая популяция еще не уничтожается, но доход от эксплуатации за единицу времени достигает максимально возможного значения $c=1/4$ (большой доход в нашей популяции в течение длительного времени невозможен, так как максимальная скорость прироста даже и неэксплуатируемой популяции есть $1/4$).

Из нижней части рис. 6 мы видим, что произойдет при таком "оптимальном" выборе, $c=1/4$. Какова бы ни была начальная популяция $x > 1/2$, с течением времени она выйдет на стационарный режим $A=B=1/2$. Эта стационарная популяция, однако, неустойчива. Небольшое случайное уменьшение x приводит к полному уничтожению популяции за конечное время.

Следовательно, *оптимизация параметров плана может приводить* (и приводит во многих случаях, из которых наша модель -- лишь простейший пример) *к полному уничтожению планируемой системы вследствие возникающей из-за оптимизации неустойчивости.*

Наша мягкая модель, при всей своей очевидной примитивности, позволяет, однако, предъяснить способ борьбы с указанным злом. Оказывается, устойчивость восстанавливается, если заменить жесткое планирование **обратной связью**. Иными словами, решение о величине эксплуатации (квоты вылова, налогового пресса и т. д.) следует принимать не директивно ($c=const$), а в зависимости от достигнутого состояния системы:

$$c=kx,$$

где параметр k ("дифференциальная квота") подлежит выбору.

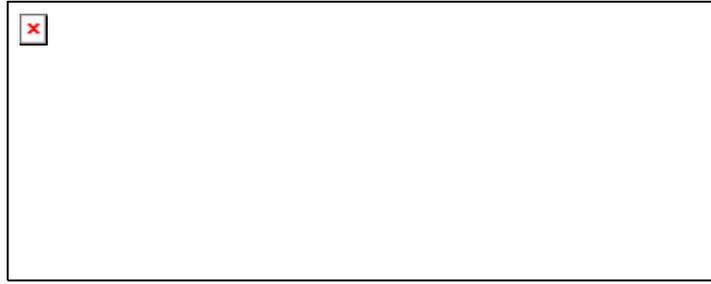


Рис. 4. Устойчивая система с обратной связью.

В этом случае модель принимает вид (рис. 4)

$$\dot{x} = x - x^2 - kx.$$

При $k < 1$ с течением времени устанавливается стационарное состояние B , которое устойчиво. Средний многолетний "доход" $c = kx$ в этом состоянии оптимален, когда прямая $y = kx$ проходит через вершину параболы $y = x - x^2$, т. е. при $k = 1/2$. При этом выборе дифференциальной квоты k средний "доход" $c = 1/4$ достигает максимального возможного в нашей системе значения. Но, в отличие от жестко планируемой системы, система с обратной связью устойчива и при оптимальном значении коэффициента k (небольшое случайное уменьшение по отношению к стационарному уровню $x = B$ приводит к автоматическому восстановлению стационарного уровня силами самой системы).

Более того, небольшое отклонение коэффициента от оптимального значения $k = 1/2$ приводит не к самоуничтожению системы (как это было при небольшом отклонении от оптимального жесткого плана c), а лишь к небольшому уменьшению "дохода".

Итак, *введение обратной связи (т. е. зависимости принимаемых решений от реального состояния дел, а не только от планов) стабилизирует систему, которая без обратной связи разрушилась бы при оптимизации параметров.*

Все сказанное выше останется справедливым и для мягкой модели (с соответствующим пересчетом коэффициентов). Следует подчеркнуть, что именно эта независимость от деталей жесткой модели (которые, как правило, не слишком хорошо известны) делает выводы мягкого моделирования полезными.

Попытки заменить мягкое моделирование жестким обычно приводят к иерархии все более сложных и громоздких математических построений, исследование которых доставляет прекрасный материал для большого количества диссертаций, но реальная ценность которых зачастую не превосходит в сущности простых (хотя без математики и не очевидных) выводов, основанных на анализе именно простейших моделей, подобных описанной выше.

Динамика эпидемии

Рассмотрим математическую модель, описывающую динамику развития эпидемии на примере.

В городе с 20 000 жителей появляются 50 инфекционных больных, что вызывает эпидемию. Предположим, что прирост больных за день пропорционален числу контактов больных и здоровых, то есть произведению числа здоровых (еще

не переболевших и не приобретших иммунитет) на число больных. Коэффициент пропорциональности (он характеризует скорость распространения эпидемии) примем равным 10^{-4} .

Спрашивается: как развивается эпидемия – как изо дня в день меняется число больных? На какой день будет максимальное число заболевших?

Решение. Обозначим через x число больных, через y - число здоровых, через k - коэффициент пропорциональности.

В соответствии с условиями задачи имеем два уравнения:

$$x(n+1) = kx(n)y(n), \quad k = 0,0001$$

$$y(n+1) = y(n) - kx(n)y(n)$$

Первое из них характеризует число заболевших в очередной $(n+1)$ -й день, второе – число здоровых (еще не болевших) к $(n+1)$ -му дню.

Система разностных уравнений нелинейная, из-за наличия произведения $x(n)y(n)$, это не позволяет решить их аналитически.

Воспользуемся методом численного моделирования. Мы имеем задачу с начальными условиями $x(0) = 50$, $y(0) = 20000$, это позволяет шаг за шагом вычислять изменение числа больных по дням, полагая $n = 1, 2, 3, \dots$

Например, при $n = 1$ получаем:

$$x_1 = 0,0001 \cdot 20000 \cdot 50 = 100, \quad y_1 = 20000 - 100 = 19900.$$

Программа для моделирования этой задачи в MatLab имеет вид:

```
>> x(1)=50;y(1)=20000;
>> k=10^(-4);n=12;
>> for i=1:n
x(i+1)=k*x(i)*y(i);
y(i+1)=y(i)-k*x(i)*y(i);
end
>> bar(0:12,x);grid
```

Полученные результаты отображены столбчатой диаграммой на рис. 5.

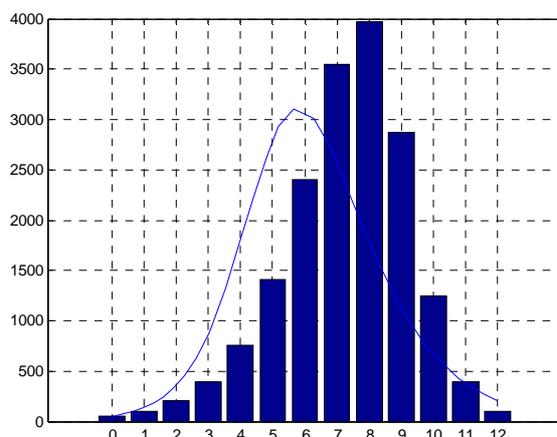


Рис. 5

Из нее видно, что критическая точка – восьмой день (3972 больных). На двенадцатый день (спад эпидемии) в городе остается 105 больных.

Для оценки качества решения выполним моделирование той же задачи в непрерывном времени. Она описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка

$$\begin{cases} \dot{x} = -kxy \\ \dot{y} = kxy - y \end{cases}$$

где $x(0) = 50$, $y(0) = 20000$, $k = 0,0001$.

Программа моделирования этой системы уравнений в пакете MatLab имеет вид:

```
>> T=[0 12];x0=[20000 50];
>> [t,x]=ode23('epid',T,x0);
>> plot(t,x(:,2));
```

```
function r=epid(t,x)
k=0.0001;
x1=-k*x(1)*x(2);
y1=k*x(1)*x(2)-x(2);
r=[x1;y1]
```

Результат моделирования эпидемии в непрерывном времени показан плавной кривой на том же графике. Здесь критическая точка – шестой день – (3119 больных), спад эпидемии – на двенадцатый день (209 больных). Сравнение графиков показывает, что погрешность результатов компьютерного моделирования составляет около 20%. Она может быть уменьшена путем корректировки дискретной математической модели.

Модель войны или сражения

В простейшей модели борьбы двух противников (скажем, двух армий) – *модели Ланкастера* – состояние системы описывается точкой (x,y) положительного квадранта плоскости. Координаты этой точки, x и y -- это численности противостоящих армий. Модель имеет вид



Здесь a -- мощность оружия армии x , а b -- армии y . Попросту говоря, предполагается, что каждый солдат армии x убивает за единицу времени a солдат армии y (и, соответственно, каждый солдат армии y убивает b солдат армии x). Точка над буквой здесь и далее означает производную по времени t , то есть скорость изменения обозначенной буквой величины.

Это -- жесткая модель, которая допускает точное решение



$$axdx = bydy, \quad ax^2 - by^2 = const.$$

Эволюция численностей армий x и y происходит вдоль гиперболы, заданной этим уравнением (рис. 1). По какой именно гиперболе пойдет война, зависит от начальной точки.

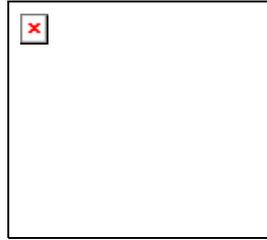


Рис. 6. Жесткая модель войны

Эти гиперболы разделены прямой . Если начальная точка лежит выше этой прямой (случай 1 на рис. 6), то гипербола выходит на ось y . Это значит, что в ходе войны численность армии x уменьшается до нуля (за конечное время). Армия y выигрывает, противник уничтожен.

Если начальная точка лежит ниже (случай 2), то выигрывает армия x . В разделяющем эти случаи состоянии (на прямой) война заканчивается ко всеобщему удовлетворению истреблением обеих армий. Но на это требуется бесконечно большое время: конфликт продолжает тлеть, когда оба противника уже обессилены.

Вывод модели таков: для борьбы с вдвое более многочисленным противником нужно в четыре раза более мощное оружие, с втрое более многочисленным -- в девять раз и т. д. (на это указывают квадратные корни в уравнении прямой).

Ясно, однако, что наша людоедская модель сильно идеализирована и было бы опасно прямо применять ее к реальной ситуации. Возникает вопрос -- как изменится вывод, если модель будет несколько иной. Например, коэффициенты a и b могут быть не строго постоянными, а могут, скажем, зависеть от x и от y . И точный вид этой зависимости нам может быть неизвестен.

В этом случае речь идет о системе



которая уже не решается явно.

Однако в математике разработаны методы, позволяющие сделать выводы общего характера, и не зная точно явного вида функций a и b . В этой ситуации принято говорить о мягкой модели -- модели, поддающейся изменениям (за счет выбора функций a и b в нашем примере).

Общий вывод в данном случае есть утверждение о структурной устойчивости исходной модели: изменение функций a и b изменит описывающие ход военных действий кривые на плоскости (x, y) (которые уже не будут гиперболами и разделяющей их прямой), но это изменение не затрагивает основного качественного вывода.

Вывод этот состоял в том, что положения "x выигрывает" и "y выигрывает" разделены нейтральной линией "обе армии уничтожают друг друга за бесконечное время".

Математики говорят, что топологический тип системы на плоскости (x,y) не меняется при изменении функций a и b : оно приводит лишь к искривлению нейтральной линии (рис. 7).

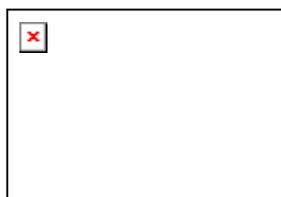


Рис. 7. Мягкая модель войны

Этот математический вывод не самоочевиден. Можно представить себе и другую ситуацию, например, изображенную на рис. 3. Математическая теория структурной устойчивости утверждает, что эта ситуация не реализуется, во всяком случае для не слишком патологических функций a и b (скажем, она не реализуется, если это -- положительные в нуле многочлены).

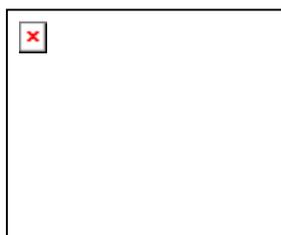


Рис. 8. Нереализуемая модель войны

Мы можем сделать вывод о качественной применимости простейшей модели войны для приближенного описания событий в целом классе моделей, причем для этого даже не нужно знать точного вида жесткой модели: выводы справедливы для мягкой модели. На самом деле простейшая модель дает даже полезное количественное предсказание: наклон разделяющей нейтральной прямой в нуле определяется формулой $\frac{a}{b}$, где a и b -- значения коэффициентов в нуле.

То есть принцип "если противников вдвое больше, то надо иметь в четыре раза более мощное оружие" справедлив на конечном этапе взаимного истребления, в то время как на начальном этапе войны число 4 нужно, быть может, откорректировать (учитывая вид коэффициентов a и b). Для этой корректировки в математике мягких моделей тоже разработаны эффективные методы (несмотря на то, что явная формула для решения уравнений модели не только неизвестна, но и -- это строго доказано -- не существует вовсе). Можно думать, что описанная модель отчасти объясняет как неудачи Наполеона и Гитлера, так и успех Батыя и надежды мусульманских фундаменталистов.

Простейшая модель "хищник-жертва"

Рассмотрим математическую модель совместного существования двух биологических видов (популяций) типа "хищник - жертва", называемую **моделью Вольтерра - Лотки**. Впервые она была получена А.Лоткой (1925 г.), который использовал для описания динамики взаимодействующих биологических популяций. Чуть позже и независимо от Лотки аналогичные (и более сложные) модели были разработаны итальянским математиком В. Вольтерра (1926 г.), глубокие исследования которого в области экологических проблем заложили фундамент математической теории биологических сообществ или так называемой математической экологии. Модель, которую мы рассмотрим, интересна, пожалуй, как раз тем, что с нее, по существу, и началась **математическая экология**. Пусть есть два биологических вида, которые совместно обитают в изолированной среде. Среда стационарна и обеспечивает в неограниченном количестве всем необходимым для жизни один из видов, который будем называть **жертвой**. Другой вид - **хищник** также находится в стационарных условиях, но питается лишь особями первого вида. Это могут быть караси и щуки, зайцы и волки, мыши и лисы, микробы и антитела и т. д. ... Будем для определенности называть их карасями и щуками. Караси и щуки живут в некотором изолированном пруду. Среда предоставляет карасям питание в неограниченном количестве, а щуки питаются лишь карасями. Обозначим

- y - число щук,
- x - число карасей.

 Со временем число карасей и щук меняется, но так как рыбы в пруду много, то не будем различать 1020 карасей или 1021 и поэтому будем считать x и y *непрерывными* функциями времени t . Будем называть пару чисел (x, y) состоянием модели. Попробуем определить, как состояние меняется с течением времени. Надо сказать, что в биологии дело обстоит значительно сложнее, чем, скажем, в механике, где само понятие состояния формализовано и существуют законы Ньютона, позволяющие описать изменение состояния. В биологии этого пока нет. Попробуем из самых простых соображений найти, как меняется состояние (x, y) . Рассмотрим x' - скорость изменения численности карасей. Если щук нет, то число карасей увеличивается и тем быстрее, чем больше карасей. Будем считать, что эта зависимость линейная : $x' = \alpha x$, причем коэффициент α зависит только от условий жизни карасей, их естественной смертности и рождаемости. Скорость изменения y' числа щук (если нет карасей), зависит от числа щук y . Будем считать, что $y' = -\beta y$. Если карасей нет, то число щук уменьшается (у них нет пищи) и они вымирают. В экосистеме скорость изменения численности каждого вида также будем считать пропорциональной его численности, но только с коэффициентом, который зависит от численности особей другого вида. Так, для карасей этот коэффициент уменьшается с увеличением числа щук, а для щук увеличивается с увеличением числа карасей. Будем считать эту зависимость также линейной. Тогда получим систему из двух дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}x' &= \beta_1 x - \alpha_1 xy, \\y' &= -\beta_2 y + \alpha_2 xy.\end{aligned}$$

Эта система уравнений и называется моделью Вольтерра-Лотки. Числовые коэффициенты β_1 , α_1 , β_2 , α_2 называются **параметрами модели**. Очевидно, что характер изменения состояния (x, y) определяется значениями параметров.

Изменяя параметры и решая систему уравнений модели можно исследовать закономерности изменения состояния экологической системы. В качестве примера на рисунке построены кривые изменения численности карасей x и щук y в зависимости от времени t для некоторых типичных значений параметров.

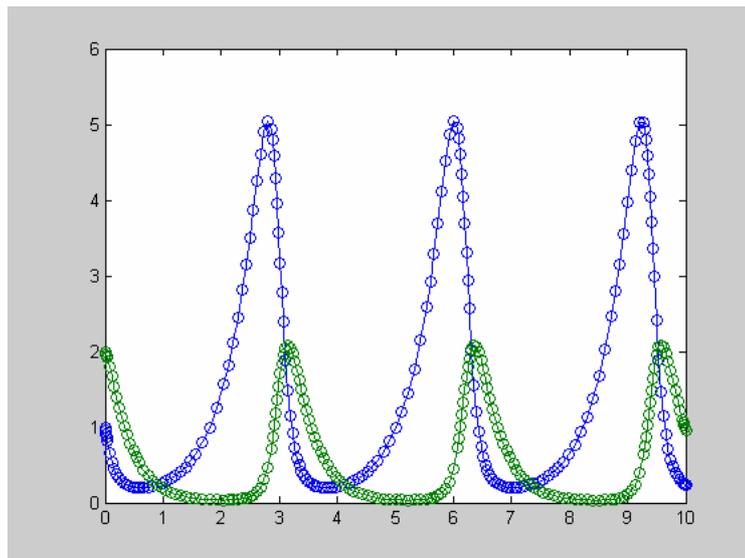


Рис. 9 – Кривые изменения численности карасей и щук

Максимумы кривых чередуются, причем максимумы щук отстают от максимума карасей. Это отставание разное для разных экосистем типа "хищник - жертва", но, как правило, много меньше периода колебаний.

Несмотря на то, что рассмотренная модель является простейшей и в действительности все происходит много сложнее, она позволила объяснить кое-что из загадочного, что есть в природе. Перестали быть загадкой счастливые для рыбаков периоды, когда в водоеме оказывается громадное количество рыбы (из рисунка видно, что продолжаются они очнь недолго).

Получила объяснение периодичность в протекании хронических заболеваний, стало отчасти ясно, почему течение болезни зависит от фазы и интенсивности проводимого лечения. Действительно, как протекает хроническое заболевание? Обострение сменяется улучшением и опять все снова повторяется. Болезнь связана с наличием "хищника" (микроб, вирус), который поедает что-то в организме "жертвы".

Обострение бывает, когда "хищника" много - верхние участки кривых на рисунке.

Улучшение самочувствия соответствует спадающим участкам – нижние участки (когда совсем хорошо).

И снова наступает ухудшение - возрастающие участки кривой.

Обострение тем сильнее, чем больше амплитуда кривой. В состоянии равновесия и около него болезнь слабо выражена. Вы больны, но обострения у вас нет. Наконец, вам надоедает такое состояние, и вы идете к врачу. Врач дает лекарство, вы его принимаете и уничтожаете почти всех "хищников".

Сейчас подобные экологические модели строятся при лечении различных хронических заболеваний, в частности, при борьбе с хроническими инфекциями. Строится экологическая модель болезни с учетом всех иммунных факторов и лечение производится в соответствии с этой моделью.