3. Проверка статистических гипотез.

3.1. Основные положения теории проверки статистических гипотез.

На практике часто приходится проверять на основе выборочных данных различные предположения относительно генеральной совокупности. Процедура сопоставления выдвинутых гипотез с выборкой и вынесения решения относительно приемлемости этих гипотез получила название **проверки гипотез**. Она используется всякий раз, когда необходим обоснованный вывод о преимуществах того или иного способа инвестиций, измерений, стрельбы, технологического процесса, об эффективности нового метода обучения, управления, о пользе удобрений, лекарств, об уровне доходности ценных бумаг, и т.д.

Гипотезой в математической статистике называется любое утверждение о виде или свойствах распределения генеральной случайной величины.

Статистический критерий – это правило, по которому нужно принять или опровергнуть выдвинутую гипотезу.

Гипотезы подразделяют на параметрические и непараметрические, простые и сложные.

Гипотеза называется **параметрической**, если в ней содержится некоторое утверждение о значении параметра распределения известного вида.

В **непараметрической** гипотезе заключается утверждение обо всём распределении.

Простая гипотеза, в отличие от **сложной**, полностью определяет теоретическую функцию распределения.

Например, гипотеза «вероятность успеха в одном испытании Бернулли равна ½» - простая; гипотеза «вероятность успеха в одном испытании Бернулли меньше, чем ½» - сложная.

Обычно выделяют некоторую основную (нулевую) гипотезу $\mathbf{H_0}$. Наряду с ней рассматривают конкурирующую (альтернативную) гипотезу $\mathbf{H_1}$, являющуюся логическим отрицанием основной.

Суть проверки статистической гипотезы заключается в следующем: используется специально составленная **статистика** (некоторая функция от выборки), точное или приближенное распределение которой известно. Множество возможных значений статистики делится на две взаимно дополняющих области:

W - область отклонения выдвинутой гипотезы или критическая область критерия;

$\overline{W}$ - область принятия гипотезы или область допустимых значений статистики.

При этом возможны 4 случая:

Основная гипотеза	Принимается	Отвергается
Верна	Правильное решение	Ошибка I-го рода

Неверна	Ошибка II-го рода	Правильное решение

Вероятность отвергнуть гипотезу, когда она верна, называют **уровнем значимости критерия** (т.е. это вероятность совершить ошибку I-го рода).

Будем обозначать вероятность ошибки I-го рода через α. Вероятность ошибки II-го рода обозначим β.

Вероятность отвергнуть гипотезу, когда она не верна (не допустить ошибку II-го) называются **мощностью критерия**.

Применяя юридическую терминологию, можно интерпретировать величины α и β следующим образом:

α - вероятность вынесения судом обвинительного приговора, когда на самом деле обвиняемый невиновен;

β - вероятность вынесения судом оправдательного приговора, когда на самом деле обвиняемый виновен.

Вероятности ошибок I и II рода однозначно определяются выбором критической области.

Одновременно уменьшить вероятности α и β можно, лишь увеличивая объём выборки **n**. Если же объём выборки фиксирован, то при равных α выбирают тот критерий, где меньше β. То есть критическая область критерия должна быть такой, чтобы при заданном уровне значимости α мощность критерия **1-**β была максимальной.

Задача построения наиболее мощного критерия для простой гипотезы решается с помощью **леммы Неймана – Пирсона**:

Среди всех критериев заданного уровня значимости α, *проверяющих простую гипотезу* H_0 *против альтернативы* H_1, *критерий отношения правдоподобия является наиболее мощным.*

Рассмотри применение этой леммы.

Так как гипотеза является простой, то можно однозначно определить функцию правдоподобия при основной и альтернативной гипотезах:

$$L_0(x_1,x_2,...,x_n)=\prod_{i=1}^{n}\varphi_0(x_i)\,; \qquad L_1(x_1,x_2,...,x_n)=\prod_{i=1}^{n}\varphi_1(x_i)\,.$$

Чем правдоподобнее выборка в условиях гипотезы $\mathbf{H_1}$, тем больше L_1 по сравнению с L_0, следовательно больше отношение L_1/L_0. В качестве критической области выбирают область больших значений $ln[L_1/L_0]$.

Границу критической области вычисляют исходя из конкретного вида распределения и заданного уровня значимости. Построенный таким образом (по лемме Неймана – Пирсона) критерий будет наиболее мощным.

В зависимости от вида альтернативной гипотезы критическая область может быть правосторонняя, левосторонняя или двусторонняя.

Пример. Случайная величина X имеет нормальное распределение с неизвестным математическим ожиданием (m) и известной дисперсией (σ^2).

Построим наиболее мощный критерий проверки гипотезы

H_0: $m=m_0$ против альтернативы H_1: $m=m_1>m_0$.

По условию задачи:

$$L_0(x_1,x_2,...,x_n)=\prod_{i=1}^{n}\varphi_0(x_i)=\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^n\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-m_0)^2\right\};$$

$$L_1(x_1,x_2,...,x_n)=\prod_{i=1}^{n}\varphi_1(x_i)=\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^n\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-m_1)^2\right\}.$$

Тогда логарифм отношение правдоподобия:

$$Ln[L_1/L_0]=\frac{[2\cdot\bar{x}-(m_1+m_0)]\cdot(m_1-m_0)\cdot n}{2\cdot\sigma^2}.$$

Последнее выражение является монотонно возрастающей функцией аргумента $\bar{x}$, поэтому критическую область разумно искать в виде:

$$W=\{(x_1, x_2,\ldots,x_n) : \bar{X} > C\},$$

где постоянную C находят из условия: $\boldsymbol{P\{\bar{X} > C \mid H_0\} = \alpha}$.

Если верна основная гипотеза, то $\bar{X}\sim N\left(m_0,\frac{\sigma^2}{n}\right)$, тогда

$$\alpha=P\{\bar{X} > C \mid H_0\}=P\left\{\frac{\bar{X}-m_0}{\sigma/\sqrt{n}}>\frac{C-m_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right\}=1-F_{N(0,1)}\left(\frac{C-m_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right).$$

Отсюда $F_{N(0,1)}\left(\frac{C-m_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right)=1-\alpha$, то есть

$$\frac{C-m_0}{\sigma/\sqrt{n}}=f_\alpha$$

- квантиль стандартно нормального распределения уровня 1-α.

Поэтому, $C=m_0+f_\alpha\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

Если $\alpha=0,1$; то $f_\alpha=1,28$. Если $\alpha=0,05$; то $f_\alpha=1,64$. Если $\alpha=0,01$, то $f_\alpha=2,33$.

Итак, наиболее мощный критерий таков:

если $\bar{x}\le m_0+f_\alpha\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, то принимают основную гипотезу;

если $\bar{x}> m_0+f_\alpha\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, то принимают альтернативную гипотезу.

В данном примере использована правосторонняя критическая область.

Мощность критерия:

$$1-\beta=1-P\{H_0|H_1\}=1-P\{\bar{X}<m_0+f_\alpha\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \mid \bar{X}\sim N\left(m_1,\frac{\sigma^2}{n}\right)\}=$$

$$=1-P\left\{\frac{\overline{X}-m_1}{\sigma/\sqrt{n}}<\frac{m_0+f_\alpha\cdot\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}-m_1}{\sigma/\sqrt{n}}\Big| X\sim N(m_1,\sigma^2)\right\}=1-F_{N(0,1)}\left(\frac{m_0-m_1}{\sigma/\sqrt{n}}+f_\alpha\right).$$

Задача решена.

В заключение отметим, что принятие основной гипотезы не означает, что она является единственно подходящей, просто она не противоречит выборочным данным. Однако таким же свойством могут обладать и другие гипотезы.

Пример. Крупная торговая фирма желает открыть в новом районе города филиал. Известно, что фирма будет работать прибыльно, если еженедельный доход жителей района превышает 400 марок. Известна дисперсия дохода $\sigma^2 = 400$. Определить правило принятия решения, с помощью которого по выборке объёма $n = 100$ на уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ можно установить, что филиал будет работать прибыльно.

Решение. Будем считать $\boldsymbol{H_0: m = 400\ ;\ H_1: m > 400}$.

По условию задачи $m_0 = 400,\ f_\alpha=1{,}64$.

Принимают альтернативную гипотезу и, следовательно, открывают филиал, если величина выборочного среднего (значения оценки среднего дохода) $\bar{x}$ такова, что

$\dfrac{\bar{x}-400}{20/\sqrt{100}}>1{,}64$, то есть $\bar{x}>400+2\cdot 1{,}64=403{,}28$ (марок).

3.2. Гипотезы о равенстве средних и дисперсий двух нормальных распределений.

На практике часто встречается случай, когда средний результат одной серии экспериментов отличается от среднего результата среднего результата другой серии. При этом возникает вопрос, можно ли объяснить данное расхождение случайными ошибками эксперимента или оно вызвано некоторыми закономерностями.

В финансовом анализе данная задача возникает при сопоставлении уровня доходности различных активов, в промышленности – при выборочном контроле качества изделий, изготовленных на разном оборудовании.

3.2.1. Гипотеза о равенстве средних при известных дисперсиях.

Рассмотрим две генеральные случайные величины, имеющие нормальное распределение: $\boldsymbol{X^{(1)}\sim N(m_1,\sigma_1^2);\ X^{(2)}\sim N(m_2,\sigma_2^2);}$ где $\boldsymbol{m_1,\ m_2}$ – неизвестны; $\boldsymbol{\sigma_1^2,\ \sigma_2^2}$ – известны.

Построим критерий проверки гипотезы $\boldsymbol{H_0:\ m_1=m_2}$ против альтернативы $\boldsymbol{H_1:\ m_1>m_2}$.

Пусть $\boldsymbol{X_1^{(1)},\ X_2^{(1)},\dots,\ X_n^{(1)};\quad X_1^{(2)},\ X_2^{(2)},\dots,\ X_n^{(2)}}$ -независимые случайные выборки из соответственно нормальных (при $n < 30$ - 40) или произвольных (при $n > 40$) совокупностей. Тогда распределение выборочных средних будет нормальным (либо как линейная функция от нормально распределенных слагаемых, либо в силу центральной предельной теоремы):

$$\overline{X}^{(1)} \sim N(m_1, \frac{\sigma_1^2}{n_1});\ \overline{X}^{(2)} \sim N(m_2, \frac{\sigma_2^2}{n_2});$$

Разность выборочных средних также будет нормально распределённой случайной величиной:

$$\overline{X}^{(1)} - \overline{X}^{(2)} \sim N(m_1 - m_2, \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}).$$

Если $\boldsymbol{m_1 = m_2}$, то М{ $\overline{\boldsymbol{X}}^{(1)} - \overline{\boldsymbol{X}}^{(2)}$ }=0, тогда критерий проверки основной гипотезы выглядит следующим образом:

если значение статистики $t = \dfrac{\overline{x}^{(1)} - \overline{x}^{(2)}}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}} < f_\alpha$, то принимают основную гипотезу; если же $t = \dfrac{\overline{x}^{(1)} - \overline{x}^{(2)}}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}} \geq f_\alpha$, то принимают альтернативную гипотезу.

В случае принятия основной гипотезы говорят, что различие выборочных средних статистически не значимо и оценка общего математического ожидания есть

$$\hat{\boldsymbol{m}} = \frac{\overline{\boldsymbol{x}}^{(1)} \cdot \boldsymbol{n}_1 + \overline{\boldsymbol{x}}^{(2)} \cdot \boldsymbol{n}_2}{\boldsymbol{n}_1 + \boldsymbol{n}_2}.$$

Пример. Для проверки эффективности новой технологии отобраны 2 группы:

1) 50 человек ***(=n₁)***, где применялась новая технология и выработка составила 85 изделий (= $\overline{\boldsymbol{x}}^{(1)}$);

2) 70 человек (=$\boldsymbol{n_2}$) с выработкой 78 изделий (= $\overline{\boldsymbol{x}}^{(2)}$).

Известно, что дисперсии выработки равны $\boldsymbol{\sigma_1^2 = 100;\ \sigma_2^2 = 74}$.

На уровне значимости $\boldsymbol{\alpha = 0{,}05}$ выяснить, влияет ли новая технология на производительность.

Решение. Проверяем гипотезу $\boldsymbol{H_0: m_1 = m_2}$ против альтернативы $\boldsymbol{H_1: m_1 > m_2}$. Значение статистики критерия $t = \dfrac{85 - 78}{\sqrt{\dfrac{100}{50} - \dfrac{74}{70}}} = 4$.

Для $\boldsymbol{\alpha = 0{,}05}$ значение $f_\alpha = 1{,}64$.

Так как ***4>1,64*** , принимаем альтернативную гипотезу, и следовательно, новая технология позволяет повысить среднюю выработку.

3.2.2. Гипотеза о равенстве средних при неизвестных равных дисперсиях (критерий Стьюдента).

Рассмотрим две генеральные случайные величины, имеющие нормальное распределение: $X^{(1)} \sim N(m_1, \sigma_1^2)$; $X^{(2)} \sim N(m_2, \sigma_2^2)$; где m_1, m_2 – неизвестны; σ_1^2, σ_2^2 – неизвестны. Требуется проверить гипотезу H_0: $m_1 = m_2$ против альтернативы H_1: $m_1 > m_2$.

В этом случае используется статистика, имеющая распределение Стьюдента с $(n_1 + n_2 - 2)$ степенями свободы:

$$t(n_1 + n_2 - 2) = \frac{\overline{X}^{(1)} - \overline{X}^{(2)}}{S \cdot \sqrt{\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}}}.$$

Здесь $\overline{X}^{(1)}$ - оценка для среднего по первой группе данных;

$\overline{X}^{(2)}$ - оценка для среднего по второй группе данных;

$S^2 = \dfrac{(n_1 - 1) \cdot S_1^2 + (n_2 - 1) \cdot S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$ - средняя арифметическая групповых дисперсий;

$S_1^2 = \dfrac{1}{n_1 - 1} \sum\limits_{i=1}^{n} \left(X_i^{(1)} - \overline{X}^{(1)} \right)^2$ - оценка дисперсии в первой группе;

$S_2^2 = \dfrac{1}{n_2 - 1} \sum\limits_{i=1}^{n} \left(X_i^{(2)} - \overline{X}^{(2)} \right)^2$ - оценка дисперсии во второй группе.

Когда основная гипотеза H_0: $m_1 = m_2$ проверяется против альтернативы H_1: $m_1 > m_2$, то выбирают правостороннюю критическую область.

Задают уровень значимости α. По нему с помощью таблицы определяют величину $t_{\alpha;k}$ (где $k = n_1 + n_2 - 2$)- критическую границу критерия Стьюдента (т.е. значение квантиля распределения Стьюдента уровня $1-2\cdot\alpha$, соответствующее вероятности $\alpha = P\{|t(k)| > t_{\alpha,k}\}$).

Если значение статистики критерия $t(n_1 + n_2 - 2) < t_{\alpha;k}$, то принимают основную гипотезу, в противном случае принимают альтернативу.

При применении этого критерия, как правило, приходится проверять равенство неизвестных дисперсий.

3.2.2. Гипотеза о равенстве дисперсий при неизвестных средних (критерий Фишера – Снедекора).

Рассмотрим две генеральные случайные величины, имеющие нормальное распределение: $X^{(1)} \sim N(m_1, \sigma_1^2)$; $X^{(2)} \sim N(m_2, \sigma_2^2)$; где m_1, m_2 – неизвестны; σ_1^2, σ_2^2 – неизвестны.

Требуется проверить гипотезу H_0: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$

против альтернативы H_1: $\sigma_1^2 > \sigma_2^2$.

Для проверки этой гипотезы используют статистику

$$F(k_1,k_2)=\frac{S_1^2}{S_2^2} \qquad (S_1^2>S_2^2),$$

которая имеет распределение Фишера – Снедекора с $k_1=n_1-1$ и $k_2=n_2-1$ степенями свободы.

Здесь

$S_1^2=\frac{1}{n_1-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i^{(1)}-\overline{X}^{(1)}\right)^2$ - оценка дисперсии в первой группе;

$S_2^2=\frac{1}{n_2-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i^{(2)}-\overline{X}^{(2)}\right)^2$ - оценка дисперсии во второй группе.

В данном случае критическая область – это область больших значений статистики критерия. В качестве критического значения критерия принимают F_{α,k_1,k_2} - значение квантиля уровня *1-*α, соответствующего вероятности $P\{F(k_1,k_2)>F_{\alpha,k_1,k_2}\}=\alpha$.

Если $F(k_1,k_2)>F_{\alpha,k_1,k_2}$,то основную гипотезу отвергают.

Если $F(k_1,k_2)<F_{\alpha,k_1,k_2}$,то основную гипотезу принимают.

Пример.

	Старая технология	Новая технология
Расход сырья	304 307 308	303 304 306 308
Число изделий	1 4 4	2 6 4 1

Предположив, что расход сырья, как при старой, так и при новой технологии имеет нормальное распределение, выяснить, влияет ли технология на средний расход сырья. Принять α*=0,05*.

Решение. Найдём выборочные средние и выборочные дисперсии.

$$\bar{x}^{(1)}=307{,}11;\ \bar{x}^{(2)}=304{,}77;\quad s_1^2=2{,}378;\ s_2^2=1{,}165.$$

Сначала проверим гипотезу о равенстве неизвестных дисперсий:

H_0': $\sigma_1^2=\sigma_2^2$ против альтернативы H_1': $\sigma_1^2>\sigma_2^2$.

Используем статистику Фишера – Снедекора.

Значение статистики $f(8;12)=\frac{2{,}378}{1{,}685}=1{,}41.$

По таблице находим критическое значение критерия Фишера – Снедекора $F_{0{,}05;\,8;\,12}=2{,}85.$

Таким образом значение статистики меньше критического значения, и можно принять гипотезу о равенстве дисперсий.

Далее проверим гипотезу о равенстве неизвестных математических ожиданий: H_0: $m_1=m_2$ против альтернативы H_1: $m_1>m_2$.

Значение статистики критерия Стьюдента

$$t(20)=\frac{307{,}11-304{,}77}{8\cdot 2{,}378+12\cdot 1{,}685}\cdot 20=1{,}9622.$$

По таблице находим значение границы критической области $t_{0,1;20}=1,72$. Значение статистики критерия попало в критическую область, поэтому следует отвергнуть основную гипотезу и принять альтернативу. Можно сделать вывод, что технология влияет на расход сырья: при старой технологии в среднем сырья расходуется больше.

3.3. Критерии согласия.

Не всегда есть основание высказать альтернативную гипотезу в явном виде. Часто имеется в виду просто невыполнение основной. В этом случае требуется выяснить, согласуются ли данные с основной гипотезой или противоречат ей. Критерии, которые позволяют это сделать, называют критериями согласия.

3.3.1.Критерии согласия относительно закона распределения {критерий χ^2 (хи-квадрат) Пирсона}.

Во многих случаях практики на основании тех или иных данных делается предположение о виде закона распределения генеральной случайной величины $\boldsymbol{X}$. Однако, для окончательного решения вопроса о виде закона распределения в подобных случаях представляется целесообразным проверить, насколько сделанное предположение согласуется с опытом. При этом, в виду ограниченного числа наблюдений опытный закон распределения будет в какой - то мере отличаться от предполагаемого, даже если предположение о законе распределения сделано правильно.

В связи с эти возникает необходимость решать следующую задачу: является ли расхождение между опытным и предполагаемым законами распределения следствием ограниченного числа опытов, или оно является существенным и истинное распределение отличается от предполагаемого. Для решения поставленной задачи служат критерии согласия относительно закона распределения.

Дана выборка $(X_1 ,\ X_2 , \dots , X_n)$ объёма $\boldsymbol{n}$. *Основная гипотеза состоит в том, что эта выборка произведена из совокупности, имеющей некоторое заданное распределение.*

<u>Процедура проверки гипотезы о виде распределения</u> состоит из 5 этапов.

1. Весь диапазон значений генеральной случайной величины разбивают на интервалы: $\Delta_1 , \Delta_2 , \dots , \Delta_m$ без общих точек и подсчитывают число наблюдений, попавших в каждый интервал (интервалы выбирают так, чтобы в каждый попало не менее 5 наблюдений).
2. Предположив справедливость основной гипотезы, подсчитывают вероятность попадания в каждый интервал:

$$p_i=P\{X\in\Delta_i\ |H_0\}\ ;\quad i=1, 2, \dots, m.$$

3. Составляют статистику критерия:

$$\chi^2(m-1)=\sum_{i=1}^{m}\frac{\left(n_i-n\cdot p_i\right)^2}{n\cdot p_i}.$$

Обоснуем её выбор. Частота попадания $\frac{n_i}{n}$ в интервал Δ_i - является состоятельной оценкой для p_i - вероятности попадания в этот интервал (согласно закону больших чисел). Таким образом, если проверяемая гипотеза истинна, то разность $(n_i-n\cdot p_i)$ должна быть мала, следовательно, и вся сумма должна быть мала. Следовательно, если значение статистики велико, то гипотезу надо отвергнуть. Таким образом, статистика критерия характеризует отклонение теоретических данных от гипотетических.

4. Задавшись уровнем значимости α, строят критическую область, используя предельную теорему: *при выполнении основной гипотезы распределение статистики критерия сходится к* χ^2 *-распределению с* $m-1$ *степенью свободы.*

При использовании данной методики требуется, чтобы объём выборки $n>50$.

5. Если значение статистики критерия $\chi^2(m-1)<\chi^2_{1-\alpha;\,m-1}$ (квантиля уровня $1-\alpha$ распределения χ^2 с $m-1$ степенью свободы), то гипотезу принимают (в этом случае говорят, что данные согласуются с гипотезой или не противоречат ей).

В противном случае гипотезу отвергают.

Рассмотрим примеры.

Пример 1. Бюффон подбрасывал монету 4040 раз. Герб выпал 2048 раз. Проверить гипотезу: монета симметрична.

Итак, нам надо проверить, что выпадения герба и решки равновероятны, то есть генеральная случайная величина имеет распределение Бернулли с параметром $p=0,5$ (принимает всего два значения **1** и **0** с вероятностями соответственно p и $1-p$). В этом случае $m=2$.

Вычислим статистику критерия:

$$\chi^2(2-1)=\frac{\left(2048-4040\cdot 0,5\right)^2}{4040\cdot 0,5}+\frac{\left(1992-4040\cdot 0,5\right)}{4040\cdot 0,5}=0,776.$$

Пусть уровень значимости $\alpha=0,05$. По таблице найдем $\chi^2_{0,95;1}=3,841$.

Значение статистики критерия значительно меньше критического, следовательно, данные хорошо согласуются с гипотезой. Можно сделать вывод, что монета симметрична.

Пример 2. Мендель для проверки своей теории наследственности скрещивал семена гороха со свойствами: круглый - жёлтый, морщинистый - зелёный. Наследование доминантных и рецессивных признаков предполагалось в соотношении ***3:1***.

Исходы	Вероятности (p_i)	Количество (n_i)
круглый – жёлтый	9/16	315
морщинистый – жёлтый	3/16	101
круглый – зелёный	3/16	108

морщинистый - зелёный	1/16	32

В этом примере мы имеем дискретную случайную величину с количеством значений ***m=4***.

Объём выборки n=556.

Вычислим значение статистики критерия:

$$\chi^2(3)=\frac{\left(315-556\cdot\frac{9}{16}\right)^2}{556\cdot\frac{9}{16}}+\frac{\left(101-556\cdot\frac{3}{16}\right)^2}{556\cdot\frac{3}{16}}+$$

$$+\frac{\left(315-108\cdot\frac{3}{16}\right)^2}{556\cdot\frac{3}{16}}+\frac{\left(32-556\cdot\frac{1}{16}\right)^2}{556\cdot\frac{1}{16}}=0{,}47.$$

Критическая граница $\chi^2_{0,95;3}=7{,}8$.

Значение статистики критерия значительно меньше критической границы, следовательно, данные хорошо согласуются с гипотезой.

3.3.2. Метод χ^2 для параметрической гипотезы.

При проверке гипотезы о виде распределения часто **параметры** распределения оказываются **неизвестными**, поэтому их заменяют **наилучшими оценками** по имеющейся выборке. При этом **число степеней свободы** в предельном распределении статистики критерия **уменьшается на число неизвестных параметров** распределения.

Пример 3. Среди 2020 семей, имеющих 2-х детей, зарегистрировано 527 семей с 2 мальчиками и 476 семей с 2 девочками, в остальных семьях дети разного пола. Можно ли на уровне значимости 0,05 считать, что количество мальчиков в двухдетной семье - биномиальная случайная величина?

Решение. В данном случае $\boldsymbol{n}=2020$ (объём выборки), $\boldsymbol{n_0}=476$, $\boldsymbol{n_1}=1017$, $\boldsymbol{n_2}=527$, $\boldsymbol{m}=3$ (количество возможных значений биномиальной случайной величины).

Теоретические вероятности биномиального распределения:

$$p_0=(1-p)^2;\ p_1=2p\cdot(1-p);\ p_2=p^2.$$

В биномиальном распределении оценка неизвестной вероятности осуществляется по формуле:

$$\hat{p}=\frac{\overline{X}}{k}=\frac{\overline{X}}{m-1}=\frac{2\cdot527+1\cdot1017}{2\cdot2020}\approx0{,}51.$$

Далее вычислим оценки теоретических вероятностей:

$$\hat{p}_0=(1-\hat{p})^2=0{,}2401;\ \hat{p}_1=2\hat{p}\cdot(1-\hat{p})=0{,}4998;\ p_2=p^2=0{,}2601.$$

Количество степеней свободы: ***m-1-1=m-2=1***.

Значение статистики критерия:

$$\chi^2(3)=\frac{(476-2020\cdot 0{,}2401)^2}{2020\cdot 0{,}2401}+\frac{(1017-2020\cdot 0{,}4998)^2}{2020\cdot 0{,}4998}+\frac{(527-2020\cdot 0{,}2601)^2}{2020\cdot 0{,}2601}=$$
$$=0{,}116.$$
Критическая граница: $\chi^2_{0,95;1}=3{,}841$.

Данные хорошо согласуются с гипотезой.

Пример 4. Через равные промежутки времени в тонком растворе золота регистрировалось количество частиц золота, попавших в поле зрения микроскопа.

Число частиц	0	1	2	3	4	5	6	7	Всего
Частоты (***n**$_i$*)	112	168	130	68	32	5	1	1	518

Проверить, что количество частиц золота, попавших в поле зрения микроскопа, имеет распределение Пуассона.

Решение.

Сначала оценим параметр распределение Пуассона.

$$\hat{\lambda}=\overline{X}=\frac{1}{518}(0\cdot 112+1\cdot 168+2\cdot 130+3\cdot 68+4\cdot 32+5\cdot 5+6\cdot 1+7\cdot 1)\approx 1{,}54.$$

Далее объединим 3 последние столбца таблицы:

Число частиц	0	1	2	3	4	5 и более	Всего
Частоты (n_i)	112	168	130	68	32	7	518

Теперь вычислим оценки для теоретических вероятностей:

$$\hat{p}_0=e^{-\hat{\lambda}}=\exp(-1{,}54);\ \hat{p}_1=\hat{\lambda}\cdot e^{-\hat{\lambda}}=1{,}54\cdot\exp(-1{,}54);\ldots;$$

$$\hat{p}_4=\frac{\hat{\lambda}^4}{4!}e^{-\hat{\lambda}}=\frac{(1{,}54)^4}{24}\exp(-1{,}54);\ \hat{p}_5=1-\sum_{i=1}^{4}\hat{p}_i\ .$$

Количество степеней свободы: ***m-2=6-2=4***.

Значение статистики критерия:

$\chi^2(4)=7{,}85$.

Критическое значение: $\chi^2_{0,95;4}=9{,}49$.

Согласие имеет место.

3.3.3. Критерий проверки гипотезы однородности {критерий χ^2 (хи-квадрат) Пирсона}.

Гипотеза однородности – это гипотеза о том, что различные выборки извлечены из одной и той же генеральной совокупности.

Рассмотрим критерий однородности χ^2.

Пусть даны l выборок, каждая объёмом n_i (i=1, 2,…,l). Совокупный объём данных $n=\sum_{i=1}^{l}n_i$.

Данные каждой выборки сгруппированы в m интервалов, обозначим через n_{ij} –число элементов i-ой выборки, попавших в j-ый интервал.

Обозначим: $n_{i\bullet} = \sum_{j=1}^{m} n_{ij}$; $n_{\bullet j} = \sum_{i=1}^{l} n_{ij}$.

Проверим гипотезу $\boldsymbol{H_0}$ о том, что все выборки извлечены из одной и той же совокупности.

В качестве статистики критерия используем величину

$$\chi^2 = n \cdot \left(\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{l} \frac{n_{ij}^2}{n_{i\bullet} \cdot n_{\bullet j}} - 1 \right),$$

которая в случае справедливости основной гипотезы имеет $\boldsymbol{\chi^2}$ распределение с $(\boldsymbol{m}\text{-}\boldsymbol{1})(\boldsymbol{l}\text{-}\boldsymbol{1})$ степенями свободы.

Пример 5. Предполагается, что применение новой технологии приведёт к увеличению выхода годной продукции. Результаты контроля таковы.

	Годные изделия	Негодные изделия	Всего изделий
Новая технология	**140**	**10**	150
Старая технология	**185**	**15**	200
Всего	325	25	350

Вычислим статистику критерия однородности:

$$\chi^2 = 350 \cdot \left(\frac{140^2}{325 \cdot 150} + \frac{10^2}{25 \cdot 150} + \frac{185^2}{325 \cdot 200} + \frac{15^2}{25 \cdot 200} - 1 \right) = 0{,}086.$$

Количество степеней свободы: $(\boldsymbol{m}\text{-}\boldsymbol{1})\cdot(\boldsymbol{l}\text{-}\boldsymbol{1})$=(2-1)·(2-1)=1.

Критическая граница: $\boldsymbol{\chi^2_{0,95;1}}$=*3,841*.

Данные хорошо согласуются с гипотезой однородности, то есть не подтверждается предположение об изменении выхода годной продукции при изменении технологии.