4. Ряди Фур'є

Тригонометрична система функцій $1, \cos x, \cos 2x, \ldots \cos nx, \sin x, \sin 2x, \ldots \sin nx$ є ортогональною на будь-якому відрізку довжини 2π, наприклад, на відрізку $[-\pi, \pi]$. Це означає, що інтеграл на будь-якому відрізку довжини 2π від добутку будь-яких різних функцій цієї системи дорівнює нулю. Якщо існує інтеграл $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$ та він є конечним, то існують числа

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx \qquad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\, dx \qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\, dx \ , \tag{4.1}$$

які називаються коефіцієнтами ряду Фур'є функції f(x) і у цій системі тригонометричних функцій будь-яка періодична функція f(x) з періодом 2π може бути представлена у вигляді суми синусів і косинусів (так званий тригонометричний ряд Фур'є),

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos nx + b_n \sin nx\right) \ , \tag{4.2}$$

де n - ціле позитивне число.

Компоненти ряду Фур'є називаються гармоніками.

Якщо функція *f(x)* є періодичною з періодом $T = 2l$ та $\int_{-l}^{l} f^2(x)dx < +\infty$, то ряд Фур'є для цієї функції набуває вигляду

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi}{l}x + b_n \sin\frac{n\pi}{l}x\right). \tag{4.3}$$

При цьому коефіцієнти ряду Фур'є мають вигляд

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)dx \qquad a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos(\frac{n\pi}{l}x)dx \qquad b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin(\frac{n\pi}{l}x)dx \ . \tag{4.4}$$

Будь-яка парна функція може бути розкладена в ряд Фур'є, що складається з косинусів, а будь-яка непарна функція розкладається в ряд із синусів, отже маємо для парної функції ряд Фур'є у вигляді $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(\frac{n\pi}{l}x),$ де $a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos(\frac{n\pi}{l}x)dx.$ Для непарної функції ряд Фур'є має вигляд $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \sin(\frac{n\pi}{l})x,$ де $a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos(\frac{n\pi}{l}x)dx.$

Ряд Фур'є функції $f(x)$ можна також переписати у комплексному вигляді, тобто розглянути розкладення функції по експоненті з мнимим аргументом, а саме

$$S(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}_n e^{\frac{2\pi n}{T}x},$$

де $\hat{f}_n = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx$ – n-я комплексна амплітуда. Комплексні амплітуди $\hat{f}_n$ можна виразити через класичні коефіцієнти ряду Фур'є виду (4.1)

$$\hat{f}_0 = \frac{a_0}{2}, \quad \hat{f}_n = \frac{a_n - ib_n}{2}, \quad n > 0;$$
$$\hat{f}_n = \frac{a_n + ib_n}{2}, \quad n < 0.$$

Виникає питання щодо збіжності функції f(x) до її ряду Фур’є S(x). Отже маємо наступні визначення та ствердження.

Функція f(x) є кусково-гладкою на відрізку [a,b], якщо сама функція та її похідні мають на цьому відрізку скінченну кількість точок розриву та всі вони є першого роду , тобто у кожній точці розриву функція має скінчену ліву границю $f(x-0) = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} f(x-\varepsilon)$ та скінчену праву границю $f(x+0) = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} f(x+\varepsilon), \ \varepsilon > 0.$

Якщо періодична функція *f(x)* з періодом $2l$ є кусково-гладкою на відрізку [-*l*,*l*], то ряд Фур’є *S(x)* цієї функції збігається до значення функції в кожній точці її безперервності та к значенню $\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$ в кожній точці розриву. При цьому, якщо функція *f(x)* є безперервною на цій числовій осі, то в цьому випадку ряд Фур’є *S(x)* збігається до функції *f(x)* рівномірно.

Приклади

Розкласти в ряд Фур'є наступні періодичні функції:

Приклад 1.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{ïðè} \quad -\pi < x \le 0 \\ \sin x & \text{ïðè} \quad 0 < x \le \pi \end{cases} \tag{4.5}$$

Маємо кусково-гладку функцію, отже коефіцієнти ряду Фур’є *S(x)* згідно з формулами (1) мають вигляд

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\left(\int\limits_{-\pi}^{0} f(x)dx + \int\limits_{0}^{\pi} f(x)dx\right) = 0 + \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}\sin x\,dx = \frac{1}{\pi}(\cos\pi - \cos 0) = -\frac{2}{\pi}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} f(x)\cos nx\,dx + \int_{0}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx\right) = 0 + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\sin x\cos nx\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi}\left(\sin(x+nx)+\sin(x-nx)\right)dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(-\frac{1}{1+n}\cos(x+nx) - \frac{1}{1-n}\cos(x-nx)\right)\Bigg\|_{0}^{\pi} = \frac{1}{2\pi}\left(-\frac{\cos(\pi+n\pi)}{n+1} - \frac{\cos(\pi-n\pi)}{1-n} + \frac{1}{1+n} + \frac{1}{1-n}\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi(n^2-1)}\left((-1)^{n-1}-1\right)$$

Коефіцієнти $a_n = 0$ для усіх парних n.

$$b_n = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} f(x)\sin nx\,dx + \int_{0}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx\right) = 0 + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\sin x\sin nx\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi}\left(\cos(x-nx)-\cos(x+nx)\right)dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{1-n}\sin(x-nx) - \frac{1}{1+n}\sin(x+nx)\right)\Bigg\|_{0}^{\pi} = 0 \quad .$$

Отже у фінальному вигляді маємо наступний ряд Фур’є для функції *f(x)* виду (5)

$$S(x) = -\frac{1}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\pi(n^2-1)}\left((-1)^{n-1}-1\right)\cos nx$$

Приклад 2.

$$f(x) = e^{ax} \text{ при } -\pi \le x \le \pi,$$

Використовуючи формули (4.1) одержимо, що

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ax}dx = \frac{e^{a\pi}-e^{-a\pi}}{a\pi},$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ax}\cos nx dx = \frac{e^{ax}(n\sin nx + a\cos nx)}{\pi(a^2+n^2)}\Bigg|_{-\pi}^{\pi} =$$

$$= \frac{e^{a\pi}(n\sin n\pi + a\cos n\pi) - e^{-a\pi}(n\sin(-n\pi) + a\cos(-n\pi))}{\pi(a^2+n^2)} =$$

$$= \frac{(e^{a\pi}-e^{-a\pi})\cdot a\cos n\pi}{\pi(a^2+n^2)} = \frac{(e^{a\pi}-e^{-a\pi})\cdot a\cdot(-1)^n}{\pi(a^2+n^2)}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ax}\sin nx dx = \frac{e^{ax}(a\sin nx - n\cos nx)}{\pi(a^2+n^2)}\Bigg|_{-\pi}^{\pi} = \quad .$$

$$= \frac{e^{a\pi}(-n\cos n\pi) - e^{-a\pi}(-n\cos(n\pi))}{\pi(a^2+n^2)} = \frac{(e^{a\pi}-e^{-a\pi})\cdot n\cdot(-1)^{n+1}}{\pi(a^2+n^2)}$$

При находженні інтегралів використовувались наступні формули

$$\int e^{ax}\cos bxdx = \frac{e^{ax}(b\sin bx + a\cos bx)}{\pi(a^2+b^2)} + C,$$

$$\int e^{ax}\sin bxdx = \frac{e^{ax}(a\sin bx - b\cos bx)}{\pi(a^2+b^2)} + C.$$

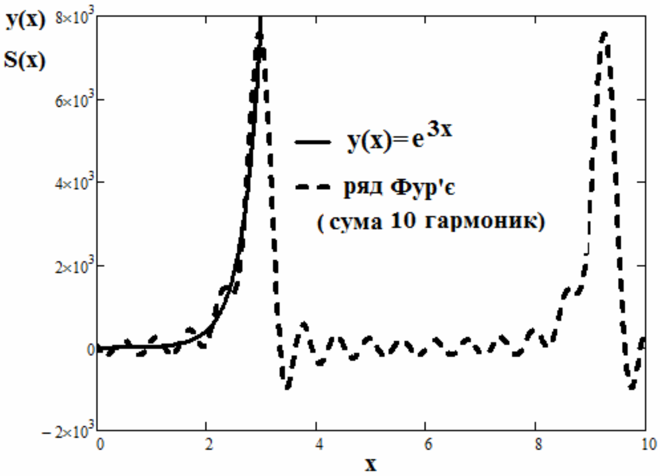

Рис.1. Представлення функції рядом Фур'є.

Отже для даної функції маємо наступний ряд Фур'є

$$S_n = \frac{e^{a\pi} - e^{-a\pi}}{2\pi a} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(e^{a\pi} - e^{-a\pi})\cdot a\cdot(-1)^n}{\pi(a^2+n^2)}\cos nx + \frac{(e^{a\pi} - e^{-a\pi})\cdot n\cdot(-1)^{n+1}}{\pi(a^2+n^2)}\sin nx\right] =$$

$$= \frac{e^{a\pi} - e^{-a\pi}}{\pi}\left[\frac{1}{2a} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(a\cos nx - n\sin nx)}{a^2+n^2}\right].$$

Приклад графічного зображення функції та її апроксимації рядом Фур'є представлено на рис. 1 для функції $f(x) = e^{3x}$.

Приклад 3.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{ïðè } -2 < x \le 0 \\ \frac{x}{2} & \text{ïðè } 0 \le x \le 2 \end{cases}$$

, період цієї функції дорівнює $T = 2l = 4$, $f(x+4) = f(x)$.

Згідно з формулами (4) маємо

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)dx = \frac{1}{2}\int_{-2}^{0} f(x)dx + \frac{1}{2}\int_{0}^{2} f(x)dx = \frac{1}{2}\int_{0}^{2}\frac{x}{2}dx = \frac{1}{2}$$

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{\pi nx}{l}dx = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x)\cos\frac{\pi nx}{2}dx = \frac{1}{2}\int_{-2}^{0} f(x)\cos\frac{\pi nx}{2}dx + \frac{1}{2}\int_{0}^{2} f(x)\cos\frac{\pi nx}{2}dx =$$

$$= \frac{1}{4}\int_{0}^{2} x\cos\frac{\pi nx}{2}dx.$$

Для знаходження останнього інтегралу використовуємо формулу інтегрування по частинам, а саме

$$\int UdV = UV - \int VdU.$$

У нашому випадку покладемо $U = x,\quad dV = \cos\frac{\pi nx}{2}$, отже $U = x,\quad dV = \cos\frac{\pi nx}{2}$, $dU = dx,\quad V = \frac{2}{\pi n}\sin\frac{\pi nx}{2}$. Таким чином,

$$a_n = \frac{1}{4}\int_0^2 x\cos\frac{\pi nx}{2}dx = \frac{2x}{\pi n}\sin\frac{\pi nx}{n}\Bigg|_0^2 - \frac{2}{\pi n}\int_0^2 \sin\frac{\pi nx}{2} = \frac{4}{\pi n} + \frac{4}{\pi^2 n^2}\cos\frac{\pi nx}{2}\Bigg|_0^2 = \frac{4}{\pi^2 n^2}(\cos\pi n - 1) = \frac{4}{\pi^2 n^2}\left((-1)^n - 1\right).$$

Коефіцієнти b_n дорівнюють

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{\pi nx}{l}dx = \frac{1}{4}\int_0^2 x\sin\frac{\pi nx}{2}dx = \frac{1}{4}\left(-\frac{2x}{n\pi}\cos\frac{\pi nx}{2}\Bigg|_0^2 + \frac{2}{n\pi}\int_0^2\cos\frac{\pi nx}{2}dx\right) =$$
$$= -\frac{1}{n\pi}\cos n\pi + \frac{1}{n^2\pi^2}\sin\frac{\pi nx}{2}\Bigg|_0^2 = \frac{(-1)^{n+1}}{n\pi}$$

Отже у цьому випадку ряд Фур’є має вигляд

$$S(x) = \frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{\pi^2 n^2}\left((-1)^n - 1\right)\cos\frac{\pi nx}{2} + \frac{(-1)^{n+1}}{n\pi}\sin\frac{\pi nx}{2}\right).$$