Случайные величины и законы их распределения.

Одним из основных понятий теории вероятностей является понятие случайной величины. Сначала рассмотрим примеры.

Число вызовов, поступивших от абонентов в течение определенного времени на телефонную станцию, является случайным и принимает те или иные значения в зависимости от случайных обстоятельств.

Число отличных оценок у студентов одной группы на экзамене; периметр перпендикулярного сечения ствола дерева; расстояние точки падения диска от точки метания; вес наугад взятого зерна пшеницы; число избирателей, которые могут отдать свои голоса определенному политическому блоку, - примеры случайных величин, относящихся к различным областям жизни.

Несмотря на разнородность конкретного содержания приведенных примеров, все они с точки зрения математики представляют одну и ту же картину. Каждая из этих величин под влиянием случайных обстоятельств, способна принимать различные значения. Заранее указать, какое значение примет эта величина, нельзя, так как оно меняется от зависимости от результата стохастического опыта (эксперимента) случайным образом. В самом общем смысле случайная величина – это некоторая переменная величина, принимающая в зависимости от случая те или иные значения с определенными вероятностями.

Считают, что случайная величина известна, если все её возможные значения, и вероятности, с которыми случайная величина принимает эти значения.

Разнообразие случайных величин велико. Число принимаемых ими значений может быть конечным, счетным или несчетным; значения могут быть расположены дискретно или заполнять интервалы (конечные или бесконечные). Для того чтобы задавать вероятности значений случайных величин, столь различных по своей природе, и притом задавать их одним и тем же способом, в теории вероятностей используют функцию распределения случайной величины.

Случайная величина есть некоторая измеримая функция, заданная на пространстве элементарных исходов. Для каждой случайной величины определена функция распределения.

Пусть X – случайная величина, x – действительное число. Вероятность того, что X примет значение, меньшее, чем x, называется **функцией распределения вероятностей случайной величины:**

$F_X(x) = P\{X < x\}$.

Свойства функции распределения.

1) При помощи функции распределения можно вычислить вероятность попадания случайной величины в полуинтервал:

$P\{X \in [x_1, x_2)\} = F_X(x_2) - F_X(x_1)$.

Действительно, пусть ***A***- событие, состоящее в том, что X примет значение, меньшее, чем x_2; ***B***- событие, состоящее в том, что $X<x_1$, и, наконец ***C***- событие $\{x_1 \le X < x_2\}$; тогда, очевидно, ***A=B+C***. Так как события ***B*** и ***C*** несовместны, то ***P(A)=P(B)+P(C).***

Но $P(A)=F_X(x_2); P(B)=F_X(x_1); P(C)=P\{x_1 \le X < x_2\}$, поэтому

$P\{x_1 \le X < x_2\}=F_X(x_2)-F_X(x_1)$.

2) Функция распределения $F(x)$ есть *неубывающая* функция, т.е. при $x_2>x_1$ имеет место $F(x_2) \ge F(x_1)$.

Действительно, так как, определению, вероятность есть неотрицательное число, то из первого свойства следует второе.

3) Предел функции распределения *на минус бесконечности* равен *нулю*. Предел функции распределения *на плюс бесконечности* равен *единице.*

Действительно, так как неравенство $\{X < +\infty\}$ достоверно, то $P\{X < +\infty\}=1$.

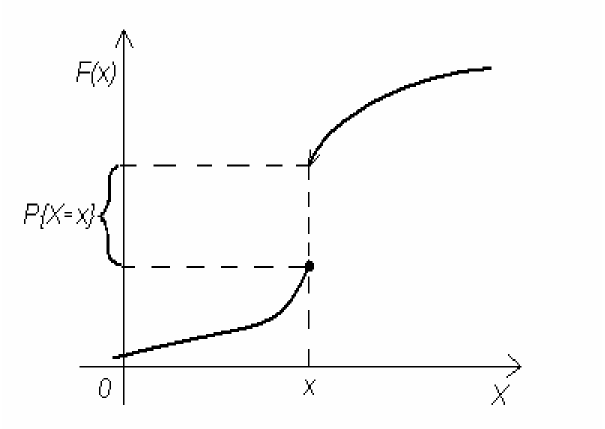
4) Функция распределения *непрерывна слева*, то есть

$P\{X < x\}=F(x)=F(x-0)$;

$P\{X \le x\}= F(x+0)$.

Таким образом, $P\{X = x\}= F(x+0) - F(x)$.

Это означает, что вероятность того, что случайная величина примет значение x, равна скачку функции распределения в данной точке.



В дальнейшем будем рассматривать два типа случайных величин – непрерывные и дискретные. Кроме того, существуют, так называемые сингулярные распределения. В общем случае, произвольное распределение может быть представлено в виде смеси непрерывного, дискретного и сингулярного:

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{p}_1 \cdot \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{p}_2 \cdot \boldsymbol{F}_2 + \boldsymbol{p}_3 \cdot \boldsymbol{F}_3, \qquad \text{где} \qquad \boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2 + \boldsymbol{p}_3 = 1.$$

Дискретные случайные величины.

Дискретные случайные величины – это случайные величины, которые могут принимать только конечное или счетное (бесконечное множество, все члены которого можно занумеровать натуральными числами) множество значений.

Например, число появлений герба при трех подбрасываниях монеты (возможные значения 1, 2, 3); число отказавших элементов в приборе, состоящем из 5 элементов (возможные значения 0,1, 2, 3, 4, 5); число выстрелов до первого попадания в цель (возможные значения 1, 2, …, К; где К-число имеющихся патронов) – все это дискретные случайные величины.

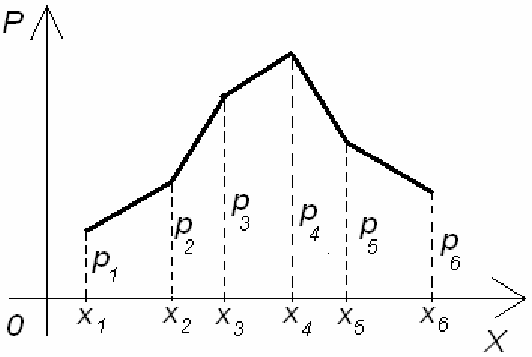
Для полной вероятностной характеристики дискретной случайной величины X, принимающей с положительными вероятностями значения x_1, x_2,x_3,…, достаточно знать вероятности, с которыми дискретная случайная величина принимает свои значения

$\boldsymbol{p_к=P\{X=x_к\}}$.

Совокупность значений случайной величины $\boldsymbol{\{x_к\}}$ и их вероятностей $\boldsymbol{\{p_к\}}$ называют **рядом распределения.** Ряд распределения часто записывают в виде таблицы, где в верхней строчке перечисляют значения случайной величины, а нижней - вероятности этих значений.

X	x_1	x_2	…	x_k
P	p_1	p_2	…	p_k

Чтобы придать ряду распределения более наглядный вид, часто прибегают к его графическому изображению – **многоугольнику распределения.** Многоугольник распределения строиться следующим образом: по оси абсцисс откладывают возможные значения случайной величины $\boldsymbol{x_1, x_2, x_3, \ldots}$, а по оси ординат – вероятности этих значений $\boldsymbol{p_1, p_2, p_3, \ldots}$. Полученные точки с координатами $\boldsymbol{(x_1,p_1), (x_2,p_2), (x_3,p_3), \ldots}$ соединяют отрезками прямых.



Функция распределения любой дискретной случайной величины определяется через ряд распределения с помощью равенства $\boldsymbol{F(x)} = \sum\limits_{x_R \prec x} p_K$, из которого следует важнейшее свойство ряда распределения: *сумма всех вероятностей, составляющих ряд распределения, равна единице:*

$$\sum_K p_K = \boldsymbol{1.}$$

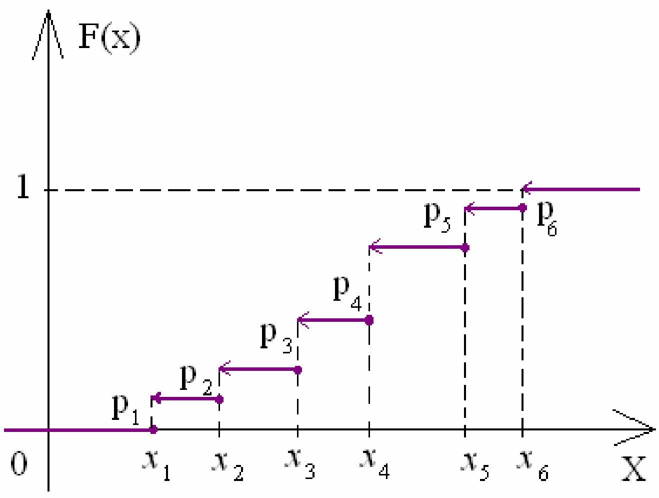
Исходя из определения функции распределения дискретной случайной величины, можно записать некоторые характерные *свойства* такой функции:

1) функция распределения дискретной случайной величины – разрывная ступенчатая функция;

2) функция распределения дискретной случайной величины возрастает скачками при тех значениях *x*, которые являются возможными значениями этой случайной величины;

3) величина скачков функции распределения дискретной случайной величины равна
$p_к=P\{X=x_к\}$.

4)сумма всех скачков функции распределения дискретной случайной величины равна единице.



Непрерывные случайные величины.

Непрерывные случайные величины – это величины, возможные значения которых образуют некоторый конечный или бесконечный интервал.

Функция распределения непрерывной случайной величины везде непрерывна. Из последнего положения следует, что вероятность любого отдельного значения непрерывной случайной величины равна нулю.

Остановимся на последнем утверждении подробнее.

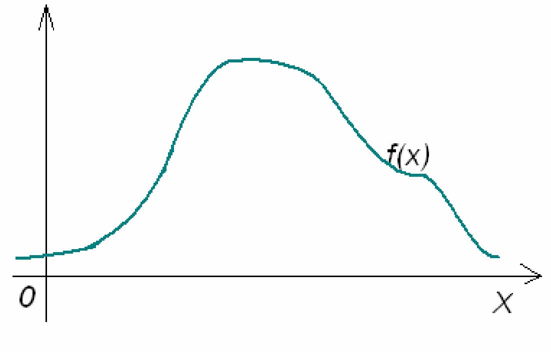
Событие, состоящее в том, что непрерывная случайная величина примет значение *a*, возможно; однако его вероятность равна нулю. Такие события – возможные, но с нулевой вероятностью – появляются только в том случае, когда пространство элементарных исходов не является конечным или счетным. При непрерывном распределении вероятность попадания на сколь угодно малый участок может быть отлична от нуля.

Вычислим вероятность попадания непрерывной случайной величины X в интервал $(x;\ x+\Delta x)$, предположив, что соответствующая функция распределения $F(x)$ непрерывна и дифференцируема: $P\{x< X < x+\Delta x\}=F(x+\Delta x) - F(x)$. Рассмотрим отношение этой вероятности к длине участка, т.е. среднюю вероятность. Устремим Δx к нулю, тогда в пределе получим производную от функции распределения:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}=F'(x)=f(x).$$

Функцию $f(x)$ называют **плотностью распределения** случайной величины X.

Кривая, изображающая плотность распределения случайной величины, называется **кривой распределения.**



Используя формулу Ньютона – Лейбница, можно записать вероятность попадания случайной величины в заданный интервал ***(а,в)*** через плотность распределения:

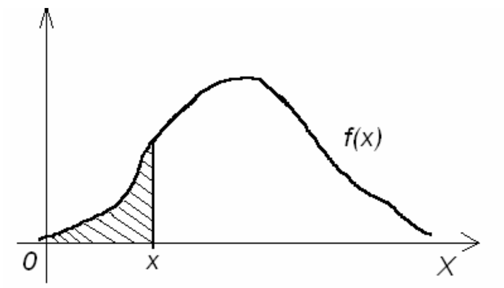
$$P\{a < X < b\} = \int_a^b f(x)dx.$$

Так как вероятность любого отдельного значения непрерывной случайной величины равна нулю, то можно рассматривать здесь открытый интервал, не включая в него левый конец (***в***).

По теореме Барроу можно выразить функцию распределения непрерывной случайной величины через её плотность распределения:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt.$$

Геометрически ***F(x)*** представляет собой площадь под кривой распределения, лежащую левее точки *x*.



Основные свойства плотности распределения:
1) плотность распределения является неотрицательной функцией;
2) интеграл от минус до плюс бесконечности от плотности распределения равен единице:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1.$$

Числовые характеристики случайных величин.

Функция распределения случайной величины, так же, как и плотность распределения, и ряд распределения, являются исчерпывающими характеристиками случайной величины.

Однако во многих вопросах практики нет необходимости характеризовать случайную величину полностью. Зачастую достаточно указать только отдельные числовые параметры, характеризующие основные черты распределения случайной величины: например, какое-то среднее значение, около которого группируются возможные значения случайной величины; какое-либо число, характеризующее степень разбросанности этих значений относительно среднего. Пользуясь такими характеристиками, все существенные сведения относительно случайной величины можно выразить наиболее компактно. Такие характеристики называют числовыми характеристиками случайной величины.

В теории вероятностей числовые характеристиками и операции с ними играют большую роль. Часто удается решить задачу до конца, оставляя в стороне законы распределения и используя только числовые характеристики.

1.Математическое ожидание случайной величины.

Среднее значение случайной величины – некоторое число, являющееся как бы её представителем и заменяющее её при грубо ориентировочных расчетах. Когда говорят «средняя продолжительность жизни в России равна 60 годам» или «средняя заработная плата в городе N равна 3000 руб.», то этим указывают определенную числовую характеристику случайной величины, описывающую её положение на числовой оси, т.е. характеристику положения.

Из характеристики положения в теории вероятностей важнейшую роль играет математическое ожидание (или среднее значение) случайной величины.

Рассмотрим дискретную случайную величину $\boldsymbol{X}$, принимающую возможные значения $\boldsymbol{x_1}$, $\boldsymbol{x_2}$,$\boldsymbol{x_3}$,…, с вероятностями $\boldsymbol{p_1}$, $\boldsymbol{p_2}$, $\boldsymbol{p_3}$,…. **Математическим ожиданием** дискретной случайной величины называется сумма произведений всех возможных значений случайной величины на вероятности этих значений:

$$M(X)=\sum_{K} x_K p_K .$$

Для непрерывной случайной величины $\boldsymbol{X}$ с плотностью $\boldsymbol{f(x)}$ математическое ожидание выражается уже не суммой, а интегралом:

$$M(X)=\int_{-\infty}^{\infty} x\cdot f(x)dx.$$

Заметим, что математическое ожидание существует не для всех случайных величин, так как сумма и интеграл в определении должны сходиться абсолютно.

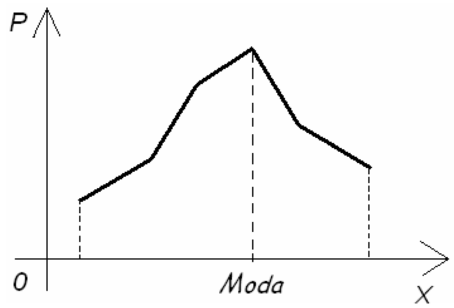
Простейшие свойства математического ожидания:

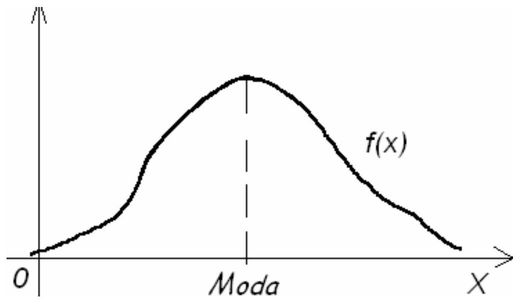
1) математическое ожидание постоянной равно этой постоянной: $\boldsymbol{M(C)=C}$;

2) постоянную величину можно выносить за знак математического ожидания, т.е. $\boldsymbol{M(C\cdot X)=C\cdot X}$.

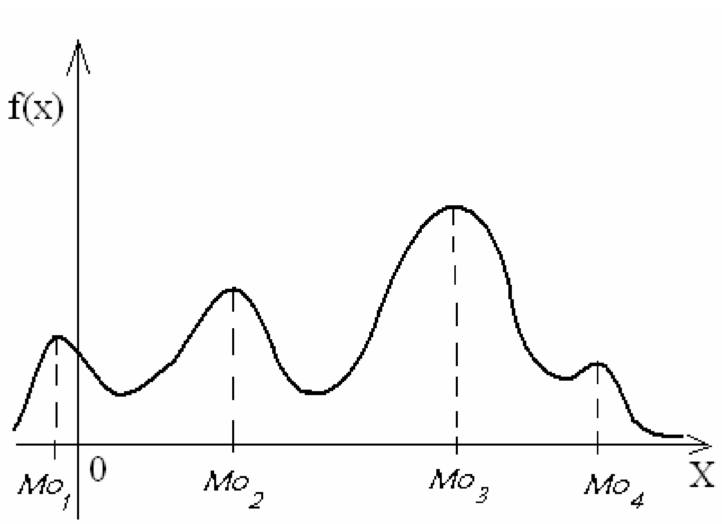
2.Медиана и мода случайной величины.

Кроме важнейших из характеристик положения – математического ожидания – практике применяют и другие характеристики положения, в частности, мода и медиана случайной величины. **Модой дискретной случайной величины** называется её наиболее вероятное значение. Для непрерывной величины модой является то значение, в котором плотность вероятности максимальна.





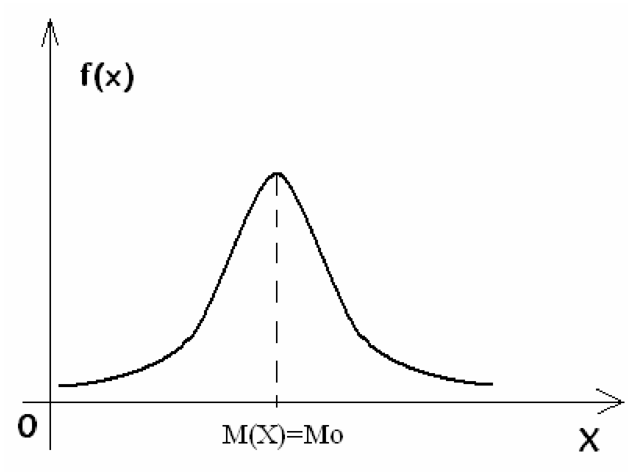
Если многоугольник распределения или кривая распределения имеют более одного максимума, то распределение называют <u>*полимодальным.*</u>



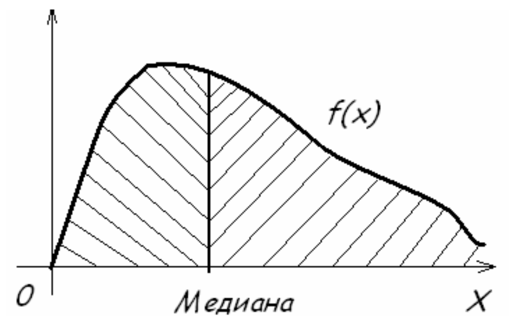
Если же многоугольник распределения или кривая распределения имеют ровно один максимум, то распределение называют *унимодальным.*

В общем случае математическое ожидание и мода не совпадают. В частных случаях, когда распределение является симметричным, существуют мода и математическое ожидание, то они совпадают друг с другом и с центром симметрии распределения.

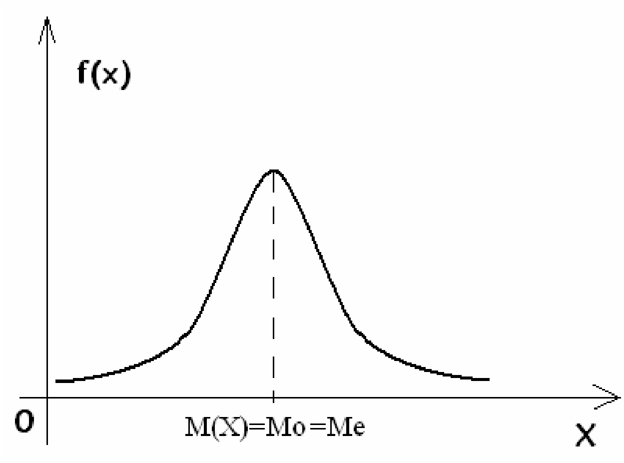
На рисунке – кривая симметричного унимодального распределения.



Для непрерывных случайных величин применяют ещё одну характеристику положения - медиану случайной величины. **Медиана** – это абсцисса точки, в которой площадь под кривой распределения делиться пополам, т.е. одинаково вероятно, окажется ли случайная величина меньше или больше медианы.



В случае симметричного унимодального распределения медиана совпадает с математическим ожиданием и модой.



3. Дисперсия и среднеквадратическое отклонение случайной величины.

Дисперсия и среднеквадратическое отклонение относятся к характеристикам вариации. Характеристики вариации уточняют представление о распределении случайной величины, давая сведение о степени рассеивания случайной величины относительно центра группирования.

Математическое ожидание и дисперсия случайной величины являются её основными характеристиками.

Дисперсия случайной величины – это характеристика рассеивания значений случайной величины около её математического ожидания, определяемая по формуле:

$$D(X)=M(X-M(X))^2.$$

Т.е. дисперсия равна математическому ожиданию квадрата отклонения случайной величины от своего математического ожидания.

Дисперсию часто вычисляют по формуле

$$D(X)=M(X^2)-(M(X))^2,$$

которая следует из определения дисперсии и свойств математического ожидания:

$$D(X)=M(X-M(X))^2 = M(X^2-2X\cdot M(X)+(M(X))^2) =$$

$$=M(X^2)- 2M(X)\cdot M(X)+(M(X))^2 = M(X^2)-M(X))^2.$$

Если случайная величина X – дискретна и известен её ряд распределения, то

$$D(X)=\sum_K x_K^2\cdot p_K-(\sum_K x_K\cdot p_K)^2;$$

Если же случайная величина X – непрерывна и задана её плотность, то

$$D(X)=\int_{-\infty}^{\infty} x^2\cdot f(x)dx-\left(\int_{-\infty}^{\infty} x\cdot f(x)dx\right)^2.$$

Простейшие свойства дисперсии:

1) дисперсия любой случайной величины неотрицательна: $D(X)\geq 0$ (это сразу следует из определения);

2) дисперсия постоянной равна нулю: $D(C)=M(C-M(C))^2=M(C-C)^2= M(0)=0$;

3) дисперсия произведения случайной величины не постоянную равна произведению дисперсии случайной величины на квадрат постоянной: $D(C\cdot X)=C^2\cdot D(X)$;

4) дисперсия случайной величины не изменится, если к случайной величине прибавить постоянную:

$D(X+C)=D(X)$.

Дисперсия случайной величины имеет размерность квадрата случайной величины, в то время как математическое ожидание имеет размерность самой случайной величины. Для наглядной характеристики рассеивания удобнее пользоваться величиной, размерность которой совпадает с размерностью случайной величины. Для этого из дисперсии извлекают квадратный корень. Полученную величину называют **среднеквадратическим отклонением случайной величины.** Среднеквадратическое отклонение обозначают $\sigma(X)$.

В математической модели случайна величина описывает те или иные параметры изучаемого явления. Числовые значения параметров зависят от выбора масштаба его измерения (например, рубли, тысячи рублей, миллионы рублей). При этом числовые характеристики случайной величины зависят от выбора масштаба измерения исходного параметра.

Для изучения свойств случайных величин, не зависящих от выбора масштаба измерения и положения центра группирования, исходную случайную величину приводят к некоторому стандартному, нормированному виду.

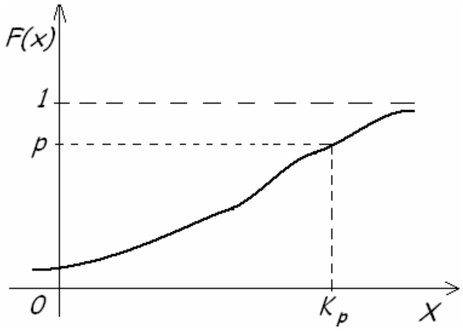
Если $M(X)=0$ и $D(X)=1$, то случайную величину X называют **нормированной.** Для того, чтобы отнормировать случайную величину, из неё надо вычесть математическое ожидание и поделить на среднеквадратическое отклонение: $X^* = \dfrac{X - M(X)}{\sigma(X)}$.

Нормируя случайную величину, мы как бы меняем начало отсчета и масштаб измерения исходного параметра. При этом случайная величина X^* является уже безразмерной и не зависит от выбора масштаба измерения.

4. Квантиль распределения случайной величины.

Название квантиль произошло от латинского *quantum* – сколько.

Квантиль распределения K_p случайной величины уровня p для непрерывных распределений определяется как решение уравнения $F(K_p)=p$, где F- функция распределения случайной величины.



На рисунке – график функции некоторого распределения. По оси ординат откладываем значение уровня p, проводим прямую $y=p$, абсцисса точки пересечения кривой и прямой и есть квантиль уровня p.

Квантиль уровня ½ - это медиана распределения.

Если положить p=0,95, то получим квантиль уровня 0,95.

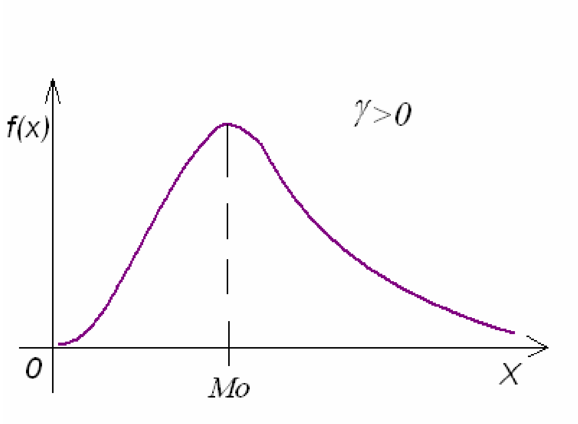
Квантили различных уровней находят по таблицам. Для применения в математической статистике составлены таблицы квантилей наиболее важных распределений.

5. Асимметрия и эксцесс распределения.

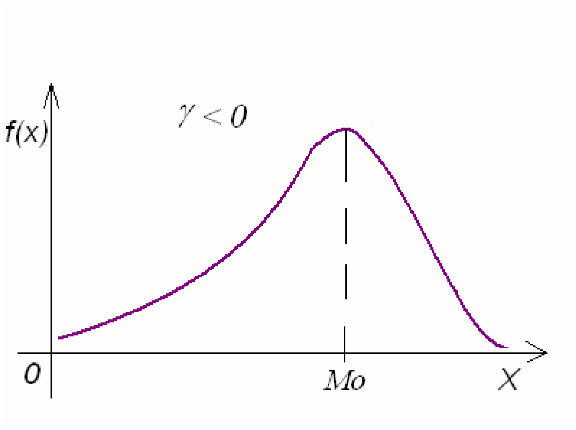
Асимметрия распределения – это качественное свойство кривой распределения, указывающее на отличие от симметричного распределения. Коэффициент асимметрии определяется отношением:

$$\gamma = \frac{M(X - M(X))^3}{(\sigma(X))^3}.$$

Если коэффициент асимметрии положителен, более «длинная» часть кривой плотности распределения лежит правее моды, что видно на рисунке.



Если коэффициент асимметрии отрицателен, более «длинная» часть кривой плотности распределения лежит левее моды, что также видно на рисунке.



Эксцесс – числовая характеристика островершинности графика плотности вероятности унимодального распределения. Коэффициент эксцесса определяется по формуле

$$\varsigma = \frac{M(X - M(X))^4}{(D(X))^2} - 3.$$