Конспект лекций

ДО РОЗДІЛУ «МАТЕМАТИЧНЕ ПРОГРАМУВАННЯ»

1.Лінійне програмування

Поняття про оптимізаційні задачі. Предмет лінійного програмування /ЛП/. Достатня умова оптимальності опорного рішення. Умова наближеності функції цілі. Симплекс-метод.

2.Двоїстість в лінійному програмуванні

Взаємно двоїсті задачі лінійного програмування. Теореми двоїстості. Критерії оптимальності припустимого рішення задачі лінійного програмування. Економічне тлумачення взаємно двоїстих задач і теорем двоїстості.

3.Транспортна задача в матричній і сітковій постановці. Метод потенціалів.

4.Елементи теорії гри

Матрична гра з нулевою сумою. Чисті та мішані стратегії гри. Матрична гра та взаємно двоїсті задачі лінійног програмування. Теорема Неймана.

5.Дискретне програмування

Класичні задачі дискретного програмування. Поняття про метод розгалужень та меж. Приклади розв'язування задач методом розгалужень та меж.

6.Опукле програмування

Задачі опуклого програмування. Основні алгоритми опуклого програмування.

7.Елементи динамічного програмування

Поняття про оптимальне керування. Принцип максимума Белмана. Приклади рішень задач методом динамічного програмування.

Тема 1. ЛІНІЙНЕ ПРОГРАМУВАННЯ

1.1.Загальна та основна задачі лінійного програмування

Література: [2, §1, 1.1, 1.3; §2, 2.1, 2.5; §3, 3.1, 3.4; §4, 4.1, 4.7; §5, 5.1, 5.4; §6, 6.1, 6.5; 3, гл. I, §1, 10, гл. IV; §1,2,5, №1,2,7,12,15,18,44,54,99,116,135,284; 7, §1, 1.1, 1.4; §2, 2.1, 2.2]

При вивченні цієї теми необхідно засвоїти форми запису задач лінійного програмування. Для наочності розглянемо такий приклад.

Необхідно знайти оптимальний розподіл землі площею 10 тис. га під пшеницю та картоплю за критерієм максимуму прибутку. Економічні показники їх виробництва подано у табл.1.

Таблиця 1

Показник	Витрати на тис. га		Розміри ресурсів
	Пшениця	Картопля	
Механізована праця, тис. людино-дн.	2	5	35
Добрива, тис. т.	2	1	18
Врожай, ц/га	30	100	
Прибуток, крб./ц	10	5	

Скласти математичну модель задачі. Нехай буде засіяно пшеницею $\boldsymbol{x_1}$, картоплею $\boldsymbol{x_2}$ тис. га. Тоді для обробки землі буде потрібна механізована праця у розмірі $2\boldsymbol{x_1}+5\boldsymbol{x_2}$ тис. людино-дн.; добрива – $2\boldsymbol{x_1}+\boldsymbol{x_2}$ тис. т. Але ресурси обмежені, тому повинні виконуватись нерівності

$$\begin{cases} 2x_1+5x_2 \le 35, \\ 2x_1+x_2 \le 18. \end{cases}$$

Крім того, для засіву відведено тільки 10 тис. га. землі, тому повина виконуватись ще одна умова:

$$x_1+x_2 \le 10,$$

при цьому $x_1 \ge 0$; $x_2 \ge 0$

При такому розподілі землі буде одержано прибуток, млн. крб.,

$$F=0{,}3x_1+0{,}5x_2 \qquad /1/$$

Таким чином, приходимо до такої математичної задачі.

Потрібно знайти серед усіх невід'ємних розв'язків системи нерівностей

$$\begin{cases} 2x_1+5x_2 \le 35, \\ 2x_1+x_2 \le 18, \\ x_1+x_2 \le 10, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases} \qquad /2/$$

такий розв'язок, при якому функція цілі /1/ приймає найбільше значення.

Оскільки функція /1/ і система обмежень /2/ лінійні відносно змінних $\boldsymbol{x_1}$ та $\boldsymbol{x_2}$, задача /1/, /2/ буде задачею лінійного програмування.

Означення 1. Загальною задачею лінійного програмування зветься задача, яка визначає максимальне /мінімальне/ значення функції

$$F=\sum_{j=1}^{n} i_j x_j \qquad /3/$$

за умовою

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_j \le b_i & (i=\overline{1,k}), \qquad /4/ \\ \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_j = b_i & (i=\overline{k+1,m}), \qquad /5/ \end{cases}$$

$$\boldsymbol{x_j} \ge 0 \qquad (j=\overline{1,n}) \qquad /6/$$

Означення 2. Функція /3/ зветься функцією цілі /чи лінійною формою/ задачі /3/ - /6/, а умови /4/ - /6/ - обмеженнями даної задачі.

Означення 3. Стандартоною /чи симетричною/ задачею лінійного програмування зветься задача, яка визначає мінімальне значення функції /3/ при виконанні умов /5/ та /6/, де $k=m$.

Означення 4. Канонічною /чи основною/ задачею лінійного програмування зветься задача, яка визначає мінімальне значення функції /3/ при виконанні умов /5/ та /6/, де $k=0$.

Означення 5. Сукупність чисел $x=(x_1,x_2,\dots,x_n)$, які задовольняють умовам обмеження задачі /4/ - /6/, звуться припустимими розв'язками /чи планами/

Означення 6. План $x^*=\left(x_1^*, x_2^*, \dots x_n^*\right)$, за якого функція цілі /3/ приймає своє максимальне /чи мінімальне/ значення, зветься оптимальним.

Нехай функція цілі за планом X має значення $F(X)$, а за планом X^*-$F(X^*)$, тоді для будь-якого X повинна виконуватись умова $F(X) \le F(X^*)$ /чи $F(X) \ge F(X^*)$, якщо потрібно знайти мінімум функції/.

Наведені форми задач лінійного програмування еквівалентні в тому значенні, що кожна з них за допомогою нескладних перетворень може бути переписана у формі другої задачі.

Щоб перейти від однієї форми до другої, потрібно вміти зводити задачу максимізації до задачі мінімізації, переходити від обмежень - нерівностей до обмежень – рівнянь і навпаки; робити заміну змінних /якщо вимагається невід'ємність/, позначити, наприклад, $x_k=u_k-v_k$, де u_k, v_k, будуть задовольняти умови невід'ємності.

В тому випадку, коли вимагається найти максимум функції $F=c_1x_1+c_2x_2+\dots+c_nx_n$, можна перейти до визначення її мінімуму $F_1 = -c_1x_1 - c_2x_2 - \dots - c_nx_n$, тому що $max\ F = min\ (-F)$

Обмеження – нерівність початкової задачі лінійного програмування, яке має вигляд

≤, можна перетворити в обмеження – рівність, додаючи до його лівої частини допоміжну невід'ємну змінну, а обмеження – нерівність, яке має вигляд ≥, в обмеження – рівність, віднімаючи від його лівої частини допоміжну невід'ємну змінну.

Число введених допоміжних змінних при перетворенні обмежень – нерівностей в обмеження – рівності дорівнює числу перетворених нерівностей.

Введені допоміжні змінні мають певний економічний зміст.

Наприклад, якщо в обмеженнях початкової задачі лінійного програмування відобразити витрату та наявність виробничих ресурсів, то числове значення допоміжної змінної задачі, записаної у формі основної, дорівнює об'єму невикористаного ресурсу.

Приклад 1. Написати у формі основної задачі лінійного програмування наступну; знайти мінімум функції:

$$F = -2x_1 + x_2 + x_3$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 6x_3 \le 12, \\ 3x_1 + 5x_2 - 12x_3 = 14, \\ -3x_1 + 6x_2 + 4x_3 \le 18, \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0. \end{cases}$$

Розв'язання. Система обмежень має дві нерівності і одну рівність. Таким чином, щоб записати її в формі основної задачі, потрібно перейти від обмежень – нерівностей до обмежень – рівностей. Оскільки нерівностей дві, перехід до рівностей може бути здійснено введенням двох допоміжних змінних x_4 та x_5. При цьому до лівих частин нерівностей типу ≤ додаємо відповідну зміну.

В наслідок цього початкова задача може бути написана у формі основної задачі: мінімізувати функцію $F = -2x_1 + x_2 + x_3$ за умов

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 6x_3 + x_4 = 12, \\ 3x_1 + 5x_2 - 12x_3 = 14, \\ -3x_1 + 6x_2 + 4x_3 + x_5 = 18, \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0. \end{cases}$$

Приклад 2. Записати у формі основної задачі лінійного програмування наступну:

$$F = -2x_1 + x_2 + 5x_3 \to max$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + 5x_3 \le 12, \\ 6x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 18, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 \ge 16, \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0. \end{cases}$$

Розв'язання. В цій задачі два обмеження – нерівності. Тому, щоб привести систему до рівнянь, до лівої частини першої нерівності додамо допоміжну невід'ємну змінну, а від нерівності типу > віднімемо допоміжну невід'ємну змінну. Оскільки функція цілі F максимізується, розглянемо другу – F_1 = - F, яку будемо мінімізувати. Внаслідок цього початкова задача може бути записана у формі основної задачі ЛП:

знайти мінімум $F_1 = 2x_1 - x_2 - 5x_3$

за умов

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + 5x_3 + x_4 = 12, \\ 6x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 18, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 - x_5 = 16, \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0. \end{cases}$$

1.2. Властивості основної задачі лінійного програмування

Запишемо основну задачу ЛП у загальному вигляді

$$F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min$$

за умов

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \qquad (i = \overline{1, m}),$$

$$x_j \geq 0, \qquad (j = \overline{1, n}).$$

Перепишемо цю задачу у векторній формі.

Знайти мінімум функції

$$F = cx \qquad /7/$$

за умов

$$x_1P_1 + x_2P_2 + \ldots .. + x_nP_n = P_o \qquad /8/$$

$$x \geq 0, \qquad /9/$$

$$c = (c_1, c_2, \ldots, c_n),\ x = (x_1, x_2, \ldots., x_n), \qquad /10/$$

де cx**.** – скалярний добуток;

$P_1, P_2, P_3, \ldots., P_n$ та P_o, m – вимірні вектори – стовпці, утворені з коефіцієнтів при невідомих та вільних членах системи рівнянь задачі:

$$P_o = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ : \\ b_m \end{pmatrix}; \qquad P_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ : \\ a_{m1} \end{pmatrix};$$

$$P_2 = \begin{pmatrix} a_{21} \\ a_{22} \\ : \\ a_{m2} \end{pmatrix}; \qquad P_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ : \\ a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Означення 7. План $x = (x_1, x_2, \ldots\ldots x_n)$ зветься опорним планом задачі ЛП, якщо система векторів P_j, що входить до розкладу /8/ з додатними коефіцієнтами x_j, лінійно незалежна.

До умови: оскільки P_j є m – вимірними, то з визначеного опорного плану постає, що число додатних компонентів опорного плану x не може бути більше, ніж m**.**

Означення 8. Опорний план зветься невиродженим, якщо він має рівно m додатних компонент, у противному разі він зветься виродженим.

Щоб дати характеристику основним властивостям задачі ЛП /7/ - /9/, необхідно згадати основні властивості опуклих множин, тому що вони мають тісний зв'язок один з одним.

Нехай $x_1, x_2, \ldots\ldots x_n$ – довільні точки евклідового простору Е. Опукла комбінація цих точок зветься сумою:

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_x x_2 + \ldots\ldots + \alpha_n x_n,$$

де α_1 – довільні невід’ємні числа, сума яких дорівнює одиниці

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1, \alpha_i \geq 0, i = \overline{1, n} \right).$$

Множина зветься опуклою, якщо разом з обома своїми точками вона вміщує і їх лінійну комбінацію.

Точка x опуклої множини зветься кутовою, якщо вона не може бути зображена у вигляді лінійної комбінації яких – небудь двох інших точок даної множини.

*Теорема 1.*Множина планів основної задачі ЛП є опуклою /якщо множина непуста/.

Означення 9. Непуста множина планів основної задачі ЛП зветься многогранником рішень, а кожна кутова точка многогранника рішень – вершиною.

Теорема 2. Якщо основна задача ЛП має оптимальний план, то функція цілі задачі приймає мінімальне значення в одній з вершин многогранника рішень. Якщо функція цілі задачі приймає мінімальні значення більше ніж в одній вершині, то вона приймає його в будь – якій точці, яка є лінійною комбінацією цих вершин.

*Теорема 3.*Якщо система векторів $P_1, P_2, \ldots\ldots P_k$ $(k \leq n)$ в розкладі /8/ лінійно незалежна

$$x_1P_1 + x_2P_2 + \ldots\ldots + x_kP_k = P_o,$$

де всі $x_j \geq 0$**,** то точка $x = (x_1, x_2, \ldots\ldots x_k, o, o, \ldots o)$ – вершина многогранника рішень.

Теорема 4. Якщо $x= (x_1,x_2,\ldots x_k)$ – вершина многогранника рішень, то вектори P_j відповідні додатним в розкладі /8/, лінійно залежні.

Сформульовані вище теореми дозволяють зробити такі висновки. Непуста множина планів основної задачі ЛП створює опуклий многогранник, кожна вершина якого визначає опірний план. В одній з вершин многогранника рішень функція цілі приймає мінімальне значення / за умовою, що функція обмежена знизу/. Якщо функція приймає мінімальне значення більше ніж в одній вершині, то це значення вона приймає в будь- якій точці, яка є лінійною комбінацією даних вершин.

1.3. Геометричний зміст задачі лінійного програмування

Якщо задача ЛП записана в стандартній формі і має не більше двох змінних або задача записана в основній формі, але має не більше двох вільних змінних /$n - r \le 2$, де n – кількість змінних $\boldsymbol{x_i}$; r – ранг матриці /, то вершину многогранника рішень найти зрівняно просто.

Розв’яжемо задачу, яка визначає мінімальне значення функції

$$F = c_1x_1+c_2x_2 \qquad /11/$$

за умов

$$a_{i1}\,x_1+a_{i2}\,x_2\le b_i \qquad (i=\overline{1,k}), \qquad /12/$$

$$x_j\ge 0 \qquad /13/$$

Кожна з нерівностей /12/ і /13/ системи обмежень задачі геометрично визначає півплощу відповідно з граничними прямими

$$a_{i1}\,x_1+a_{\,2}\,x_2=b_i \qquad (i=\overline{1,k}); \; x_1=0; \; x_2=0.$$

Якщо система /12/ і /13/ сумісна, то областю її розв’язків буде множина точок, які належать до всіх півплощин. Множина точок перетину всіх площин опукла. Таким чином, областю припустимих розв’язків /11/ - /13/ буде опукла множина, яка зветься многокутником розв’язків.

В одній з вершин многокутника розв’язків функція цілі приймає мінімальне значення. Щоб знайти цю точку, треба побудувати лінію рівня функції цілі $c_1x_1+c_2x_2= h$, потім переміщати її в напрямку вектора $\vec{c} = (c_1;c_2)$, доки вона не пройде через останню загальну точку з многокутником розв’язків, якщо задача розв’язується на ***max***, і в бік $-\vec{c}$, якщо задача розв’язується на *min*.

Приклад 1. Розглянемо приклад геометричного розв'язку задачі /1/, /2/:

$$F=0,3x_1+0,5x_2 \rightarrow max$$

$$\begin{cases} 2x_1+5x_2 \le 35, \\ 2x_1+x_2 \le 18, \\ x_1+x_2 \le 10, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Розв'язання. Визначимо спочатку многокутник розв'язків. Для цього в нерівностях системи обмежень і умовах невід'ємності знаки нерівностей треба замінити знаками точних рівностей і побудувати відповідні прямі:

$$\begin{cases} 2x_1+5x_2 = 35(I) \\ 2x_1+x_2 = 18(II) \\ x_1+x_2 = 10(III) \\ x_1 = 0 \\ x_2 = 0. \end{cases}$$

Ці прямі зображені на рис. 1, де стрілками показані півплощини, які задовольняють нерівності і /2/.

Рис.I

Многокутник розв'язків даної задачі – OABCO. Координати будь – якої точки многокутника задовольняють дану систему нерівностей /2/ і умови невід'ємностей змінних. Задача буде розв'язана, якщо знайдемо вершину, в якій функція цілі приймає максимальне значення. Щоб знайти цю точку, побудуємо вектор $\vec{C}$ = /0,3;0,5/ і пряму $0,3x_1+0,5x_2=h$.

Оскільки *h* – будь – яка стала, то пряма $0,3x_1+0,5x_2=h$ має загальні точки з многокутником розв'язків. Наприклад, *h=0*. Побудуємо пряму $0,3x_1+0,5x_2=0$ /на рис. 1 позначена пунктиром/. Перемістимо лінію рівня в напрямку вектора $\vec{C}$. Найбільш віддаленою в напрямку цього вектора буде точка *B*. Визначимо її координати. Точка *B* є точкою перетину прямих /III/ та /I/:

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 = 35, \\ x_1 + x_2 = 10. \end{cases}$$

Розв'язок цієї системи: $x_1=5; x_2=5$.

Отже, якщо засіяти 5 тис. га пшеницею та стільки ж картоплею, то прибуток буде найбільшим

$$F= 0{,}3\times 5+0{,}5\times 5=4 \text{ млн.крб.}$$

Розглянемо геометричний розв'язок задачі у випадку, коли кількість змінних більше двох, але $n - r \le 2$

Приклад 2. Знайти найбільше значення функції

$$F= - 16x_1 - x_2 + x_3 + 5x_4+5x_5$$

за умов

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 10, \\ -2x_1 + 3x_2 + x_4 = 6, \\ 2x_1 + 4x_2 - x_5 = 8, \\ x_j \ge 0 (j = \overline{1,5}). \end{cases}$$

Розв'язання. Зведемо кількість невідомих в задачі до двох, записавши її у формі стандартної.

При цьому система обмежень буде мати вигляд

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 10, \\ -2x_1 + 3x_2 \le 6, \\ 2x_1 + 4x_2 \ge 8, \\ x_j \ge 0, (j = \overline{1,5}). \end{cases}$$

В цільовій функції змінні $\boldsymbol{x_3, x_4, x_5}$ виключаються за допомогою співвідношень, які одержимо з відповідних рівнянь системи обмежень:

$$x_3= 10 - 2x_1 - x_2,$$

$$x_4= 6 - 2x_1 - 3x_2,$$

$$x_5= - 8+2x_1+4x_2;$$

$$F= - 16x_1 - x_2+10 - 2x_1 - x_2+5 (6+2x_1 - 3x_2)+5 (- 8+2x_1+4x_2) = 2x_1+3x_2.$$

Побудуємо многокутник рішень /рис.2/ розглянутої задачі.

Рис.2

Найбільшого значення цільова функція досягає у вершині *B* /точка перетину прямих /I/, /II/. Координати точки *B*: $x_1=3$, $x_2=4$.

Якщо повернутись до початкової задачі, будемо мати

$$x_3=0; \qquad x_4=0; \qquad x_5=14.$$

Таким чином, оптимальний план початкової задачі $x^*=/3; 4; 0; 0; 14/$**,** при цьому функція цілі досягає значення

$$F_{max}=18$$

1.4. Симплексний метод розв'язання задач лінійного програмування

Симплексний метод задач лінійного програмування застосовують у тому випадку, коли задача записана в основній формі. Цей метод заснований на переході від одного опорного плану до іншого, при цьому значення цільової функції зменшується, якщо задача має оптимальний план, а кожний опорний план невироджений.

Зазначений перехід можливий, якщо ми знаємо який – небудь початковий опорний план.

Розглянемо задачу, для якої цей план можна написати. Нехай потрібно знайти мінімальне значення функції

$$F=c_1x_1+c_2x_2+\ldots\ldots c_nx_n \qquad /14/$$

за умов

$$\begin{cases} x_1 + a_{1m+1}x_{m+1} + ...+ a_{1n}x_n = b_1, \\ x_2 + a_{2m+1}x_{m+1} + ...+ a_{2n}x_n = b_2, \\ ===================== \\ x_m + a_{mm+1}x_{m+1} + ...+ a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad /15/$$

$$x_j \geq 0 \qquad (j = \overline{1,n}). \qquad /16/$$

Тут a_{ij}, b_i, c_j $(i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n})$ – задані постійні числа $(m<n,\ b_i>0)$.

Запишемо цю задачу в векторній формі

$$F=cx \qquad /17/$$

за умов $x_1P_1+x_2P_2+\ldots+x_mP_m+\ldots+x_nP_n=P_o$, /18/

де $x_j \geq 0$ $(j = \overline{1,n})$, /19/

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ : \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad P_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ : \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad P_m = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ : \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$P_{m+1} = \begin{pmatrix} a_{1m+1} \\ a_{2m+1} \\ : \\ a_{mm+1} \end{pmatrix}, \ldots, \qquad P_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ : \\ a_{mn} \end{pmatrix}, \qquad P_o = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ : \\ b_m \end{pmatrix}. \qquad /20/$$

Вектори P_1, P_2,……P_m складають базис, $b_1P_1+b_2P_2+\ldots..+b_mP_m=P_o$, а це означає, що $x=(b_1,b_2,\ldots.b_m;\ 0,\ldots\ldots,0)$ – опорний план даної задачі / останні n-m компонент вектора x дорівнюють нулю/.

Оскільки системи одиничних векторів $P_1,P_2.....P_m$ складає базис m – мірного простору, то кожний з векторів $P_1,P_2.....P_n$ може бути представлений у вигляді лінійної комбінації векторів даного базису

$$P_j = \sum_{i=1}^{m} x_{ij}P_i \qquad \left(j = \overline{0,n}\right). \qquad /21/$$

Позначимо

$$Z_j = \sum_{i=1}^{n} c_i x_{ij} \qquad \left(j = \overline{1,n}\right), \qquad /22/$$

$$\triangle_j = Z_j - c_j \qquad \left(j = \overline{1,n}\right). \qquad /23/$$

Оскільки вектори $P_1, P_2.....P_n$ – одиничні,

$$x_{ij} = a_{ij}; Z_j = \sum_{i=1}^{m} c_1 a_{ij}, \Delta_j = \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij} - c_{j.}$$

Теорема 5. Ознака оптимальності опорного плану.

Опорний план $x^* = \left(x_1^*, x_2^*, ..., x_m^*, 0, ..., 0\right)$ задачі /14/ - /16/ є оптимальним, якщо $\Delta_j \le 0$ для будь – якого $j\left(j - \overline{1,n}\right)$.

Теорема 6. Якщо $\Delta_k > 0$ для будь-якого $j=k$, а серед чисел $a_{ik}\left(i = \overline{1,m}\right)$ немає додатного $\left(a_{ik} \le 0\right)$, то цільова функція /14/ задачі /14/-/16/ необмежена на множині її планів.

Теорема 7. Якщо опорний план *x* задачі /14/-/16/ невиражений і $\Delta_k > 0$, але серед чисел a_{ij} є додатні, то існує опорний план x^1 такий, що $F\left(x^1\right)\langle F\left(x\right)$.

Сформульовані теореми дозволяють перевірити, чи є даний план оптимальним, та виявити доцільність переходу до нового опорного плану.

Дослідження опорного плану на оптимальність, а також перехід до нового опорного плану краще вести, якщо умову задачі та початкові дані, одержані після визначення початкового опорного плану, записати у вигляді таблиці.

Приклад розрахунку. Розв'яжемо задачу /1/, /2/ симплексним методом. Оскільки в початковій задачі знаходять максимальне значення функції цілі

$$F = 0,3x_1 + 0,5x_2$$

при системі обмежень

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \le 35, \\ 2x_1 + x_2 \le 18, \\ x_1 + x_2 \le 10, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \end{cases}$$

то задача у вигляді основної буде мати такий вигляд:

знайти $\min Z = -F = -0,3x_1 - 0,5x_2$

за умов

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + x_3 = 35, \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 18, \\ x_1 + x_2 + x_5 = 10, \\ x_j \ge 0, \left(j = \overline{1,5}\right). \end{cases}$$

Тут введено допоміжні балансові змінні x_3,x_4,x_5, щоб від обмежень нерівностей /2/ перейти до рівностей.

Умову задачі та її розв'язок вмістимо в табл. 2.

Таблиця 2.

Базис		C_δ	C_i	-0,3	-0,5	0	0	0	Зауваження
			P_o	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	
	P_3	0	35	2	$\boxed{5}$	1	0	0	$\theta_1 = \min\left\{\frac{35}{2};\frac{18}{2};\frac{10}{1}\right\} = 9$
I	P_4	0	18	2	1	0	1	0	$\theta_2 = \min\left\{\frac{35}{2};18;\frac{10}{1}\right\} = 7$
	P_4	0	10	1	1	0	0	1	$\theta_1\Delta_1 = 9\times 0,3 = 2,7$
	$Z_j = 0$			0	0	0	0	0	$\theta_2\Delta_2 = 7\times 0,5 = 3,5$
	$\Delta Z_j = Z_j - C_j$			0,3	0,5	0	0	0	
	P_2	-0,5	7	2/5	1	1/5	0	0	
II	P_4	0	11	8/5	0	-1/5	1	0	$\theta_1 = \min\left\{\frac{35}{2};\frac{55}{8};\frac{15}{3}\right\} = 5$
	P_5	0	3	$\boxed{3,5}$	0	-1/5	0	1	$\theta_1\Delta_1 = 5\times 0,1 = 0,5$
	Z_j		-3,5	-0,2	-0,5	-0,1	0	0	
	$\Delta Z_j = Z_j - C_j$			0,1	0	-0,1	0	0	
	P_2	-0,5	5	0	1	1/3	0	-2/3	
III	P_4	0	3	0	0	1/3	1	-8/3	План оптимальний
	P_1	-0,3	5	1	0	-1/3	0	5/3	
	Z_j		-4,0	-0,3	-0,5	-1/15	0	-1/6	$X_{опт} = (5;5;0;3;0)$
	$\Delta Z_j = Z_j - C_j$			0	0	-1/15	0	-1/6	

Зауваження. З оптимального плану видно, що $x_4 = 3$, не означає, що в системі обмежень друге обмеження виконується як нерівність. Економічний зміст цього факту: 5 тис. т добрива залишились не використаними. Їх можна використати для інших цілей.

1.5. Двоїсті задачі лінійного програмування

Кожній задачі лінійного програмування відповідає деяка друга задача, яка називається спряженою, або спряженою по відношенню до вихідної чи прямої.

Визначимо, що таке двоїста задача по відношенню до загальної задачі лінійного програмування.

Початкова задача. Знайти максимальне значення функції

$$F = c_1 x_1 + c_2 x_2 + ... + c_n x_n \qquad /24/$$

за умов

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \le b_2, \\ ---------------- \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + ... + a_{kn}x_n \le b_k, \\ a_{k+1,1}x_1 + a_{k+2,2}x_2 + ... + a_{k+1,n}x_n = b_{k+1}, \\ ------------------- \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m, \\ x_j \ge 0, \left(j = \overline{1,n} \right) \end{cases} \qquad /25/ \quad /26/$$

Тоді двоїстою буде така: знайти *min* функції

$$F = b_1 y_1 + b_2 y_2 + ... + b_m y_m \qquad /27/$$

за умов

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + ... + a_{m1}y_m \ge c_1, \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + ... + a_{m2}y_m \ge c_2, \\ ---------------- \\ a_{1\ell}y_1 + a_{2\ell}y_2 + ... + a_{m\ell}y_m \le c_\ell, \\ a_{1\ell+1}y_1 + a_{2\ell+1}y_2 + ... + a_{m\ell+1}y_m = c_{\ell+1}, \\ ------------------- \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + ... + a_{mn}y_m = c_m, \end{cases} \qquad /28/$$

$$y_i \ge 0, \left(i = \overline{1,k}, k \le m \right). \qquad /29/$$

В табл. 2 початковий опорний розв’язок має вигляд X_{10n}=/0;0;35;18;10/, при цьому Z=0.

Щоб перевірити план на оптимальність, знайдемо оцінки

$$\Delta Z_j = Z_j - C_j \text{, де } Z_j = \overline{a_j} \times \overline{c_\delta}$$

Як бачимо, в табл.2 є додатні оцінки $\Delta Z_1 = 0,3$ і $\Delta Z_2 = 0,5$. Це означає, що план неоптимальний.

Для поліпшення його введемо в базис один з векторів, у якого оцінки додатні: P_1, чи P_2.

Оскільки векторів з додатними оцінками декілька, необхідно з'ясувати, який з них доцільно зводити. Це буде той вектор, для котрого $\theta_k \Delta Z_k$ більше. Таким чином, в базис введемо вектор P_2, а виведемо вектор P_3 з розв'язувальним елементом 5, якому відповідає $\theta_2 = 7$. В табл. 2 /II/ маємо одну додатну оцінку $\Delta Z_1 = 0{,}1$, отже, новий план неоптимальний. Визначивши $\theta_1 = 5$ бачимо, що розв'язувальним елементом необхідно брати 3/5, тобто ввести в базис вектор P_1, а вивести вектор P_5. Після одного кроку операції заміни базиса одержимо новий план /табл.2 /III//, який і буде оптимальним, тому що всі оцінки від'ємні.

У колонці для P_o записуємо значення функції цілі $Z_{опт}$*=-4,0.*

Таким чином, одержали оптимальний план X^**=/5,5,0,3,0/* при цьому значення функції цілі вихідної задачі F=-Z=4 млн. крб. Таке саме значення одержали при розв'язуванні задачі графічним методом.

Задачі /24/-/26/ та /27/-/29/ створюють пару, яка зветься в лінійному програмуванні двоїстою.

При порівнянні двох задач видно, що двоїста задача по відношенню до початкової складається за такими правилами:

1. Цільова функція початкової задачі /24/, /25/ задається на максимум, а двоїста – на мінімум.

2. Матриця

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}a_{12}......a_{1n} \\ a_{21}a_{22}......a_{2n} \\ ------- \\ a_{m1}a_{m2}......a_{mn} \end{pmatrix}, \qquad /30/$$

складена з коефіцієнтів при невідомих у системи обмежень /25/ початкової задачі /24/-/26/, та аналогічна матриця

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11}a_{21}......a_{m1} \\ a_{12}a_{22}......a_{m2} \\ ------- \\ a_{1n}a_{2n}......a_{mn} \end{pmatrix}, \qquad /31/$$

в двоїстій задачі /27/-/29/ отримуються одна з другої транспонуванням.

3. Кількість змінних у двоїстій задачі /26/-/29/ дорівнює кількості обмежень у системі /26/ початкової задачі /24/-/26/, а кількість обмежень двоїстої задачі - кількості змінних у початковій.

4. Коефіцієнти при невідомих в цільовій функції двоїстої задачі є вільними членами

в системі обмежень початкової задачі, а права частина в співвідношеннях системи /25/ двоїстої задачі – коефіцієнтами при невідомих в цільовій функції початкової.

5. Якщо змінна x_j початкової задачі /24/-/26/ може приймати тільки додатні значення, то j-а умова в системі /25/ являє собою рівняння.

Аналогічні зв’язки мають місце між обмеженнями початкової задачі і змінними двоїстої. Якщо i – те співвідношення в системі /25/ початкової задачі є нерівність, то i – та змінна двоїстої задачі $y_i \geq 0$, у противному разі змінна y_i може мати як додатні, так і від'ємні значення. Двоїсті пари задач розподіляються на симетричні й несиметричні. В симетричній парі двоїстих задач обмеження /25/ прямої задачі та співвідношення /28/ двоїстої є нерівностями виду $\leq$ чи $\geq$.

Таким чином, змінні обох задач можуть приймати тільки невід'ємні значення.

*Приклад 1.*Скласти двоїсту задачу по відношенню до задачі, яка максимізує функцію

$$F = 3x_1 + x_2 + 2x_3 \qquad /32/$$

за умов

за умов

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq c_{j,} \qquad \left(j=\overline{1,n} \right) \qquad /39/$$

Кожна задача з пари двоїстих задач є фактично самостійною задачею ЛП і може бути розв’язана незалежно одна від одної. Але при визначені симплексним методом оптимального плану однієї з задач знаходиться розв’язок і другої.

Зв'язок між розв’язанням прямої та двоїстої задач можна охарактеризувати такими теоремами двоїстості.

Теорема 1./перша теорема двоїстості/. Якщо одна з пари двоїстих задач /35/-/37/ чи /38/, /39/ має оптимальний план, то і друга має оптимальний план, а значення цільових функцій задач при таких планах рівні між собою, тобто

$$F_{\max}\left(X^*\right) = f_{\min}\left(Y^*\right) \qquad /40/$$

Якщо цільова функція однієї пари двоїстих задач необмежена, то і друга задача взагалі не має планів.

Теорема 2. /друга теорема двоїстості/.

План $X^* = \left(x_1^*, x_2^*, ...x_n^*\right)$ задачі /35/-/37/

та план $Y^* = \left(y_1^*, y_2^*, ...y_m^*\right)$ задачі /38/, /39/

є оптимальними планами тоді, коли для будь-якого $j, \left(j=\overline{1,n} \right)$ виконується рівність

$$\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* - c_j \right) \times x_j^* = 0 \qquad /41/$$

Якщо число змінних у прямій чи двоїстій задачах дорівнює двом, то використовуючи геометричну інтерпретацію задачі ЛП, можна знайти рішення однієї з даних пар.

Для прикладу розглянемо задачу /1/, /2/:

$$F = 0,3x_1 + 0,5x_2 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \leq 35, \\ 2x_1 + x_2 \leq 18, \\ x_1 + x_2 \leq 10, \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Складаємо для неї двоїсту задачу. Знайти мінімальне значення функції

$$f = 35y_1 + 18y_2 + 10y_3$$

за умов

$$\begin{cases} 2y_1 + 2y_2 + y_3 \ge 0,3, \\ 5y_1 + y_2 + y_3 \ge 0,5, \\ y_1, y_2, y_3 \ge 0. \end{cases}$$

Для початкової задачі оптимальне значення функція F одержує в точці

B /5;5/ : F_{max} /5;5/ = 4 млн. крб.

Згідно з першою теоремою двоїстості маємо

$$f_{\min}\left(Y^*\right) = F_{\max}\left(X^*\right) = 4$$

Знайдемо оптимальний план двоїстої задачі. Для цього використаємо другу теорему двоїстості.

Плани будуть оптимальними тільки тоді, коли виконуватимуться співвідношення

$$\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* - c_j\right) x_i^* = 0.$$

Розпишемо відповідні співвідношення

$$\left(2y_1^* - 2y_2^* + y_3^* - 0,3\right) x_1^* = 0,$$

$$\left(5y_1^* + y_2^* + y_3^* - 0,5\right) x_2^* = 0.$$

Але $x_1 \ne 0; x_2 \ne 0$, отже

$$2y_1^* + 2y_2^* + y_3^* - 0,3 = 0,$$

$$5y_1^* + y_2^* + y_3^* - 0,5 = 0.$$

З другого боку, у системі обмежень початкової задачі маємо

$$\begin{cases} 2x_1^* + 5x_2^* = 2\times5 + 5\times5 = 35, \\ 2x_1^* + x_2^* = 10 + 5 < 18, \\ x_1 + x_2 = 10 = 10, \end{cases}$$

отже, перше й третє обмеження виконуються як строгі рівняння, то відповідні змінні двоїстої задачі y_1^* та $y_3^* \ge 0$, а $y_2^* = 0$.

Таким чином, для розв’язку двоїстої задачі одержуємо систему

$$\begin{cases} 2y_1^* + y_3^* = 0,3, \\ 5y_1^* + y_3^* = 0,5. \end{cases}$$

Звідси $$y_1^* = \frac{1}{15}; y_3^* = \frac{1}{6}.$$

Відповідь: оптимальний план двоїстої задачі

$$y^* = \left(\frac{1}{15}; 0; \frac{1}{6}\right).$$

Перевірка : $$f_{\min} = 35 \times \frac{1}{15} + 10 \times \frac{1}{6} = 4;$$

$f_{\min} = F_{\max}$, отже, задача розв'язана вірно.

Знаходження розв'язків двоїстих задач у загальному вигляді

Розглянемо пару двоїстих задач: основну задачу ЛП /35/-/37/ та двоїсту їй задачу /38/, /39/.

Припустимо, що за допомогою симплексного методу знайдено оптимальний план X^* задачі /35/-/36/, який визначається базисом, утвореним векторами $P_{i1}, P_{i2}, ...P_{im}$. Позначимо через $c_\delta = (c_{i1}, c_{i2}, ...c_{im})$ вектор – рядок утворений з коефіцієнтів при невідомих в цільовій функції /35/ задачі /35/-/37/, а через P^{-1}- матрицю, обернену матриці *P*, утворену з компонентів векторів $P_{i1}, P_{i2}, ...P_{im}$ базису. Тоді має місце таке твердження.

Теорема 3. Якщо основна задача ЛП має оптимальний план X^*, то $Y^* = c_\delta P^{-1}$ є оптимальним планом двоїстої задачі.

Таким чином, якщо знайти симплексним методом оптимальний план задачі /35/-/37/, то, використовуючи останню симплекс – таблицю можна визначити c_δ та P^{-1}, а за допомогою співвідношення $Y^* = c_\delta P^{-1}$ знайти оптимальний план двоїстої задачі /38/, /39/.

В тому випадку, коли серед векторів $P_1, P_2, ...P_n$ утворених з коефіцієнтів при невідомих у системі обмежень /36/ є m одиничних, вказану матрицю P^{-1} утворюють числа перших m рядків останньої симплекс – таблиці, які містяться в стовпцях даних векторів.

Це характерно й для симетричної пари двоїстих задач. Оскільки система обмежень початкової задачі містить нерівності виду $\le$, компоненти оптимального плану двоїстої задачі співпадають з відповідними числами рядка ΔZ_j останньої симплекс – таблиці рішень початкової задачі. Вказані числа стоять у стовпцях векторів, відповідних допоміжним змінним.

Приклад. В задачі /1/, /2/, розв'язаній симплексним методом, в останній симплекс - таблиці в останній симплекс – таблиці в стовпцях векторів $\vec{P}_3, \vec{P}_4, \vec{P}_5$ міститься обернена матриця

$$P^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{5}{15} & 0 & -\frac{2}{5} \\ \frac{5}{15} & 1 & -\frac{8}{3} \\ -1/3 & 0 & 5/3 \end{pmatrix},$$

тоді $Y^* = c_\delta P^{-1}$,

а $c_\delta\left(0,5;0;0,3\right)$.

$$c_\delta\begin{pmatrix} \frac{5}{15} & 0 & -\frac{2}{5} \\ \frac{5}{15} & 1 & -\frac{8}{3} \\ -1/3 & 0 & 5/3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{15} \\ 0 \\ \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

$$y_1^* = \left(0,5\times\frac{5}{15}+0\times\frac{5}{15}+0,3\times\left(-\frac{1}{3}\right)\right)=\frac{1}{15},$$

$$y_2^* = \left(0,5\times 0+0,1+0,3\times 0\right)=0,$$

$$y_3^* = 0,5\times\left(-\frac{2}{5}\right)+0\times\left(-\frac{8}{9}\right)+0,3\times\frac{5}{3}=\frac{1}{6}.$$

Як бачимо, $Y^* = \left(\frac{1}{15};0;\frac{1}{6}\right)$ збігається з розв’язком, одержаним графічно. Даний результат можна прочитати в рядку для ΔZ_j останньої симплекс – таблиці.

Зауваження. Незбіжність знаків в рядку ΔZ_j пояснюється тим, що рішення задачі симплексним методом ми знаходили для функції цілі $Z=-F$, тобто від задачі на максимум перейшли до задачі на мінімум.

Економічна інтерпретація двоїстих задач

Економічну інтерпретацію двоїстих задач та оцінок розглянемо на такому прикладі.

Для виготовлення двох асортиментів виборів *A* та *B* використовують три види сировини, яку завод може щомісяця виділяти в обмеженій кількості. Щомісячне надходження потрібної сировини, витрати її на одиницю кожного вибору, а також прибуток від реалізації одиниці виробу подано в табл.3

Таблиця 3.

Вид сировини	Норма витрат		Запас
I	9	6	540
II	5	10	500
III	14	7	980
Прибуток	5	6	

Необхідно, яку кількість кожного з видів виробів *A*, *B* має випускати завод, щоб прибуток від їх реалізації був максимальним.

Розв'язання. Складаємо математичну модель цієї задачі. Позначимо через x_1, x_2 відповідно ті кількості виробів асортиментів *A* та *B*, які треба випустити, щоб мати максимальний прибуток від їх реалізації. Тоді математична модель задачі буде такою.

Знайти максимум цільової функції

$$F = 5x_1 + 6x_2 \qquad /42/$$

за умовою

$$\begin{cases} 9x_1 + 6x_2 \le 540, \\ 5x_1 + 10x_2 \le 500, \\ 14x_1 + 7x_2 \le 980, \end{cases} \qquad /43/$$

$$x_1, x_2 \ge 0 \qquad /44/$$

Дамо кожній сировині двоїсту оцінку y_1, y_2, y_3. Тоді загальна оцінка сировини, яка використовується для виготовлення виробів, буде

$$f = 540y_1 + 500y_2 + 980y_3 \to min. \qquad /45/$$

Відповідно до умов задачі двоїстості оцінки повинні бути такими, щоб загальна оцінка сировини, використаної для виготовлення одиниці виробу кожного асортименту, була не менше за ціну одиниці виробу даного асортименту, тобто $y_1, y_2, y_3 \ge 0.$ повинні задовольняти таку систему нерівностей:

$$\begin{cases} 9y_1 + 5y_2 + 14y_3 \ge 5, \\ 6y_1 + 10y_2 + 7y_3 \ge 6, \end{cases} \qquad /46/$$

$$y_1, y_2, y_3 \ge 0. \qquad /47/$$

Як бачимо, задачі /42/-/44/ та /45/-/47/ утворюють симетричну пару двоїстих задач. Розв'язок прямої задачі дає оптимальний план виготовлення виробів *A* та *B*, а двоїстої – оптимальну систему оцінок сировини. Щоб розв'язати ці задачі, досить розв'язати одну з них. Оскільки у системі обмежень початкової задачі містяться лише нерівності виду ≤, то краще спочатку знайти розв'язок цієї задачі симплексним методом. Початкову задачу можна розв'язати і графічно.

Розв'язок задачі симплексним методом запишемо в табл.4.

Таблиця 4.

Базис		C_δ	C_δ P_o	5 P_1	6 P_2	0 P_3	0 P_4	0 P_5	Примітка
	P_3	0	540	9	6	1	0	0	$x_1 = (0, 0, 540, 500, 980)$
I	P_4	0	500	5	10	0	1	0	
	P_5	0	980	14	7	0	0	1	План неоптимальний
		Z_j	0	0	0	0	0	0	$\theta_1 = 60; \Delta_1\theta_1 = -300$
		ΔZ_j	0	-5	-6	0	0	0	$\theta_2 = 50; \Delta_2\theta_2 = -300$
	P_3	0	240	6	0	1	-0,6	0	$x_2 = (0, 50, 240, 0, 644)$
II	P_2	6	50	$1/2$	1	0	0,1	0	
	P_5	0	630	$21/2$	0	0	-0,7	1	План неоптимальний
		Z_j	300	3	6	0	0,6	0	$\theta_1 = 40$
		ΔZ_j		2	0	0	0,6	0	$\theta_1\Delta_1 = 40\times(-2) = -80$
	P_1	5	40	1	0	$1/6$	-0,1	0	$x_3 = (40, 30, 0, 0, 60)$
III	P_2	6	30	0	1	$-1/12$	0,15	0	План оптимальний
	P_5	0	60	0	0	$-7/4$	0,25	1	Розв'язок двоїстої задачі
		Z_j	380	5	6	$1/3$	0,4	0	$y^* = (1/3; 0; 4; 0)$
		ΔZ_j		0	0	$1/3$	0,4	0	

З табл. 4 видно що оптимальним планом випуску виробів є такий, де виробляється 40 одиниць виробів *A* та 30 одиниць виробів *B*. За таким планом виробництва залишається невикористаним 60 кг сировини III типу, а загальна ціна виробів 380 крб. Оптимальний розв'язок двоїстої задачі: $Y_1^* = 1/3; Y_2^* = 0,4; Y_3^* = 0.$

Змінні Y_1^* та Y_2^* означають умовні двоїсті оцінки одиниці сировини, відповідно до I та II типів. Ці оцінки відмінні від нуля, а сировина I та II типів використовується повністю за оптимальним планом виробництва.

Двоїста оцінка сировини III типу дорівнює нулю. Цей тип сировини використовується не повністю

Таким чином, додатні значення мають тільки ті типи сировини, які повністю використовуються за оптимальним планом виробництва. Тому двоїсті оцінки характеризують дефіцит використаної сировини.

Величина двоїстої оцінки показує, на скільки зростає максимальне значення цільової функції прямої задачі при збільшенні кількості сировини відповідного типу на 1 кг.

Так, збільшення кількості сировини І типу на 1 кг приведе до того, що з'явиться можливість знайти новий план виробництва, за яким загальна ціна виробів збільшиться на $\Delta F = 1/3$ крб.. При цьому числа, які містяться в стовпці вектора P_3 останньої симплекс – таблиці, показують, що вказане збільшення загальної вартості виготовленої продукції може бути досягнуте за рахунок збільшення випуску виробів типу A на $1/6$ одиниці та зменшення виробів типу B на $1/12$ одиниці. Внаслідок цього використання сировини ІІІ типу збільшиться на $21/12$ кг.

Обчислимо мінімальне значення цільової функції двоїстої задачі

$$f_{\min} = 540 \times 1/3 + 500 \times 0,4 = 380,$$

$$f_{\min} = f_{\max},$$

Це свідчить про те, що обидві задачі розв'язані вірно.

Підставимо y_1^*, y_2^*, y_3^* в систему обмежень двоїстої задачі.

Одержимо

$$\begin{cases} 9 \times \dfrac{1}{3} + 5 \times 0,4 = 5, \\ 6 \times \dfrac{1}{3} + 10 \times 0,4 = 6. \end{cases}$$

Обидва обмеження двоїстої задачі виконуються як строгі рівності, тобто двоїсті оцінки сировини, яку використано для виготовлення виробів A та B й дорівнюють точно їх цінам. Тому доцільно виготовляти ці вироби в кількості, передбаченій оптимальним планом.

Усяка зміна початкових даних прямої задачі може вплинути як на її оптимальний план, так і на систему двоїстих оцінок. Тому, щоб провести економічний аналіз з використанням двоїстих оцінок, потрібно знати інтервали їх стійкості.

Аналіз стійкості двоїстих оцінок

Розглянемо основну задачу ЛП /24/-/26/ та двоїсту їй /27/-/29/. Нехай задача /24/-/26/ має невироджені опорні плани, з яких хоч один – оптимальний.

Максимальне значення цільової функції /24/ задачі /24/-/25/ розглянемо як функцію вільних членів системи рівнянь /25/:

$$F_{\max} = F\left(b_1, b_2, \ldots.., b_m\right).$$

Теорема. В оптимальному плані двоїстої задачі /27/-/29/ значення змінної y_1^* чисельно дорівнює частковій похідній функції $F_{\max}\left(b_1, b_2, \ldots, b_m\right)$ по даному аргументу, тобто

$$\frac{\partial F_{\max}}{\partial b_1} = y_1^*.$$

Остання рівність показує, що зміна величини b_i призводить до зміни $F_{\max}$, яка визначається величиною $|y_1^*|$ і може бути охарактеризована лише тоді, коли при зміні b_i значення змінних y_i^* в оптимальному плані не змінюється.

Це справедливо для всіх значень $b_i + \Delta b_i$, за яких стовпець P_o останньої симплекс – таблиці розв’язку прямої задачі не має від’ємних чисел, тобто тоді, коли серед компонентів вектора

$$B^{-1}\begin{pmatrix} b_1 + \Delta b_1 \\ b_2 + \Delta b_2 \\ ---- \\ b_n + \Delta b_n \end{pmatrix}$$

немає від’ємних. Тут B^{-1}- матриця, обернена матриці *B*, утвореної з компонентів векторів базиса, який визначає оптимальний план задачі.

Таким чином, якщо знайдено розв’язок початкової задачі, то без особливих труднощів можна провести аналіз стійкості двоїстих оцінок відносно до змін b_i. Це в свою чергу дозволяє зробити аналіз стійкості оптимального плану двоїстої задачі відносно до змін b_i, оцінити ступінь впливу змін b_i на максимальне значення цільової функції та дає можливість визначити найбільш доцільний варіант можливих змін b_i.

Приклад. Звернемось до розв’язку задачі, наведеної в табл.4.

Визначимо інтервали стійкості двоїстих оцінок по відношенню до змін ресурсів кожного типу. Знайдемо матрицю B^{-1}, обернену матриці *B*, утвореної з векторів P_1, P_2, P_5 базису, який визначає оптимальний план. Елементи матриці B^{-1} можна взяти з стовпців векторів P_3, P_4, P_5, утворюючих початковий план.

Таким чином,

$$B^{-1}=\begin{pmatrix} 1/6 & -0,1 & 0 \\ -1/12 & 0,15 & 0 \\ -7/4 & 0,25 & 1 \end{pmatrix}$$

Тоді

$$B^{-1}\begin{pmatrix} b_1+\Delta b_1 \\ b_2+\Delta b_2 \\ b_3+\Delta b_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1/6 & -0,1 & 0 \\ -1/12 & 0,15 & 0 \\ -7/4 & 0,25 & 1 \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} 540+\Delta b_1 \\ 500+\Delta b_2 \\ 980+\Delta b_3 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 1/6\left(540+\frac{1}{6}\Delta b_1\right)-0,1\left(500+\Delta b_2\right) \\ -\frac{1}{12}\left(540+\Delta b_1\right)+0,15\left(500+\Delta b_2\right) \\ -\frac{7}{4}\left(540+\Delta b_1\right)+0,25\left(500+\Delta b_2\right)+980+\Delta b_3 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 40+\frac{1}{6}\Delta b_1-0,1\Delta b_2 \\ 30+\frac{1}{12}\Delta b_1+0,15\Delta b_2 \\ 60-\frac{7}{4}\Delta b_1+0,25\Delta b_2+\Delta b_3 \end{pmatrix},$$

Розглянемо, при яких $\Delta b_1, \Delta b_2, \Delta b_3$ ці компоненти будуть невід’ємні. Умова невід’ємності приводить до такої системи нерівностей:

$$\begin{cases} 40+\frac{1}{6}\Delta b_1-0,1\Delta b_2>0, \\ 30-\frac{1}{12}\Delta b_1+0,15\Delta b_2>0, \\ 60-\frac{7}{4}\Delta b_1+0,25\Delta b_2+\Delta b_3>0. \end{cases} \qquad /48/$$

Очевидно, що при $\Delta b_1=0, \Delta b_2=0, \Delta b_3>-60.$ Тобто, якщо ресурс III типу збільшити чи зменшити в межах 60 одиниць, оптимальний план двоїстої задачі залишиться таким самим:

$$y^x=\left(\frac{1}{3};0,4;0\right).$$

Далі, якщо $\Delta b_1=0, \Delta b_3=0$ то $-240<\Delta b_2<40;$

якщо $\Delta b_1=0, \Delta b_2=0,$ то $-60<\Delta b_3<\infty;$

якщо $\Delta b_2 = 0, \Delta b_3 = 0,$ то $-240 < \Delta b_1 < \frac{240}{7}.$

Таким чином, якщо зміна кожного ресурса не виходить за рамки

$$\begin{aligned} &-240 < \Delta b_1 < \frac{240}{7}; \\ &-240 < \Delta b_2 < 40; \\ &-60 < \Delta b_3 < \infty, \end{aligned}$$

при сталості інших ресурсів двоїста задача має один і той самий оптимальний план.

Розглянемо умову контрольного завдання 1, п.7. Потрібно провести аналіз стійкості двоїстих оцінок. Дати інтервали змін кожного з вільних членів системи обмежень початкової задачі, за яких оптимальний план двоїстої задачі не змінюється.

Зразок виконання цього завдання подано вище.

Але в п.8 цього ж завдання потрібно визначити значення загального прибутку при збільшенні ресурсів трьох типів відповідно на 20, 30, 10 кг. Зробити оцінку окремого та сумарного впливу цих змін.

Щоб перевірити, чи залишиться оптимальний план двоїстої задачі тим самим при одночасній зміні всіх ресурсів чи ні, перевіримо, чи задовольняють $\Delta b_1, \Delta b_2, \Delta b_3$ систему нерівностей /48/.

Маємо

$$\begin{cases} 40 + \frac{1}{6} \times 20 - 0,1 \times 30 > 0, \\ 30 - \frac{1}{12} \times 20 + 0,15 \times 30 > 0, \\ 60 - \frac{7}{4} \times 20 + 0,25 \times 30 + 10 > 0. \end{cases}$$

Система нерівностей задовільнена; таким чином, розв'язок двоїстої задачі залишається незмінним при зміні $\Delta b_1 = 20; \Delta b_2 = 30; \Delta b_3 = 10.$

Визначимо окремий вплив збільшення ресурсів:

$$\begin{aligned} &\Delta F_1 = \Delta b_1 y_1^* = 20 \times \frac{1}{3} = \frac{20}{3}; \\ &\Delta F_2 = \Delta b_2 y_2^* = 30 \times 0,4 = 12, \\ &\Delta F_3 = \Delta b_3 y_3^* = 10 \times 0 = 0. \end{aligned} \qquad /49/$$

Сумарний вплив - $\Delta F = \frac{20}{3} + 12 = \frac{56}{3} = 18\frac{2}{3}.$

Таким чином, якщо ресурси збільшити відповідно на 20, 30, 10 кг новий оптимальний план виробництва дає загальну вартість виробів:

$$F_{\max} = 380 + 18\frac{2}{3} = 398\frac{2}{3}\ \text{крб.} \qquad /50/$$

Питання для самоперевірки

1.Сформулювати загальну задачу лінійного програмування /ЗЛП/.

2.В яких формах може бути задана ЗЛП?

3.Дати опис канонічної моделі ЗЛП.

4.Дати визначення невиродженого, виродженого, опорного та оптимального планів.

5.Які зустрічаються області припустимих значень розв’язків ЗЛП? Привести геометричне зображення цих випадків.

6.Що зветься многокутником і многогранником планів - розв’язків?

7.Сформулювати основні висновки, які випливають з графічного розв’язання. В яких випадках задача має множину оптимальних розв'язань, а в яких може не мати?

8.Яка множина зветься опуклою? Навести приклад.

9.Якими властивостями володіє опукла множина?

10.В якій точці многогранника рішень лінійна функція задачі ЛП досягає свого оптимального розв’язання?

11.Які плани необхідно дослідити, щоб знайти оптимальне значення функції?

12. Як знайти початковий опорний план задачі ЛП?

13.Сформулювати ознаку оптимальності опорного плану в випадку розшуку мінімуму та максимуму функції цілі.

14.Який вектор потрібно ввести в базис, якщо початковий план неоптимальний?

15.Як на основі симплекс – таблиці зробити висновок про необмежену функцію цілі?

16.Що таке метод штучного базису?

17.Який план розширеної m – задачі буде оптимальним?

18 В якому випадку початкова задача не має розв’язання, як це визначити з розв’язання розширеної m – задачі?

19.В якому випадку можна скоротити кількість штучних векторів, які вводяться, та як це зробити?

20.Яку найпростішу геометричну інтерпретацію можна дати симплексному методу?

21.Побудувати спряжену двоїсту задачу для задач максимізації та мінімізаціі, заданих системою нерівностей.

22.Як знайти розв’язок двоїстої задачі, обмежуючись тільки розв’язком прямої?

23.Побудувати двоїсту задачу, якщо пряма задача подана в канонічній формі.

1.6.Цілочислове лінійне програмування.

До задач цілочислового лінійного програмування належать задачі лінійного програмування, на змінні яких накладається умова, щоб вони були цілі. Наприклад, задачі визначення потужності підприємств, технологічних способів виробництва продукції, крім матеріалів, розподіл транспортних засобів за рейсами і т.п.

В загальному випадку цю задачу можна сформулювати так:
знайти максимум функції

$$F=\sum_{j=1}^{m} c_j x_j \qquad /51/$$

за умов

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \qquad \left(i=\overline{1,m}\right), \qquad /52/$$

$$x_j \geq 0, \qquad \left(j=\overline{1,n}\right), \qquad /53/$$

$$x_j - \text{цілі} \qquad \left(j=\overline{1,n}\right). \qquad /54/$$

Для розв’язку задач цілочислового програмування застосовують спеціальні методи. Останнім часом значного поширення набули два методи: Гоморі та метод розгалужень і меж.

Метод Гоморі.

Розв’язок задачі цілочислового програмування методом Гоморі починається з визначення симплексним методом оптимального плану задачі без урахування цілочисловості змінних. Після того, як план знайдено, розглядають його компоненти. Якщо всі змінні цілі, то одержаний план є оптимальним для задачі цілочислового програмування.

Якщо ж оптимальний план має змінні, значення яких подано у вигляді дробу, то, використовуючи нерівність

$$\sum f\left(a_{ij}^{*}\right) x_j \geq f\left(b_i^{*}\right), \qquad /55/$$

знаходимо розв’язок задачі /51/-/54/, /55/.

В нерівності /55/ a_{ij}^{*} та b_i^{*} - перетворені початкові величини a_{ij}, b_i, значення яких беруться з останньої симплекс – таблиці /з оптимального плану задачі без врахування цілочисловості/, а $f\left(a_{ij}^{*}\right)$ та $f\left(b_i^{*}\right)$ - дробні частини чисел. Під дробовою частиною числа *a* розуміється найбільше ціле число, яке не перебільшує *a*.

Розглянемо приклад:

$$f\left(\frac{5}{3}\right)=\frac{5}{3}-\left[\frac{5}{3}\right]=\frac{5}{3}-1=\frac{2}{3},$$
$$f\left(-\frac{5}{3}\right)=-\frac{5}{3}-\left[-\frac{5}{3}\right]=-\frac{5}{3}+2=\frac{1}{3}.$$

Якщо в оптимальному плані дробові значення приймають декілька змінних, то допоміжна нерівність /55/ визначається найбільшою дрібною частиною.

Якщо одержаний оптимальний план задачі /51/-/55/ знову буде мати змінні з дробовою частиною, то знову додають одне обмеження типу /55/ та повторюють обчислення.

Проводячи скінчене число таких ітерацій або одержують оптимальний план задачі цілочислового програмування, або доводять, що задача не має розв'язання.

Приклад. Використовуючи метод Гоморі, знайти найбільше значення функції

$$F=3x_1+2x_2 \qquad /56/$$

за умов

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=13, \\ x_1-x_2+x_4=6, \\ -3x_1+x_2+x_5=9, \end{cases} \qquad /57/$$

$$x_j\geq 0, \qquad \left(j=\overline{1,5}\right). \qquad /58/$$

$$x_j, \text{цілі} \qquad \left(j=\overline{1,5}\right). \qquad /59/$$

Розв'язання. Не звертаючи уваги на умову цілочисловості /59/, знаходимо оптимальний план задачі /56/-/58/.

Розв'язок будемо записувати у вигляді табл.5.

Таблиця 5

Базис	C_δ	P_o	3	1	0	0	0	Зауваження
			P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	
P_3	0	13	1	1	1	0	0	$x_o=(0,0,13,6,9)$
P_4	0	6	1	-1	0	1	0	План неоптимальний
P_5	0	9	-3	1	0	0	1	$\theta_1=6;\theta_1\Delta_1=-18$
Z_j		0	0	0	0	0	0	$\theta_2=9;\theta_2\Delta_2=-18$
ΔZ_j			-3	-2	0	0	0	
P_3	0	7	0	2	1	-1	0	$x_1=(6,0,7,0,27)$
P_1	3	6	1	-1	0	1	0	План неоптимальний

Продовження таблиці 5.

Базис	C_δ	P_o	3	1	0	0	0	Зауваження
			P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	
P_5	0	27	0	-2	0	3	1	$\theta_2 = 3,5$
	Z_j	18	3	-3	0	3	0	$\theta_2\Delta_2 = 3,5(-5) = -17,5$
	ΔZ_j		0	-5	0	3	0	
P_2	2	$7/2$	0	1	$1/2$	$-1/2$	0	$x_2 = \left(\frac{19}{2}; \frac{7}{2}; 0; 0; 34\right)$
P_1	3	$19/2$	1	0	$1/2$	$1/2$	0	План оптимальний, але
P_5	0	34	0	0	1	2	1	нецілочисловий
	Z_j	$71/2$	3	2	$5/2$	$1/2$	0	$F_{\max} = \frac{71}{2} = 35,5$
	ΔZ_j		0	0	$5/2$	$1/2$	0	

План $x_2 = \left(\frac{19}{2}; \frac{7}{2}; 0; 0; 34\right)$ оптимальний, але дві компоненти $x_1 = 9,5$ та $x_2 = 3,5$ мають не цілі значення. Знайдемо дробові частини цих чисел:

$$f(x_1) = 9,5 - [9,5] = 9,5 - 9 = 0,5;$$

$$f(x_2) = 3,5 - [3,5] = 3,5 - 3 = 0,5.$$

Дробові частини однакові, тому допоміжне обмеження можна записати для будь-якої змінної, наприклад для x_2. З останньої симплекс – таблиці маємо

$$\frac{7}{2} = x_2 + \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4 \qquad /60/$$

Складаємо допоміжне обмеження згідно з методом Гоморі:

$$f(1)x_2 + f\left(\frac{1}{2}\right)x_3 + f\left(-\frac{1}{2}\right)x_4 \geq f\left(\frac{7}{2}\right).$$

Оскільки

$$f(1) = 0; \; f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}; \; f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2},$$

одержимо

$$\frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4 \geq \frac{1}{2}, \text{ чи } x_3 + x_4 \geq 1. \qquad /61/$$

Обмеження /61/ приведемо до канонічного вигляду, для цього введемо штучну змінну x_6:

$$x_3 + x_4 - x_6 = 1 \qquad /62/$$

До початкової задачі додаємо ще одне обмеження, а нову задачу знову розв'язуємо симплекс – методом. Всі обчислення запишемо у вигляді табл.6.

Таблиця 6

Базис	C_δ	P_o	3	2	0	0	0	-M	Зауваження
			P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	
P_2	2	$7/2$	0	1	$1/2$	$-1/2$	0	0	Виведемо з базису штучну змінну
P_1	3	$19/2$	1	0	$1/2$	$1/2$	0	0	
P_5	0	34	0	0	1	1	1	0	
P_6	-M	1	0	0	1	$\boxed{1}$	0	-1	$\theta_4 = 1$
	Z_j	$71/2$	3	2	$5/2-M$	$1/2-M$	0	M	
	ΔZ_j		0	0	$5/2-M$	$1/2-M$	0	0	
P_2	2	4	0	1	1	0	0	$-1/2$	План оптимальний цілочисловий
P_1	3	9	1	0	0	0	0	$1/2$	
P_5	0	32	0	0	-1	0	1	2	
P_4	0	1	0	0	1	1	0	-1	
	Z_j	35	3	2	2	0	0	$1/2$	$x^*_{опт} = (9;4;0;1;32;0)$
	ΔZ_j		0	0	2	0	0	$1/2+M$	

Таким чином, ми бачимо, що початкова задача цілочислового програмування має оптимальний план $x^* = (9;4;0;1;32)$, при цьому функція цілі має значення $F_{\max} = 35$.

Метод розгалужень та меж

Цей метод засновано на послідовній побудові «дерева» вершин, кожна з яких відповідає оптимальному плану допоміжної задачі: мінімізувати /максимізувати/ цільову функцію за заданих умов з допоміжними обмеженнями

$$x_k \le [x_{ko}], \text{ або } x_k \ge [x_{ko}] + 1,$$

де $[x_{ko}]$ - ціла частина змінної x_{ko}, яка не задовольняє умову цілочисловості.

Для одержання вершин розраховують оцінки, рівні значенням цільових функцій відповідних задач лінійного програмування з урахуванням допоміжним обмежень.

Приклад. Розглянемо знову задачу /56/-/59/. Розв'язавши її без умови цілочисловості, одержимо верхню оцінку $F_{\max} = 35,5$ та нецілочисловий оптимальний план $x^* = \left(\frac{19}{2}; \frac{7}{2}; 0; 0; 34\right)$.

Далі розв'яжемо наступні дві задачі симплексним методом:

1/ $F_1 = 3x_1 + 2x_2 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 13, \\ x_1 - x_2 + x_4 = 6, \\ -3x_1 + x_2 + x_5 = 9, \end{cases} \qquad /63/$$

$$x_j \geq 0, \qquad \text{цілі} \qquad \left(j = \overline{1,5}\right).$$

2/ $F_2 = 3x_1 + 2x_2 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 13, \\ x_1 - x_2 + x_4 = 6, \\ 3x_1 + x_2 + x_5 = 9, \\ x_1 \geq 10. \end{cases} \qquad /64/$$

$$x_j \geq 0, \qquad \text{цілі} \qquad \left(j = \overline{1,5}\right).$$

Одержимо $F_{1\max} = 35,$ при $x_1^*\left(9; 4; 0; 1; 32\right)$. Друга задача не має розв'язання. Але оскільки перша задача має цілочислове значення, то приймаємо її як розв'язок початкової задачі, що збігається з розв'язанням за методом Гоморі.

Зауваження. При розв'язанні конкретних задач методом розгалужень та меж в підмножинах G_i, одержаних в результаті розгалужень допустимих областей, оптимальний план вдається знайти досить швидко. Але дуже часто процедуру розгалужень виконують велику кількість разів, внаслідок чого розв'язання задачі стає громіздким, тим паче, що в ході обчислень виникає необхідність неодноразово повертатися «назад», розшукуючи нові розгалуження «дерева» можливих варіантів.

Питання для самоперевірки

1.Яка задача відноситься до класу цілочислового програмування?

2.Яка ідея покладена в основу методів Гоморі?

3.Написати загальну задачу цілочислового програмування.

1.7.Транспортна задача

Серед задач лінійного програмування особливе місце займає транспортна задача.

Класична транспортна задача – задача про знаходження оптимального плану перевезення вантажів від виробників до споживачів. Проте таку саму математичну модель мають і деякі інші задачі, пов'язані зі складанням змінних графіків, регулюванням витрат води водосховищ тощо. Тому що їх також відносять до транспортних задач.

У попередньому розділі ми розглянули симплексний метод розв'язування задач лінійного програмування. Враховуючи специфіку транспортної задачі, цей метод удається спростити.

Постановка задачі. Нехай маємо m пунктів відправлення /постачальники/ $A_1, A_2, ..., A_m$, в яких знаходиться деякий вантаж.

Кількість деякого однорідного вантажу позначимо відповідно $a_1, a_2, ..., a_m$. Цей вантаж треба перевезти в n пунктів призначення /споживачів/ $B_1, B_2, ..., B_n$, потреба у цьому вантажі становить відповідно $b_1, b_2, ..., b_n$ одиниць.

Для простоти вважатимемо, що

$$a_1 + a_2 + ... + a_m = b_1 + b_2 + ... b_n, \qquad /65/$$

тобто сумарна кількість вантажу, який мають постачальники, дорівнює сумарній кількості вантажу, якого потребують споживачі.

За таких умов $\sum_{i-1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$

транспортна задача називається закритою.

Нехай відомі $c_{ij} \left(i = \overline{1, m},\ j = \overline{1, n} \right)$ - вартість перевезення однієї одиниці вантажа з i-го пункту відправлення до j - го пункту призначення.

Скласти оптимальний план перевезень, тобто знайти, скільки вантажу треба перевезти з кожного пункту відправлення у кожний пункт призначення, так щоб вартість перевезень була найменшою.

Позначимо $x_{ij} \left(i = \overline{1, m},\ j = \overline{1, n} \right)$- кількість одиниць вантажу, що має бути перевезена з i-го пункту відправлення до j-го пункту призначення. Зведемо всі дані та шукані величини до табл.7 /матриці перевезень/.

Таблиця 7

Пункти призначення / Пункти відправлення	B_1	B_2	$.....B_n$	Запаси
A_1	x_{11}	x_{12}	$.....x_{1n}$	a_1
A_2	x_{21}	x_{22}	$.....x_{2n}$	a_2
– – –	– – –	– – –	– – –	– – –
A_m	x_{m1}	x_{m2}	$.....x_{mn}$	a_m
Потреби	b_1	b_2	$.....b_n$	$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$

Яким умовам повинен задовольняти план перевезень? Очевидно, сумарна кількість вантажу, відправленого з пункту A_1 до всіх пунктів призначення, має дорівнювати a_1. Тому $x_{11} + x_{12} + ... + x_{1n} = a_1$.

Це стосується кожного іншого пункту відправлення. Ми отримаємо m рівнянь:

$$
\begin{aligned}
&x_{11} + x_{12} + ... + x_{1n} = a_1, \\
&x_{21} + x_{22} + ... + x_{2n} = a_2, \\
&-------------- \\
&x_{m1} + x_{m2} + ... + x_{mn} = a_m.
\end{aligned}
$$

або коротко

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = x_{i1} + x_{i2} + ... + x_{1n} = a_i \qquad \left(i = \overline{1,m}\right) \qquad /66/$$

Обмеження по потребах /всі потреби повинні бути задовільнені/ дають таку систему рівнянь:

$$x_{1j} + x_{2j} + ... + x_{mj} = \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = b_j \qquad \left(j - \overline{1,n}\right) \qquad /67/$$

Звернемо увагу на те, що змінні та права частина рівнянь /66/ взяті з одного рядка /саме 1-го/ матриці перевезень. Через це ми будемо називати рівняння /66/ горизонтальними рівняннями. А змінні та права частина рівнянь /67/ узяті з одного стовпця /саме i-го/ матриці перевезень. Ці рівняння ми будемо називати вертикальними рівняннями.

Отже система обмежень має вигляд

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, & \left(i = \overline{1,m}\right), \\ \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = b_j, & \left(j = \overline{1,n}\right), \end{cases} \qquad /68/$$

$$x_{ij} \geq 0. \qquad /69/$$

Система /4/ має $m+n$ лінійних рівнянь з m,n змінними, кожний допустимий план перевезень має задовольняти систему /68/ та умову /69/.

Тепер обчислимо вартість усіх перевезень

$$Z = c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + ... + c_{mn}x_{mn} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \qquad /70/$$

Таким чином, ми прийшли до такої задачі лінійного програмування: знайти невід'ємний розв'язок системи лінійних обмежень /68/, який надає найменшого значення лінійного функції /70/.

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j \qquad \text{не виконується,}$$

тобто

$$\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j \quad \text{або} \quad \sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j \ ,$$

то відповідна задача називається відкритою транспортною задачею.

Щоб розв'язати відкриту задачу, її перетворюють у закриту введенням умовного пункту споживання B_{n+1} з об'єктом потреби $b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$, чи умовного постачальника A_{m+1} з запасом $a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i$. Вартість перевезень у ці пункти вважається рівною нулю.

Розв'язанню транспортної задачі передує підготовчий етап – відшукання першого базисного розв'язку. Використовують декілька способів побудови першого базисного розв'язку: способів північно – західного кута, мінімальної вартості, подвійної переваги.

Розглянемо на прикладі транспортної задачі методи відшукання першого базисного розв'язку /Спосіб північно – західного кута /табл.8/ та спосіб мінімальної вартості /табл.9/.

Таблиця 8

Постачальник / Запас	Споживач				
	B_1 / 190	B_2 / 100	B_3 / 120	B_4 / 110	B_5 / 130
A_1 / 200	28 190	27 10	18	27	24
A_2 / 250	18	26 90	27 120	32 40	21
A_3 / 200	27	33	23	31 70	34 130

I план

Таблиця 9

Постачальник / Запас	Споживач					
	B_1 / 190	B_2 / 100	B_3 / 120	B_4 / 110	B_5 / 130	U_i
A_1 / 200	28	27 100	18 120	27	24 70	$U_1 = 0$
A_2 / 250	18 190	26	27	32	21 60	$U_2 = -3$
A_3 / 200	27	33 90	23	31 110	34	$U_3 = 6$
V_j	$V_1 = 21$	$V_2 = 27$	$V_3 = 16$	$V_4 = 25$	$V_5 = 24$	

II план

Числа, що записані в верхніх кутах табл..8, 9 – вартість відповідних перевезень одиниці вантажу C_{ij} .

Підрахуємо сумарні запаси вантажу

$$\sum_{i=1}^{3} a_i = 200 + 250 + 200 = 650$$

та сумарні потреби

$$\sum_{j=1}^{5} b_j = 190 + 100 + 110 + 130 = 650.$$

Як бачимо $\sum_{i=1}^{3} a_i = \sum_{j=1}^{5} b_j$, тобто задача закрита й тому має оптимальний план.

Відшукання першого опорного плану почнемо з задовільнення потреби першого споживача B_1 за рахунок запасів першого постачальника A_1. Для цього порівняємо запас $a_1 = 200$ з потребою $b_1 = 190$. Оскільки $a_1 > b_1$, то потреба b_1 повністю задовільнена за рахунок A_1 постачальника; 10 одиниць, що залишилися, перевозимо споживачу B_2, а 90 одиниць вантажу, якого бракує споживачеві B_2, візьмемо у другого постачальника A_2 і так далі, доки не задовольнимо всі потреби споживачів та не вивеземо всі запаси вантажу.

В результаті розподілу вантажів одержали перший опорний план, де

$$x_{11} = 190; x_{12} = 10; x_{22} = 90; x_{23} = 120; x_{24} = 40; x_{34} = 70; x_{35} = 130.$$

Змінні, які відповідають заповненим клітинам, звуться базисними, а інші змінні, значення яких дорівнюють нулю, - вільними.

Підрахуємо кількість заповнених клітин $k = 7$. Це число повинно дорівнювати рангові системи обмежень

$$r = m + n - 1 = 3 + 5 - 1 = 7.$$

Оскільки $k = r = 7$, знайдений план не вироджений.

Підрахуємо витрати на перевезення вантажу відповідно до одержаного вище плану перевезень.

$$Z_1 = 190 \times 28 + 10 \times 27 + 90 \times 26 + 120 \times 27 + 40 \times 32 + 70 \times 31 + 130 \times 34 =$$
$$= 5320 + 270 + 2340 + 3240 + 1280 + 2170 + 4420 = 19040.$$

Спосіб мінімальної вартості

Побудову першого опорного плану починаємо з поставки вантажу в клітину з найменшою вартістю c_{ij}. Це $c_{21} = c_{13} = 18$.

Поставки в ці клітини відповідно дорівнюють $x_{21} = 190; x_{13} = 120$. Потім заповнюємо клітини $x_{25} = 60; x_{15} = 70, x_{12} = 10; x_{34} = 110; x_{32} = 90.$

Таким чином, повністю розподіляємо весь вантаж та одержуємо новий план перевезень. Затрати на перевезення вантажу відповідно до цього плану будуть $Z_2 = 10 \times 27 + 120 \times 18 + 70 \times 24 + 190 \times 18 + 60 \times 21 + 90 \times 33 + 110 \times 31 = 15170$.

Другий план кращій, тому що витрати на перевезення вантажу менші. Перевіряємо його на оптимальність методом потенціалів. Суть цього методу.

Нехай кожному $i -$ пункту відправлення відповідає деякий потенціал $U_i \left(i - \overline{1, m} \right)$, а кожному $j -$ пункту призначення – потенціал $V_j \left(j = \overline{1, n} \right)$, числа U_i та V_j пов'язанні між собою таким співвідношенням

$$U_i + V_j = C_{ij}, \qquad /71/$$

де пари значень i, j відповідають базисним клітинам.

Тут C_{ij} - вартість перевезення одиниці вантажу з $i-$ го пункту відправлення до $j-$го пункту призначення $/i = \overline{1,m}; j = \overline{1,n}/$. Зрозуміло, що /71/ - це система $m+n-1$ лінійних рівнянь, в якій $m+n$ змінних, тобто кількість змінних на одиницю більша, ніж кількість рівнянь. Неважко переконатися, що система /71/ невизначена. Якщо значення однієї з змінних вибрати довільно, то відносно інших змінних система розв'язується однозначно. Таким чином, ми одержимо значення потенціалів U_i та V_j. Потім обчислимо суму

$$S_{ij} = U_i + V_j \qquad /72/$$

для вільних клітин.

Можна показати, що число S_{ij}, обчислене за формулою /72/, не залежить від вибору розв'язку системи /71/.

Зараз покажемо на прикладі, як застосовується метод потенціалів. Зробимо це на тому самому прикладі, що наводили вище. Розглянемо ще раз таблицю вартостей та базисний розв'язок системи обмежень, знайдений за методом мінімальної вартості.

Складемо систему рівнянь для відшукання потенціалів.

Маємо :

$$U_1 + V_2 = 27, \qquad U_2 + V_5 = 21,$$

$$U_1 + V_3 = 18, \qquad U_3 + V_2 = 33,$$

$$U_1 + V_5 = 24, \qquad U_3 + V_5 = 31.$$

$$U_2 + V_1 = 18,$$

Нехай $U_1 = 0$, тоді послідовно знайдемо:

$$V_2 = 27; \quad V_3 = 18; \quad V_5 = 24; \quad U_2 = -3;$$

$$U_3 = 6; \quad V_1 = 21; \quad V_4 = 25.$$

Потенціали можна знайти у рядках та стовпцях, записаних безпосередньо до таблиці планів, як це зроблено для другого плану, або скласти окрему таблицю за зразком табл.10.

Таблиця 10.

U_i \ V_j	21	27	18	25	24
0	21 / 28	27	18	25 / 27	24
3	18	24 / 26	15 / 27	22 / 32	21
6	27 / 27	33	24 / 23	31	30 / 34

У клітини, які відповідають базисним змінним, записуємо вартість, а у клітини, що відповідають вільним змінним, - дріб $\frac{U_i + V_j}{C_{ij}}$.

Ознакою оптимальності плану є умова, при якій

$$\Delta_{ij} = \left(U_i + V_j\right) - C_{ij} \le 0.$$

$$Z_{\min} = 27\times100+18\times30+24\times70+18\times190+21\times60+33\times90+31\times110=15080 \text{ т км.}$$

Витрати можна розрахувати, скориставшися формулою $Z_{i+1}+Z_i-\Delta_{ij}\theta_{ij}$, де $\Delta_{ij}-$найбільша додатна оцінка вільних клітин, а $\theta_{ij}-$вантаж, який заноситься до вільної клітини під час перерозподілу поставок $Z_{\min}=Z_2-\theta_{33}\Delta_{33}=15170-90\times1=15080.$

Зобразимо схему перевезень на рис.3

Рис.3

1.8. Елементи матричної гри

Господарча діяльність підприємств перебуває у тісному зв’язку з поведінкою покупця у відношенні до придбання товарів.

Кожне підприємство, приймаючи конкретне рішення відносно своєї діяльності, враховує, як поводитимуться покупці, як зміниться їх кількість, активність. Діяльність підприємства залежить не тільки від покупців, але й від діяльності інших підприємств, особливо сусідніх.

Щоб прийняти ефективне рішення в умовах невизначеності, використовують теорію гри.

Особливість теорії гри в тому, що вона дає можливість знаходити оптимальне рішення навіть в конфліктних ситуаціях, тобто в таких умовах, коли виявляються протиріччя інтересів її учасників. В результаті зіткнення інтересів хтось повинен програти, а хтось виграти. Зіткнення інтересів при цьому проходить в умовах невизначеності дій її учасників.

Таким чином, теорія гри – це математична теорія конфліктних ситуацій.

Модель будь-якої конфліктної ситуації зветься грою. Конфліктуючі сторони умовно називають гравцями.

Наслідок гри обертається для одних у виграш, для других у програші

Кінцева ціль гри – вироблення таких пропозицій гравцям, щоб той, хто виграє, зумів виграти якомога більше, а той, хто програє, програв якомога менше.

Під час гри кожний гравець висуває певну стратегію. Стратегія гравця – це сукупність правил, які визначають вибір варіанту дії при кожному ході в залежності від ситуації, що склалася.

Теорія гри дає вказівки гравцям щодо вибору ходів, тобто рекомендує кращу стратегію, яка забезпечує максимально можливий середній програш.

Гра зветься парною, якщо в ній беруть участь тільки дві сторони /два гравця/. Розглянемо приклад, де *A* і *B* –два гравця.

Позначимо:

A_i - стратегія гравця *A* /підприємства/;

B_j - стратегія гравця *B* /покупця/;

a_{ij} - розмір плати від вибраної стратегії (i, j), тобто число, яке характеризує виграш гравця *A* та програш гравця *B*.

Дані запишемо до табл.12.

Таблиця 12

A_i \ B_j	B_1	B_2	………	B_n
A_1	a_{11}	a_{12}	………	a_{1n}
A_2	a_{21}	a_{22}	………	a_{2n}
$\vdots$	----	----	----	----
	----	----	----	----
A_m	a_{m1}	a_{m2}	………	a_{mn}

Складена таким чином матриця зветься платіжною.

Під час гри кожний з гравців потай вибирає деяку стратегію, тобто рядок чи стовпець.

Стратегія, при якій роблять вибір того чи іншого рядка /стовпця/ платіжної матриці, зветься чистою стратегією гравця.

Розглянемо, як діятиме гравець *A*, якщо він буде вибирати чисту стратегію. Гравець *A*, вибираючи оптимальну стратегію, нічого не знає про те, як буде діяти його супротивник. Враховуючи це, гравець *A* вибирає рядок, визначає гарантований прибуток по кожному рядку, тому що вибір того чи іншого рядка знаходиться в його розпорядженні. Для цього у кожному рядку він шукає мінімум.

Після цього він вибирає той рядок, у якому цей мінімум найбільший. Вибір такої стратегії при будь-яких діях другого гравця забезпечує йому максимальний гарантований прибуток, таким чином, вибір оптимальної стратегії гравцем *A*

$$\alpha = \max\left(\min_j a_{ij}\right).$$

Число $\alpha = \max\left(\min_{j} a_{ij}\right)$ зветься нижньою ціною гри чи максиміном,а відповідна йому стратегія гравця /рядок/ - максимальною.

Стратегія гравця *B* виходить з того, щоб вибрати відповідний стовпець і при цьому програти якомога менше.

Він не знає, як діятиме його партнер, тому у кожному стовпці він шукає максимум, тобто те, що повинен буде заплатити при самому невигідному для нього виборі гравця *A*. Бажаючи мінімізувати свій програш, він вибирає той з стовпців, у якому буде мінімум гарантованого програшу. Математично вибір оптимальної стратегії другим гравцем записується так:

$$\beta = \min_{j}\left(\max_{i} a_{ij}\right).$$

Число $\beta = \min_{j}\left(\max_{i} a_{ij}\right)$ зветься верхньою ціною гри чи мінімаксом, а відповідна йому стратегія гравця /стовбець/ - мінімаксною.

Нижня ціна гри ніколи не буває більша за верхню.

Якщо $\alpha = \beta = V$, то число V зветься ціною гри.

Ті значення i та j, при яких ця рівність досягається, являють собою оптимальні стратегії гравців, а елемент платіжної матриці a_{ij} є точкою рівноваги, або сідловою точкою.

Гра, для якої $\alpha = \beta$, зветься грою з сідловою точкою.

Таким чином, якщо матриця має сідлову точку, то максимін і мінімакс збігаються, тоді вибір оптимальної стратегії зводиться до знаходження сідлової точки.

Якщо платіжна матриця має сідлову точку, то оптимальні, чисті стратегії врівноважені, нікому з гравців немає сенсу відхилятися від своєї оптимальної чистої стратегії, гра ведеться в чистих стратегіях.

Якщо сума платежів дорівнює нулю, тобто програш одного гравця дорівнює виграшу другого, така гра зветься грою з мулевою сумою.

Ситуації рівноваги знаходять за схемою

$$\left.\begin{pmatrix} a_{11}a_{12}\cdots a_{1n} \\ a_{21}a_{22}\cdots a_{2n} \\ ------ \\ a_{m1}a_{m2}\cdots a_{mn} \end{pmatrix} \begin{matrix} \to \min\limits_{j} a_{ij} \\ \to \min\limits_{j} a_{ij} \\ ----- \\ \to \min\limits_{j} a_{ij} \end{matrix}\right\} \underset{(максимін)}{\max\min a_{ij}} = \alpha$$

$$\downarrow .... \downarrow$$

$$\underbrace{\max_i a_{i1} \cdots \max_i a_{in}}$$

$$\beta = \min_j \max_i a_{ij} \qquad \text{(мінімакс)}$$

Приклад. За даною платіжною матрицею знайти оптимальні стратегії гравців, якщо a_{ij} – прибуток, тис. крб.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 2 & 3 & 6 & 8 \\ 5 & 9 & 8 & 10 \\ 4 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}.$$

Знайдемо верхню та нижню ціни гри

$$\alpha = \max_i \left(\min_j a_{ij} \right) = \max_i (1, 2, 5, 4) = 5,$$

$$\beta = \min_j \left(\max a_{ij} \right) = \min_j (5, 9, 8, 10) = 5.$$

Максимальний гарантований рівень виграша гравця *А* – 5 тис. крб. Отже, оптимальною стратегією для гравця *А* буде третя, а для гравця *В* – перша. Елемент платіжної матриці $a_{31} = 5$ є точкою рівноваги, чи сідловою точку.

Якщо точки рівноваги немає, то гра ведеться не в чистих стратегіях, а у змішаних. Змішану стратегію утворює ймовірна суміш різних стратегій. Змішана стратегія вміщує всі чисті стратегії, але вони беруться з відповідним рівнем ймовірності.

Для розрахунку оптимальних змішаних стратегій використовують різні методи: аналітичний, матричний, геометричний, лінійне програмування.

Дамо загальне визначення змішаної стратегії.

Припустимо, що гравець *А* для визначення своєї змішаної стратегії використав метод ймовірного відбору, причому такий, що ймовірність вибору першої стратегії - x_1, другої - x_2 та ін. Будемо називати змішаною стратегією гравця *А* такий впорядкований набір називати змішаною стратегією гравця *A* такий впорядкований набір *m* чисел $x_1, x_2, ..., x_m$, які задовольняють двом умовам:

$$x_i \ge 0, \left(i = \overline{1, m}\right),$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_i = 1.$$

Аналогічно упорядкований набір чисел $y_1, y_2, ..., y_n$, що задовольняє умовам

$$y_i \ge 0, \left(j = \overline{1, n}\right),$$

$$\sum_{j=1}^{n} y_j = 1,$$

зветься змішаною стратегією другого гравця.

В основній теоремі теорії гри доводиться, що для всякої матричної гри двох партнерів з нулевою сумою існують оптимальні змішані стратегії у кожного гравця, відхилятися від яких їм невигідно.

Найпростіша матрична гра це 2×2, у якій кожний з гравців має дві стратегії.

Платіжна матриця має вигляд:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Якщо немає сідлової точки, то розв'язком такої гри є змішані оптимальні стратегії $\overline{x} = (x_1, x_2), \overline{y} = (y_1, y_2)$, а ціна гри знаходиться в межах $\alpha \le V \le \beta.$

Відповідно до основної теореми теорії гри застосування оптимальної стратегії $\overline{x}\left(x_{1,} x_2\right)$ забезпечує для гравця *A* одержання середнього виграшу V за будь-яких стратегіях *B*, тобто

$$\begin{cases} a_{11}x_{11} + a_{21}x_2 = V, \left(за\_стратегії\_B_1\right), \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 = V, \left(за\_стратегії\_B_2\right). \end{cases}$$

Крім цих рівнянь додається ще одне рівняння, що зв'язує частоти x_1 та x_2

$$x_1 + x_2 = 1.$$

Розв'язавши три рівняння, одержимо формули для знайдення оптимальних стратегій для гравця *A*,

$$x_2 = 1 - x_1, \qquad x_1 = \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12}a_{21}},$$

та результат гри

$$V = \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}.$$

Склавши аналогічну систему рівнянь

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 = V, \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 = V, \\ y_1 + y_2 = 1, \end{cases}$$

знаходимо оптимальну стратегію для гравця *B*

$$y_2 = 1 - y_{1,} \qquad y_1 = \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}.$$

Приклад. Знайти розв'язання гри, яка задається матрицею $\begin{pmatrix} 25 \\ 64 \end{pmatrix}$, та дати геометричну інтерпретацію цього розв'язку.

Розв'язання. Передусім перевіримо існування сідлової точки у даній матриці. Для цього знайдемо нижню $/\alpha = \max(2:4) = 4/$ та верхню $/\beta = \min(6:6) = 5/$ ціну гри. $\alpha \neq \beta$, тому розв'язком гри будуть оптимальні змішані стратегії, а оцінка гри V лежить в межах $4 \leq V \leq 5$.

Оптимальні стратегії знаходимо за формулами

$$x_1 = \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}} = \frac{4-6}{2+4-5-6} = \frac{2}{5};$$

$$x_2 = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5};$$

$$y_1 = \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}} = \frac{4-5}{-5} = \frac{1}{5};$$

$$y_2 = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5},$$

а значення гри

$$V = \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}} = \frac{2\times4 - 6\times5}{2+4-5-6} = \frac{22}{5}.$$

Отже, розв'язком гри є змішані стратегії $\overline{x} = \left\{\frac{2}{5}; \frac{3}{5}\right\}$ та $\overline{y} = \left\{\frac{1}{5}; \frac{4}{5}\right\}$, а ціна гри - $-V = \frac{22}{5}$.

Дамо геометричну інтерпретацію розв'язку даної гри. Для цього на осі абсцис відкладаємо відрізок A_1A_2, рівний I /рис. 4/.

Кожній точці x відрізка A_1A_2 відповідає деяка змішана стратегія $/x_1, x_2/$, де $x_1 = 1 - x$, $x_2 = x$. На кінцях відріза проводимо прямі, перпендикулярні осі абсцис, на них будемо відкладати виграш при відповідних чистих стратегіях. На першому перпендикулярі відкладаємо виграш гравця A при стратегії A_1, а на другому - при стратегії A_2.

Числам 2 та 5 на осі OY відповідають точки B_1 та B_2, а числам 6 та 4 – точки B'_1 та B'_2. З'єднаємо точки B_1 та B'_1, B_2 та B'_2, одержимо дві прямі, відстань до яких від осі OX визначає середній виграш для всякого сполучення відповідних стратегій. Ламана $B_1MB'_2$ – нижня межа виграшу, одержаного гравцем A, тобто ординати точок, які належать ламаній B_1MB_2, визначають мінімальний виграш гравця A для будь-яких змішаних стратегій, які він використав. Ця мінімальна величина є найбільшою в точці M. Ця точка і визначає ціну гри та її розв'язок.

Координати точки M знаходимо шляхом перетину прямих $B_1B'_1$ та $B_2B'_2$ за допомогою такої системи рівнянь:

$$\begin{cases} 2x_1 + 6x_2 = V, \\ 5x_1 + 4x_2 = V, \\ x_1 + x_2 = 1. \end{cases}$$

Розв'язуючи цю систему, одержимо

$$x_1 = \frac{2}{5}; \qquad x_2 = \frac{3}{5}; \qquad V = \frac{22}{3}.$$

Аналогічно знайдемо оптимальну стратегію для гравця B. Для цього складемо систему рівнянь

$$\begin{cases} 2y_1 + 5y_2 = \dfrac{22}{5}, \\ y_1 + y_2 = 1. \end{cases}$$

Розв'язком її буде

$$y_1 = \frac{1}{5}; y_2 = \frac{4}{5}.$$

Узагальнюючи результати розв’язку гри 2×2, можна визначити основні етапи шукання розв’язку при $2 \times n$ чи $n \times 2$.

1. Побудова прямих, відповідних стратегіям другого /першого/ гравця.
2. Визначення нижньої /верхньої/ межі виграшу.
3. Знайдення двох стратегій другого /першого/ гравця, яким відповідають дві прямі, що перетинаються в точці з максимальною /мінімальною/ ординатою.
4. Визначення ціни гри та оптимальних стратегій за формулами.

Приклад 1. Знайти розв’язок гри, яка задана матрицею

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 9 & 8 \\ 10 & 6 & 9 \end{pmatrix}.$$

Розв’язання. Побудуємо прямі $B_1B'_1$, $B_2B'_2$, $B_3B'_3$ /рис.5./, відповідні стратегіям, тоді ламана B_1MB_2 відповідає нижній межі виграшу гравця *B*. Оптимальні стратегії гравця *B* – перша та друга.

Рис.5

За формулами знаходимо розв’язання гри $\overline{x} = \left\{\frac{2}{3}; \frac{1}{3}\right\}$, $\overline{y} = \left\{\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 0\right\}$, $V = 8$. Отже, гравець *A* приймає стратегію A_1, з ймовірністю $2/3$, а стратегію A_2 – з ймовірністю $1/3$. При цьому його виграш в середньому вісім одиниць.

Приклад 2. Знайти розв’язок гри, що задається матрицею /рис.6/

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 4 \\ 0 & 5 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$$

Розв'язання. Матриця має розмір 2×4, тому розв'язання задачі знаходимо для гравця *B*. На вертикальних прямих будуємо стратегії гравця *A*. Ламана A_1MA_4 відповідає верхній межі виграшу гравця *A*, а відрізок MN - ціни гри. Активними стратегіями для гравця *A* є перша та четверта. Розв'язання гри:

$$\bar{x}=\left\{\frac{7}{8};0;0;\frac{1}{8}\right\};\bar{y}=\left\{\frac{3}{8};\frac{5}{8}\right\};V=\frac{27}{8}.$$

Рис.6

Найбільше застосування у розв'язаннях оптимальних змішаних стратегій набули методи лінійного програмування.

Сформулюємо задачу вибору оптимальної змішаної стратегії для гравців *A* та *B*.

Нехай змішані стратегії гравців $x=\left(x_1,x_2,....,x_m\right)$ та $y=\left(y_1,y_2,....,y_n\right)$. Задана платіжна матриця

$$A=\begin{pmatrix} a_{11}a_{12}\cdots a_{1n} \\ ------ \\ a_{m1}a_{m2}\cdots a_{mn} \end{pmatrix}$$

Підрахуємо середній прибуток гравця *A*, який передбачаємо при умові, що гравець *B* вибере чисту стратегію:

$$a_{11}x_1+a_{21}x_2+...+a_{m1}x_m \qquad \text{і т.д.;}$$

Гравець *A* буде прагнути забезпечити собі гарантований прибуток незалежно від стратегії свого партнера. Припустимо, що гарантований прибуток $V-\min\sum a_{ij}x_j$; тоді маємо таку математичну модель задачі

$$\sum_{i=1}^{m}a_{ij}x_i\geq V;$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_i = 1.$$

Знайти такі значення $x_i \geq 0,$ за яких $Z = V \to \max$.

Для вибору оптимальної змішаної стратегії гравця *B* матимемо математичну модель:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j \leq \eta \,;$$

$$\sum_{j=1}^{n} y_j = 1.$$

Знайти такі значення $y_j \geq 0,$ за яких $V = \eta \to \min,$ де $\eta = \max \sum_j a_{ij} y_j -$ гарантований програш гравця *B*.

Якщо зробити аналіз структури задач для гравців *A* та *B*, можна помітити, що задачі вибору оптимальної змішаної стратегії гравцями *A* та *B* є двоїстими.

Приклад. Нехай відома платіжна матриця гри «підприємець - покупець»

3	6	1	4
5	2	4	2
1	4	3	5

Знайти оптимальні стратегії.

Розв'язання. Перевіримо наявність сідлової точки. Для цього знайдемо верхню та нижню межі ціни гри:

$$\alpha = \max/1;2;1/ = 2,$$
$$\beta = \min(5;6;4;5) = 4.$$

Оскільки $\alpha \neq \beta$, то гра не має сідлової точки і тому ведеться у змішаних стратегіях. Побудуємо математичну модель для розв'язання оптимальної змішаної стратегії гравця *A*. Позначимо $x = (x_1, x_2, x_3) -$ змішана стратегія гравця *A*; $V -$ гарантований прибуток гравця *A*.

Математична модель

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + x_3 \geq V, \\ 6x_1 + 2x_2 + 3x_3 \geq V, \\ x_1 + 4x_2 + 3x_3 \geq V, \\ 4x_1 + 2x_2 + 5x_3 \geq V, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1. \end{cases}$$

Знайти такі значення $x_1, x_2, x_3 \geq 0$, для яких

$$Z = V \to \max.$$

Розв'язання цієї задачі дає одноразово оптимальні змішані стратегії для гравців *A* та

B /за умов двоїстості/.

Визначимо x_1 з останнього рівняння системи обмежень $x_1 = 1 - x_2 - x_3$ та підставимо його в усі інші:

$$\begin{cases} 2x_2 - 2x_3 + 3 \geq V, \\ -4x_2 - 2x_3 + 6 \geq V, \\ 3x_2 + 2x_3 + 1 \geq V, \\ -2x_2 + x_3 + 4 \geq V, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1. \end{cases}$$

Помножимо праві та ліві частини системи обмежень на -1, перенесемо вільні члени до правої частини, а V - до лівої:

$$\begin{cases} -2x_2 + 2x_3 + V \leq 3, \\ 4x_2 + 2x_3 + V \leq 6, \\ -3x_2 - 2x_3 + V \leq 1, \\ 2x_2 + x_3 + V \leq 4, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1. \end{cases}$$

Приведемо систему обмежень до канонічного вигляду, вводячи допоміжні невідомі:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ -2x_2 + 2x_3 + V + x_4 = 3, \\ 4x_2 + 2x_3 + V + x_5 = 6, \\ -3x_2 - 2x_3 + V + x_6 = 1, \\ 2x_2 - x_3 + V + x_7 = 4. \end{cases}$$

Побудуємо початкову симплексну табл.13.

Таблиця 13

Базис	$C_б$	P_o	0	0	0	0	0	0	0	0
			P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	V
P_1	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0

Базис	$C_б$	P_o	0	0	0	0	0	0	0	0
			P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	V
P_4	0	3	0	-2	2	1	0	0	0	1
P_5	0	6	0	4	2	0	1	0	0	1
P_6	0	1	0	-3	-2	0	0	1	0	$\boxed{1}$
P_7	0	4	0	2	1	0	0	0	1	1
Z		0	0	0	0	0	0	0	0	-1

Після трьох одноразових заміщень базису одержимо оптимальний план /табл.14/.

Таблиця 14

Базис	$C_б$	P_o	0	0	0	0	0	0	0	0
			P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	V
P_1	0	1/8	1	0	0	−1/8	−1/8	1/4	0	0
P_3	0	3/8	0	0	1	5/24	−1/24	−1/4	0	0
P_2	0	1/2	0	1	0	−1/6	1/6	0	0	0
V	1	13/4	0	0	0	1/12	5/12	1/2	0	1
P_7	0	1/8	0	0	0	13/24	−19/24	−3/4	1	0
Z		13/4	0	0	0	1/12	5/12	1/2	0	0

Таким чином, оптимальна стратегія гравця $A-\bar{x}=\left\{\frac{1}{8};\frac{1}{2};\frac{3}{8}\right\}$, максимальний гарантований прибуток $-Z=\frac{13}{4}$. Розв'язання двоїстої задачі знаходимо у рядку для Z, тобто оптимальна змішана стратегія гравця $B-\bar{Y}=\left\{\frac{1}{12};\frac{5}{12};\frac{1}{2}\right\}$.

Ділова економічна гра широко застосовується в управлінні виробництвом та торгівлею.

Завдання 1

1.Скласти математичну модель задачі.

2.Розв'язати складену модель графічно.

3.Розв'язати складену модель симплексним методом.

4.Побудовати спряжену двоїсну задачу.

5.Знайти розв'язання двоїстої задачі, обмежуючись розв'язком прямої задачі.

6.Дати тлумачення розв'язку спряженої двоїстої задачі як оцінки ресурсів у прямій задачі.

7.Провести аналіз стійкості двоїстих оцінок. Дати інтервали змін кожного вільного члена системи обмежень вихідної задачі, при яких оптимальний план двоїстої задачі не змінюється.

8.Визначити збільшення максимального значення загального прибутку при збільшені ресурсів усіх типів відповідно на 20, 30, 10 кг. Зробити оцінку роздільного та загального впливу цих змін.

Варіанти 1-15

Для виготовлення двох видів виробів *A* та *B* використовують три види сировини /табл.15/. На виробництво одиниці виробу *A* потрібно витратити сировини першого типу a_1, другого a_2 та третього a_3, кг. На виробництво одиниці виробу *B* потрібно витратити сировини першого типу b_1, другого b_2, третього b_3, кг. Виробництва забезпечено сировиною першого типу у кількості P_1, другого P_2, третього P_3.

Таблиця 15

Варіант	a_1	a_2	a_3	b_1	b_2	b_3	P_1	P_2	P_3	α	β
1	16	8	5	4	7	9	784	552	567	4	4
2	9	7	4	5	8	16	1431	1224	1328	3	2
3	12	10	3	3	5	6	684	690	558	6	2
4	8	7	4	3	6	9	864	864	945	2	3
5	15	11	9	4	5	10	1095	865	1080	3	2
6	6	5	3	3	10	12	714	910	940	3	9
7	11	8	5	3	4	3	671	588	423	5	2
8	9	6	3	4	7	8	801	807	768	3	2
9	3	4	3	5	8	11	453	616	627	2	5
10	10	5	4	9	11	15	1870	1455	1815	7	9
11	8	6	3	2	4	3	830	860	900	5	3
12	3	6	8	2	3	2	560	870	840	3	2
13	2	3	3	5	2	3	380	273	300	2	5
14	1	7	6	3	3	3	650	1365	1245	6	5
15	4	3	3	3	4	5	700	630	750	6	6

Прибуток, крб., від реалізації одиниці готового виробу *A* дорівнює α, виробу $B-\beta$.

Скласти план виробництва виробів *A* та *B* таким чином, щоб був найбільший прибуток від реалізації виробів.

Варіанти 16-30

Для виробництва виробів *A* та *B* використовують три типи економічного устаткування /табл..16/; на виробництво одиниці виробу *A* на устаткування першого типу витрачається час /рік/ a_1, другого $-a_2$, третього $-a_3$; на виготовлення виробу *B* на устаткування першого типу витрачається час b_1, другого $-b_2$, третього $-b_3$. Час відведений для роботи на устаткуванні першого типу не більше t_1, другого $-t_2$, третього $-t_3$. Прибуток від реалізації виробів *A* та *B* таким чином, щоб одержати найбільший прибуток.

Таблиця 16

Варіант	a_1	a_2	a_3	b_1	b_2	b_3	t_1	t_2	t_3	α	β
16	5	3	2	2	3	3	505	393	348	7	6
17	7	6	1	3	3	2	1365	1245	650	6	2
18	5	4	3	3	3	4	750	630	700	5	4
19	6	4	3	2	3	4	600	520	600	6	5
20	8	6	3	2	3	2	840	870	500	6	5
21	3	3	2	2	3	5	273	300	380	4	3
22	2	3	3	1	6	7	438	747	812	7	5
23	4	3	2	3	4	6	480	444	546	2	4
24	4	3	3	3	4	5	440	393	450	6	6
25	2	3	2	3	6	8	428	672	672	3	8
26	5	3	6	10	12	3	910	948	714	9	3
27	9	6	3	4	7	8	945	864	864	3	2
28	4	3	3	8	11	5	616	627	453	2	5
29	3	6	9	8	7	4	768	807	801	3	2
30	4	3	3	3	4	5	440	393	450	6	5

Завдання 2

Знайдіть розв’язання задач лінійного цілочислового програмування.

1. $f = 6x_1 + 10x_2 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 \le 5, \\ -3x_1 + 2x_2 \le 6, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \\ x_1, x_2 - \text{цілі}. \end{cases}$$

2. $f = x_1 + x_2 \to \min$

$$\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 \ge 10, \\ 2x_1 + 3x_2 \ge 8, \\ x_1, x_2 \ge 0, \\ x_1, x_2 - \text{цілі}. \end{cases}$$

3. $f = 2x_1 + 5x_2 \to \max$

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 \le 3, \\ x_2 \le 4, \\ x_1, x_2 \ge 0, \text{цілі}. \end{cases}$$

4. $f = 2x_1 + 3x_2 \to \min$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \ge 9, \\ x_1 + x_2 \ge 4, \\ x_1, x_2 \ge 0, \text{цілі} \end{cases}$$

5. $f = 3x_1 + 4x_2 \to \max$

6. $f = 4x_1 + 3x_2 \to \max$

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 \le 4, \\ 2x_1 - x_2 \le 4, \\ x_1, x_2 \ge 0, цілі. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \le 10, \\ 4x_1 + 3x_2 \le 12, \\ x_1, x_2 \ge 0, \\ x_1, x_2 - цілі. \end{cases}$$

7. $f = 6x_1 + 5x_2 \to \min$

$$\begin{cases} x_2 \ge 4, \\ 2x_1 + 3x_2 \ge 18, \\ x_1, x_2 \ge 0 \\ x_1, x_2 - цілі. \end{cases}$$

8. $f = 3x_1 + 5x_2 \to \min$

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 \ge 6, \\ x_1 + x_2 \ge 4, \\ x_1, x_2 \ge 0, \\ x_1, x_2 - цілі. \end{cases}$$

9. $f(x) = x_1 + 5x_2 \to \max$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \le 3, \\ 5x_1 + 4x_2 \le 20, \\ x_1, x_2 \ge 0 \\ x_1, x_2 - цілі. \end{cases}$$

10. $f = 2x_1 + 3x_2 \to \max$

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 \le 15, \\ x_2 \le 3, \\ x_1, x_2 \ge 0, \\ x_1, x_2 - цілі. \end{cases}$$

Завдання 3

З трьох пристаней A_1, A_2, A_3 на п’ять будівельних майданчиків B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 перевозять пісок. Запаси піску на кожній пристані, потреби будівельних майданчиків і вартість перевезень, крб./т піску, з кожної пристані на кожний будівельний майданчик подано у табл.17.

Сплануйте перевезення піску з пристані на будівельний майданчик так, щоб транспортні витрати були мінімальними.

Таблиця 17

Постачальник	Споживач				
	B_1 / B_1	B_2 / B_2	B_3 / B_3	B_4 / B_4	B_5 / B_5
A_1 / a_1	d_{11}	d_{12}	d_{13}	d_{14}	d_{15}
A_2 / a_2	d_{21}	d_{22}	d_{23}	d_{24}	d_{25}
A_3 / a_3	d_{31}	d_{32}	d_{33}	d_{34}	d_{35}

1.

$$a_1 = 120 \qquad b_2 = 65$$
$$a_2 = 150 \quad ; \quad b_3 = 90$$
$$a_3 = 100 \qquad b_4 = 60$$
$$b_1 = 80 \qquad b_5 = 70$$

$$D = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 15 & 9 & 14 \\ 11 & 2 & 7 & 3 & 10 \\ 4 & 5 & 12 & 8 & 17 \end{pmatrix}$$

2.

$$a_1 = 150 \qquad b_2 = 90$$
$$a_2 = 170 \quad ; \quad b_3 = 160$$
$$a_3 = 260 \qquad b_4 = 150$$
$$b_1 = 100 \qquad b_5 = 80$$

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 10 & 15 & 14 & 4 \\ 3 & 7 & 12 & 5 & 8 \\ 21 & 18 & 6 & 13 & 16 \end{pmatrix}$$

3.

$$a_1 = 120 \qquad b_2 = 120$$
$$a_2 = 180 \quad ; \quad b_3 = 105$$
$$a_3 = 230 \qquad b_4 = 125$$
$$b_1 = 70 \qquad b_5 = 110$$

$$D = \begin{pmatrix} 14 & 8 & 17 & 5 & 3 \\ 21 & 10 & 7 & 11 & 6 \\ 3 & 5 & 8 & 4 & 9 \end{pmatrix}$$

4.

$$a_1 = 175 \qquad b_2 = 120$$
$$a_2 = 165 \quad ; \quad b_3 = 110$$
$$a_3 = 180 \qquad b_4 = 130$$
$$b_1 = 90 \qquad b_5 = 70$$

$$D = \begin{pmatrix} 12 & 9 & 7 & 11 & 6 \\ 4 & 3 & 12 & 2 & 8 \\ 5 & 17 & 9 & 4 & 11 \end{pmatrix}$$

5.

$$a_1 = 260 \qquad b_2 = 200$$
$$a_2 = 400 \quad ; \quad b_3 = 190$$
$$a_3 = 240 \qquad b_4 = 230$$
$$b_1 = 180 \qquad b_5 = 100$$

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 7 & 11 & 15 \\ 14 & 3 & 1 & 8 & 6 \\ 9 & 5 & 16 & 7 & 12 \end{pmatrix}$$

6.

$$a_1 = 250 \qquad b_2 = 230$$
$$a_2 = 300 \quad ; \quad b_3 = 190$$
$$a_3 = 270 \qquad b_4 = 160$$
$$b_1 = 120 \qquad b_5 = 120$$

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 11 & 5 & 3 \\ 8 & 17 & 13 & 7 & 6 \\ 14 & 10 & 15 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

7.

$$a_1 = 370 \qquad b_2 = 280$$
$$a_2 = 450 \quad ; \quad b_3 = 330$$
$$a_3 = 480 \qquad b_4 = 290$$
$$b_1 = 300 \qquad b_5 = 100$$

$$D = \begin{pmatrix} 21 & 18 & 14 & 3 & 6 \\ 7 & 11 & 10 & 5 & 12 \\ 4 & 8 & 16 & 9 & 13 \end{pmatrix}$$

8.

$$a_1 = 560 \quad b_2 = 220$$
$$a_2 = 570 \quad b_3 = 230$$
$$a_3 = 620 \;; \quad b_4 = 270$$
$$b_1 = 300 \quad b_5 = 100$$

$$D = \begin{pmatrix} 11 & 4 & 15 & 7 & 2 \\ 20 & 9 & 7 & 14 & 5 \\ 18 & 10 & 3 & 8 & 6 \end{pmatrix}$$

9.

$$a_1 = 350 \quad b_2 = 220$$
$$a_2 = 350 \quad b_3 = 230$$
$$a_3 = 300 \;; \quad b_4 = 270$$
$$b_1 = 180 \quad b_5 = 100$$

$$D = \begin{pmatrix} 11 & 4 & 15 & 7 & 2 \\ 20 & 9 & 7 & 14 & 5 \\ 18 & 10 & 3 & 8 & 6 \end{pmatrix}$$

10.

$$a_1 = 400 \quad b_2 = 200$$
$$a_2 = 370 \quad b_3 = 290$$
$$a_3 = 380 \;; \quad b_4 = 260$$
$$b_1 = 250 \quad b_5 = 150$$

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 & 11 & 3 \\ 12 & 8 & 6 & 14 & 11 \\ 10 & 15 & 7 & 9 & 18 \end{pmatrix}$$

11.

$$a_1 = 300 \quad b_2 = 120$$
$$a_2 = 150 \quad b_3 = 100$$
$$a_3 = 250 \;; \quad b_4 = 140$$
$$b_1 = 160 \quad b_5 = 180$$

$$D = \begin{pmatrix} 20 & 3 & 9 & 15 & 35 \\ 14 & 10 & 12 & 20 & 46 \\ 25 & 11 & 16 & 19 & 48 \end{pmatrix}$$

12.

$$a_1 = 180 \quad b_2 = 60$$
$$a_2 = 100 \quad b_3 = 90$$
$$a_3 = 120 \;; \quad b_4 = 70$$
$$b_1 = 100 \quad b_5 = 80$$

$$D = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 9 & 15 & 35 \\ 3 & 10 & 12 & 20 & 46 \\ 15 & 11 & 16 & 19 & 48 \end{pmatrix}$$

13.

$$a_1 = 250 \quad b_2 = 110$$
$$a_2 = 125 \quad b_3 = 85$$
$$a_3 = 225 \;; \quad b_4 = 135$$
$$b_1 = 120 \quad b_5 = 150$$

$$D = \begin{pmatrix} 7 & 20 & 9 & 15 & 35 \\ 3 & 14 & 12 & 20 & 46 \\ 15 & 25 & 16 & 19 & 48 \end{pmatrix}$$

14.

$$a_1 = 200 \quad b_2 = 100$$
$$a_2 = 100 \quad b_3 = 70$$
$$a_3 = 200 \;; \quad b_4 = 130$$
$$b_1 = 80 \quad b_5 = 120$$

$$D = \begin{pmatrix} 7 & 20 & 3 & 15 & 35 \\ 3 & 14 & 10 & 20 & 46 \\ 15 & 25 & 11 & 19 & 48 \end{pmatrix}$$

15.

$$a_1 = 220 \quad b_2 = 110$$
$$a_2 = 120 \quad b_3 = 80$$
$$a_3 = 160 \; ; \; b_4 = 100$$
$$b_1 = 70 \quad b_5 = 140$$

$$D = \begin{pmatrix} 7 & 20 & 3 & 9 & 35 \\ 3 & 14 & 10 & 12 & 46 \\ 15 & 24 & 11 & 16 & 48 \end{pmatrix}$$

16.

$$a_1 = 210 \quad b_2 = 120$$
$$a_2 = 140 \quad b_3 = 90$$
$$a_3 = 150 \; ; \; b_4 = 110$$
$$b_1 = 80 \quad b_5 = 100$$

$$D = \begin{pmatrix} 11 & 7 & 3 & 9 & 15 \\ 12 & 3 & 14 & 12 & 20 \\ 18 & 15 & 25 & 16 & 19 \end{pmatrix}$$

17.

$$a_1 = 170 \quad b_2 = 70$$
$$a_2 = 120 \quad b_3 = 90$$
$$a_3 = 110 \; ; \; b_4 = 80$$
$$b_1 = 90 \quad b_5 = 70$$

$$D = \begin{pmatrix} 7 & 20 & 3 & 9 & 15 \\ 3 & 14 & 10 & 12 & 20 \\ 15 & 25 & 11 & 16 & 19 \end{pmatrix}$$

18.

$$a_1 = 250 \quad b_2 = 160$$
$$a_2 = 300 \quad b_3 = 100$$
$$a_3 = 150 \; ; \; b_4 = 120$$
$$b_1 = 140 \quad b_5 = 180$$

$$D = \begin{pmatrix} 11 & 7 & 20 & 9 & 15 \\ 12 & 3 & 14 & 12 & 20 \\ 18 & 15 & 25 & 16 & 19 \end{pmatrix}$$

19.

$$a_1 = 225 \quad b_2 = 150$$
$$a_2 = 250 \quad b_3 = 110$$
$$a_3 = 125 \; ; \; b_4 = 135$$
$$b_1 = 120 \quad b_5 = 85$$

$$D = \begin{pmatrix} 11 & 7 & 20 & 3 & 15 \\ 12 & 3 & 14 & 10 & 20 \\ 18 & 15 & 25 & 11 & 19 \end{pmatrix}$$

20.

$$a_1 = 150 \quad b_2 = 110$$
$$a_2 = 200 \quad b_3 = 60$$
$$a_3 = 150 \; ; \; b_4 = 140$$
$$b_1 = 80 \quad b_5 = 110$$

$$D = \begin{pmatrix} 11 & 20 & 3 & 9 & 15 \\ 12 & 14 & 10 & 12 & 20 \\ 18 & 25 & 11 & 16 & 19 \end{pmatrix}$$

Завдання 4

Розв'яжіть задану матричну гру

1.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 4 & 3 \\ 0 & 6 \\ 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$$

2.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & 3 & 5 \\ 6 & 3 & 8 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

3.

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 5 & 3 & 6 & 7 \\ 4 & 7 & 9 & 5 & 8 \end{pmatrix}$$

4.

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 5 & 3 \\ 3 & 6 \\ 1 & 8 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

5.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 6 & 4 & 6 \\ 4 & 1 & 8 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

6.

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & -6 \end{pmatrix}$$

7.

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -6 & -5 & -1 \\ -3 & -7 & -6 & -2 \end{pmatrix}$$

8.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 6 & 7 & 1 \end{pmatrix}$$

9.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

10.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 & -7 & 9 \\ -2 & 4 & 6 & 8 & -10 \end{pmatrix}$$

11.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 0 \\ 3 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

12.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \\ 9 & 11 \end{pmatrix}$$

13.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -5 & -7 \\ -9 & -11 \end{pmatrix}$$

14.

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 7 & -11 & 0 \\ -8 & -2 & -9 & 1 \end{pmatrix}$$

15.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 3 & 7 & 0 \\ 0 & 5 & 2 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

16.

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 6 & 7 \\ 3 & 6 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

17.

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 9 & 8 & 7 & 4 & 2 \\ 10 & 1 & 2 & 3 & 6 & 8 \end{pmatrix}$$

18.

$$A=\begin{pmatrix} 6 & -10 & 3 \\ 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

19.

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 0 \\ 1 & 3 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$$

20.

$$A=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 9 & 5 \\ 7 & 6 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Линейная алгебра. – М.: Наука, 1974. – 128 с.
2. Кузнецов А.В., Холод Н.И. Математическое программирование. – Минск: вышэйш. шк., 1984. – 80 с.
3. Кузнецов Ю.Н., Кузубов В.Л., Волощенко А.В. Математическое программирование. - М.: Высш. шк., 1980. – 240 с.
4. Проскуряков И.В. Сборник задач по линейной алгебре. – М. Наука. 1978. -150 с.
5. Калихман И.Л. Сборник задач по линейной алгебре и программированию. – М.: Высш. шк., 1975. – 195 с.
6. Акулич И.Л. Математическое программирование в примерах и задачах. – М.: Высш. шк., 1986. -243 с.
7. Справочник по математике для экономистов /Под ред. В.И. Ермакова. – М.: Высш. шк., 1987. – 306 с.