ПРЕДМЕТ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ.

Теория вероятностей – это математическая наука, изучающая закономерности, которые возникают при взаимодействии большого числа случайных факторов.

Если в обыденных представлениях, в житейской практике считается, что случайные события представляют собой нечто крайне редкое, идущее вразрез закономерному, то в теории вероятностей отказываются от этих представлений. Случайные события, как они понимаются в теории вероятностей, обладают рядом характерных особенностей, в частности, все они происходят в массовых явлениях. Под массовыми явлениями понимаются такие, которые имеют место в совокупностях большого числа почти равноправных объектов и определяются именно этим массовым характером явления и лишь в незначительной мере зависят от природы составляющих объектов.

Во всех случаях, когда применяются вероятностные методы исследования, цель их в том, чтобы, минуя слишком сложное (и зачастую практически невозможное) изучение отдельного явления, обусловленного большим количеством факторов, обратиться к законам, управляющими массами случайных явлений. Изучение этих законов позволяет не только осуществить научный прогноз в своеобразной области случайных явлений, но в ряде случаев помогает целенаправленно влиять на ход случайных явлений, контролировать их, ограничивать сферу действия случайности.

Вероятностный, или статистический, метод в науке не противопоставляет себя классическому методу точных наук, а является его дополнением, позволяющим глубже анализировать явление с учетом присущих ему элементов случайности.

Характерным для современного этапа развития любой науки является широкое и плодотворное применение вероятностных и статистических методов. Это вполне естественно, так как при углубленном изучении любого круга явлений неизбежно наступает этап, когда требуется не только выявления основных закономерностей, но и анализ основных отклонений от них. В одних науках, в силу специфики предмета и исторических условий, внедрение статистических методов наблюдается раньше, в других – позже. В настоящее время нет почти не одной науки, в которой так или иначе не применялись бы вероятностные и статистические методы.

Математические законы теории вероятностей – отражение реальных статистических законов, объективно существующих в массовых случайных явлениях природы. К изучению этих явлений теория вероятностей применяет математический метод и по своему методу является одним из разделов математики, столь же логически точным и строгим, как и другие математические науки.

Из истории теории вероятностей.

Возникновение теории вероятностей относится к середине XVII века и связано с исследованиями Паскаля (1623 – 1662), Ферма (1601 – 1665) и Гюйгенса (1629 – 1695) в области азартных игр. В переписке Паскаля и Ферма, относящейся к 1654 году постепенно определились такие важные понятия, как вероятность и математическое ожидание.

Непосредственное практическое применение вероятностные методы нашли прежде всего в вопросах страхования. Возникавшие в то время в теории вероятностей задачи решались исключительно элементарно – арифметическими и комбинаторными методами.

Серьезные требования со стороны естествознания (теория ошибок наблюдений, задачи теории стрельбы, проблемы статистики народонаселения) привели к необходимости дальнейшего развития теории вероятностей и привлечения более развитого аналитического аппарата. Особенно значительную роль в развитии аналитических методов теории вероятностей сыграли Муавр (1667 – 1754), Лаплас (1747 –1827), Гаусс (1777 – 1855), Пуассон (1781 –1840).

Для всего XVIII и начала XIX века характерны бурное развитие теории вероятностей и повсеместное увлечение ею. Теория вероятностей становится «модной» наукой. Ее начинают применять не только там, где это применение правомерно, но и там, где оно ничем не оправдано. Для этого периода характерны многочисленные попытки применить теорию вероятностей к так называемым «нравственным» наукам. Появились работы, посвященные вопросам судопроизводства, истории, политики, богословия, в которых применялся аппарат теории вероятностей. Для всех псевдонаучных исследований характерен упрощенный подход к общественным явлениям. Подобные попытки обречены на неудачу, их косвенным результатом стало разочарование в теории вероятностей как в науке 20 – 30 годах XIX века в Западной Европе.

Именно в это время в России создается знаменитая Петербургская математическая школа, трудами которой теория вероятностей была поставлена на прочную логическую и математическую основу и сделана надежным, точным и эффективным методом познания. Успех русской науки был подготовлен деятельностью В.Я. Буняковского (1804- 1889). Им был написан первый в Российской Империи курс теории вероятностей, оказавший большое влияние на развитие этой области науки.

Работы П.Л. Чебышева (1821-18889), А.А. Маркова (1856-1922), А.М. Ляпунова (1857-1918), относящиеся к предельным теоремам теории вероятностей и случайным процессам, вывели теорию вероятностей с задворков науки и поставили ее в ряд точных математических наук.

Современное развитие теории вероятностей характеризуется всеобщим подъемом интереса к ней. А также расширением круга ее практических приложений. В США, Франции, Швеции, Италии, Японии, Великобритании, Польше, Венгрии и других странах мира имеется немало ученых, обогащающих теорию вероятностей важными результатами.

Украинская школа теории вероятностей, унаследовав традиции Петербургской математической школы, занимает в мировой науке одно из ведущих мест.

Основные понятия теории вероятностей.

Математическая теория вероятностей приобретает наглядный смысл в связи с такими действительными или мыслимыми опытами, как, например, бросание монеты 100 раз, бросание игральных костей, сдача колоды карт, игра в рулетку, наблюдение продолжительности жизни человека, скрещивание двух сортов растений и наблюдение фенотипов потомков. Сюда же относятся такие явления как пол новорожденных, колебание числа телефонных вызовов, наличие случайных шумов в системах связи, результаты выборочного контроля качества продукции, положение частицы при диффузии и т.д.

Любая теория обязательно предполагает некоторую идеализацию. Начнем ее с возможных исходов «опыта» или «наблюдения».

Например, при бросании монеты не обязательно выпадает герб или решетка; монета может куда–либо закатиться или встать на ребро. Тем не менее, мы условимся рассматривать герб и решетку как единственно возможные исходы бросания монеты. Это соглашение упрощает теорию и не сказывается на возможностях ее применения. Идеализация подобного рода проводится постоянно.

Результаты стохастических опытов или наблюдений будем называть **событиями**. Так «опыт», состоящий в подбрасывании игральной кости, может иметь своим результатом «событие», состоящее в том, что выпавшее число очков – четно.

Будем различать **элементарные** (неразложимые) события (их называют элементарными исходами) и составные (или разложимые) события.

Например, сказать, что «сумма очков, выпавших при бросании двух игральных костей, равна шести» все равно, что сказать, что произошло событие «(1,5) или (2,4), или (3,3), или (4,2), или (5,1)» и это перечисление разлагает событие «сумма очков равна шести» на пять элементарных исходов.

Любое событие может быть разложено на элементарные исходы, иначе говоря, <u>*событие есть совокупность элементарных исходов.*</u>

Элементарные исходы, представляющие собой мыслимые результаты опыта или наблюдения и определяют этот (идеализированный) опыт. Заметим, что термин «элементарный исход» остается столь же неопределенным, как и термин «точка» в геометрии.

Совокупность всех элементарных исходов будем называть **пространством элементарных исходов**, а сами элементарные исходы – точками этого пространства. Все события, связанные с данным (идеализированным) опытом, могут быть описаны как совокупность элементарных исходов, поэтому слово «событие» означает то же самое, что и некоторое «множество элементарных исходов».

Достоверным будем событие, которое обязательно произойдет в данном опыте.

Невозможное событие – это то, которое в данном опыте произойти не может.

Ясно, что каждое событие обладает той или иной степенью возможности. Чтобы количественно сравнивать между собой события по степени их возможности, очевидно, нужно с каждым событием связать определенное число, которое тем больше, чем более возможно событие. Таким числом является **вероятность события**, о которой поговорим чуть позже.

Операции над событиями.

Пусть задано произвольное, но фиксированное пространство элементарных исходов Ω, такой же символ используют для достоверного события. Будем использовать заглавные латинские буквы для обозначения событий. Невозможное событие будем обозначать символом $\varnothing$ (пустое множество).

Два события называют **тождественными** друг другу ($A=B$) тогда и только тогда, когда эти события состоят из одних и тех же точек.

Событие, состоящее в наступлении хотя бы одного из событий A или B, называют **суммой** событий A и B и обозначают $A+B$.

Событие, состоящее в наступлении обоих событий A и B, называют **произведением** событий A и B и обозначают $A\cdot B$.

Событие, состоящее в том, что событие A происходит, а событие B не происходит, называют **разностью** событий A и B и обозначают $A\text{-}B$.

Событие $\bar{A}$ называют **противоположным** событию A, если одновременно выполнены два соотношения: $A+\bar{A}=\Omega;\ A\cdot\bar{A}=\varnothing.$ То есть событие $\bar{A}$ содержит все элементарные исходы, не содержащиеся в A.

Два события называют **несовместными**, если их совместное появление невозможно, т.е. $A\cdot B=\varnothing.$

События $B_1, B_2,\ldots,B_n$ образуют **полную группу событий**, если хотя – бы одно из них непременно произойдет в результате опыта, т.е.

$$B_1+B_2+\ldots+B_n=\Omega.$$

Примеры событий и действий над ними.

Пример 1.1. *Бросание монеты.* Пусть монета подбрасывается 3 раза. **Г** - выпадение герба при одном бросании, **Р** – выпадение решетки. Пространство элементарных исходов состоит из 8 точек: ГГГ, ГГР, ГРГ, РГГ, ГРР, РГР, РРГ, РРР. Событие **А** – «выпало не менее двух гербов» ={ГГГ, ГГР, ГРГ, РГГ}. Событие **В** – «выпала ровно одна решетка» = {ГГР, ГРГ, РГГ}. В этом случае **А+В=А, А·В=В, А-В=**{ГГГ}.

Пример 1.2. *Возраст супругов.* Страховые компании интересуются распределением возрастов супругов. Пусть событие **А**-«мужу свыше 40 лет», событие **В**- «муж старше жены», событие **С**-«жене свыше 40 лет». Тогда **А·В –** «мужу свыше 40 лет и он старше жены», **А-В –**«мужу свыше 40 лет, но он не старше своей жены», **А·С** –«каждому из супругов свыше 40 лет», **А+С** –«хотя бы одному из супругов свыше 40 лет».

Аксиомы теории вероятностей.

В современной математике принято аксиомами называть те предложения, которые принимаются за истинные и в пределах данной теории не доказываются. Все остальные положения этой теории должны выводиться чисто логическим путем из принятых аксиом. Формулировка аксиом представляет собой не начальную стадию развития математической науки, а являются результатом длительного накопления фактов и логического анализа полученных результатов с целью выявления действительно основных первичных фактов. Именно так складывались аксиомы геометрии. Подобный же путь прошла и теория вероятностей, в которой аксиоматическое построение ее основ явилось делом сравнительно недавнего прошлого. Впервые задача аксиоматического построения теории вероятностей была решена в 1917 году С.Н.Бернштейном.

В настоящее время общепринята аксиоматика А.Н.Колмогорова (1903 - 1987), опубликованная в 1933 году, которая связывает теорию вероятностей с теорией множеств и метрической теорией функций. В несколько упрощенном виде система аксиом выглядит следующим образом.

Аксиома 1 *(аксиома существования вероятности). Каждому событию* ***A*** *поставлено в соответствие неотрицательное число* ***P(A)****, называемое вероятностью.*

Аксиома 2 *(вероятность достоверного события). Вероятность достоверного события равна единице:* $P(\Omega)=1$.

Аксиома 3 *(аксиома сложения). Если события* ***A*** *и* ***B*** *несовместны, то* $P(A+B)=P(A)+P(B)$.

Аксиома 4 *(расширенная аксиома сложения). Если событие* ***A*** *равносильно наступлению хотя бы одного из попарно несовместных событий* $A_1, A_2, \ldots$, *т.е.* $A=A_1+A_2+\ldots$, *то* $P(A)=P(A_1)+P(A_2)+\ldots$.

Вероятность события, определяемая аксиоматически, выражает численную меру степени объективной возможности этого события.

Первые три аксиомы определяют вероятность. Необходимость 4-ой аксиомы связана с тем, что в теории вероятностей постоянно приходится рассматривать события, разделяющиеся на бесконечное число частных случаев. Выведем несколько важных следствий.

Следствие 1. *Вероятность противоположного события* $P(\bar{A})=1-P(A)$.

Доказательство. По определению противоположного события

$A+\bar{A}=\Omega$. Используем вторую аксиому : $P(A+\bar{A})=1$. События A и $\bar{A}$ несовместны, следовательно по третьей аксиоме $P(A)+P(\bar{A})=1$. □

Следствие 2. *Вероятность невозможного события равна нулю*: $P(\varnothing)=0$.

Доказательство. Противоположное к невозможному событию – достоверное. Используя вторую аксиому и первое следствие, получаем требуемое.

Следствие 3. *Вероятность любого события* $P(A)\in[0,1]$.

Доказательство следует из второй аксиомы и второго следствия.

Теорема сложения.

Для произвольных событий A *и* B *верно:*

$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(A\cdot B)$.

Доказательство. Представим событие $A+B$ в виде суммы несовместных событий: $A+B=A+(B-A\cdot B)$, тогда в силу аксиомы 3 имеем

$P(A+B)=P(A+\{B-A\cdot B\})=P(A)+P(B-A\cdot B)$.

Аналогично $P(B)=P(A\cdot B+\{B-A\cdot B\})=P(A\cdot B)+P(B-A\cdot B)$.

Из последнего равенства следует, что $P(B-A\cdot B)=P(B)+P(A\cdot B)$.

Таким образом $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(A\cdot B)$.

Теорема доказана. □

Теорему сложения можно обобщить на случай 3-х событий:

$P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cdot B)-P(A\cdot C)-P(B\cdot C)+P(A\cdot B\cdot C)$.

Классическое определение вероятности.

Классическое определение вероятности основано на равновозможности (равновероятности) элементарных исходов. Например, при бросании игральной кости, которая имеет точную форму куба и изготовлена из однородного материала, равновероятными элементарными исходами будет выпадение какого – либо определенного числа очков (от 1 до 6), обозначенного на гранях этого куба, поскольку в силу наличия симметрии ни одна из граней не имеет объективного преимущества перед другими.

В общем случае рассмотрим полную группу, состоящую из конечного числа элементарных, равновозможных, несовместных исходов некоторого опыта. Такую группу называют группой возможных результатов испытания. Те из возможных результатов испытания, на которые подразделяется событие A, называют результатами испытания, благоприятствующими A.

Классическое определение вероятности может быть сформулировано так:

Вероятность ***P(A)*** *события* ***A*** *равняется отношению числа возможных результатов испытания, благоприятствующих* ***A****, к числу всех возможных результатов испытания.*

$$P\{A\}=\frac{M}{N}$$

Определенная таким образом вероятность удовлетворяет всем аксиомам вероятности Колмогорова.

Полезность пространств с равновероятными элементарными исходами проявляется при изучении азартных игр и в комбинаторном анализе.

Примеры вычисления вероятности события по классической формуле.

Пример 1.3. *Подбрасывание игральной кости 1 раз.* Событие ***A***=«выпавшее число очков – четно». В этом случае $N = 6$ – число граней куба, $M = 3$ – число граней с четными номерами; тогда $P(A)=1/2$.

Пример 1.4. *Вытягивание шара из урны, содержащей 2 белых и 5 черных шаров.* Событие ***A***=«вытянули черный шар». $N = 2+5=7$(общее число шаров в урне), $M= 5$ (число черных шаров), тогда $P(A)= 5/7$.

Вычисление вероятности по классической формуле вызывает в некоторых случаях затруднения, связанные с тем, что при вычислении чисел ***M*** и ***N*** требуется знание комбинаторных формул. Приведем некоторые из них.

Число всевозможных **перестановок** из n различных элементов равно ***n!***(читается «эн факториал») и обозначает произведение всех целых чисел от 1 до n, т.е. $\boldsymbol{n! =1\cdot 2\cdot \ldots \cdot n}$. Например, число способов рассадить 4-х человек на 4-х местах равно $4!= 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4=24$.

Число всевозможных способов выбрать ***m*** элементов из ***n*** (порядок, в котором выбирались элементы, роли не играет) называют числом **сочетаний** из ***n*** по ***m*** и обозначают C_n^m.

Справедлива формула $C_n^m=\dfrac{n!}{m!(n-m)!}$.

Например, число способов выбрать 3-х дежурных из группы в 20 человек равно

$$C_{20}^3=\frac{20!}{3!\cdot 17!}=\frac{20\cdot 19\cdot 18}{1\cdot 2\cdot 3}=20\cdot 19\cdot 3=1140.$$

Число всевозможных способов выбрать ***m*** элементов из ***n*** в определенном порядке называют числом **размещений** из ***n*** по ***m*** и обозначают A_n^m.

Справедлива формула $A_n^m=\dfrac{n!}{(n-m)!}$.

Например, число способов выбрать председателя и секретаря собрания, если в нем участвуют 20 человек, равно $A_{20}^{2}=\dfrac{20!}{18!}=20\cdot 19=380.$

УСЛОВНЫЕ ВЕРОЯТНОСТИ.

Понятие условной вероятности является основным инструментом теории вероятностей.

Вероятность события ***A*** в предположении, что уже произошло событие ***B***, называют **условной вероятностью** события ***A*** при условии ***B*** и обозначают ***P(A|B).***

Например, в урне два белых шара и один черный. Два человека вынимают из урны по одному шару. Рассмотрим события:

A – появление белого шара у первого человека,

B – появление белого шара у второго человека.

Тогда ***P(A)=2/3 ; а P(A|B)=1/2.***

Условные вероятности вычисляют (по определению) по формуле

P(A|B)=P(A·B)/P(B) , если ***P(B)≠0.***

Условная вероятность обладает всеми свойствами вероятности. Рассмотрение условных вероятностей при одном и том же данном событии ***B*** равносильно выбору ***B*** в качестве нового пространства элементарных исходов с вероятностями, пропорциональными первоначальным. Коэффициент пропорциональности ***P(B)*** необходим для того, чтобы сделать вероятность нового пространства равной единице. Из формул для условных вероятностей ***P(A|B)*** и ***P(B|A)*** легко получить следующую теорему.

Теорема умножения. *Вероятность произведения двух событий равна произведению вероятности одного из этих событий на условную вероятность другого при условии, что первое произошло:*

$$P(A\cdot B)=P(B)\cdot P(A|B)=P(A)\cdot P(B|A).$$

Теорема умножения применима и в том случае, когда одно из событий ***A*** или ***B*** является невозможным, так в этом случае вместе с ***P(A)=0*** имеют место равенства ***P(A|B)=0*** и ***P(A·B)=0.***

Все основные теоремы о вероятностях остаются справедливыми для условных вероятностей, взятых относительно некоторого фиксированного события ***B***.

События ***A*** и ***B*** называют **независимыми**, если

$$P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B).$$

Если события A и B независимы, то условные вероятности совпадают с безусловными:

$P(A|B)=P(A)$, $P(B|A)=P(B)$.

Понятие независимости событий играет значительную роль в теории вероятностей и ее приложениях. В практических вопросах для определения независимости данных событий редко обращаются к проверке выполнения равенства, данного в определении. Обычно пользуются интуитивными соображениями, основанными на опыте. Так, например, ясно, что выпадение герба на одной монете не изменяет вероятности появления герба на другой монете, если только эти монеты во время бросания не связаны между собой. Точно также рождение мальчика у одной матери не изменяет вероятности появления мальчика у другой матери. Это – независимые события.

События $B_1, B_2, \ldots, B_k$ называют **независимыми в совокупности,** если для любых $1 \le i < j < \ldots < r \le k$ выполнено:

$P(B_i \cdot B_j \cdot \ldots \cdot B_r) = P(B_i) \cdot P(B_j) \cdot \ldots \cdot P(B_r)$.

Заметим, что для независимости в совокупности нескольких событий не достаточно их попарной независимости.

Примеры использования теорем сложения и умножения вероятностей при решении задач.

Пример 2.1. Прибор состоит из 3-х узлов, каждый из которых может выйти из строя. Отказ хотя бы одного узла приводит к отказу прибора в целом. Надежность (вероятность безотказной работы) для каждого из узлов соответственно равна $p_1=0,9$; $p_2=0,8$; $p_3=0,7$. Найти надежность прибора в целом.

Решение. Рассмотрим события: A_1- безотказная работа 1-го узла; A_2- безотказная работа 2-го узла; A_3- безотказная работа 3-го узла; A- безотказная работа прибора. Ясно, что $A= A_1 \cdot A_2 \cdot A_3$. По теореме умножения для независимых событий

$P(A)= P(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3)= P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3)= 0,9 \cdot 0,8 \cdot 0.7=0,504$.

Пример 2.2. Студент пришел сдавать зачет, зная из 30 вопросов только одну треть. Какова вероятность сдать зачет, если после отказа отвечать на первый вопрос, преподаватель задает еще один?

Решение. Обозначим события: A-студент сдал зачет, B- студент ответил на первый вопрос преподавателя, C- студент ответил на второй вопрос преподавателя. Очевидно, что $A = B + \overline{B} \cdot C$, т.е. студент сдаст зачет, если он либо ответит на первый вопрос, либо не ответит на первый, но ответит на второй.

По теореме сложения $P(A)=P(B+\overline{B}\cdot C)= P(B)+P(\overline{B}\cdot C)- P(B\cdot\overline{B}\cdot C);$ но $B\cdot\overline{B}\cdot C=\varnothing$ (так как события $\boldsymbol{B}$ и $\overline{B}$ не могут осуществиться одновременно, поэтому $P(A)= P(B)+P(\overline{B}\cdot C)$.

По условию задачи $P(B)=10/30=1/3$. По теореме умножения $P(\overline{B}\cdot C)=P(\overline{B})P(C|\overline{B})$.

Далее, $P(\overline{B})=1-P(B)=2/3$; $P(C|\overline{B})=10/29$ (так как осталось 29 вопросов, из которых студент знает 10) .

Таким образом, $\boldsymbol{P(A)}=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\cdot\frac{10}{29}=\frac{49}{87}\approx\boldsymbol{0{,}56}$.

Пример 2.3. Вероятность попадания в цель первым стрелком равна 0,7, а вторым -0,6. Стрелки делают по одному выстрелу по цели одновременно. Определить вероятность того, что цель будет поражена, если они стреляют независимо друг от друга.

*Решение***.** Обозначим события: A_1 – цель поражена первым стрелком, A_2 – цель поражена вторым стрелком, A – цель поражена. Ясно, что $A=A_1+A_2$. По теореме сложения

$$P(A)=P(A_1+A_2)=P(A_1)+P(A_2)-P(A_1\cdot A_2).$$

Так как события A_1 и A_2 – независимы, то $P(A_1\cdot A_2)=P(A_1)P(\cdot A_2)$. По условию задачи $P(A_1)=0{,}7$, $P(\cdot A_2)=0{,}6$. Таким образом, $P(A)= P(A_1)+P(A_2)-P(A_1)P(\cdot A_2)=0{,}7+0{,}6-0{,}7\cdot 0{,}6=0{,}88$.

Формула полной вероятности.

Следствием теорем сложения вероятностей и умножения вероятностей является формула полной вероятности.

Пусть требуется найти вероятность некоторого события A, которое может произойти одновременно с одним из событий $H_1,H_2,\ldots,H_K$, образующих полную группу несовместных событий. Эти события называют **гипотезами.**

Так как гипотезы образуют полную группу, то событие A может осуществиться только в комбинации с какими – либо из этих гипотез:

$$A=A\cdot H_1+A\cdot H_2+\ldots+A\cdot H_K\ .$$

Так как гипотезы H_1, H_2, $\ldots,H_K$ несовместны, то и события $A\cdot H_1$, $A\cdot H_2,\ldots,A\cdot H_K$ также несовместны, используя теорему сложения, получим:

$$P(A)=P(A\cdot H_1)+P(A\cdot H_2)+\ldots+P(A\cdot H_K).$$

Применяя к событиям $A\cdot H_1, A\cdot H_2,\ldots,A\cdot H_K$ теорему умножения, получим

$$P(A)=P(H_1)P(A|H_1)+P(H_2)P(A|H_2)+\ldots+P(H_K)P(A|H_K),$$

или

$$P(A)=\sum_{j=1}^{N} P(H_J)P(A|H_J).$$

Последнюю формулу называют формулой полной вероятности.

Пример 2.4. Группа студентов состоит из 3-х отличников , 9-ти хорошистов и 18 студентов, занимающихся слабо. Отличники на экзамене могут получить «5» с вероятностью 0,9 и «4» с вероятностью 0,1; хорошо успевающий студент может получить «5» с вероятностью 0,3, «4» с вероятностью 0,5 и «3» с вероятностью 0,2; слабо успевающий студент может получить «4» с вероятностью 0,2, «3» с вероятностью 0,4 и «2» с вероятностью 0,4. Найти вероятность того, что случайно выбранный студент получит «5» или «4».

Решение. Событие A - случайно выбранный студент получит на экзамене «5» или «4». Гипотезы: H_1- студент успевает отлично, H_2- студент успевает хорошо, H_3- студент успевает слабо.

Вероятности гипотез: $P(H_1)=3:30=0,1;\ P(H_2)=9:30=0,3;\ P(H_3)=18:30=0,6.$

Условные вероятности: $P(A|H_1)=1,\ P(A|H_2)=0,8,\ P(A|H_3)=0,2.$

По формуле полной вероятности: $P(A)=0,1\cdot 1+0,3\cdot 0,8+0,6\cdot 0,2=0,46.$

Формула Байеса.

Следствием теоремы умножения и формулы полной вероятности является формула Байеса, названная по имени установившего её в 1763 году Т.Бейеса (Thomas Bayes 1702 - 1761).

Пусть имеется полная группа несовместных событий – гипотез $H_1,H_2,\ldots,H_K$. Вероятности этих гипотез до проведения опыта известны и равны $P(H_1),\ P(H_2),\ldots,\ P(H_K)$. Эти вероятности называют **априорными** (или вероятностями *a priori* – до опыта). Произведен опыт, в результате которого произошло некоторое событие A. Требуется пересчитать вероятности гипотез в связи с появлением этого события, т.е. вычислить условную вероятность $P(H_J|A)$ для каждой гипотезы. Условные вероятности гипотез после проведения опыта и реализации события А называют **апостериорными** (или вероятностями *a posteriori* – после опыта).

По теореме умножения имеем:

P(A·H_J)= P(A|H_J)·P(H_J)= P(H_J|A)·P(A) для J=1,2,…,K.

Следовательно, $\boldsymbol{P(H_J|A)}= \dfrac{P(H_J)\cdot P(A\,|\,H_J)}{P(A)}$ для J=1,2,…,K.

Выражая P(A) с помощью формулы полной вероятности, имеем

$$P(H_J|A)= \frac{P(H_J)\cdot P(A\,|\,H_J)}{\sum\limits_{N=1}^{K} P(A\,|\,H_N)\cdot P(H_N)} \qquad \text{для } J=1,2,\ldots,K.$$

Последняя формула и носит название формулы Байеса.

Значение формулы Байеса состоит в том, что при наступлении нового события, т.е. по мере получения новой информации, мы можем проверять и корректировать выдвинутые до испытания гипотезы. Такой подход, называемый б*айесовским*, даёт возможность корректировать управленческие решения в экономике.

Пример 2.5. На предприятии изготавливаются изделия определенного вида на трех поточных линиях. На первой линии производится 20% изделий от всего объема их производства, на второй – 30%, на третьей – 50%. Каждая из линий характеризуется соответственно следующими процентами брака: 5%, 2%, 3%. Наугад взятое изделие оказалось бракованным, требуется определить вероятность того, что оно изготовлено на первой линии.

Решение. Обозначим $\boldsymbol{H_1, H_2, H_3}$ события, состоящие в том, что наугад взятое изделие произведено на первой, второй или третьей линиях. Согласно условиям задачи $\boldsymbol{P(H_1)=0{,}2,\ P(H_2)=0{,}3,\ P(H_3)=0{,}5.}$ Обозначим через $\boldsymbol{A}$ – событие, состоящее в том, что наугад взятое изделие оказалось бракованным. По условиям задачи $\boldsymbol{P(A|H_1)=0{,}05,\ P(A|H_2)=0{,}02,\ P(A|H_3)=0{,}03.}$

По формуле Байеса имеем

$$\boldsymbol{P(H_1|A)}= \frac{P(H_1)\cdot P(A\,|\,H_1)}{\sum\limits_{N=1}^{3} P(A\,|\,H_N)\cdot P(H_N)} = \frac{0{,}05\cdot 0{,}2}{0{,}05\cdot 0{,}2+0{,}02\cdot 0{,}3+0{,}03\cdot 0{,}5} = \frac{10}{31}\ .$$