Дискретные случайные величины.

Рассмотрим некоторые дискретные распределения, часто встречающиеся на практике.

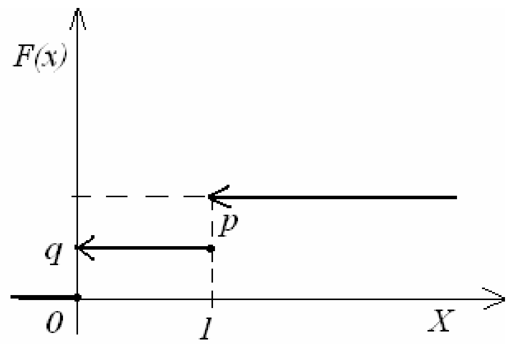
Распределение Бернулли.

Производится один опыт (или наблюдение), в котором может произойти или не произойти событие ***A***. Вероятность того, что событие ***A*** произойдёт, равна числу ***p***. Один такой опыт, в котором возможны лишь два исхода, называемые «успех» и «неудача», называют **испытанием Бернулли**.

Пусть случайная величина ***X*** является индикатором события ***A*** в данном опыте, т.е. ***X=1***, если ***A*** произошло и ***X=0***, если ***A*** не произошло; тогда

$\boldsymbol{P}\{\boldsymbol{X}=1\}=\boldsymbol{P}\{\boldsymbol{A}\}=\boldsymbol{p}$; $\boldsymbol{P}\{\boldsymbol{X}=0\}=\boldsymbol{P}\{\bar{\boldsymbol{A}}\}=1-p=\boldsymbol{q}$;

И говорят, что случайная величина ***X*** распределена по Бернулли. Такую случайную величину называют также **альтернативной.** Функция распределения такой случайной величины имеет вид:



Пример 4.1. При подбрасывании монеты может выпасть “орел” ($\boldsymbol{X}=1$) или “решка” ($\boldsymbol{X}=0$). Если монета симметрична и однородна, то $\boldsymbol{p}=0{,}5$.

Математическое ожидание случайной величины, имеющей распределение Бернулли:

$M(\boldsymbol{X})=1\cdot p+0\cdot q=\boldsymbol{p}$,

(математическое ожидание альтернативной случайной величины равно вероятности положительного исхода).

Дисперсия такой случайной величины:

$D(\boldsymbol{X})=M(X^2)-(M(X))^2=1^2\cdot p+0^2\cdot q-p^2=\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q}$,

(дисперсия альтернативной случайной величины равна произведению вероятностей положительного и отрицательного исходов).

Биномиальное распределение.

Проводится n независимых опытов, в каждом из которых может произойти (с вероятностью p) или не произойти (с вероятностью $1-p=q$) некоторое событие A, т.е. производится n независимых испытаний Бернулли. Повторные независимые испытания Бернулли называют **схемой Бернулли** (в честь швейцарского математика Якоба Бернулли 1654 – 1705, который доказал важную теорему, относящуюся к таким испытаниям).

Рассмотрим случайную величину X, равную числу «успехов» в схеме Бернулли.

Найдем вероятность $p_к$ того, что в n испытаниях Бернулли будет к «успехов», или, что то же самое, что случайная величина X примет значение, равное $к$.

Рассмотрим событие $B_к$, состоящее в том, что $X=к$, т.е. событие A появится в опытах ровно $к$ раз.

Событие $B_к$ может осуществиться разными способами, разложим его на сумму произведений событий, состоящих в появлении или не появлении события A в отдельном опыте. Будем обозначать A_i появление события A в i-ом опыте; $\bar{A}_i$- не появление события A в i-ом опыте.

Каждый вариант появления события $B_к$ (т.е. каждый член суммы разложения события $B_к$) должен состоять из $к$ появлений события A и $n-к$ непоявлений, т.е.

$$B_к=A_1A_2\ldots A_к\bar{A}_{к+1}\ldots\bar{A}_n+\ldots+\bar{A}_1\bar{A}_2\ldots\bar{A}_{n-к+1}A_{n-к}\ldots A_n,$$

Причем в каждое произведение событие A_i должно входить $к$ раз, а событие $\bar{A}_j$ должно входить $n-к$ раз.

Число всех комбинаций такого рода равно $C_n^к=\dfrac{n!}{к!(n-к)!}$- числу способов, каким можно из n опытов выбрать $к$, в которых осуществилось событие A.

Вероятность каждой такой комбинации по теореме умножения для независимых событий, равна $p^к(1-p)^{n-к}$.

Так как эти комбинации между собой несовместны, то по теореме сложения, вероятность события $B_к=\{X=к\}$ равна $p_к=C_n^к p^к(1-p)^{n-к}$.

Последнюю формулу называют **формулой Бернулли**.

Случайная величина X имеет ***биномиальное распределение*** *с параметрами* n *и* p*, если она принимает целочисленные значения от* 0 *до* n *с вероятностями*

$p_к=P(X=к)=C_n^к p^к(1-p)^{n-к}$.

Математическое ожидание случайной величины, имеющей биномиальное распределение с параметрами n и p:

$$M(X)=\sum_{к=0}^{n} к\cdot C_n^к \cdot p^к \cdot (1-p)^{n-к} = n\cdot p\cdot \sum_{к=1}^{n-1} \frac{(n-1)!}{(к-1)!(n-к)!} p^{к-1}(1-p)^{n-к} = n\cdot p.$$

(последняя сумма равна 1, так как состоит из вероятностей биномиального распределения с параметрами $n-1$ и p).

Таким образом, математическое ожидание биномиальной случайной величины равно произведению числа испытаний на вероятность положительного исхода.

Дисперсия такой случайной величины:

$D(X)=M(X^2)-(M(X))^2=n\cdot p\cdot q$,

т.е. дисперсия биномиальной случайной величины равна произведению числа испытаний на вероятности положительного и отрицательного исходов.

Пример 4.2. Длительной проверкой качества стандартных деталей установлено, что 75% деталей не имеют дефектов. Какова вероятность, что из взятых наудачу 6 деталей ровно 5 не имеют дефектов?

Решение. Из условия задачи следует, что X-число стандартных деталей из 6 взятых – имеет биномиальное распределение с параметрами $n=6$ и $p=0,75$. По формуле Бернулли

$P(X=5)=C_6^5\cdot 0,75^5\cdot 0,25=0,356$.

Пример 4.3. Всхожесть семян данного сорта растений оценивается вероятностью 0,8. Какова вероятность того, что из 5 посеянных зерен взойдет не менее 4? Найти среднее число взошедших семян.

Решение. 1) Обозначим X- число взошедших семян из 5 посеянных, тогда случайная величина X имеет биномиальное распределение с параметрами $n=5$ и $p=0,8$. Поэтому

$P(X\geq 4)=P(X=4)+P(X=5)=C_5^4\cdot 0,8^4\cdot 0,2+C_5^5\cdot 0,8^5=0,73728$.

2) Среднее число взошедших семян: $M(X)=5\cdot 0,8=4$.

Геометрическое распределение.

Рассмотрим последовательность испытаний Бернулли. Пусть случайная величина X – число произведенных испытаний до первого «успеха». Найдем для κ= 1, 2,…вероятность того, что успех наступит при κ-ом испытании. Событие $B_\kappa=(X=\kappa)$ можно представить как произведение

$B_\kappa=\bar{A}_1\cdot\ldots\cdot\bar{A}_{\kappa-1}\cdot A_\kappa$,

По теореме умножения дл независимых событий

$P(B_\kappa)=P(X=\kappa)=p\cdot(1-p)^{\kappa-1}$.

Случайная величина X *имеет геометрическое распределение с параметром* p, *если она принимает натуральные значения* κ= *1, 2,… с вероятностями* $p_\kappa= p\cdot(1-p)^{\kappa-1}$.

Математическое ожидание случайной величины, имеющей геометрическое распределение с параметром p:

$$M(X)=\sum_{\kappa=1}^{\infty}\kappa\cdot p\cdot(1-p)^{\kappa-1}=\frac{1}{p}.$$

Таким образом , математическое ожидание геометрической случайной величины обратно пропорционально вероятности положительного исхода.

Дисперсия данной случайной величины

$$D(X)=\frac{1-p}{p^2}.$$

Пример 4.4. Симметричную монету подбрасывают до первого появления орла. Найти вероятность того, что первый раз орел выпадет при пятом подбрасывании.

Решение. Пусть X-число подбрасываний монеты до первого появления орла. В силу симметричности монеты X имеет геометрическое распределение с параметром ½. Тогда

$P(X=5)=0{,}5\cdot0{,}5^4=1/32$.

Пример 4.5. Найти среднее значение и среднеквадратическое отклонение числа подбрасываний симметричной игральной кости до первого появления «6».

Решение. Случайная величина X – число подбрасываний игральной кости до первого появления «6» имеет геометрическое распределение с параметром 1/6 (так как кость симметрична, а граней всего 6). Тогда среднее значение

$$M(X)=1:(1/6)=6;\quad \sigma(X)=\sqrt{\frac{5/6}{1/6^2}}=\sqrt{30}\approx 5{,}5.$$

Распределение Пуассона.

Случайная величина X имеет распределение Пуассона с параметром λ ($\lambda>0$), если эта величина принимает целые неотрицательные значения κ=0, 1, 2,… с вероятностями $p_\kappa=\frac{\lambda^\kappa}{\kappa!}\cdot e^{-\lambda}$. (Это распределение впервые было рассмотрено французским математиком и физиком Симеоном Дени Пуассоном в 1837 г.)

Распределение Пуассона иногда называют законом редких событий, так как вероятности p_κ дают приближенное распределение числа наступлений некоторого маловероятного (редкого) события при большом числе независимых испытаний. В этом случае полагают $\lambda=n\cdot p$, где n- число испытаний Бернулли, p- вероятность осуществления события в одном испытании.

Правомерность использования закона Пуассона вместо биномиального распределения при большом числе испытаний дает следующая теорема.

Теорема Пуассона. Если в схеме Бернулли $n\to\infty$, $p\to 0$, так что $n\cdot p\to\lambda$ (конечному числу), то $C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \to \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$ при любых k=0, 1, 2,…

Без доказательства.

<u>Математическое ожидание</u> случайной величины, имеющей распределение Пуассона с параметром λ:

$$M(X)=\sum_{k=0}^{\infty} k\cdot\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}=\lambda\cdot e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}=\lambda\cdot e^{-\lambda}\cdot e^{\lambda}=\lambda.$$

<u>Дисперсия</u> случайной величины, имеющей распределение Пуассона параметром λ:

$D(X)=\lambda$.

Пример 4.6. Вероятность появления бракованного изделия при массовом производстве равна 0,002. Найти вероятность того, что в партии из 1500 изделий будет не более 3-х бракованных. Найти среднее число бракованных изделий.

Решение. 1) Пусть X-число бракованных изделий в партии из 1500 изделий. Тогда искомая вероятность, это вероятность того, что $X\le 3$. В данной задаче мы имеем схему Бернулли с n=1500 и p=0,002. Для применения теоремы Пуассона положим λ=1500·0,002=3. Тогда искомая вероятность

$$P = e^{-3}(1+\frac{3}{1!}+\frac{3^2}{2!}+\frac{3^3}{3!}) = \frac{13}{e^3} \approx 0{,}65.$$

2) Среднее число бракованных изделий *M(**X**)=λ=3*.

Пример 4.7. Коммутатор учреждения обслуживает 100 абонентов. Вероятность того, что в течение 1 минуты абонент позвонит, равна 0,01. Найти вероятность того, что в течение 1 минуты никто не позвонит.

Решение. Пусть ***X***- число позвонивших на коммутатор в течение 1 минуты. Тогда искомая вероятность – это вероятность того, что ***X***=0. В данной задаче применима схема Бернулли с ***n***=100, ***p***=0,01. Для использования теоремы Пуассона положим λ=100·0,01=1. Тогда искомая вероятность ***P*** = $e^{-1} \approx 0{,}37$.

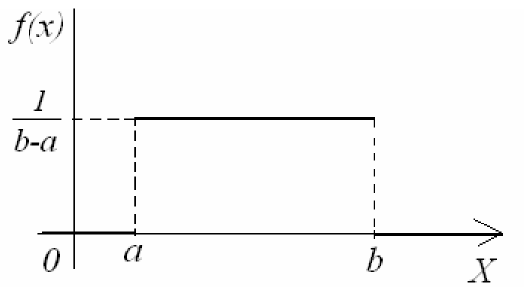
Непрерывные случайные величины.

1.Равномерное распределение.

Понятие равномерного распределения соответствует представлению о выборе точки из определённого отрезка наудачу.

Случайная величина ***X*** **распределена равномерно на отрезке *[a,в]***, если её плотность вероятности равна $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in [a,b] \\ 0, & x \notin [a,b] \end{cases}$.

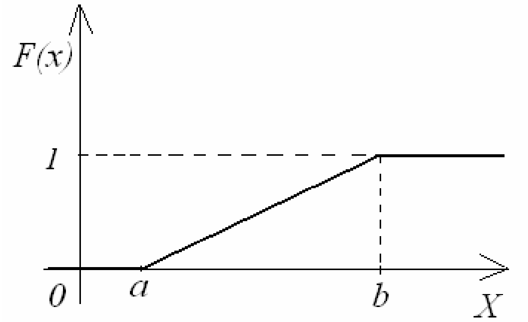
Из-за внешнего вида графиков плотности равномерные распределения называют прямоугольными.



При равномерном распределении отрезок *[a,в]* становится выборочным пространством, в котором вероятности интервалов, лежащих внутри *[a,в]* пропорциональны их длинам.

Функция распределения равномерного закона:

$$F(x)=\begin{cases} 0, при \quad x\le a \\ \dfrac{x-a}{b-a}, при \quad a<x\le b \\ 1, при \quad x>a \end{cases}.$$



Математическое ожидание равномерно распределенной случайной величины

$$M(\boldsymbol{X})=\int\limits_{-\infty}^{\infty} x\cdot f(x)dx=\int\limits_{a}^{b}\frac{x}{b-a}dx=\frac{1}{b-a}\cdot\frac{b^2-a^2}{2}=\frac{a+b}{2}.$$

Дисперсия такой случайной величины

$$D(X)=M(X^2)-[M(X)]^2=\int\limits_{a}^{b}x^2\frac{dx}{b-a}-\frac{(a+b)^2}{4}=$$

$$=\frac{b^3-a^3}{3(b-a)}-\frac{(a+b)^2}{4}=\frac{(b-a)^2}{12}.$$

Пример 5.1. Интервал времени между отправлениями поездов в метрополитене равен 3 минутам. Найти вероятность того, что человек, пришедший на станцию метро в случайный момент времени, будет ждать не более 1 минуты.

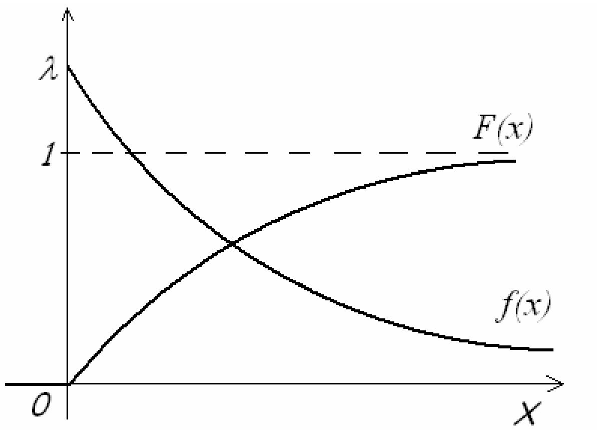
Решение. Время ожидания поезда метрополитена можно считать случайной величиной, имеющей равномерное распределение на отрезке

[0,3]. Вероятность того, что человек будет ждать не более 1 минуты, равна значению функции распределения в точке x=1, т.е. **P**=F(1)=1/3.

2.Показательное распределение.

Непрерывная случайная величина ***X***, принимающая неотрицательные значения, имеет **показательное распределение** с параметром $\boldsymbol{\lambda}$**,** если её плотность имеет вид: $f(x)=\begin{Bmatrix} \lambda\cdot e^{-\lambda\cdot x}, & x\ge 0 \\ 0, & x<0 \end{Bmatrix}$,

а функция распределения $F(x)=\begin{Bmatrix} 1-e^{-\lambda\cdot x} & x>0 \\ 0 & x\le 0 \end{Bmatrix}$.



Показательное распределение – единственное, наделённое «полной потерей памяти». Это свойство называют также свойством *<u>отсутствия последействия</u>*.

Аналитически это свойство записывают следующим образом: для любых чисел x и y

$$\boldsymbol{P\{X > x+y\}=P\{X>x\}\cdot P\{X>y\}.}$$

Считают, что время жизни атома имеет показательное распределение. Свойство отсутствия последействия имеет следующий смысл: *каков бы ни был настоящий возраст, оставшееся время жизни не зависит от прошлого и имеет то же самое распределение, что и само время жизни.*

Использование показательного распределения в математических моделях реальных явлений обычно связывают именно с этим характерным свойством.

Пример 5.2. Время обслуживания клиента на станции технического обслуживания имеет показательное распределение, причем, чем дольше обслуживают в среднем каждого клиента, тем меньше значения параметра λ.

Математическое ожидание случайной величины, имеющей показательное распределение с параметром λ:

$$M(X) = \int_0^\infty x \cdot \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot x} dx = -x \cdot e^{-\lambda \cdot x} \Big|_0^\infty - \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda \cdot x} \Big|_0^\infty = \frac{1}{\lambda}.$$

Дисперсия такой случайной величины:

$$D(X) = \int_0^\infty x^2 \cdot \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot x} dx - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}.$$

3. Нормальное распределение.

Непрерывная случайная величина $\boldsymbol{X}$ имеет нормальное распределение с параметрами $\boldsymbol{m}$ и $\boldsymbol{\sigma^2}$, если её плотность распределения $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \exp\left\{ -\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2} \right\}$. Первый множитель в выражении для плотности является нормировочным.

Нормальный закон распределения (также называемый законом Гаусса) играет исключительную роль в теории вероятностей и занимает среди других законов распределения особое положение. Это наиболее часто встречающийся на практике закон распределения. Главная особенность, выделяющая нормальный закон среди других, состоит в том , что он является предельным законом, к которому приближаются другие законы другие законы при весьма часто встречающихся условиях. Теоремы, устанавливающие нормальный закон как предельный, будут рассмотрены в дальнейшем. Нормальный закон может появляться как точное решение некоторых задач. Классические примеры возникновения нормального распределения как точного принадлежат Карлу Фридриху Гауссу (1777-1855) - закон распределения ошибок наблюдения- и Джеймсу Клерку Максвеллу (1833-1879) - закон распределения скоростей молекул.

Во многих задачах, связанных с нормальным распределением, приходится определять вероятность попадания случайной величины $\boldsymbol{X}$, подчиненной нормальному закону с параметрами $\boldsymbol{m}$ и $\boldsymbol{\sigma^2}$, на участок ***[а,в].***

Вероятность попадания случайной величины на заданный интервал выражается через плотность распределения

$$\boldsymbol{P}\{\boldsymbol{X}\in[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]\}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_a^b \frac{1}{\sigma}\exp\left\{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right\}dx.$$

Последний интеграл не выражается через элементарные функции. Сделаем в нём замену переменных $t=\dfrac{x-m}{\sigma}$, тогда пределы интегрирования поменяются на $\alpha=\dfrac{a-m}{\sigma}$, $\beta=\dfrac{b-m}{\sigma}$. Итак, $\mathbf{P\{X\in[a,b]\}}=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_\alpha^\beta \exp\left\{-\dfrac{t^2}{2}\right\}dt=\Phi_N(\beta)-\Phi_N(\alpha)$, где $\Phi_N(x)$ – функция распределения *<u>стандартно нормального</u>* распределения (т.е. нормального распределения с параметрами 0 и 1). Эта функция табулирована.

Часто вместо функции стандартно нормального распределения используют также табулированную *<u>функцию Лапласа</u>*:

$\Phi(x)=\dfrac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x \exp\left\{-\dfrac{t^2}{2}\right\}\,dt$ (для положительных ***x***, для отрицательных ***x*** функцию Лапласа считают нечетной).

Таким образом, $\mathbf{P\{X\in(a,b)\}}=\dfrac{1}{2}[\,\Phi(\dfrac{b-m}{\sigma})-\Phi(\dfrac{a-m}{\sigma})\,]$.

<u>Математическое ожидание</u> случайной величины, имеющей нормальное распределение с параметрами m и σ^2:

$$M(X)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma}\exp\left\{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right\}dx=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(\sigma\cdot t+m)\cdot\exp\left\{-\frac{t^2}{2}\right\}dt=m.$$

так как $\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{-\dfrac{t^2}{2}\right\}dt=\sqrt{2\pi}$ и $\int_{-\infty}^{\infty}t\cdot\exp\left\{-\dfrac{t^2}{2}\right\}dt=0.$

<u>Дисперсия</u> такой случайной величины

$$D(X)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma}\int_{-\infty}^{\infty}(x-m)^2\exp\left\{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right\}dx=\sigma^2.$$

Часто при решении задач требуется оценить диапазон возможных значений случайной величины. Способ, позволяющий указать интервал практически возможных значений нормально распределенной случайной величины, называют “**правилом 3-х σ”.** Рассмотрим вероятность того, что случайная величина отклоняется от своего математического ожидания $\boldsymbol{m}$ не больше, чем на $\boldsymbol{3\sigma}$, т.е.

$$\mathbf{P\{|X-m|<3\sigma\}}=P\{X\in(m-3\sigma;m+3\sigma)\}=\frac{1}{2}[\Phi(\frac{m+3\sigma-m}{\sigma})-\Phi(\frac{m-3\sigma-m}{\sigma})]=$$

$$=\frac{1}{2}[\Phi(3)-\Phi(-3)]=\Phi(3)\approx\mathbf{0,997.}$$

Пример 5.3. Ошибка взвешивания – случайная величина, имеющая нормальное распределение с параметрами $\boldsymbol{m}$=1 и $\boldsymbol{\sigma}$=5 (в граммах). Найти интервал практически возможных значений ошибки взвешивания.

Решение. По «правилу $\boldsymbol{3\sigma}$» интервал практически возможных значений равен

$(1-3\cdot5;1+3\cdot5)$, т.е. $(-14; 16)$.

Иногда в экономических расчетах используют «***правило 2-х σ***»:

С вероятностью ***0,95*** *нормально распределенная случайная величина принадлежит интервалу* ***(m-2σ; m+2σ).***

Мода и медиана нормального распределения совпадают со средним. Коэффициенты асимметрии и эксцесса равны нулю. Т.о. ***«крутость» других распределений определяется по отношению к нормальному.***

4.Функции от случайной величины. Логарифмически нормальное распределение.

Функцию от случайной величины иначе называют функцией случайного аргумента.

Функция случайного аргумента $\boldsymbol{Y=g(X)}$ – это случайная величина, функционально зависящая от другой случайной величины, область значений которой совпадает с областью значений функции $\boldsymbol{y=g(x)}$.

Начнем с самой простой функции – линейной.

Теорема. Линейная функция от аргумента, подчинённого нормальному закону $\boldsymbol{Y=a\cdot X+b}$ – это случайная величина, также подчинённая нормальному закону с параметрами $\boldsymbol{m_Y=a\cdot m_X+b;\ \sigma_Y^2=a^2\cdot\sigma_X^2}$.

Доказательство. Рассмотрим функцию распределения случайной величины Y:

$F_{\boldsymbol{Y}}(x)=P\{\boldsymbol{Y}<x\}=P\{a\cdot\boldsymbol{X}+b<x\}=P\{\boldsymbol{X}<\dfrac{x-b}{a}\}=F_{\boldsymbol{X}}(\dfrac{x-b}{a})$, если $a>0$.

$F_{\boldsymbol{Y}}(x)=P\{\boldsymbol{Y}<x\}=P\{a\cdot\boldsymbol{X}+b<x\}=P\{\boldsymbol{X}>\dfrac{x-b}{a}\}=1-F_{\boldsymbol{X}}(\dfrac{x-b}{a})$, если $a<0$.

Откуда плотность распределения случайной величины $\boldsymbol{Y}$

$$f_Y(x)=F_Y'(x)==\frac{1}{|a|}\cdot f_X\left(\frac{x-b}{a}\right).$$

записывая явное выражение для плотности, отсюда сразу можно получить доказываемое утверждение.

При построении вероятностных моделей встречаются законы распределения случайных величин, представляющие собой нелинейные функции от нормально распределённых случайных величин. В частности, при решении различных экономических, биологических, геометрических и физических задач используют логарифмически нормальное распределение.

Неотрицательная случайная величина $\boldsymbol{Y}$ имеет **логарифмически нормальное распределение**, если $\boldsymbol{X=ln\ Y}$ имеет нормальное распределение. Т.е. $\boldsymbol{Y=exp\{X\}}$.

Плотность логнормального распределения имеет вид

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma\cdot x}\exp\left\{-\dfrac{(\ln x-\ln m)^2}{2\sigma^2}\right\}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$$

Числовые характеристики логнормального закона можно вычислить, исходя из следующей теоремы.

Теорема. Математическое ожидание функции от случайной величины $\boldsymbol{Y=g(X)}$ вычисляется по формуле: $\boldsymbol{M(Y)=M(g(X))}$.

Таким образом, математическое ожидание логнормального распределения

$\boldsymbol{M(Y)=exp\{m+\sigma^2/2\}}$.

Интересно отметить, что медиана логнормального распределения $\boldsymbol{Me(Y)=m}$, а мода $\boldsymbol{Mo(X)=a\cdot exp\{-\sigma^2\}}$.

Таким образом, если в нормальном распределении параметр $\boldsymbol{m}$ выступает в качестве среднего значения случайной величины, то в логнормальном – в качестве медианы.

Логнормальное распределение используется для описания распределения доходов, банковских вкладов, цен активов, месячной заработной платы, посевных площадей под различные культуры, долговечности вещей в режиме износа и старения.

Пример 5.4. проведенное исследование показало, что вклады населения в данном банке могут быть описаны случайной величиной $\boldsymbol{X}$, имеющей логнормальное распределение с параметрами $\boldsymbol{m}$=530, $\boldsymbol{\sigma^2}$=0,64.

Найти средний размер вклада, моду и медиану $\boldsymbol{X}$ (пояснив их смысл), долю вкладчиков, размер вклада которых составляет не менее 1000 у.е.

Решение. Используя приведенные выше формулы, имеем:

- средний размер вклада $M(\boldsymbol{X})$=730 (у.е.);

- мода $Mo(\boldsymbol{X})$=280 (у.е.) – наиболее часто встречающийся банковский вклад;

- медиана $Me(\boldsymbol{X})$=530 (у.е.), т.е. половина вкладчиков имеют вклады до 530 у.е., а другая половина – сверх 530 у.е.;

- доля вкладчиков, размер вклада которых составляет не менее 1000 у.е., есть

$\boldsymbol{P}\{\boldsymbol{X} \geq 1000\}=1-\boldsymbol{P}\{\boldsymbol{X}<1000\}=1-F(1000) \approx 0,215.$