2. Степеневі ряди

Означення 2.1 Степеневим рядом називається ряд виду

$$a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots + a_nx^n + \ldots \qquad (2.1)$$

або

$$a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \ldots + a_n(x-a)^n + \ldots \qquad (2.2)$$

де $a_1, \ldots, a_n, \ldots$ - коефіцієнти ряду. Вони є сталими.

Означення 2.2 Областю збіжності степеневого ряду (2.1), (2.2) є множина значень x, при яких ряд збіжний.

Область збіжності степеневого ряду визначається радіусом збіжності

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$$

(2.3)

Для степеневого ряду (2.1) область збіжності це множина значень x з проміжку

$$-R < x < R \qquad (2.4)$$

Для степеневого ряду (2.2) область збіжності це множина значень x з проміжку

$$-R < x - x_0 < R$$

(2.5)

Питання: чи належать кінці проміжку області збіжності, з'ясовується окремим дослідженням (дивіться приклади 2.1, 2.2, 2.3).

Приклад 2.1 Знайти область збіжності степеневого ряду

$$\frac{x}{2} + \frac{x^2}{2^2} + \ldots + \frac{x^n}{2^n} + \ldots$$

та дослідити поведінку ряду на кінцях проміжку збіжності.

Запишемо коефіцієнти ряду

$$a_n = \frac{1}{2^n}; \quad a_{n+1} = \frac{1}{2^{n+1}}$$

Знайдемо радіус збіжності, використовуючи (2.3)

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{2^n} \Big/ \frac{1}{2^{n+1}}\right| = 2$$

Отже, область збіжності]-2, 2[. Перевіримо, чи належать кінці проміжку області збіжності. Для цього лівий кінець області –2 підставимо залежність x в степеневий ряд умови. Отримаємо знакопереміжний числовий ряд

$$-\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+(-1)^n\frac{1}{2^n}+\ldots$$

Дослідимо за ознакою Лейбниця (теорема 1.8) збіжність цього ряду:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{1}{2^n}\right| = 0$

2) $\left|-\frac{1}{2}\right| > \left|\frac{1}{2^2}\right| > \left|\frac{1}{2^3}\right| > \ldots$

Отже, цей ряд збіжний і ліва границя проміжку належить області збіжності.

Для перевірки на збіжність правої границі області підставимо в степеневий ряд замість x число 2.

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots$$

Отримали знакосталий числовий ряд. Дослідимо його на збіжність за ознакою Д'Аламбера (теорема 1.5).

Для цього числового ряду $U_n = \frac{1}{2^n}; \quad U_{n+1} = \frac{1}{2^{n+1}}$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\dfrac{1}{2^{n+1}}}{\dfrac{1}{2^{n}}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{2^{n}}{2^{n+1}}\right| = \frac{1}{2} < 1$$

Отже, область збіжності степеневого ряду має вигляд [-2< 2].

Приклад 2.2 Знайти область збіжності степеневого ряду

$$\frac{x}{2}+\frac{x^{2}}{3}+\ldots+\frac{x^{n}}{n+1}+\ldots$$

Випишемо $a^{n}=\dfrac{1}{n+1}$, та $a_{n+1}=\dfrac{1}{n+2}$.

Знайдемо радіус збіжності, використовуючи формулу (2.3)

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{n+2}\Big/\frac{1}{n+1}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{n+2}\right| = 1$$

Область збіжності]-1, 1[.

Дослідимо поведінку наведеного ряду на кінцях проміжку збіжності.

Підставимо лівий кінець проміжку збіжності замість x в ряд:

$$-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+(-1)^{n}\frac{1}{n+1}+\ldots$$

Отримали числовий знакопереміжний ряд, який дослідимо на збіжність за ознакою Лейбниця (теорема 1.8)

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{n+1}\right| = 0; \quad \left|-\frac{1}{2}\right| > \left|\frac{1}{3}\right| > \left|-\frac{1}{4}\right| > \ldots > \left|\frac{1}{n+1}\right| > \ldots.$$

Умови теореми Лейбниця виконуються.

Отже, при $x=1$ ряд збіжний. Підставимо далі в ряд $x=1$(правий кінець області збіжності). Отримаємо знакосталий числовий ряд:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n+1}+\ldots$$

Цей знакосталий числовий ряд розбіжний. Впевнитися в цьому можна, якщо застосувати інтегральну ознаку збіжності (теорема 1.4)

$$\int_1^{\infty}\frac{dx}{x+1}=\lim_{A\to\infty}\int_1^{A}\frac{dx}{x+1}=\lim_{A\to\infty} ln\left|x+1\right|\Big|_1^A=\infty$$

Отже, область збіжності цього ряду є [-1, 1[.

Приклад 2.3 Знайти область збіжності степеневого ряду

$$\frac{x-3}{2}+\frac{(x-3)^2}{2^2}+\ldots+\frac{(x-3)^n}{2^n}+\ldots$$

Випишемо для цього степеневого ряду коефіцієнти $a_n=\frac{1}{2^n}$, та $a_{n+1}=\frac{1}{2^{n+1}}$. Знайдемо радіус збіжності за формулою (2.3)

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{2^n}}{\frac{1}{2^{n+1}}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{2^{n+1}}{2^n}\right|=2$$

Область збіжності наведеного степеневого ряду має таку множину значень:

$$-2<x-3<2$$

$1<x<5$, або]1, 5[.

Перевіримо, чи належать кінці цього проміжку області збіжності. Для цього підставимо $x=1$ в умову ряду:

$$-1+1-1+\ldots+(-1)^n+\ldots$$

Отримали числовий знакопереміжний ряд. Досліджуючи його за ознакою Лейбниця (теорема 1.8)

$$\lim_{n\to\infty}\left|(-1)^{10}\right|=1\neq 0$$

$$|-1| = |1| = |-1| = |1| = \ldots$$

встановлюємо, що він розбіжний. Це значить, що лівий кінець $x = 1$ проміжку]1, 5[не належить області збіжності, тобто]1, 5[.

Перевіримо правий кінець. Підставимо $x = 5$ в умову ряду. Отримаємо числовий знакосталий ряд $1 + 1 + \ldots + 1 + \ldots$. Цей ряд розбіжний, тому що в ньому не виконується необхідна умова збіжності (теорема 1.1).

Тож область збіжності даного ряду має вигляд]1, 5[.

1. Ряди Тейлора та Маклорена.

Нехай маємо функцію, нескінченно диференційовану в точці a:

$$f(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \ldots + a_n(x-a)^n + \ldots \qquad (3.1)$$

В цьому випадку можна сказати, що функція (3.1) розкладена в степеневий ряд в околі точки a за степенями $(x-a)$ з областю збіжності $]a - R; a + R[$.

n – кратне диференціювання розклад (3.1) надає можливість знайти коефіцієнти розкладання:

$$a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \quad (n=0,\ 1,\ 2, \ldots) \qquad (3.2)$$

Тож, якщо функція (3.1) розкладається в степеневий ряд за степенями $(x-a)$, то цей ряд має вигляд

$$f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \ldots \qquad (3.3)$$

і носить назву ряду Тейлора для функції $f(x)$. Якщо $a = 0$, то ряд (3.3) набуває вигляду

$$f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots \qquad (3.4)$$

і носить назву ряду Маклорена для функції $f(x)$.

Для того, щоб сума ряду (3.3) збігалась з самою функцією (3.1) необхідно і достатньо, щоб залишковий член

$$R_n(x)=f(x)-S_n(x) \qquad (3.5)$$

де $S_n(x)$ - сума n перших членів в ряду (3.3), або (3.4) прямував до нуля при $n\to\infty$, тобто

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x)=0$$

(3.6)

Залишковий член (3.5) може мати різний вигляд. Наведемо його вираз у формі Лагранжу:

для ряду Тейлора

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n+1}(x-a)^{n+1}; \quad a<\xi<x \qquad (3.7)$$

для ряду Маклорена

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n+1}x^n; \quad 0<\xi<x \qquad (3.8)$$

Враховуючи розкладання (3.1), (3.3), а також (3.7), (3.8), отримуємо формули:

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}\ldots \qquad (3.9)$$

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}\ldots \qquad (3.10)$$

які називаються формулами Тейлора (3.9) та Маклорена (3.10).

Розкладання елементарних функцій в степеневий ряд має вигляд:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots \qquad (3.11)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots \qquad (3.12)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2(n-1)}}{(2^{n-2})!} + \ldots \qquad (3.13)$$

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n + \ldots \qquad (3.14)$$

Цей ряд (3.14) має назву біноміального.

$$ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + \ldots \qquad (3.15)$$

Ряди широко застосовуються у наближених обчисленнях.

Приклад 3.1 Обчислити з точністю до 0,001 число e.

Користуючись розкладанням (3.11) функції e^x в степеневий ряд

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$$

при $x = 1$

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} \ldots + \frac{1}{n!} + \ldots$$

обмежуючись першими n- членами, дістанемо наближену рівність

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} \ldots + \frac{1}{n!}$$

Оцінимо похибку наближення за допомогою залишкового члену ряду Маклорена (3.8)

$$R_n(1) = \frac{e^\xi}{(n+1)!}; \quad 0 < \xi < x$$

оскільки $e^\xi < e < 3$ (грубе наближення числа e нам відоме)

$$R_n(1) < \frac{3}{(n+1)!}$$

Якщо $n=5$, то $\frac{3}{6!}=\frac{3}{720}=\frac{1}{240}$, якщо $n=6$

$$e\approx 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}+\frac{1}{6!}$$

Кожний додаток випишемо з одним додатковим знаком після коми, щоб до заданої припустимої похибки не додавались похибки від закруглення додатків.

$$e\approx 2{,}0000+0{,}5000+0{,}1667+0{,}0417+0{,}0083+0{,}0014=2{,}7181$$

Отже, $e\approx 2{,}718$ з точністю до 0,001.

Приклад 3.2 Обчислити з точністю до 0,001 інтеграл $\int\limits_{0,5}^{1}\frac{\sin x}{x}dx$

Оскільки $\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots$

$$\frac{\sin x}{x}=1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+\ldots$$

Інтегруючи обидві частини цієї рівності, маємо

$$\int\limits_{0,5}^{1}\frac{\sin x}{x}dx=\int\limits_{0,5}^{1}\left(1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+\ldots\right)dx=\left(x-\frac{x^3}{3\cdot 3!}+\frac{x^5}{5\cdot 5!}-\frac{x^7}{7\cdot 7!}+\ldots\right)\Big|_{0,5}^{1}=$$

$$=\left(1-\frac{1}{3\cdot 3!}+\frac{1}{5\cdot 5!}-\frac{1`}{7\cdot 7!}+\ldots\right)-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3\cdot 3!}\cdot\frac{1}{2^3}+\frac{1}{5\cdot 5!}\cdot\frac{1}{2^5}-\ldots\right).$$

В знакоперемежних рядах. Які збігаються за теоремою Лейбниця, похибка не перевищує першого з відкинутих членів [1]

$$\frac{1}{7\cdot 7!}<0{,}0005;\quad \frac{1}{5\cdot 5!2^5}<0{,}0005$$

$$\int\limits_{0,5}^{1}\frac{\sin x}{x}dx=\left(1-\frac{1}{3\cdot 3!}+\frac{1}{5\cdot 5!}\right)-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3\cdot 3!}\cdot\frac{1}{2^3}\right)\approx 0{,}4530$$

Степеневі ряди (3.3), (3.4) часто застосовуються для розв’язування диференціальних рівнянь.

Нехай, наприклад, потрібно знайти розв'язок диференціального рівняння другого порядку:

$$y'' = F(x,y,y') \tag{3.16}$$

при початкових умовах

$$y(x_0) = y_0; \quad y'(x_0) = y_0' \tag{3.17}$$

Якщо розв'язок $y = f(x)$ існує, то його можна зобразити рядом Тейлора:

$$y = f(x) = f(x_0) + \frac{f'(a)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots \tag{3.18}$$

Коефіцієнти ряду (3.18) можна знайти з рівнянь (3.16) та (3.17). Алгоритм пошуку коефіцієнтів ряду (3.18) розглянемо на прикладі.

Приклад 3.3 Знайти наближено частинний розв'язок диференціального рівняння у вигляді многочлена п'ятого степеня. Запишемо шуканий частинний розв'язок у вигляді ряду по степенях $(x - 1)$:

$$y'' = x \cdot \sin y'; \quad y(1) = 0; \quad y'(1) = \frac{\pi}{2}$$

Підставивши $x = 1$ в диференціальне рівняння, знайдемо послідовно диференціюючи рівняння знаходимо:

$$y = y(1) + \frac{y'(1)(x-1)}{1!} + \frac{y''(1)}{2!}(x-1)^2 + \ldots + \frac{y^{v}(1)(x-1)^5}{5!} + \ldots$$

$$y''(1) = 1; \quad y''' = \sin y' + x \cdot \cos y' \cdot y''; \quad y'''(1) = 1$$

$$y'^{v} = \cos y' \cdot y'' + \cos y' \cdot y' + x \cos y' \cdot y''' - x \cdot \sin y' \cdot (y'')^2 =$$
$$= 2\cos y' \cdot y'' + x \cos y' \cdot y'' - x \sin y' \cdot (y'')^2;$$

$$y'^{v}(1) = -1$$

$$y^{V} = -2\sin y'(y'')^2 + 2\cos y'y''' + \cos y'y''' - x\sin y'y''y''' - \sin y'(y'')^2 + x\cos y'y^{V}$$
$$-x\cos y'(y'')^2 - 2x\sin y'y''y'''$$

$$y^{V}(1) = -6$$

Підставимо винайдені значення коефіцієнтів ряду обмежуючись першими п'ятьма членами ряду. Це і є наближений розв'язок диференціального рівняння:

$$y \approx \frac{\pi}{2}(x-1) + \frac{1}{2!}(x-1)^2 + \frac{1}{3!}(x-1)^3 - \frac{1}{4!}(x-1)^4 - \frac{1}{20}(x-1)^5$$